Enseignant
Djilali
BOUTCHICHA

L'énergie d'un oscillateur harmonique simple

Ex1. Un bloc de masse inconnue est attaché à un ressort avec une constante de raideur de $6{,}50\ N/m$ et subit un mouvement harmonique simple avec une amplitude de $10{,}0\ cm$. Lorsque le bloc est à mi-chemin entre sa position d'équilibre et le point d'extrémité, sa vitesse est mesurée comme étant de $30{,}0\ cm/s$. Calculer (a) la masse du bloc, (b) la période du mouvement, et (c) l'accélération maximale du bloc.

Solution

(a) L'énergie mécanique du système masse-ressort est conservée aux points où le déplacement est maximal et à mi-chemin.

$$(T+V)_i = (T+V)_f \qquad 0 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}(6.50\ \text{N/m})(0.100\ \text{m})^2 = \frac{1}{2}m(0.300\ \text{m/s})^2 + \frac{1}{2}(6.50\ \text{N/m})\left(5.00\times10^{-2}\ \text{m}\right)^2$$

$$32.5\ \text{mJ} = \frac{1}{2}m(0.300\ \text{m/s})^2 + 8.12\ \text{mJ} \qquad m = \frac{2(24.4\ \text{mJ})}{9.0\times10^{-2}\ \text{m}^2/\text{s}^2} = \boxed{0.542\ \text{kg}}$$

(b) $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6.50\ \text{N/m}}{0.542\ \text{kg}}} = 3.46\ \text{rad/s} \qquad \therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{3.46\ \text{rad/s}} = \boxed{1.81\ \text{s}}$$

(c) $$a_{\max} = A\omega^2 = 0.100\ \text{m}(3.46\ \text{rad/s})^2 = \boxed{1.20\ \text{m/s}^2}$$

Ex2. Une masse de 200 g est attaché à un ressort horizontal et exécute un mouvement harmonique simple avec une période de 0,250 s. Si l'énergie totale du système est de 2,00 J, trouver (a) la constante de force du ressort et (b) l'amplitude du mouvement.

Solution

$$m = 200\ \text{g},\ T = 0.250\ \text{s},\ E = 2.00\ \text{J};\ \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.250} = 25.1\ \text{rad/s}$$

(a) $$k = m\omega^2 = 0.200\ \text{kg}(25.1\ \text{rad/s})^2 = \boxed{126\ \text{N/m}}$$

(b) $$E = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(2.00)}{126}} = \boxed{0.178\ \text{m}}$$

Enseignant
Djilali
BOUTCHICHA

Ex3. Une automobile ayant une masse de 1 000 kg est enfoncée dans un mur de briques dans un test de sécurité. Le pare-chocs se comporte comme un ressort de constante de force $5{,}00\times10^6$ N/m et se comprime de 3,16 cm lorsque la voiture est arrêtée. Quelle était la vitesse de la voiture avant l'impact, en supposant qu'aucune énergie mécanique n'est perdue lors de l'impact avec le mur?

Solution

Choisir l'automobile avec son pare-chocs comme un système masse-ressort ; par la conservation d'énergie

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2: \qquad v = x\sqrt{\frac{k}{m}} = \left(3.16\times10^{-2}\ \text{m}\right)\sqrt{\frac{5.00\times10^6}{10^3}} = \boxed{2.23\ \text{m/s}}$$

Ex4. Un système masse-ressort oscille avec une amplitude de 3,50 cm. Si la constante d'élasticité est de 250 N/m et la masse est 0,500 kg, déterminer (a) l'énergie mécanique du système, (b) la vitesse maximale de la masse, et (c) l'accélération maximale.

Solution

(a) $$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{250\ \text{N/m}\left(3.50\times10^{-2}\ \text{m}\right)^2}{2} = \boxed{0.153\ \text{J}}$$

(b) $v_{\max} = A\omega$ où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{250}{0.500}} = 22.4\ \text{s}^{-1}$ $\qquad v_{\max} = \boxed{0.784\ \text{m/s}}$

(c) $$a_{\max} = A\omega^2 = 3.50\times10^{-2}\ \text{m}\left(22.4\ \text{s}^{-1}\right)^2 = \boxed{17.5\ \text{m/s}^2}$$

Enseignant
Djilali
BOUTCHICHA

Ex5. Un objet de masse 50,0 g relié à un ressort de constante de raideur 35,0 N/m oscille sur une surface horizontale, sans frottement avec une amplitude de 4,00 cm. Trouver (a) l'énergie totale du système et (b) la vitesse de l'objet lorsque la position est de 1,00 cm. Trouver (c) l'énergie cinétique et (d) l'énergie potentielle lorsque la position est de 3,00 cm.

Solution

(a) $$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(35.0\ \text{N/m})(4.00 \times 10^{-2}\ \text{m})^2 = \boxed{28.0\ \text{mJ}}$$

(b) $$|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$|v| = \sqrt{\frac{35.0}{50.0 \times 10^{-3}}}\sqrt{(4.00 \times 10^{-2})^2 - (1.00 \times 10^{-2})^2} = \boxed{1.02\ \text{m/s}}$$

(c) $$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(35.0)\left[(4.00 \times 10^{-2})^2 - (3.00 \times 10^{-2})^2\right] = \boxed{12.2\ \text{mJ}}$$

(d) $$\frac{1}{2}kx^2 = E - \frac{1}{2}mv^2 = \boxed{15.8\ \text{mJ}}$$

Ex6. Une particule exécute un mouvement harmonique simple avec une amplitude de 3,00 cm. À quelle position sa vitesse sera égale à la moitié de sa vitesse maximale?

Solution

Modéliser l'oscillateur comme un système masse-ressort

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Longrightarrow \quad mv^2 + kx^2 = kA^2 \quad \Longrightarrow \quad v^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$$

$$v_{max} = \omega A \ \text{ et } \ v = \frac{\omega A}{2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\omega A}{2}\right)^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$$

De cela, on trouve : $x^2 = \frac{3}{4}A^2$ et $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A = \pm 2.60\ cm$ où $A = 3.00\ cm$

Ex7. Un objet 2,00 kg est attaché à un ressort et placé sur une surface horizontale, lisse. Une force horizontale de 20,0 N est nécessaire pour maintenir l'objet au repos quand il est tiré 0,200 m de sa position d'équilibre (l'origine de l'axe x). L'objet est maintenant libéré de repos avec une position initiale de $x_i = 0{,}200\ m$, et il subit ensuite oscillations harmoniques simples. Trouver (a) la constante de force du ressort, (b) la fréquence des oscillations, et (c) la vitesse maximale de l'objet. D'où vient cette vitesse maximale se produit? (d) Trouver l'accélération maximale de l'objet. Où faut-il se produire? (e) Trouver l'énergie totale du système oscillant. Trouver (f) et la vitesse (g) l'accélération de l'objet lorsque sa position est égale à un tiers de la valeur maximale.

Enseignant
Djilali
BOUTCHICHA

Solution

(a) $k = \frac{|F|}{x} = \frac{20.0 \text{ N}}{0.200 \text{ m}} = \boxed{100 \text{ N/m}}$

(b) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{50.0} \text{ rad/s}$ Alors $f = \frac{\omega}{2\pi} = \boxed{1.13 \text{ Hz}}$

(c) $v_{\max} = \omega A = \sqrt{50.0}(0.200) = \boxed{1.41 \text{ m/s}}$ à $x = 0$

(d) $a_{\max} = \omega^2 A = 50.0(0.200) = \boxed{10.0 \text{ m/s}^2}$ à $x = \pm A$

(e) $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(100)(0.200)^2 = \boxed{2.00 \text{ J}}$

(f) $|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \sqrt{50.0}\sqrt{\frac{8}{9}(0.200)^2} = \boxed{1.33 \text{ m/s}}$

(g) $|a| = \omega^2 x = 50.0\left(\frac{0.200}{3}\right) = \boxed{3.33 \text{ m/s}^2}$

Ex8. L'amplitude d'un système se déplaçant en mouvement harmonique simple est doublée. Déterminer la variation de (a) l'énergie totale, (b) la vitesse maximale, (c) l'accélération maximale, et (d) la période.

Solution

(a) $E = \frac{1}{2}kA^2$, alors si $A' = 2A$, $E' = \frac{1}{2}k(A')^2 = \frac{1}{2}k(2A)^2 = 4E$

Donc E augmente par un facteur de 4

(b) $v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A$, alors si $A' = 2A$, v_{max} est doublée

(c) $a_{max} = \frac{k}{m}A$, alors si $A' = 2A$, a_{max} est doublée

(d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ est indépendante de A, la période est inchangée.