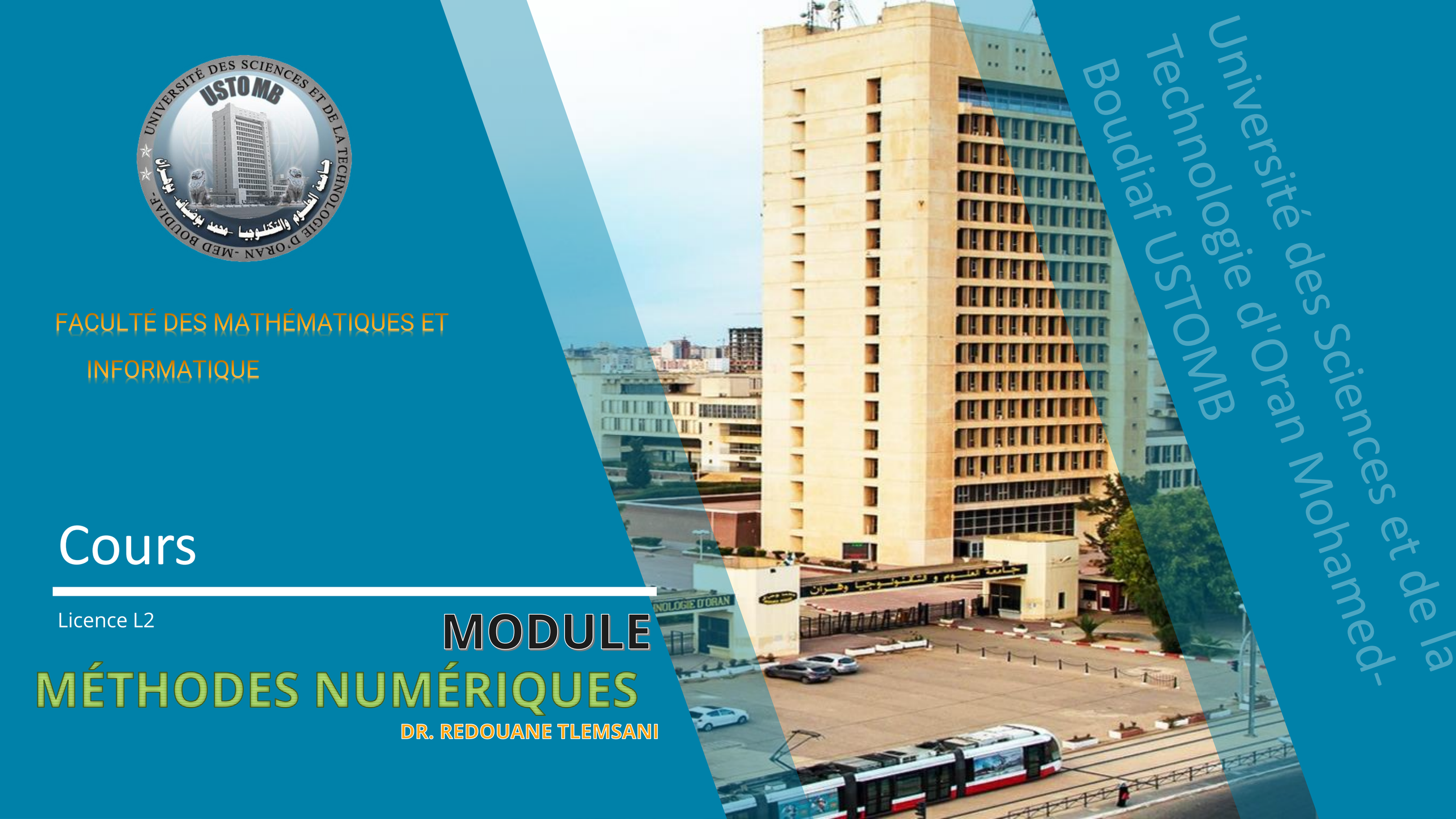


Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed-Boudiaf USTOMB

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Cours

Licence L2

MODULE

MÉTHODES NUMÉRIQUES

DR. REDOUANE TLEMSANI

2

MÉTHODES ITÉRATIVES DE RÉSOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Rappel

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Méthodes directes

- Méthode d'élimination de Gauss
- Méthode de décomposition L. U
- Méthode de Cholesky

Méthodes itératives

- Méthode de Jacobi
- Méthode de Gauss-Seidel
- Méthode de Relaxation

Introduction

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

- Les méthodes directes présentées jusqu'ici permettent de calculer la solution d'un système linéaire en un nombre fini de pas (solution exacte en ne tenant pas compte des erreurs d'arrondi).
- Pour de grands systèmes, ces méthodes demandent souvent trop d'espace mémoire et trop de calculs.
- On est alors amené à utiliser des méthodes itératives. Ces méthodes ne permettent pas, en général, d'obtenir la solution exacte en un nombre fini d'opérations. Mais chaque itération donne une meilleure approximation de la solution et l'on arrête dès que la précision désirée est atteinte.
- Les méthodes itératives ont l'avantage d'être plus faciles à programmer et nécessitent moins

Introduction

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

On propose le problème de la résolution du système linéaire de Cramer $Ax = b$.

Où A est une matrice carrée de rang n.

Les méthodes que nous présentons ci-après sont une généralisation au cas n-dimensionnel des méthodes de résolution de $f(x) = 0$ étudiées dans le chapitre précédent.

Ces méthodes consistent à utiliser un vecteur estimé initial $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^t$ de la solution exacte $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^t$ du système $Ax = b$ et de générer une séquence de vecteurs : $X^{(k+1)} = F^{(k)}\left(X^{(k)}, \dots, X^{(k)}\right)$.

Méthode de Jacobi

1

Dans cette méthode, on se donne des valeurs d'essai x_1,x_2,x_3 …,x_n.

La première équation permet ensuite de calculer une nouvelle estimation de x_1. La seconde équation permet de calculer une nouvelle estimation de x_2 et ainsi de suite jusqu'à x_n.

On a alors une nouvelle estimation de toutes les inconnues et on recommence le procédé tant que la différence entre l'itération ***i+1*** et l'itération ***i*** est supérieure à une précision donnée.

Méthode de Jacobi

Principe

La méthode itérative de Jacobi s'écrit :

$$x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11}$$

$$x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22}$$

……..

$$x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)})/a_{nn}$$

Cette méthode suppose des pivots a_{ii} non nuls. Dans le cas où un pivot est nul, un simple échange des lignes suffit pour vérifier cette condition.

Méthode de Jacobi

Principe

Cela permet d'identifier le splitting suivant pour A :

$$\mathbf{A = D - E - F}$$

- D : diagonale de A.
- E : triangulaire inférieure avec des 0 sur la diagonale.
- F : triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

La matrice d'itération de la méthode de Jacobi est donnée par :

$$\mathbf{B_j = -D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A}$$

L'algorithme de Jacobi nécessite le stockage des deux vecteurs $x_j^{(k)}$ et $x_j^{(k+1)}$.

Méthode de Jacobi

Test d'arrêt

On note le vecteur résidu : $r^{(k)} = b - AX^{(k)}$

Ou encore : $r_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$

Il existe plusieurs tests d'arrêt parmi lesquels on peut prendre :

1. $\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} < \varepsilon$
2. $\frac{\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|}{\|X^{(k)}\|} < \varepsilon$
3. $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| < \varepsilon$

Méthode de Jacobi

Algorithme de Jacobi

Données : $b, A, X^{(0)}, \varepsilon$

Début

k=0

Tant que $\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \geq \varepsilon$ **faire**

Pour i=1 **à** n **faire**

$r_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$

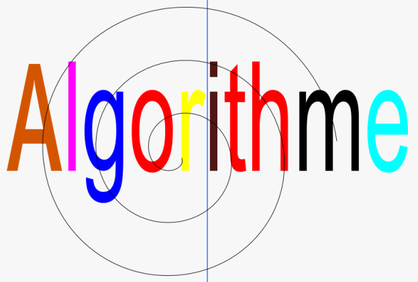
$x_i^{(k+1)} = (x_i^{(k)} + r_i^{(k)})/a_{ii}$

Fin pour

k=k+1

Fin tant que

Fin



Méthode de Jacobi

Conditions de convergence

En revenant au système initial voici la condition de convergence :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = \overline{1,n}$$

Théorème

Une condition suffisante pour la convergence est que la matrice A du système $Ax = b$ soit à diagonale fortement dominante.

Note : *Le processus itératif convergent jouit de la propriété importante d'***autocorrection***, qui fait qu'une erreur de calcul isolée n'entache pas le résultat final. Une approximation erronée peut être considérée comme un nouveau vecteur initial.*

Exemple :

Résoudre le système suivant par la méthode itérative de Jacobi avec 3 décimales exactes.

$$\begin{cases} \mathbf{4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8} \\ 0.09x_1 + \mathbf{3x_2 - 0.15x_3 = 9} \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + \mathbf{4x_3 = 20} \end{cases}$$

Vérifions d'abord la convergence. La matrice est à diagonale fortement dominante puisque :

$a_{11} = 4 > 0.24 + |-0.08| = 0.32$

$a_{22} = 3 > 0.09 + |-0.15| = 0.24$

$a_{33} = 4 > 0.04 + |-0.08| = 0.12$

Ainsi, le processus itératif de Jacobi est convergent.

Mettons le système sous la forme réduite :

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0.06x_2 - 0.02x_3 \\ x_2 = 3 - 0.03x_1 + 0.05x_3 \\ x_3 = 5 - 0.01x_1 + 0.02x_2 \end{cases}$$

On peut choisir $\boldsymbol{X^{(0)} = (2, 3, 5)^t}$

En remplaçant ces valeurs dans le système réduit, on obtient :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 2 - 0.06 \times 3 - 0.02 \times 5 = 1.92 \\ x_2^{(1)} = 3 - 0.03 \times 2 + 0.05 \times 5 = 3.19 \\ x_3^{(1)} = 5 - 0.01 \times 2 + 0.02 \times 3 = 5.04 \end{cases}$$

En appliquant une deuxième itération, on obtient :

$X^{(2)} = (1.9094, 3.1944, 5.0446)^t$

Pour la troisième itération, on trouve :

$X^{(3)} = (1.9092, 3.19495, 5.0448)^t$

En prenant $e = 0.5 \times 10^{-3}$: $\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = 0.0002 < 0.5 \times 10^{-3}$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = 0.0005 = 0.5 \times 10^{-3}$$

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = 0.0002 < 0.5 \times 10^{-3}$$

La solution donnée avec trois décimales exactes est :

$$\boldsymbol{x_1 = 1.909 \mp 0.001},$$

$$\boldsymbol{x_2 = 3.195 \mp 0.001},$$

$$\boldsymbol{x_3 = 5.045 \mp 0.001}$$

Un chiffre significatif d'un nombre approché x est dit exact (*c.s.e*) si l'erreur absolue de ce nombre *ne dépasse pas* ***une demi unité*** **de rang du chiffre significatif.**

Méthode de Gauss-Seidel

2

On utilise encore chacune des équations pour recalculer une nouvelle estimation de la solution. La différence avec la méthode de *Jacobi* réside dans le fait que l'on utilise les dernières valeurs obtenues (de l'itération en cours) et non celles de l'itération précédente.

Méthode de Gauss-Seidel

Principe

Dans la méthode itérative de Gauss-Seidel, on réécrit le développement de la récurrence vectorielle comme suit :

$$x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11}$$

$$x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22}$$

……..

$$x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn}$$

On constate que la différence entre cette méthode et celle de Jacobi est l'utilisation immédiate des nouveaux estimés $X^{(k+1)}$ à l'itération (k+1).

La condition d'avoir des pivots non nuls reste nécessaire aussi pour la méthode de Gauss-Seidel.

Méthode de Gauss-Seidel

Principe

Il s'écrit aussi :

$$x^{k+1} = (D - E)^{-1}(b + Fx^{k})$$

Dans ce cas, le splitting de A est :

$$P = D - E; N = F$$

Et la matrice d'itération associée est :

$$B_{GS} = (D - E)^{-1} F$$

L'algorithme de Gauss-Seidel ne nécessite qu'un vecteur de stockage, $x^{(k)}$ étant remplacé $x^{(k+1)}$ par au cours de l'itération.

Il est en général plus rapide que l'algorithme de Jacobi, donc il est préférable en termes de rapidité.

Méthode de Gauss-Seidel

Algorithme de Gauss-Seidel

Début

k=0

Tant que $\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| > \varepsilon$ **faire**

Pour i=1 **à** n **faire**

$$x_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k+1)}\right] / a_{ii}$$

Fin pour

k=k+1

Fin tant que

Fin

Méthode de **Gauss-Seidel**

Convergence de la méthode de Gauss-Seidel

Une condition suffisante pour la convergence de la méthode de Gauss-Seidel est que la matrice A soit une matrice à diagonale fortement dominante :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = \overline{1,n}$$

Méthode de Gauss-Seidel

REMARQUES

- La méthode de Gauss-Seidel est plus rapide en convergence que la méthode de Jacobi. En effet, on utilise dans la même itération les valeurs déjà estimées. Dans un certain sens, le (k+1) ^{ième} itéré est plus proche de la limite pour la méthode de Gauss-Seidel que pour la méthode de Jacobi.
- La permutation des lignes dans le système initial peut facilement conduire à une divergence. Une deuxième vérification paraît nécessaire pour conclure de la convergence du système.
- Pour la méthode de Gauss-Seidel, un seul vecteur suffit pour enregistrer les valeurs des itérés successifs. Une fois un itéré de l'itération précédente est utilisé dans le calcul, il n'est pas nécessaire de le garder pour la prochaine itération. Ceci implique un gain dans l'espace de stockage.

Exemple :

Résoudre le système suivant par la méthode itérative de Gauss-Seidel avec 4 décimales exactes.

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

En prenant : $X^{(0)} = (1.2, 0, 0)^t$

Vérifions d'abord la convergence. La matrice est à diagonale fortement dominante puisque :

$a_{11} = 10 > 1 + 1 = 2$

$a_{22} = 10 > 2 + 1 = 3$

$a_{33} = 10 > 2 + 2 = 4$

Ainsi, le processus itératif de Gauss-Seidel est convergent.

Mettons le système sous la forme réduite :

$$\begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3 \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3 \\ x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2 \end{cases}$$

L'approximation initiale est : $X^{(0)} = (1.2, 0, 0)^t$

En remplaçant dans le processus itératif :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1.2 - 0.1 \times 0 - 0.1 \times 0 = 1.20 \\ x_2^{(1)} = 1.3 - 0.2 \times \underline{1.2} - 0.1 \times 0 = 1.06 \\ x_3^{(1)} = 1.4 - 0.2 \times \underline{1.2} - 0.2 \times \underline{1.06} = 0.948 \end{cases}$$

Pour la deuxième itération, on obtient :

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1.2 - 0.1 \times 0.06 - 0.1 \times 0.948 = 0.9992 \\ x_2^{(2)} = 1.3 - 0.2 \times \underline{0.9992} - 0.1 \times 0.948 = 1.00536 \\ x_3^{(2)} = 1.4 - 0.2 \times \underline{0.9992} - 0.2 \times \underline{1.00536} = 0.999098 \end{cases}$$

Pour les autres itérations, on a :

$X^{(3)} = (0.9996, 1.0002, 1.0001)^t$

$X^{(4)} = (1.0000, 1.0000, 1.0000)^t$

$X^{(5)} = (1.0000, 1.0000, 1.0000)^t$

Ainsi, la solution approchée du système est :

$$x_1 = 1.0000 \mp 0.0001, x_2 = 1.0000 \mp 0.0001 \; et \; x_3 = 1.0000 \mp 0.0001$$

Remarque : *la solution exacte est :* $(1, 1, 1)^t$

Méthode de Relaxation

3

On modifie légèrement les méthodes précédentes en introduisant **un paramètre w**, le coefficient de relaxation. Ce paramètre est généralement constant.

La relaxation sur la méthode de Jacobi n'apporte en général aucun gain appréciable. Appliqué à la méthode de Gauss-Seidel, elle permet d'améliorer la rapidité de la convergence.

Description

Méthode de Relaxation

- L’idée est que si la **« correction »** apportée à une composante va **« dans le bon sens »,** on a intérêt à l’augmenter en la multipliant par un facteur supérieur à 1 **(ω > 1 : sur-relaxation).**
- Au contraire si on risque de **diverger ou osciller**, il vaut mieux amortir la correction en la multipliant par un facteur inférieur à 1 **(ω < 1 :sous-relaxation)**
- Une condition nécessaire mais non suffisante de convergence de ces méthodes est que le paramètre w soit compris entre 0 et 2.

Méthode de Relaxation

- Pour cette méthode, on prend la décomposition suivante:

$$P = \frac{D}{w} - E \quad et \quad N = \frac{1-w}{w} D + F$$

- En remplaçant dans l'équation $x^{(k+1)} = P^{-1}Nx^{(k)} + P^{-1}b$, on obtient

$$x^{(k+1)} = \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w} D + F\right)x^{(k)} + \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1}b$$

- La matrice d'itération est donnée comme suit:

$$B=\left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1} \quad \left(\frac{1-w}{w} D + F\right)$$

Méthode de Relaxation

Méthodes SOR et SSOR et Gauss-Seidel

- L'idée de la méthode de sur-relaxation (SOR = Successive Over Relaxation) est d'utiliser la méthode de Gauss Seidel pour calculer un itéré intermédiaire x˜(k+1) qu'on "relaxe" ensuite pour améliorer la vitesse de convergence de la méthode.
- On se donne 0 < ω < 2, et on modifie l'algorithme de Gauss–Seidel de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ a_{i,i}\tilde{x}_i^{(k+1)} = -\sum_{j<i} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{i<j} a_{i,j}x_j^{(k)} + b_i \\ x_i^{(k+1)} = \omega\tilde{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega)x_i^{(k)}, \quad i = 1,\ldots,n. \end{cases}$$

- (Pour $\omega = 1$ on retrouve la méthode de Gauss–Seidel.)

Méthode de Relaxation

Méthodes SOR et SSOR et Gauss-Seidel

- L'algorithme ci-dessus peut aussi s'écrire (en multipliant par $a_{i,i}$ la ligne 3 de l'algorithme

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ a_{i,i}x_i^{(k+1)} = \omega\left[-\sum_{j<i} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{i,j}x_j^{(k)} + b_i\right] \\ \qquad +(1-\omega)a_{i,i}x_i^{(k)}. \end{cases}$$

- **Méthodes SOR et SSOR et Jacobi**

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right) + (1-\omega)\, x_i^{(k)},\ i = 1, \ldots, n,$$

Exemple :

Soit le système de 3 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

Suivant la formule décrite précédemment, la méthode de relaxation s'écrit dans ce cas pour la première itération à partir d'un vecteur $x(0)=(0,0,0)^T$

$$x^{(1)} = \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}D + F\right)x^{(0)} + \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1}b$$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & -6 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad -E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad -F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D/w=\begin{bmatrix} 3/1,1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/1,1 & 0 \\ 0 & 0 & -6/1,1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2,73 & 0 & 0 \\ 0 & 4,55 & 0 \\ 0 & 0 & -5,45 \end{bmatrix}$$

$$(D/w)-E=\begin{bmatrix} 2,73 & 0 & 0 \\ 1 & 4,55 & 0 \\ 2 & -1 & -5,45 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2,73 & 0 & 0 \\ 2 & 4,55 & 0 \\ 4 & -2 & -5,45 \end{bmatrix}$$

$$(-0,09)*D=\begin{bmatrix} -0,27 & 0 & 0 \\ 0 & -0,45 & 0 \\ 0 & 0 & 0,54 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0,27 & -1 & +1 \\ 0 & -0,45 & -2 \\ 0 & 0 & 0,54 \end{bmatrix}=\left(\frac{1-w}{w}D + F\right)$$

Exemple :

$$\left(\frac{D}{w} - \mathrm{E}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}73 & 0 & 0 \\ 2 & 4{,}55 & 0 \\ 4 & -2 & -5{,}45 \end{bmatrix}^{-1}$$

Qui est l'inverse de la matrice $\left(\frac{D}{w} + E\right)$

En utilisant le principe de la méthode d'élimination de Gauss, on calcule l'inverse de la matrice de la manière suivante

[A|Id] → [Id|A]

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2{,}73 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4{,}55 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -5{,}45 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 = L_2 - (2/2.73)L_1 \\ L_3 = L_3 - (4/2.73)L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2{,}73 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}55 & 0 & -0{,}73 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5{,}45 & -1{,}46 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 = L_3 - (-2/4{,}55)L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2{,}73 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}55 & 0 & -0{,}73 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5{,}45 & -1{,}8 & 0{,}44 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0{,}37 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}16 & 0{,}22 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}33 & -0{,}08 & -0{,}18 \end{array}\right]$$

$$\left(\frac{D}{w} - \mathrm{E}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}37 & 0 & 0 \\ -0{,}16 & 0{,}22 & 0 \\ 0{,}33 & -0{,}08 & -0{,}18 \end{bmatrix}$$

Exemple :

$$\left(\frac{D}{w}-\mathrm{E}\right)^{-1} b=\begin{bmatrix}0{,}37 & 0 & 0\\ -0{,}16 & 0{,}22 & 0\\ 0{,}33 & -0{,}08 & -0{,}18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 17\\ -18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}74\\ 3{,}42\\ 2{,}6\end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{D}{w}-E\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}D+F\right)=\begin{bmatrix}0{,}37 & 0 & 0\\ -0{,}16 & 0{,}22 & 0\\ 0{,}33 & -0{,}08 & -0{,}18\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}-0{,}27 & -1 & +1\\ 0 & -0{,}45 & -2\\ 0 & 0 & 0{,}54\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-0{,}099 & -0{,}37 & 0{,}37\\ 0{,}043 & 0{,}061 & -0{,}6\\ -0{,}0089 & -0{,}294 & 0{,}39\end{bmatrix}$$

$$x^{(1)}=\left(\frac{D}{w}-E\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}D+F\right)x^{(0)}+\left(\frac{D}{w}-E\right)^{-1}b$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1}=-0{,}099x_1^k-0{,}37x_2^k+0{,}37x_3^k+0{,}74\\ x_2^{k+1}=0{,}043x_1^k-0{,}061x_2^k-0{,}6x_3^k+3{,}57\\ x_3^{k+1}=-0{,}0{,}089x_1^k-0{,}294x_2^k+0{,}39x_3^k+2{,}9\end{cases}$$

Prenons comme vecteur initial $x^{(0)}=(0,0,0)^T$

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=-0{,}099(0)-0{,}37(0)+0{,}37(0)+0{,}74\\ x_2^{(1)}=0{,}043(0)-0{,}061(0)-0{,}6(0)+3{,}57\\ x_3^{(1)}=-0{,}0{,}089(0)-0{,}294(0)+0{,}39(0)+2{,}9\end{cases}$$

0	0	0
0.7333	3.5787	2.9128
0.4158	2.0090	2.7929
0.9792	2.0948	2.9957
0.9657	2.0000	2.9879
0.9990	2.0056	2.9998
0.9980	2.0000	2.9993
1.0000	2.0003	3.0000
0.9999	2.0000	3.0000
1.0000	2.0000	3.0000
1.0000	2.0000	3.0000

Résultats des trois méthodes Jacobi; Gauss seidel et Relaxation

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.6667	3.4000	3.0000	0.6667	3.2667	2.6778	0.7333	3.5787	2.9128
0.5333	2.0667	2.6556	0.4704	2.2348	2.7843	0.4158	2.0090	2.7929
0.8630	2.2311	2.8333	0.8498	2.1163	2.9306	0.9792	2.0948	2.9957
0.8674	2.0941	2.9158	0.9381	2.0402	2.9727	0.9657	2.0000	2.9879
0.9406	2.0602	2.9401	0.9775	2.0154	2.9899	0.9990	2.0056	2.9998
0.9600	2.0358	2.9702	0.9915	2.0057	2.9962	0.9980	2.0000	2.9993
0.9781	2.0199	2.9807	0.9968	2.0021	2.9986	1.0000	2.0003	3.0000
0.9869	2.0121	2.9894	0.9988	2.0008	2.9995	0.9999	2.0000	3.0000
0.9924	2.0069	2.9936	0.9996	2.0003	2.9998	1.0000	2.0000	3.0000
0.9956	2.0041	2.9963	0.9998	2.0001	2.9999	1.0000	2.0000	3.0000

On remarque que la méthode de Gauss-Seidel converge plus rapidement que Jacobi, la relaxation permet de réduire le nombre d’itérations avec un coefficient de relaxation w=1,1

Résolution Matricielle

B = $D^{-1}(E + F)$: Méthode de Jacobi

B=$(D - E)^{-1}F$: Méthode de Gauss-Seidel

B=$\left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}D + F\right)$: Méthode de Relaxation

D : diagonale de A.
E : triangulaire inférieure avec des 0 sur la diagonale.
F : triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.


MERCI
POUR VOTRE
ATTENTION