



Système masse-ressort

Une masse fixée à l'extrémité libre d'un ressort hélicoïdal constitue un système masse-ressort. Pour de petits allongements, la force de rappel exercée par le ressort sur la masse est

$$f_r = -k x$$

Où f_r est la force de rappel exercée par le ressort en newtons,
 k est la constante de rappel en newtons par mètre
et x est l'allongement en mètres.

Si le ressort est en position horizontale, la force résultante exercée sur la masse est la force de rappel du ressort. L'application de la 2^{ème} loi de Newton donne

$$ma(t) = -k x(t)$$

où m est la masse en kilogrammes,
 $a(t)$ est l'accélération (à l'instant t) en mètres par seconde carrée.

Avec la définition de l'accélération, la 2e loi de Newton conduit à une équation différentielle semblable à celle pour le mouvement harmonique simple ; soit

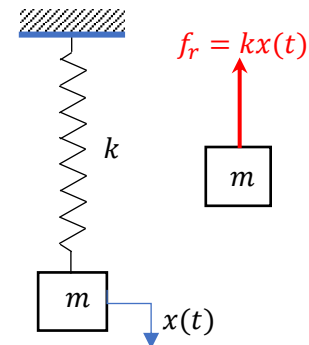
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx(t) \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

Par comparaison avec l'équation différentielle du mouvement harmonique simple, on a

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Alors, on a

$$\begin{cases} f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \end{cases}$$



4. Une masse de 500 g oscille horizontalement à l'extrémité libre d'un ressort ayant une constante de rappel de 4,5 N/m. La masse est initialement au repos à une position correspondant à un allongement de 8 cm par rapport à la position d'équilibre.

a) Quelle est la fréquence des oscillations du système masse-ressort ?

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4.5}{0.5}} = \frac{3}{2\pi} \text{ Hz}$$



- b) Quelle est la constante de phase des oscillations (sinusoïdales) ?

A $t = 0$; la masse est au repos ($v_0 = 0$) et l'allongement est de 8 cm, ($x_0 = 0.08$ m).

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v_0 = v(0) = 0 \Rightarrow -\omega A \sin(0 + \varphi) = 0$$

$$\sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \pi$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_0 = x(0) > 0 \Rightarrow A \cos(\varphi) > 0 \Rightarrow \cos(\varphi) > 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ rd}$$

- c) Quel est le temps nécessaire à partir du point de départ pour que la masse parcoure une distance de 4 cm ?

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_0 = 8 \text{ cm} \Rightarrow x(0) = A \cos(0) = 8 \text{ cm} \Rightarrow A = 0.08 \text{ m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4.5}{0.5}} = 3 \text{ rd}$$

$$x(t) = 8 \cos(3t)$$

$$8 \cos(3t) = 4$$

$$\cos(3t) = \frac{1}{2}$$

$$3t = \frac{\pi}{3} + n\pi \text{ avec } n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{9} \text{ s.}$$

5. Une masse de 100 g oscille verticalement à l'extrémité libre d'un ressort. La position d'équilibre avec la masse suspendue correspond à un allongement de 2 cm par rapport à la position de l'extrémité du ressort sans la masse.

- a) Quelle est la grandeur de la force exercée par le ressort à la position d'équilibre ?

La force exercée par le ressort égale la force de pesanteur (équilibre statique)

$$f_{r_s} = mg$$

$$f_{r_s} = 0.1 \times 9.8 = 0.98 \text{ N}$$

- b) Quelle est la constante de rappel du ressort ?

$$f_{r_s} = k x_s$$

$$k = f_{r_s} / x_s$$

$$k = \frac{0.98}{0.02} = 49 \text{ N/m}$$

- c) Quelle est la période des oscillations du système masse-ressort ?

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{0.1}{49}} = 0.284 \text{ s}$$

