Diagonalisation d'endomorphismes (et de matrices) :

Déf : (Version Endo) : Soit E un $\mathbb{K}$-ev ; $f \in End(E)$, on dit que f est diagonalisable ssi il existe une base $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \dots)$ de E / $M_f(\mathcal{V})$ est diagonale.

$$M_f(\mathcal{V}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Version matrice :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on dit que A est diagonalisable ssi $\exists D$ une matrice diagonale et $\exists P$ une matrice inversible / $A = P^{-1} D P$.
A est dite semblable à D.

Proposition 1 : Soit $f \in End(E)$ (resp. A une matrice / $A \in M_n(\mathbb{K})$), $P_f(\lambda)$ son poly. caractéristique, si λ_i est une valeur propre d'ordre α_i (i.e. : $P_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} Q(\lambda)$) alors $\dim E_{\lambda_i} \leq \alpha_i$

Preuve : On pose $\dim E_{\lambda_i} = m_i$, soit $(e_1, \dots, e_{m_i})$ une base de E_{λ_i}, et soit $B = (e_1, \dots, e_{m_i}, w_1, \dots, w_{n-m_i})$ base de E.

$$M_f(B) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{m_i} \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-m_i} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_{m_i}) & f(w_1) \dots & f(w_{n-m_i}) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_i & 0 & & 0 & \\ 0 & \lambda_i & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & & M \\ & & & \lambda_i & \\ \hline 0 & 0 & & 0 & \\ & 0 & & \vdots & \\ & & 0 & 0 & \mathbb{L} \end{array} \right) \end{array}$$

$P_\lambda = \cancel{M_\beta(B)}$

$$P_{M_\beta(B)}(\lambda) = \det(M_\beta(B) - \lambda I_n)$$
$$= (\lambda - \lambda_i)^{m_i} \cdot \det(L - \lambda I_{n-m_i})$$
$$= P_f(\lambda) \quad \text{d'où} \quad m_i \leq \alpha_i$$

<u>Corollaire</u>: Si λ_i une valeur propre simple, alors $\dim E_{\lambda_i} = 1$

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \cdot Q(\lambda) \quad 1$$

$Q(\lambda)$ n'admet pas de racines ds $\mathbb{K}$.

Donc cette matrice n'est pas diagonalisable.

<u>1ère Condition de diagonalisabilité</u>: P: le polynôme de caractéristique doit être scindé dans $\mathbb{K}$. c.à.d: toutes ses racines sont dans $\mathbb{K}$, il possède n racines différentes ou confondues.

<u>Théorème</u>: (de diagonalisation):

Soit $f \in End(E)$ $(A \in M_n(\mathbb{K}))$; f est diagonalisable (resp. A) ssi on a:

1) $P_f(\lambda)$ (resp. $P_A(\lambda)$) a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$: $\sum_i \alpha_i = n$

$$P_f(\lambda) = \sum_i (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

2) $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i \ \forall i$

<u>exp</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 8 \\ 1 & -\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda(\lambda-3)+2)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$
$$= (1-\lambda)\left(\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 + 2 - \frac{9}{4}\right) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2$

$\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$ double.

$\dim E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dim E_2 = 2 \text{ et } \dim E_1 = 1$$

donc A est diagonalisable

$2x - 2y + 8z = 0$

$x - y + 4z = 0$ $\rightarrow$ $x = y - 4z$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : (A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$x - 2y + 8z = 0$

$x - 2y + 4z = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$

$-z = 0$

$A = P^{-1} D P$

Proposition: Preuve est un ex:

Soit $f \in End(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$), si

$P_f(\lambda) = P_1(\lambda) \times P_2(\lambda) \times \dots \times P_k(\lambda)$ / $(P_i)_{i=1,\dots,k}$ sont premiers entre eux.

alors ~~ker f~~ $\cancel{\ker(P_f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(P_i)}$

$$\ker(P_f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(P_i)$$

Théorème: $f \in End(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$) est diagonalisable ssi le poly. minimale m_f (resp. m_A) ne possède que des racines simples.

ie : ~~$P_f(\lambda) = \lambda ... \lambda_i$~~ $P_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$ $/ k \leq n$. $\sum_{i=1} \alpha_i = n$

$m_f = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)$

H_i G_i

Théorème résumé:

Un endomorphisme f de E (E est un $\mathbb{K}$-ev de dim n) / (resp. $A \in M_n$)

Les propositions suivantes sont équivalentes:

1] f est diagonalisable (resp. A est diagonalisable).

2] $\exists$ une base de E (resp. $\mathbb{K}^n$) formée des vecteurs propres.

3] P_f (resp. P_A) est scindé dans $\mathbb{K}$ (ie $\lambda_1, ..., \lambda_k$ valeurs propres d'ordres de multiplicité $\alpha_1, ..., \alpha_k$: $\alpha_1 + ... + \alpha_k = n$ et $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$)

4] $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$ (resp. $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$).

5] $\dim E = \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i}$ 6] m_f n'admet que des racines simples

Corollaire: Si $\dim E = n$ et P_f (resp. P_A) admet n racines simples alors f est diagonalisable.

$1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq \alpha_i$

exp:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

$E_5 = \text{Vect}((-2, \frac{13-\alpha}{2}, 1))$

$-x - 2z = 0$

$2x + 4z = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2z$

$4x + 2y + (\alpha - 5)z = 0 \qquad y = \frac{1}{2}(5 - \alpha + 8)z = \frac{13-\alpha}{2} z$

$E_\alpha = \text{Vect}((1, -2, \frac{4-\alpha}{2}))$.

$$\begin{cases} (4-\alpha)x - 2z = 0 \\ 2x + (5-\alpha)y + 4z = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{aligned} & z = \frac{4-\alpha}{2} x \\ & 2x - 10x + 2\alpha x + 8x - 2\alpha x = 0 \\ & y = -2x \end{aligned}$$

Si $\alpha = 4$: $\lambda_1 = 4$ double, $\lambda_2 = 5$.

$E_4 = \ker(A - 4I_3)$.

$$\begin{cases} -2z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{aligned} & z = 0 \\ & 2x - 2x = 0 ✓ \rightarrow E_4 = \text{Vect}((1, -2, 0)) \\ \rightarrow \; & y = -2x \end{aligned}$$

$\dim E_4 = 3 - \dim \text{Im}(f - 4I_d) = 3 - rg(A - 4I_3) = 3 - 2 = 1 \neq 2$

donc f n'est pas diagonalisable

Si $\alpha = 5$: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$ double

$\dim E_5 = 3 - \dim \text{Im}(f - 5I_d) = 3 - rg(A - 5I_3) = 3 - 2 = 1 \neq 2$

d'où f n'est pas diagonalisable

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = -2z$

$y = -2x = 4z \longrightarrow \quad V_5 = (-2, 4, 1)$

$E_5 = \text{Vect}((-2, 4, 1)) \rightarrow \dim E_5 = 1 \neq 2$.

$$m_f(A) = (3I_3 + A)(3I_3 - A)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $m_f(\lambda) = (3+\lambda)(3-\lambda)$ n'admet que des racines simples d'où A est diagonalisable.

$\dim E_{-3} = 3 - \dim \mathrm{Im}(A + 3I_3) = 3 - rg(A + 3I_3) = 3 - 1 = 2$

$$A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow rg(A + 3I) = 1$$

$\dim E = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f \;/\; f \in \mathrm{End}(E)$.

$E_3 = \mathrm{Vect}((1, -2, 1))$

$$\begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ -y - z - 2y - 5z = 0 \\ 5y + 5z - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ -3y - 6z = 0 \rightarrow y = -2z \\ 3y + 6z = 0 \rightarrow y = -2z \end{cases} \quad x = z$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ -2 & 1 & \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}$$

E_n

Lemme de décomposition de Noyaux :

Soit $f \in End(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$)

$P_f(\lambda) = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_k$ / $P_i \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers

alors

$$\ker P_f(f) = \ker P_1(f) \oplus \ker P_2(f) \oplus \dots \oplus \ker P_k(f)$$

$[\ker P_A(A) = \ker P_1(A) \oplus \dots \oplus \ker P_k(A)]$

$P_f(f) = P_1(f) \circ P_2(f) \circ \dots \circ P_k(f)$

$P_A(A) = P_1(A) \times \dots \times P_k(A)$

Par recurrence : on a :

pour $n = 2$: $P = P_1 \times P_2$ / $(P_1, P_2) = 1$

D'après le théo de Bézout : $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{K}[X]$: $P_1 q_1 + P_2 q_2 = 1$

Mq $\ker P(f) = \ker P_1(f) \oplus \ker P_2(f)$

$P_1(f) \circ q_1(f) + P_2(f) \circ q_2(f) = Id_E$

$\forall x \in E$: $x = (P_1(f) \circ q_1(f))(x) + (P_2(f) \circ q_2(f))(x)$

Soit $x \in \ker P(f)$, on pose $x_1 = (P_1(f) \circ q_1(f))(x)$

$x_2 = (P_2(f) \circ q_2(f))(x)$

$x = x_1 + x_2$

$(P_1(f))(x_1) = (P_1(f))(P_2(f) \circ q_2(f))(x)$

$= (P_1(f) \circ P_2(f) \circ q_2(f))(x)$

$= q_2(f)(P_1(f) \circ P_2(f))(x)$

$\rightarrow$ How ? $P = P_1 \times P_2$

$= q_2(f)(P(f)(x)) = 0$ car $x \in \ker P(f)$

D'où $x_1 \in \ker P_1(f)$; de même on trouve $x_2 \in \ker P_2(f)$.

donc $x = x_1 + x_2$ / $x_1 \in \ker(P_1(f))$; $x_2 \in \ker(P_2(f))$

et $\ker P_1(f) \cap \ker P_2(f) = \{0_E\}$ car :

$x \in \ker P_1(f) \cap \ker P_2(f)$:

$x = (P_1(f) \circ q_1(f))(x) + (P_2(f) \circ q_2(f))(x)$

$= q_1(f) \circ (P_1(f)(x)) + q_2(f) \circ (P_2(f)(x)) = 0_E$

D'où pour $n = 2$: $P = P_1 \times P_2$.

Corollaire : ~~f un endom. or~~ $f \in End(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$)

$$P_f(\lambda) = \pm (\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1} \times (\lambda-\lambda_2)^{\alpha_2} \times \dots \times (\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k} \quad / \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n.$$

$$\left(P_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k}\right).$$

alors :

$$E = \ker(f-\lambda_1 Id)^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \ker(f-\lambda_k Id)^{\alpha_k}.$$

resp. $E = \ker(A-\lambda_1 I_n)^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \ker(A-\lambda_k I_n)^{\alpha_k}$

Preuve : conséquence directe du lemme de décomposition des noyaux

$\ker P_f(f) = E$ d'après Cayley-Hamilton.

et $\ker P_f(f) = \ker(f-\lambda_1 Id)^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \ker(f-\lambda_k Id)^{\alpha_k}$.

Déf : des esp caractéristiques :

On appelle polynome caractéristique N_{λ_i} associé à la valeur propre λ_i ~~le sev~~ (de multiplicité α_i) le sev de E.

$$N_{\lambda_i} = \ker(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$$

et $E = \bigoplus_{i=1}^{k} N_{\lambda_i}$

Théorème : Soit $f \in End(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$)

$P_f(\lambda) = \pm \prod_{i=1}^{k} (\lambda-\lambda_i)^{\alpha_i} \quad / \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n = \dim E.$

alors :

1) N_{λ_i} est stable par f $\forall i$ $(f(N_{\lambda_i}) \subset N_{\lambda_i})$

2) $\dim N_{\lambda_i} = \alpha_i$

3) $E = \bigoplus_{i=1}^{k} N_{\lambda_i}$

4) $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$

Théorème : E un $\mathbb{K}$-ev / $\dim E = n$ et $f \in End(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$)

$$P_f(\lambda) = \pm \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \;/\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n.$$

$$f \text{ diagonalisable} \iff m_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k)$$

Preuve :

$\boxed{\Leftarrow}$ $m_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k)$.

$\ker m_f(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i I_d) = E$ (m_f annulateur).

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} \longrightarrow f \text{ est diagonalisable}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ f diagonalisable : $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$

donc il existe une base $\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\}}_{B}$ formée par les vecteurs propres

$$M_f(B) = \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ \\ \\ v_n \end{array} \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix} & & 0 \\ & \begin{matrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{matrix} & \\ 0 & & \ddots \\ & & \begin{matrix} \lambda_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$M_f(B) - \lambda_i I_n = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 - \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 - \lambda_i \end{matrix} & & \\ & \lambda_2 - \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_2 - \lambda_i \\ & & & & \boxed{0} \\ & & & & & \lambda_k - \lambda_i \end{pmatrix}$$

$(M_f - \lambda_1 I_n)\cdot(M_f - \lambda_2 I_n)\cdots(M_f - \lambda_k I_n) = 0$.

tout poly annulateur admet les valeurs pr comme racine

D'où $Q(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_k)$ est un polynome annulateur de f. (alors m_f divise Q et a les m̂ racines que Q)

d'où $\boxed{m_f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_k)}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = +(3+\lambda)[\lambda(3-\lambda)]$$

$= \lambda(3+\lambda)(3-\lambda)$ d'où $m_f(\lambda) = (3+\lambda)\lambda(3-\lambda)$ donc A est ~~diag~~ diagonalisable.

~~A (3I+I~~ $m_f(A) = 0$

$A(A+3I_3)(-A+3I_3) = 0$

$(A^2+3A)(-A+3I_3) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{-1} en utilisant m_A.

$m_A(\lambda) = (3-\lambda)(3+\lambda)$

$= 9 - \lambda^2$

$A^2 - 9I_3 = 0$ $\quad A^{-1} = A/9$

$A^2 = 9I_3 \to A \times \frac{A}{9} = I_3$

Calcul des A^k :

Soit la division de x^k par le polynome minimal.

$$x^k = m_A(x) \times q(x) + R_k(x) \quad / \quad d^\circ R_k < d^\circ m_A$$

alors $A^k = \underbrace{m_A(A) \times q_k(A)}_{0} + R_k(A)$

Alors $\boxed{A^k = R_k(A)}$ (on divise x_k sur $m_A(x)$)

exp précedent :

$$m_B(x) = (3-x)(3+x).$$

$$R_k(x) = a_k + b_k x \quad / \quad d^\circ 1 \text{ car } d^\circ m_B = 2$$

$R_k(3) = 3^k = a_k + 3b_k$

$R_k(-3) = (-3)^k = a_k - 3b_k \longrightarrow$

$$a_k = \frac{3^k + (-3)^k}{2}$$

$$b_k = \frac{3^k - (-3)^k}{6}$$

$$\boxed{A^k = a_k I_3 + b_k A.}$$