Chapitre 0 : Rappels sur l'analyse combinatoire

Introduction :

L'analyse combinatoire est la branche des mathématiques qui permet de dénombrer certains ensembles finis.

Dénombrer un ensemble revient à compter le nombre de ses éléments par l'usage de règles bien précises.

0.1 Principe de multiplication :

Si une expérience globale E_g se déroule en r expériences partielles $(E_p)_{1\leq p\leq r}$ telles que :

E_1 se déroule de n_1 façons différentes.

E_2 se déroule de n_2 façons différentes.

.

.

.

E_r se déroule de n_r façons différentes.

Alors E_g se déroule de : $n_1 \times n_2 \ldots \ldots \times n_r$ façons différentes.

0.2 Exemples :

a) Calculer le nombre de numéros de téléphones que peut attribuer un opérateur de téléphonie mobile.

Si l'on considère un des opérateurs de téléphonie mobile actuellement en activité en Algérie (Djezzy, Mobilis, Nedjma), et sachant qu'un numéro de téléphone mobile est composé de 10 chiffres, on a :

$$N_i = 1 \times 1 \times 10 \times 10 \times \ldots\ldots \times 10 = 10^8 \ ; \ i = 1, 2, 3.$$

b) Calculer le nombre d'immatriculation à 7 caractères que l'on peut constituer si les 4 premiers sont des lettres et les 3 derniers sont des chiffres.

Si l'on considère l'alphabet de la langue française, on a :

$$N = 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^4 . 10^3$$

0.3 Principe d'addition:

Si une expérience globale E_g s'effectue de s manières mutuellement exclusives telles que :

La première se déroule de n_1 façons différentes.
La deuxième se déroule de n_2 façons différentes.

.

.

.

La $s^{\text{ème}}$ se déroule de n_s façons différentes.

Alors E_g se déroule de : $n_1 + n_2 \ldots\ldots + n_s$ façons différentes.

0.4 Exemples :

a) Calculer le nombre total de numéros de téléphones que peut attribuer tous les opérateurs de téléphonies mobiles en Algérie ?

b) Combien d'entiers existent-ils entre 100 et 100 000 commençant par un chiffre impair et ayant des chiffres différents ?

E_1 : entiers à 3 chiffres : $n_1 = 5 \times 9 \times 8 \,(100 < n < 999)$
E_2 : entiers à 4 chiffres : $n_2 = 5 \times 9 \times 8 \times 7 \,(1000 < n < 9999)$

E_3 : entiers à 5 chiffres : $n_3 = 5 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \quad (10000 < n < 99999)$

Le nombre total est : $n_1 + n_2 + n_3 = 360 + 2520 + 15120 = 18000.$

0.5 Règles pratiques :

Soit E un ensemble à n éléments, on appelle disposition (notée d) de taille p ; tout choix de p éléments de E.

On distingue 4 cas :

a) Sans répétition + ordre significatif : $D_1(n, p)$

b) Sans répétition + ordre non significatif : $D_2(n, p)$

c) Avec répétition + ordre significatif : $D_3(n, p)$

d) Avec répétition + ordre non significatif : $D_4(n, p)$

0.6 Exemple :

Considérons l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$ et donnons quelques exemples de dispositions de taille 3.

a) abc, acd, bdc, …

b) acd, cab, dba, …

c) aba, ccc, baa,…

d) aab, ccd, abc, …

0.7 Remarques :

- Ce qui fait la différence entre deux dispositionsd_1 et $d_2$issues de a) et c), ce sont les éléments discernables ou bien c'est l'ordre si elles ont les mêmes éléments discernables. Dans b) et d) ce sont les éléments discernables.
- Dans a) et c) $p \leq n$; par contre dans b) et d), il se peut que $p > n$.

0.8 Dénombrement des ensembles : $D_i(n,p),\ 1 \leq i \leq 4$.

A) Le cardinal de $D_1(n,p)$est appelé arrangement et noté : A_n^p.
Dans le cas particulier $p = n$, le cardinal est appelé permutation et noté P_n.

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots\dots 3.2.1 = n!$$

0.9 Exemples :

i) Quinze athlètes sont au départ d'une course. A l'arrivée, le premier a une médaille d'or, le second une médaille d'argent et le troisième une médaille de bronze. Combien de triplet gagnant peut-on avoir ?

Ici, il n'y a pas de répétition et l'ordre est important, d'où :

$$N = A_{15}^3 = 15.14.13.$$

ii) Un cours de Management est suivi par 6 hommes et 4 femmes. Un examen a eu lieu, les étudiants sont classées selon leurs notes (supposées toutes différentes). Combien de classements peut-on avoir ?

Dans ce cas, on a $p = n$, pas de répétition et l'ordre est significatif, donc :

$$N = P_n = 10.9.8...2.1 = 10!$$

Qu'en est-il si les femmes sont classées en premier entre elle et puis les hommes entre eux ?.

Dans ce cas :

$$N = P_4 . P_6 = 4!\,6!$$

0.10 Exercices :

Exercice 1 :

Un étudiant a 10 livres dans sa bibliothèque : 4 de mathématiques, 3 de chimie, 2 d'histoire et 1 de français. Il veut les ranger de telle manière que les livres traitant du même sujet restent ensemble. Combien de choix a-t-il pour le faire ?

Exercice 2 :

a) Démontrer la formule : $A_n^p = A_{n-1}^p + pA_{n-1}^{p-1}$

De deux manières différentes :

i) De façon analytique
ii) En utilisant un argument d'analyse combinatoire.

B) Le cardinal de l'ensemble $D_2(n,p)$ est appelé **combinaison**, il est noté : C_n^p.

Pour dénombrer $D_2(n,p)$, il suffit de remarquer que chacun de ses éléments est répété $p!$ fois dans $D_1(n,p)$ dans un ordre différent.

Voyons cela sur un exemple :

Si $E = \{a, b, c, d\}$, et si on considère un élément de $D_2(4,3)$, c'est à dire une disposition de taille 3 pr exemple : abc. Tenant compte de l'ordre, avec les mêmes éléments, on $3!$ dispositions dans $D_1(4,3)$.

$$abc \longrightarrow abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

Autrement dit,

$$A_n^p = p!\ C_n^p$$

D'où,

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

0.11 Exemple :

Soit un groupe de 20 personnes. On veut former un comité de 3 personnes. De combien de façons peut-on le faire ?

Solution: Comme la répétition est de toute évidence n'est pas possible et que l'ordre n'est pas important (par exemple le comité formé par : Ahmed, Selma et Ali est le même que le comité : Selma, Ali et Ahmed). De ce fait :

$$N = C_{20}^3 = \frac{20!}{3!\,17!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3.2.1} = 20 \times 19 \times 3 = 1140$$

0.12 Remarque :

Il est intéressent de noter que C_n^p est exactement le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. A titre d'exemple, si $E = \{1, 2, 3\}$, alors :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3,\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Les parties à 0 éléments : $C_3^0 = 1 \longrightarrow \emptyset$.

Les parties à 1 éléments : $C_3^1 = 3 \longrightarrow \{1\},\{2\},\{3\}$.

Les parties à 2 éléments : $C_3^2 = 3 \longrightarrow \{1,2\},\{1,3,\},\{2,3\}$.

Les parties à 3 éléments : $C_3^3 = 1 \longrightarrow \{1,2,3\}$.

Noter que $card(\mathcal{P}(E)) = 8 = 2^3 = 2^{cardE}$.

0.13 Exercice :

Démontrer les formules : $C_n^p = C_n^{n-p}$ et $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

De deux manières différentes :

- i) De façon analytique
- ii) En utilisant un argument d'analyse combinatoire.

C) Le cardinal de l'ensemble $D_3(n,p)$ est appelé **arrangement avec répétition**, il est noté : $\mathcal{A}_n^p$.

Par simple application du principe de multiplication, on trouve que :

$$\mathcal{A}_n^p = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{p\ fois} = n^p$$

0.14 Exemples :

a) si $E = \{a,b,c\}$, $(n=3)$, combien de mots à 5 lettres $(p=5)$ peut-on former ?

Solution :

Ici $p > n$; il y a forcément répétition et l'ordre est manifestement important. D'où : $\mathcal{A}_3^5 = 3^5 = 243$.

Exemples de formés ainsi :

$$aaaaa, bbbbb, ccccc, cacac, bbbab, \ldots.$$

b) Soit $E = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ un ensembles à n éléments et $F = \{0, 1\}$. Combien d'applications de E dans F peut-on former ?

Solution :

Pour chaque antécédent, on a 2 choix, soit 0 ou 1, comme images :

x_1	x_1	.	.	.	.		.	x_{n-1}	x_n
2 choix	2 choix	.	.	.	.	.	.	2 choix	2 choix

D'où : $N = 2^n$

0.15 Remarque :

Plus généralement, si $E = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$et $F = \{y_1, y, \ldots y_m\}$; alors le nombre d'applications de E dans F, est :

$$N = cardF^{cardE} = m^n$$

0.16 Cas particulier :

Les dispositions d de $D_3(n, p)$ayant les mêmes éléments discernables avec répétitions égales n_i ; $1 \leq n_i \leq p$, avec $\sum_{i=1}^{i=n} n_i = p$, sont appelées permutations avec répétition. Leur nombre est :

$$\mathcal{P}_p^{n_1, n_1, \ldots n_n} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots . n_n}$$

Expliquons la formule ci-dessus à l'aide de l'exemple suivant :

0.17 Exemple :

Soit $E = \{a, b\}$, combien de mots à 4 lettres comportant 2 fois la lettre a et 2 fois la lettre b ; peut-on former ?

Solution : $N = \frac{4!}{2!2!} = 6.$

Plus précisément, les mots ainsi formés sont :

$$aabb, abba, bbaa, abab, baba, baab(*)$$

Admettons un instant que les lettres répétées sont distinctes et indexons les comme suit : a_1, a_2, b_1, b_2. Les mots que l'on peut former avec ces lettres (distinctes) est égal à : $4! = 24$. En supprimant les indices, on aura des dispositions identiques. Par exemple :

$$a_1a_2b_1b_2,\ a_2a_1b_1b_2,\ a_1a_2b_2b_1, a_2a_1b_2b_1 \ \overrightarrow{en\ d\acute{e}s\imath ndexant}\ \ aabb$$

D'où le résultat annoncé.

D) Le cardinal de l'ensemble $D_4(n, p)$ est appelé **combinaison avec répétition**, il est noté : C_n^p.

Rappelons que dans ce dernier cas, la répétition est permise et que l'ordre n'est pas significatif.

Transformation du problème :

0.18 Exemple :

Soit $E = \{a, b, c\}$, voici quelques exemples de dispositions $D_4(3, 4)$:

$$aabc, aaaa, abbc, bbbc, \dots.$$

Remarquons d'abord que le nombre dedispositions $D_4(3, 4)$ est exactement le nombre de solutions de l'équation :

$$(E)\ :\ x_1 + x_2 + x_3 = 4\ , \qquad x_i \in \mathbb{N};\ i = 1,2,3.$$

Les différentes solutions au nombre de 15 sont :

$400, 040\ , 004, 220\ , 202, 022\ , 112, 121\ , 211, 310\ , 301, 130,$
$103, 031, 013.$

Les dispositions correspondantes sont :

$aaaa, bbbb, cccc, aabb, aacc, bbcc, abcc, abbc, aabc, aaab, aaac, abbb$
$accc, bbbc, bccc.$

Le problème est aussi équivalent au problème (P) de distribution de 4 boules indiscernables sur 3 urnes.

Première solution :

0000		

abc

Deuxième solution :

	0000	

abc

…….

…….

……..

Quinzième solution :

	0	000

abc

0.19 Résolution de (P) dans le cas général :

$$(P)\ :\ x_1 + x_2 + \cdots .. + x_n = p\ ;\quad x_i \in \mathbb{N}, i = 1,2,3.$$

Trouvons les solutions dans $\mathbb{N}^*$ (i.e les solutions à composantes> 0). Dans ce cas, on a nécessairement : $p \geq n$.

L'idée est la suivante : On aligne les p boules intercalées de $(p-1)$ séparateurs.

o↑o↑o↑o↑o↑o↑o↑o↑o↑o↑o↑o↑o↑o↑o↑o

Remarquons que s'il y a p boules, il y a $(p-1)$ séparateurs et que chaque choix de $(n-1)$ séparateurs parmi $(p-1)$ donne une solution.

Comme il y a C_{p-1}^{n-1} choix possibles, il y a autant de solutions à composantes > 0.

Dans l'exemple 1.19 ci-dessus, il y a : $C_{4-1}^{3-1}\left(= C_3^2 = 3\right)$ solutions à composantes > 0.

Cas général : Recherche des solutions à composantes ≥ 0.

On remarque que (P) est équivalent à :

$(P) : (x_1+1) + (x_2+1) + \cdots + (x_n+1) = p+n\ ;\ x_i \in \mathbb{N},\qquad i = 1,2,3.$

En faisant le changement de variable : $y_i = x_i + 1$, on obtient :

$$(P')\ :\ y_1 + y_2 + \cdots .. + y_n = p+n\ ;\quad x_i \in \mathbb{N}, i = 1,2,3.$$

On en déduit que :

$$C_n^p = C_{n+p-1}^{n-1} = C_{n+p-1}^p$$

Dans le cas de l'exemple 1.19, on a :

$$\boldsymbol{C_3^4 = C_{3+4-1}^{3-1} = C_6^2 = C_{3+4-1}^4 = C_6^4 = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6.5}{2} = 15.}$$

0.20 Exemple :

On jette une pièce de monnaie quatre fois de suite et on regarde le nombre de faces obtenues.

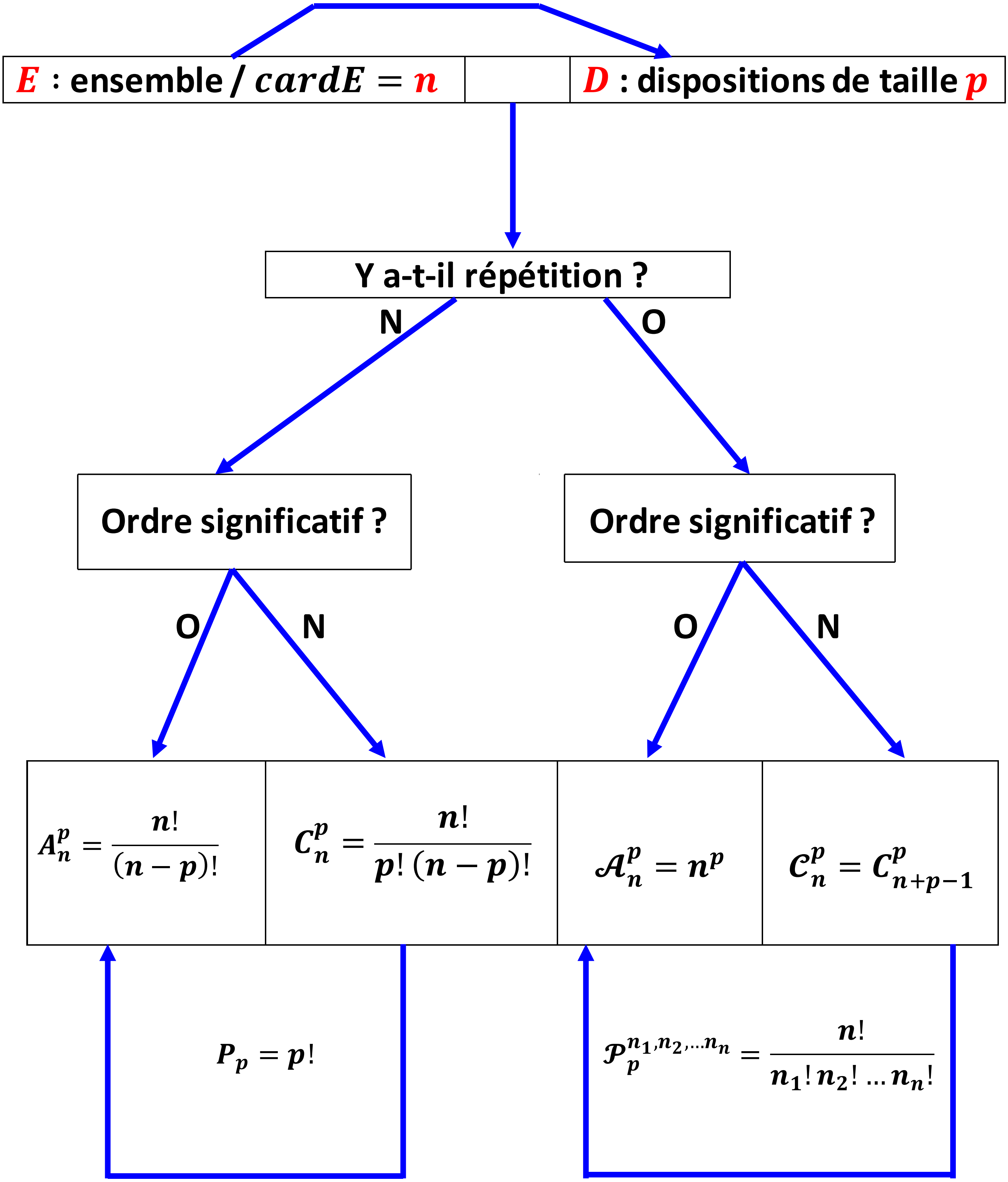
Solution :

Ici, $\boldsymbol{E = \{F, P\}, n = 2}$ **et** $\boldsymbol{p = 4.}$

$$\boldsymbol{N = C_2^4 = C_{2+4-1}^4 = C_5^4 = 5}$$

$\boldsymbol{FFFF, FFFP, FFPP, FPPP, PPPP.}$

0.21 Schéma Récapitulatif



0.22 Application : Coefficients binomiaux et multinomiaux

a) Coefficients binomiaux :

Démontrons la formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \quad (*)$$

1- De façon analytique.

2- En utilisant un argument d'analyse combinatoire.

La première est laissée à l'étudiant(e) à titre d'exercice.

Pour la deuxième méthode, on procède comme suit :

Posons :

$$P_n = (x_1+y_1)(x_2+y_2)\dots(x_n+y_n)$$

Pour simplifier et voir ce qui se passe de près, faisons les calculs pour P_3. On suppose que x_i et y_i non nuls pour tout $i = 1,2,3$.

$$P_3 = (x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3)$$

$$= (x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2)(x_3+y_3)$$

$$= x_1x_2x_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 + y_1y_2x_3$$

$$+x_1x_2y_3 + x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3 + y_1y_2y_3$$

$$= y_1y_2y_3\left(\frac{x_1x_2x_3}{y_1y_2y_3} + \frac{x_1x_3}{y_1y_3} + \frac{x_2x_3}{y_2y_3} + \frac{x_3}{y_3} + \frac{x_1x_2}{y_1y_2} + \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + 1\right)$$

En posant : $X_i = \frac{x_i}{y_i}$, $i = 1,2,3$; on obtient :

$$= y_1y_2y_3\,(X_1X_2X_3 + X_1X_3 + X_2X_3 + X_1X_2 + X_1 + X_2 + X_3 + 1)(**)$$

Si l'on considère l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$; on voit bien que les indices des termes entre parenthèses sont exactement les éléments de $\mathcal{P}(A)$; c'est-à-dire tous les sous-ensembles de A à 0,1,2 ou 3 éléments.

Si maintenant, dans **(**)**, on fait $x_i = x$ et $y_i = y$ pour tout $i = 1, 2, 3$; alors **(**)**devient :

$$(x+y)^3 = x^3 + x^2y + x^2y + x^2y + +xy^2 + xy^2 + xy^2 + y^3$$

$$= C_3^0 x^3 y^0 + C_3^1 x^2 y^1 + C_3^2 x^1 y^2 + C_3^3 x^0 y^3$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k y^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

0.23 Remarque :

Noter que dans chaque terme, la somme des puissances respectives des variables x et y est égale à 3 (à n dans le cas général). Plus précisément ces puissances sont les différentes solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation :$p + q = n$.

a) Coefficients multinomiaux :

La question dans ce dernier point est de savoir s'il y a une formule analogue à $(*)$pour le multinome : $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$?

Essayons de voir le cas simple : $r = 3$et $n = 3$.

$$(x+y+z)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k x^{n-k} (y+z)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{3} C_3^k x^{n-k} \left[\sum_{i=0}^{k} C_k^i y^i \, z^{k-i} \right]$$

Ce qui donne :

$k = 0 :\ C_3^0 C_0^0 x^3 y^0 z^0.$

$k = 1 :\ C_3^1 C_1^0 x^2 y^0 z^1 + C_3^1 C_1^1 x^2 y^1 z^0.$

$k = 2 :\ C_3^2 C_2^0 x^1 y^0 z^2 + C_3^2 C_2^1 x^1 y^1 z^1 + C_3^2 C_2^2 x^2 y^0 z^1.$

$k = 3 :\ C_3^3 C_3^0 x^0 y^0 z^3 + C_3^3 C_3^1 x^0 y^1 z^2 + C_3^3 C_3^2 x^0 y^2 z^1 + C_3^3 C_3^3 x^0 y^3 z^0.$

On remarque ici aussi que les puissances respectives des variables : x, y et z sont exactement les différentes solutions dans $\mathbb{N}$de l'équation :

$k + l + m = 3$, et le nombre de termes est exactement le nombre de ces solutions : $C_3^3 = C_{3+3-1}^3 = C_5^3 = 10.$

D'autre part,

$$C_n^k C_k^i = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{k!}{i!\,(k-i)!} = \frac{n!}{i!\,(k-i)!\,(n-k)!} := C_n^{i,k-i,n-k}$$

Ce dernier terme sera appelé le coefficient multinomial. Noter que dans le car particulier $r = 2$ (cas du binôme), $C_n^k = C_n^{k,n-k}.$

De façon générale, on a la formule du multinome suivante :

$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{m_1+m_2+\cdots m_r} C_n^{m_1,m_2,\ldots m_r}\, {x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2} \ldots {x_r}^{m_r}$

En résumé, développer cette formule, il faut connaitre :

1- Le nombre de termes qui est égal au nombre de solutions de l'équation dans $\mathbb{N}$: $m_1 + m_2 + \cdots m_r = n$, donné par : $C_{r+n-1}^n.$

2- **Chaque terme du développement : Après avoir explicité toutes les solutions, chacune d'elle donne le coefficient multinomial et ses composantes sont les puissances respectives des variables $x_1, x_2, \dots, x_r$.**

0.24 Exercice : En utilisant la technique d'analyse combinatoire, développer l'expression : $(x + y + z + t)^3$.