Ch II Réduction des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie.

Rappels: On appelle espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$ muni de lci interne + et externe $\times$ tq :

1) $(E,+)$ groupe abélien.

2) $\forall x \in E$: $1_{\mathbb{K}} \times x = x$

3) $\forall x,y \in E$; $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda \times (x+y) = \lambda \times x + \lambda \times y$

4) $\forall x \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $(\lambda + \mu) \times x = \lambda \times x + \mu \times x$

5) $\forall x \in E$: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $(\lambda \mu) \times x = \lambda \times (\mu \times x)$

* Une partie non vide F de E est un s.ev de E ssi :
$\forall x,y \in F$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\lambda x + \mu y \in F$

* ~~Deux ep vectoriels E et~~

* Deux sev F et H de E sont dits supplémentaires ssi E =
ie : $F \cap H = \{0\}$ et $\forall x \in E$: $x = y + z$ / $y \in F$, $z \in H$.

* B une base de E ssi : B est libre et génératrice

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ libre $\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E \Rightarrow \lambda_i = 0$

B génératrice $\Leftrightarrow \forall x \in E$: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ / $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $\forall i$

$\dim E = \operatorname{Card} B$

Théorème de la base incomplète dans un espace vectoriel de dimension finie : Soit E un esp. vect de dimension n sur $\mathbb{K}$
$B = \{v_1, \dots, v_k\}$ / $k < n$ libre alors $\exists W = \{w_1, \dots, w_{n-k}\}$ /
$B \cup W$ est une base de E.

Théorème : Soit E un espace vectoriel de dimension n, F un [...] E alors : $\exists$ H : un sev de E / $E = F \oplus H$

on a : $\{V_1, \dots, V_k\}$ / $k < n$ libre : il suffit de choisir $(w_1, \dots, w_{n-k})$ [...]

$M = (V_1, V_2, \dots, V_k, w_1, \dots, w_{n-k})$ soit inversible i.e : $\det(M) \neq 0$

exp : dans $\mathbb{R}^3$,

$B = \{(1,1,0)\}$;

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ est inversible car $\det(M) = -1 \neq 0$ donc

pour $B' = \{(0,0,1),(0,1,0)\}$ complète B

$B \cup B'$ engendre $\mathbb{R}^3$.

Homomorphisme, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.

Soit E, F deux esp. vect. de dimensions resp. n et m, on app[elle]

1) Homomorphisme de $E \to F$ toute application linéaire :

$$\mathrm{Hom}(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$$

2) Endomorphisme, si $E = F$: $\mathrm{Hom}(E) = \mathcal{L}(E)$.
une app. linéaire de $E \to E$

3) Isomorphisme : une app. linéaire bijective de $E \to F$.

4) Automorphisme : ~~une app.~~ un endomorphisme bijectif.

Théorème de Gauss : E un ev et F, H deux sev :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

alors $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Rq : Si $E = F \oplus G$ et B base de F et B' base de G.

$B \cup B'$ base de E.

Sous esp Vect Stable :

Def: Soit E un esp. Vect de dim n, $f : E \to E$ un endomorphisme un sev F de E est dit stable par f ssi $f(F) \subset F$.

Soit E un esp Vect et F, G deux sev de E / $E = F \oplus G$:

Supp que F et G stables par f $E \to E$

$f(F) \subset F$, $f(G) \subset G$.

$$M_f = \begin{array}{c|c} & f(v_1) \ldots f(v_k)\ f(w_1) \ldots f(w_{n-k}) \\ \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-k} \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{} & 0 \\ 0 & \boxed{} \end{pmatrix} \end{array}$$

Theoreme

Soit $f : \underset{\text{dim } n}{E} \to \underset{\text{dim } m}{F}$ linéaire

alors :

i) $\ker f = f^{-1}\{0_F\} = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$ est un sev de E.

f injective $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0_E\}$

ii) $\mathrm{Im} f = \{f(x) \mid x \in E\} = f(E)$ est un sev de F, isomorphe au sev supplementaire de $\ker f$ dans E, et on a : $\dim E = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$

(Careful : $\mathrm{Im} f$ is in F not in E it's just dimensions)

Preuve : $\ker f$ un sev de E

* $\forall x, y \in \ker f$: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0_F$

d'où $\lambda x + \mu y \in \ker f$.

d'où $\ker f$ est un sev de E.

$\forall y_1, y_2 \in \mathrm{Im} f$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2) \in \mathrm{Im} f$

d'où $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathrm{Im} f$

Donc $\mathrm{Im} f$ est un sev de F.

Soit G le supplémentaire de $\ker f$ dans E : $E = \ker f \oplus G$:

$$h = f_{|G} : G \longrightarrow \operatorname{Im} f = f(E)$$
$$x \longmapsto f(x).$$

$h(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda h(x) + \mu$

h linéaire.

$\ker h = \{x \in G : f(x) = 0_F\} = \cancel{\{x \in E\}}$

$= G \cap \ker f = \{0_E\}$ car G et $\ker f$ sont suppl.

D'où h injective

Soit $y \in \operatorname{Im} f$: $\exists x \in E : y = f(x)$:

$x \in E \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in E \,/\, x_1 \in \ker f$ et $x_2 \in G$: $x = x_1 + x_2$

$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2) = h(x_2) = y$

D'où $\forall y \in \operatorname{Im} f : \exists x_2 \in G : h(x_2) = y$

Donc h surjective

$\dim E = \dim \ker f + \dim G = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$ car

G et $\operatorname{Im} f$ isomorphes $\Rightarrow$ G et $\operatorname{Im} f$ ont la même

Theorem : Si $f : E \to F$ isomorphisme,

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de E alors $B' = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ base de F

Corollaire : deux E.vect. isomorphes ont la même dim

$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$:

$\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0_F \Rightarrow f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0_F$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \ker f = \{0_E\}$

car f est injective

et puisque $\{v_1, \dots, v_n\}$ est

libre $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$

d'où B' libre

2- Soit $y \in F$; $\exists x \in E$: $y = f(x)$ car f surjective :

donc $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$: $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \rightarrow y = f(x) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$

$= \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$

D'où B' génératrice

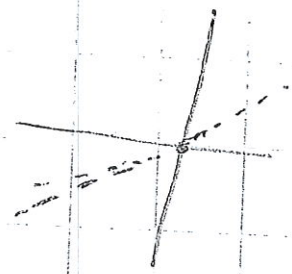
Donc B' est une base de F

donc dim E = dim F.

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i \Leftrightarrow \forall x \in E : x = x_1 + \dots + x_k \ / \ x_i \in E_i$$

et $E_i \cap E_j = \{0_E\} \ \forall i \neq j$

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{un plan}} \oplus \underbrace{\mathbb{R}}_{\cancel{\text{une droite}}\ \text{un axe}} = \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{axe}} \oplus \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{axe}} \oplus \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{axe}}$$



$f : E \rightarrow E$ et dim $E = n$. $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valeurs propres

$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ et $f(E_i) = E_i$;

$$M_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Valeurs propres Vecteurs propres et ou esp propre !

Soit E un esp. vectoriel de dimension finie n et $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme :

On appelle ~~valeurs~~ valeur propre associée à f tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ ~~$\exists x \neq 0$~~ $\exists x \in E \setminus \{0_E\} \ / \ f(x) = \lambda x$

x est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ

exp: $f(X) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} . X$

~~$f(1,1) =$~~

$f(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2 \; ; \; 4x_1 + x_2)$

$f(1,1) = (5,5) = 5 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

valeur propre — vecteur propre associé à 5

$E = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fcts infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$).

E : un esp. vect sur $\mathbb{R}$ de dimension ∞

$$f : E \longrightarrow E$$
$$u \longmapsto u'$$

pour $u(x) = e^{\alpha x}$, $f(u) = \alpha u$;

f admet une infinité de vecteurs propres (vale

On appelle sous-espace vectoriel propre associé à la valeu propre λ le sev : $E_\lambda = \{x \in E : f(x) = \lambda . x\}$

$E_\lambda = \{x \in E : f(x) - \lambda x = 0\}$

$= \{x \in E : f(x) - \lambda . Id_E(x) = 0\}$

$= \{x \in E : (f - \lambda Id_E)(x) = 0\}$

$\boxed{E_\lambda = \ker(f - \lambda Id)}$

f linéaire et $\lambda . Id$ linéaire donc $f - \lambda . Id$ est linéaire de $E \to E$

donc $\ker(f - \lambda Id) = E_\lambda$ est un sev de E.

Proposition. E_λ est stable par f : ie : $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$

~~Soit $y \in f(E_\lambda)$: $\exists x \in E_\lambda$: $y = f(x) = \lambda x$~~
~~$f(y) = \lambda.(\lambda x)$ et $\lambda x \in E$ donc~~

Soit $y \in f(E_\lambda)$: $\exists x \in E_\lambda$: $y = f(x) = \lambda x$

~~$f(y) = f(\lambda x) = \lambda(\lambda x)$ car $\lambda x \in E_\lambda$ (E_λ est un s~~
~~D'où $f(y) =$~~

Soit $y \in f(E_\lambda)$: $\exists x \in E_\lambda$: $y = f(x) = \lambda x$ / $\lambda \in \mathbb{K}$
$x \in E_\lambda$ et E_λ

D'où $\lambda x = y \in E_\lambda$ donc $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$

Or

$y \in f(E_\lambda) \Rightarrow \exists x \in E_\lambda / q\ y = f(x)$
$f(y) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda y$
d'où $y \in E_\lambda$ donc $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$

Proposition : Si λ_1, λ_2 deux valeurs propres distincts alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_E\}$

Soit $x \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \lambda_1 x \\ f(x) = \lambda_2 x \end{cases} \longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0_E$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$
D'où $x = 0_E$

Donc $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_E\}$.

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}$

Methode de recherche des Valeurs propres :

Theoreme : Soit E un esp. vect de dimension finie n sur $\mathbb{K}$

$f: E \to E$ un endomorphisme.

$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f ssi :

$$\det(M_f - \lambda . Id) = 0$$

λ valeur propre de f : $\exists x \in E \setminus \{0\} \mid f(x) = \lambda x$.

$\iff x \in \ker(f - \lambda . Id)$

$\iff \ker(f - \lambda . Id) \neq \{0_E\}$

$\iff f - \lambda Id$ non injective

$\iff \det(M_f - \lambda Id) = 0$ car $(f - \lambda Id)$ n'est pas injective donc sa matrice n'est pas inversible.

Soit M_f' semblable à M_f : $\iff \exists P$ inversible $\mid M_f' = P M_f P^{-1}$

$$\det(M_f' - \lambda Id) = \det(P M_f P^{-1} - \lambda P^{-1} . Id . P)$$
$$= \det(P(M_f - \lambda Id) . P^{-1})$$
$$= \det P . \det(M_f - \lambda Id) \times \det P^{-1}$$
$$= \det(M_f - \lambda Id)$$

Proposition : Soit E un ev. de dim n sur $\mathbb{K}$.

$f: E \to E$ un endomorphisme

alors $P_f(\lambda) = \det(M_f - \lambda Id)$ est un polynome de degré n dont les racines sont les valeurs propres de f.

$$M_f - \lambda I_d = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Le polynôme $P_f(\lambda)$ est appelée polynôme caractéristique

exp :

$f(x,y) = (x+y, x-y)$.

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ +1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2$$

$\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont les valeurs propres de f.

λ valeur propre de f (resp. de A) ssi $\exists\, v \neq 0 \mid f(v) = \lambda v$ (resp. $A \cdot v = \lambda v$), v est appelé vecteur propre.

On appelle s.ev propre associé à la valeur propre λ

$$E_\lambda = \{v \in E : f(v) = \lambda v\}$$

$$(\text{resp. } E_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n : A \cdot v = \lambda v\}.)$$

$E_\lambda = \ker(f - \lambda I_d)$ (resp. $E_\lambda = \ker(f_A - \lambda I_d)$)

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres alors.

$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$ est une somme directe.

i.e : $\forall i,j : E_{\lambda_i} \cap E_{\lambda_j} = \{0\}$ si $i \neq j$

Théorème : λ valeur propre d'un endomorphisme f (resp. d'une matrice A) ssi

$$P_f(\lambda) = \det(M_f - \lambda I) = 0$$

$$(\text{resp. } P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) = 0)$$

$P_f(\lambda)$ (resp. $P_A(\lambda)$) est appelé polynome caractéristique associé à l'endomorphisme f (resp. la matrice A)

II) Polynôme Annulateur, Polynome Minimal, Theoreme de Cayley Hamilton:

Déf: Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dim n sur $\mathbb{K}$ ($f \in End(E)$) (Resp. A une matrice de type n à coeff dans $\mathbb{K}$: $A \in M_n(\mathbb{K})$)

On appelle polynome annulateur de f (resp. de A) tout polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p$ /

$$P(f) = a_0 Id_E + a_1 f + \dots + a_p (f^p) = 0$$

$$f^p = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}$$

(Resp. $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p = 0$ / $A^p = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{p \text{ fois}}$)

Exp: Soit π la projection de E, π linéaire ($\pi \circ \pi = \pi$)

$P(x) = x - x^2$; $P(\pi) = \pi - \pi^2 = 0$

Theoreme: Il existe toujours des polynomes annulateurs soit des endomorphisme soit des matrices.

Preuve: On sait que dans un esp. vect de dim k une famille de m vecteurs est liée si $m > k$

$End(E) \simeq M_n(\mathbb{K})$ (à chaque endom on peut associer une matrice et l'inverse est juste).

($\dim E = n$).

$$\begin{array}{rcl} End(E) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & M_f \end{array}$$ un isomorphisme

$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$

$\dim(End(E)) = \dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$.

$(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est liée car

elle contient (n^2+1) ~~elt~~ éléments.

donc $\exists\, a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K} \setminus (0,0,\dots,0)$

$a_0 Id + a_1 f + \dots + a_{n^2} f^{n^2} = 0$ donc $P_f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n^2} x^{n^2}$.

polynome annulateur

1*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2^2 = 4$ */

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ alors la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ contient n^2+1 elt. donc elle est liée ($\dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$) donc $\exists\, a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K} \setminus \{(0,0,\dots,0)\}$: $a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{n^2} A^{n^2} = 0$

D'où $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n^2} x^{n^2}$ est polynôme annulateur.

Polynome minimal d'un Endomorphisme (d'une Matrice)

~~Théorème Il existe un polynome~~ Soit $f \in End(E)$ (resp. $A \in$ alors il existe un polynome minimale m_f (resp. m_A) qui divise tout polynome annulateur

preuve: voir page 12

Soit

$E_f = \{d \in \mathbb{N} ; d°P = d$ et P annulateur de $f\}$

$E_A = \{d \in \mathbb{N} ; d°P = d$ et P annulateur de $A\}$

$E_f \neq \emptyset$, $E_A \neq \emptyset$ et $E_f \subset \mathbb{N}$, $E_A \subset \mathbb{N}$

donc E_f (resp. E_A) est minoré

$\exists m = \min(E_f)$ (resp. $\exists m = \min(E_A)$)

Le polynome minimal de f (resp de A) est m_f / ~~d°~~ $\dim(m_f) = m$

(resp. m_A / ~~d°~~ et $\dim(m_A) = m$

Mq m_f (resp. m_A) divise tout les polynômes annulateurs de f (resp de A); Soit P un polynome annulateur de f (resp de A).

$P = Q \cdot m_f + R$ / $d°R < d° m_f$

$R(f) = P(f) - Q(f) \cdot m_f(f) = 0$ et $d°R < d° m_f$ donc $R=0$

Alors $P = Q \cdot m_f \rightarrow m_f$ divise P.

(même chose pour m_A : $P = Q \cdot m_A + R$ / $\deg R < d° m_A$

donc $R(A) = P(A) - Q(A) m_A(A) = 0$ donc $R = 0$)

Théorème de Cayley Hamilton :

C'est un théorème fondamental dans la réduction des endomorphismes et dans le calcul de A^k demontré en premier par Hamilton en dimension 4 (pour $\mathbb{H}$ l'espace de Quaternions) puis généralisé par Cayley pour les espaces de dimensions

Théorème : (Cayley-Hamilton)

Soit E un espace vect. de dimension finie n sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}_n(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$) et $P_f(x) = \det(M_f - x\,Id_E)$ son polynôme caractéristique (resp. $P_A(x) = \det(A - xI_n)$ son poly. cara.) alors $P_f(f) = 0$ (resp. $P_A(A) = 0$)

<u>Preuve :</u>

1] Supposons qu'$\exists$ une base de E : $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ / v_j vecteur propre

$$f^k(v_j) = f^{k-1}(\lambda_j v_j) = f^{k-2}(\lambda_j f(v_j))$$
$$= \lambda_j^k \cdot v_j$$

un Endomorphisme est identiquement nul $\Leftrightarrow$ il est nul sur la base B ; $\forall v_j \in B$:

$\cancel{P_f(f(v_j)) = \det(M_f - \lambda Id_E \cdot v_j) = \det(M_f}$

$$P_f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$
$$P_f(f) = a_0 Id_E + a_1 f + \dots + a_n f^n$$

$$P_f(f(v_j)) = a_0 v_j + a_1 \lambda_j v_j + \dots + a_n \lambda_j^n v_j = v_j \cdot P_f(\lambda_j) = 0$$

$P_f(f)$ est nul sur B donc il est identiquement nul sur E donc P_f est un poly. annulateur.

2] Supposons qu'on n'a pas une base formée des vecteurs propres :

Soit $x \neq 0$; Soit ~~d = L k≥1 / (x,~~

~~Soit $k \geq 1$ $(x, f(x), \dots, f^k(x))$ soit liée.~~

Soit $k \geq 2$ la valeur maximale pour laquelle $(x, f(x), \dots, f^k(x))$ est liée et $(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x))$ est libre

alors $f^k(x) = a_0 x + a_1 f(x) + \dots + a_{k-1} f^{k-1}(x)$

On complète $(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x))$ par $(w_1, \dots, w_{n-k})$ pour que $B = (x, f(x), \dots, f^{k-1}(x), w_1, \dots, w_{n-k})$ soit une base de

$$M_f(B) = \begin{array}{c|ccccc|ccc} & f(x) & f^2(x) & \dots & f^{k-1}(x) & f^k(x) & f(w_1) & \dots & f(w_{n-k}) \\ \hline x & 0 & 0 & & 0 & a_0 & & & \\ f(x) & 1 & 0 & & 0 & a_1 & & & \\ f^2(x) & 0 & 1 & & 0 & a_2 & & Z & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & & \\ f^{k-1}(x) & 0 & 0 & & 1 & a_{k-1} & & M & \\ \hline w_1 & & & & & & & & \\ w_2 & & & O & & & & P & \\ \vdots & & & & & & & & \\ w_{n-k} & & & & & & & & \end{array}$$

L

$P_f(f) \overset{?}{=} 0$

$P_f(\lambda) = \det(M_f - \lambda I_E) = \det(B - \lambda I_d)$

le poly car ne depend du choix

$$\det(\mathcal{L} - \lambda I_k) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{k-1} - \lambda_k \end{vmatrix}$$

$\rightarrow \lambda_0 = \lambda_0 + \lambda \lambda_1 + \cdots + \lambda^k V_k$

Théorème de Cayley-Hamilton

1- Version Endomorphisme :

Soit E un E.V de dim n sur $\mathbb{K}$

$f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme

$P_f(\lambda)$ le polynôme caracteristique $P_f(\lambda) = \det(M_f - \lambda I_d)$

alors $P_f(f) = 0$.

ie si $P_f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$

$P_f(f) = a_0 I_d + a_1 f + \cdots + a_n f^n$ / $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$

$f^0 = I_E$.

2- Version matricielle Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

Son poly. caracteristique, alors $P_A(A) = 0$.

$P_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$

$P_A(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_n A^n$.

Preuve Version Endom : Soit $f : E \to E$, $x \in E$ et $k \in \mathbb{N}^*$

$2 \leq k \leq n$ / $(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x))$ est libre et

$(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x), f^k(x))$ liée

Donc

$$f^k(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_{k-1} f^{k-1}(x)$$

$B_1 = (x, f(x), \dots, f^{k-1}(x))$ libre donc elle peut être complétée par $B_2 = (w_1, w_2, \dots, w_{n-k})$ qui est libre.

(On suppose que le sev engendré par B_2 est stable par f alors : $f(w_i) = \sum \beta_j w_j$, $f(\langle B_2 \rangle) \subset \langle B_2 \rangle$

$f(\mathrm{Vect}(B_2)) \subset \mathrm{Vect}(B_2)$

Soit $B = B_1 \cup B_2$:

$$M_f(B) = \begin{array}{c} \\ x \\ f(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ f^{k-1}(x) \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-k} \end{array} \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccccc} f(x) & f(x) & \dots & f^{k-1}(x) & f^k(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \\ 0 & 1 & & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_{k-1} \end{array} & \begin{array}{ccc} f(w_1) & \dots & f(w_{n-k}) \\ & & \\ & L & \\ & & \end{array} \\ \hline 0 & M \end{array}$$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C.$$

$$P_f(\lambda) = \det(M_f(B) - \lambda I_n) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & \alpha_0 \\ 1 & -\lambda & 0 \cdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{k-1}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det(M -$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_{k-1}-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} L_0 \\ L_1 \\ \vdots \\ L_k \end{matrix}$$

$L_0 = L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2 + \cdots + \lambda^{k-1} \alpha_{k-1}$

$L_0 = 0, 0, \ldots, (\alpha_0 + \lambda \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\lambda^{k-1})$

$(\alpha_0 + \lambda\alpha_1 + \cdots - \lambda^k)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (\alpha_0 + \lambda\alpha_1 + \cdots + \lambda^{k-1}\alpha_{k-1} - \lambda^k) \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \cdots & \alpha_2 \\ \vdots & & 1 & & \\ \vdots & & & 1 & \alpha_{k-1} \end{vmatrix} =$$

le det d'une matrice triangulaire est le produit des elts de la diagonale

$$P_f(\lambda) = (\alpha_0 + \lambda\alpha_1 + \cdots + \lambda^{k-1}\alpha_{k-1} - \lambda^k) \times \det(M - \lambda I_{n-k})$$

$$P_f(f) = (\alpha_0 Id + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{k-1} f^{k-1} - f^k) \times \det(M - f I_{n-k})$$

$$P_f(f(x)) = (\underbrace{\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{k-1} f^{k-1}(x) - f^k(x)}_{0}) \times \cdots$$

$(P_f \circ f)(x) = 0 \quad \forall x \in E$

cqfd

Montrons que $P_A(A) = 0$

Petit rappel :

Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ inversible, alors

$$N^{-1} = \frac{1}{\det N} \cdot {}^t\mathrm{Com}N \;/\; c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |N_{ij}|$$

$\det N^{-1} \cdot I_n = N \times {}^t\mathrm{Com}N$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

$(A - \lambda I_n) \times {}^t\mathrm{Com}(A - \lambda I_n) = P_A(\lambda) \cdot I_n$

$P_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$

${}^t\mathrm{Com}(A - \lambda I_n) = \left((-1)^{i+j} (\det(A - \lambda I_n))_{ij}\right)$

alors ${}^t\mathrm{Com}(A - \lambda I_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j B_j \;/\; B_j \in M_n(\mathbb{K})$

$$(A - \lambda I_n) \cdot {}^t\mathrm{Com}(A - I_n) = (A - \lambda I_n) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j B_j$$

$$= P_A(\lambda) \times I_n$$

$$(A - \lambda I_n) \cdot (B_0 + \lambda B_1 + \dots + \lambda^{n-1} B_{n-1}) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j\right) \cdot I_n$$

$AB_0 + A\lambda B_1 + \dots + A\lambda^{n-1} B_{n-1} - \lambda I_n B_0 - \lambda^2 I_n B_1 - \dots - \lambda^n I_n B_{n-1} = (a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n)$

$AB_0 + \lambda(AB_1 - B_0) + \lambda^2(AB_2 - B_1) + \dots + \lambda^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) - \lambda^n B_{n-1}$

$= a_0 I_n + a_1\lambda I_n + \dots + a_n\lambda^n I_n$

D'où :

$a_0 I_n = AB_0$ | $\dots$ $a_n I_n = -B_{n-1}$ $\Rightarrow a_j I_n = AB_j - B_{j-1}$

$a_1 I_n = AB_1 - B_0$

$$P_A(A) = AB_0 + \sum_{j=1}^{n-1} A^j (AB_j - B_{j-1}) - A^n B_{n-1}$$

$$P_A(A) = \sum_{j=2}^{n-1} \cancel{A^j B_{j-1}} - \sum_{j=2}^{n-1} \cancel{A^j B_{j-1}} + \cancel{A^n B_{n-1}} - \cancel{AB_0} + \cancel{AB_0} - \cancel{A^n B_{n-1}}$$

$$\boxed{P_A(A) = 0}$$

Propriétés du polynôme minimal. $m_f(\lambda)$ / $m_A(\lambda)$

1- C'est le polynôme annulateur du plus bas degré.

2- Il divise P_f (resp. P_A) ; alors $d^\circ m_f \leq n$. ($d^\circ m_A \leq n$;

3- Les racines de m_f (resp. m_A) sont les valeurs propres.

4- Si $P_f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda-\lambda_k)^{n_k}$

donc $m_f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k}$ ~~alors~~ et $\alpha_i \leq n_i$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} ; \quad P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -3 & 4 \\ 4 & (-7-\lambda) & 8 \\ 6 & -7 & (7-\lambda) \end{vmatrix}$$

$P_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-3)$; valeurs propres : $\lambda_1 = -1$; λ_2 [illegible]
double ; si[illegible]

$$m_A(\lambda) = \begin{cases} (\lambda+1)(\lambda-3) \\ (\lambda+1)^2(\lambda-3) \end{cases}$$

Donc $m_A(A) = (A + I_3)(A - 3I_3) \neq 0_n$ 19- alors $m_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-3)$

$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & 1 \\ \dots \end{pmatrix}$