الجمهوريـــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العــــــالي والبحـــــث العلــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant : BOUTCHICHA Djilali

Système à un degré de liberté soumis à une force harmonique

Système non amorti

L'équation de mouvement d'un système non amorti

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

La solution homogène (libre) de cette équation est donnée par

$$x_h(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

Comme la force d'excitation est harmonique, la solution particulière (forcée) est aussi harmonique

$$x_p(t) = X \cos \Omega t$$

En substituant dans l'équation de mouvement

$$X = \frac{F_0}{k - m\Omega^2}$$

La solution totale de l'équation de mouvement est :

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \cos \Omega t$$

En utilisant les conditions initiales

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

On trouve les constantes

$$A_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\Omega^2}; \qquad A_2 = \frac{v_0}{\omega_n}$$

Et ainsi,

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\Omega^2}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right) \sin \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\Omega^2}\right) \cos \Omega t$$

En faisant les substitutions suivantes

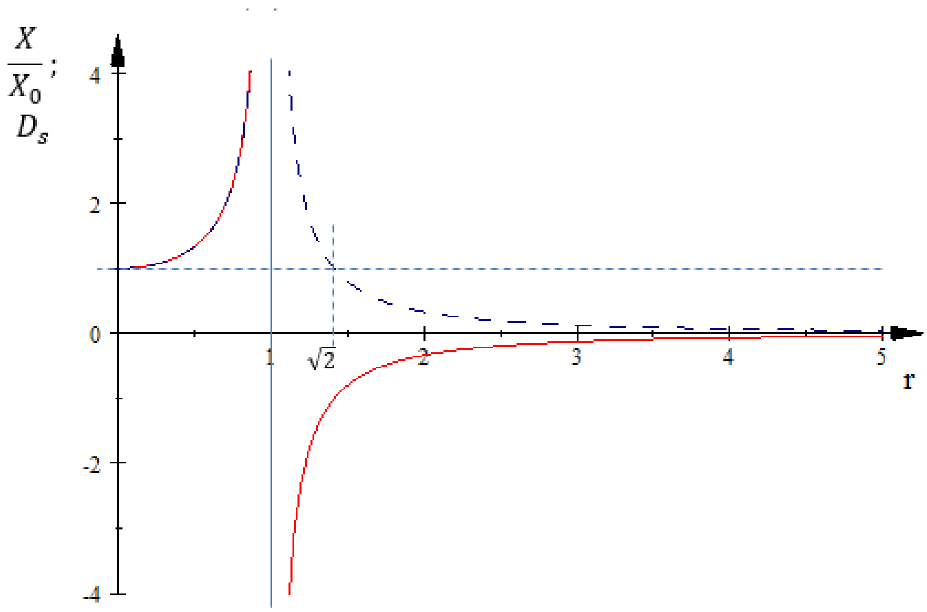
$$X_0 = F_0 / k \quad \text{et} \quad r = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

On obtient

$$X = \frac{F_0 / k}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{X_0}{1 - r^2} \Rightarrow \frac{X}{X_0} = \frac{1}{1 - r^2};$$

Facteur d'Amplification Dynamique

$$D_s = \left|\frac{X}{X_0}\right| = \frac{1}{|1 - r^2|}$$



A la résonance

$$x(t) = x_0 \cos\omega_n t - \frac{F_0}{k-m\Omega^2}\cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + \frac{F_0}{k-m\Omega^2}\cos\Omega t$$

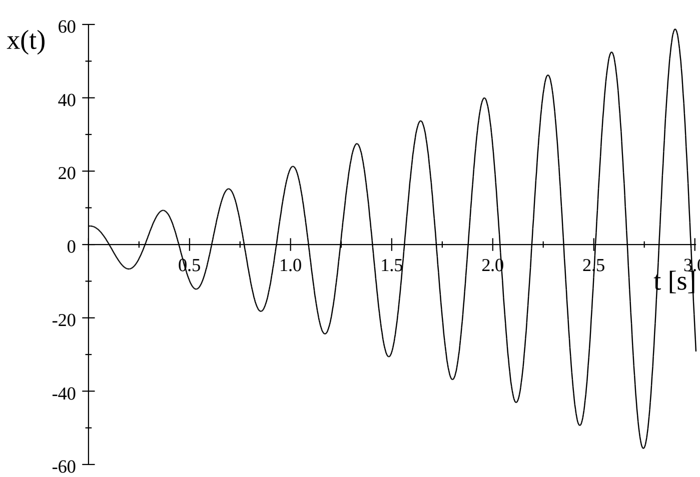
$$x(t) = x_0 \cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + X_0\left[\frac{(\cos\Omega t - \cos\omega_n t)}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega n}\right)^2}\right]$$

$$\lim_{\Omega\to\omega_n}\left[\frac{(\cos\Omega t - \cos\omega_n t)}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega n}\right)^2}\right] = \lim_{\Omega\to\omega_n}\left[\frac{\frac{d}{d\Omega}(\cos\Omega t - \cos\omega_n t)}{\frac{d}{d\Omega}\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega n}\right)^2\right)}\right]$$

$$= \lim_{\Omega\to\omega_n}\left[\frac{-t\sin\Omega t}{-\frac{2\Omega}{\omega_n^2}}\right] = \frac{-t\sin\omega_n t}{-\frac{2\omega n}{\omega_n^2}} = \frac{1}{2}\omega_n t\sin\omega_n t$$

$$x(t) = x_0 \cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + X_0\frac{1}{2}\omega_n t\sin\omega_n t$$

$$x(t) = 5\cos 20t + \left(\frac{10}{20} + 2\times\frac{1}{2}20t\right)\sin 20t$$



Système avec amortissement visqueux

L'équation de mouvement d'un système avec amortissement visqueux

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos\Omega t$$

La solution totale est

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

La solution homogène (libre) de cette équation est donnée par

pour $\xi<1$ $\quad x_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t\right)$ $\qquad$ avec $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

pour $\xi=1$ $\quad x_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$

pour $\xi>1$ $\quad x_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1\cosh\omega^* t + A_2\sinh\omega^* t\right)$ $\qquad$ avec $\omega^* = \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$

La solution particulière (forcée) est aussi harmonique avec un retard de phase dû à la présence de l'amortissement

$$x_p(t) = X\cos(\Omega t - \alpha)$$

$$\dot{x}_p(t) = -\Omega X\sin(\Omega t - \alpha)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 X\cos(\Omega t - \alpha)$$

$$-m\Omega^2 X\cos(\Omega t - \alpha) - c\Omega X\sin(\Omega t - \alpha) + kX\cos(\Omega t - \alpha) = F_0\cos\Omega t$$

$$(k - m\Omega^2)X\cos(\Omega t - \alpha) - c\Omega X\sin(\Omega t - \alpha) = F_0\cos\Omega t$$

$$\cos(\Omega t - \alpha) = \cos\Omega t\cos\alpha + \sin\Omega t\sin\alpha$$

$$\sin(\Omega t - \alpha) = \sin\Omega t\cos\alpha - \cos\Omega t\sin\alpha$$

$$[(k - m\Omega^2)\cos\alpha + c\Omega\sin\alpha]X\cos\Omega t + [(k - m\Omega^2 - c\Omega X\cos\alpha)X\sin\alpha]\sin\Omega t = F_0\cos\Omega t$$

$$\begin{cases} [(k - m\Omega^2)\cos\alpha + c\Omega\sin\alpha]X = F_0 \\ [(k - m\Omega^2)\sin\alpha - c\Omega\cos\alpha]X = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} (k - m\Omega^2) & c\Omega \\ -c\Omega & (k - m\Omega^2) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X\cos\alpha \\ X\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X\cos\alpha = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & c\Omega \\ 0 & (k-m\Omega^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (k-m\Omega^2) & c\Omega \\ -c\Omega & (k-m\Omega^2) \end{vmatrix}} = \frac{(k - m\Omega^2)F_0}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}$$

$$X\sin\alpha = \frac{\begin{vmatrix} (k-m\Omega^2) & F_0 \\ -c\Omega & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (k-m\Omega^2) & c\Omega \\ -c\Omega & (k-m\Omega^2) \end{vmatrix}} = \frac{c\Omega F_0}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}$$

$$X^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) = \frac{\left[\left(k-m\Omega^2\right)^2+(c\Omega)^2\right]F_0^2}{\left[\left(k-m\Omega^2\right)^2+(c\Omega)^2\right]^2} = \frac{F_0^2}{\left[\left(k-m\Omega^2\right)^2+(c\Omega)^2\right]}$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\Omega^2\right)^2+(c\Omega)^2}}$$

$$(k-m\Omega^2)\sin\alpha - c\Omega\cos\alpha = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{c\Omega}{\left(k-m\Omega^2\right)}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par k et en faisant les substitutions suivantes :

$\omega_n = \sqrt{k/m}$ pulsation naturelle non amortie

$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$; $\frac{c}{m} = 2\xi\omega_n$

$X_0 = F_0/k$ Allongement sous la force statique F_0

$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$ rapport des fréquences

$$\frac{X}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}$$

$$\alpha = \arctan\frac{2\xi r}{1-r^2}$$

1- Pour un système non amorti $(\xi = 0)$ la réponse est en phase avec l'excitation $(\alpha = 0)$ pour $(r<1)$ et en opposition $(\alpha = 180)$ pour $(r>1)$.
2- L'amortissement réduit le facteur d'amplification dynamique pour toutes les fréquences d'excitation
3- La réduction du facteur d'amplification dynamique en présence d'amortissement est très signifiante autour de la résonance
4- Avec l'amortissement l'amplitude maximale est atteinte quand

   $r = \sqrt{1-2\xi^2}$ ou $\Omega = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

   qui est inferieure al pulsations naturelle non amortie ω_n et à la pulsation naturelle amortie

   $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$.
5- La valeur maximale de X $\left(\text{quand } r = \sqrt{1-2\xi^2}\right)$ est donnée par

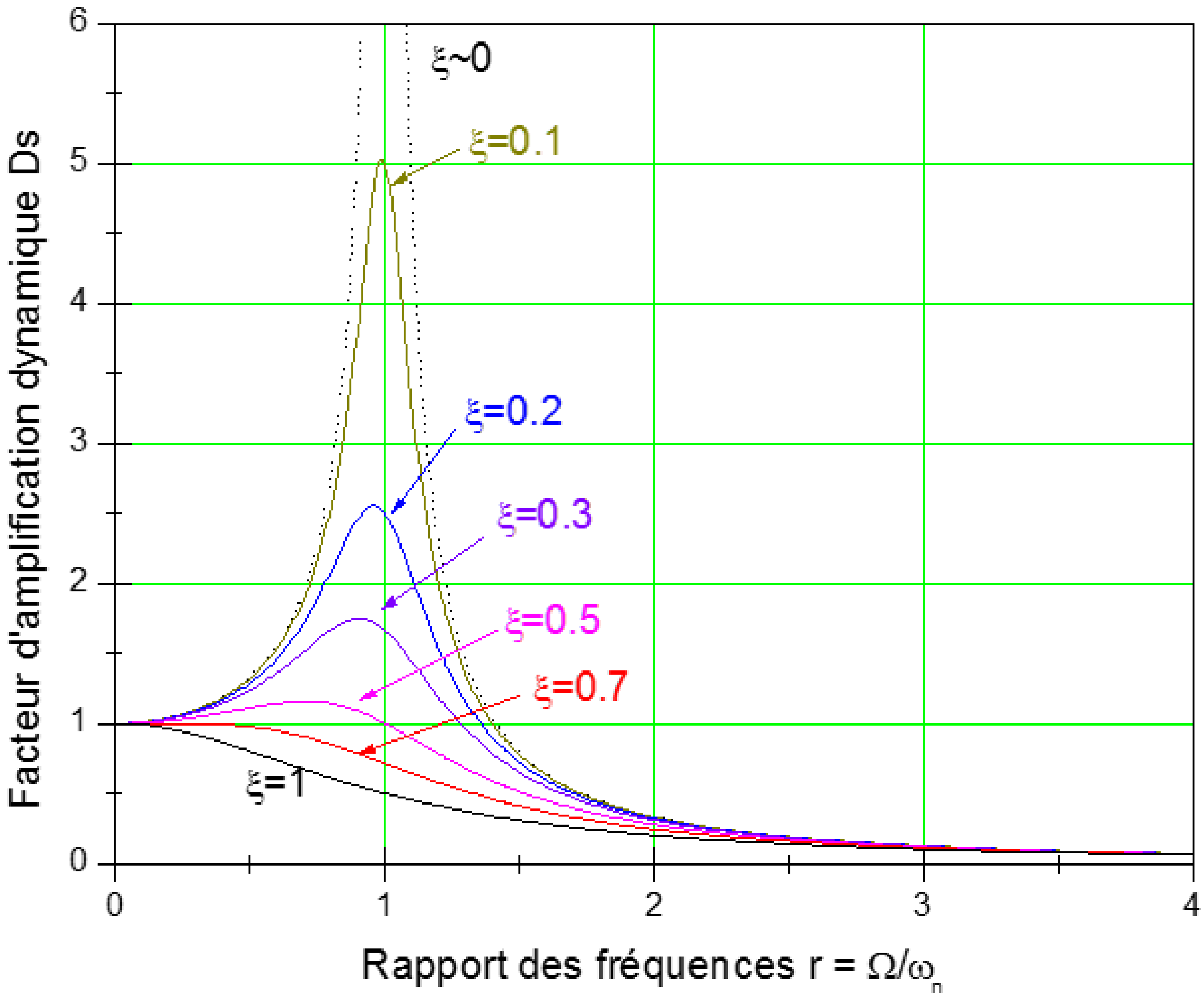
$$\left(\frac{X}{X_0}\right)_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{\left(1-\xi^2\right)^2}}$$

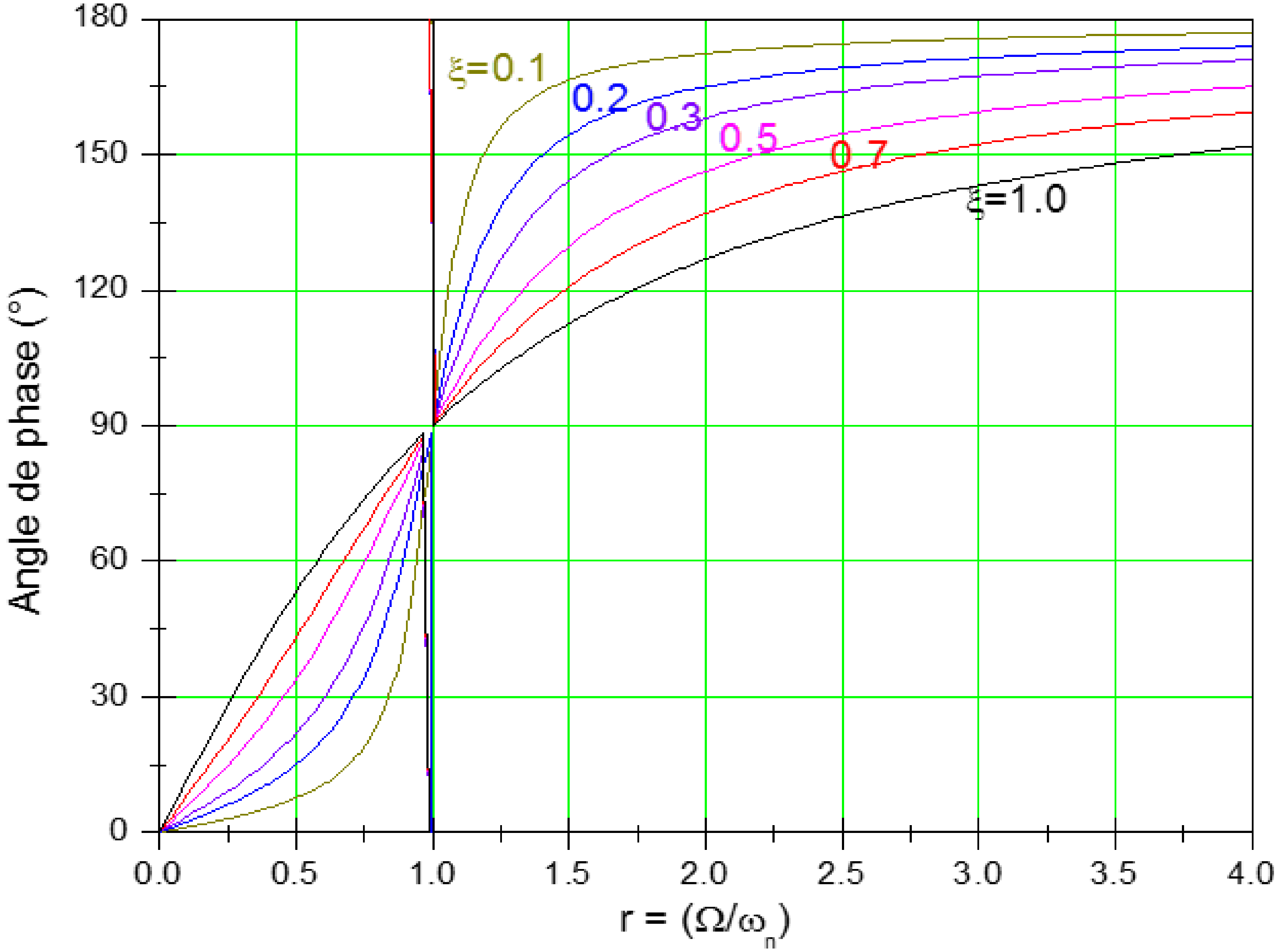
et la valeur de $\dfrac{X}{X_0}$ à $\Omega = \omega_n$ est donnée par

$$\left(\frac{X}{X_0}\right)_{\Omega=\omega_n} = \frac{1}{2\xi}$$

La solution complète est donnée par $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\right) + \frac{X_0}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}}\cos\left(\Omega t - \alpha\right)$$



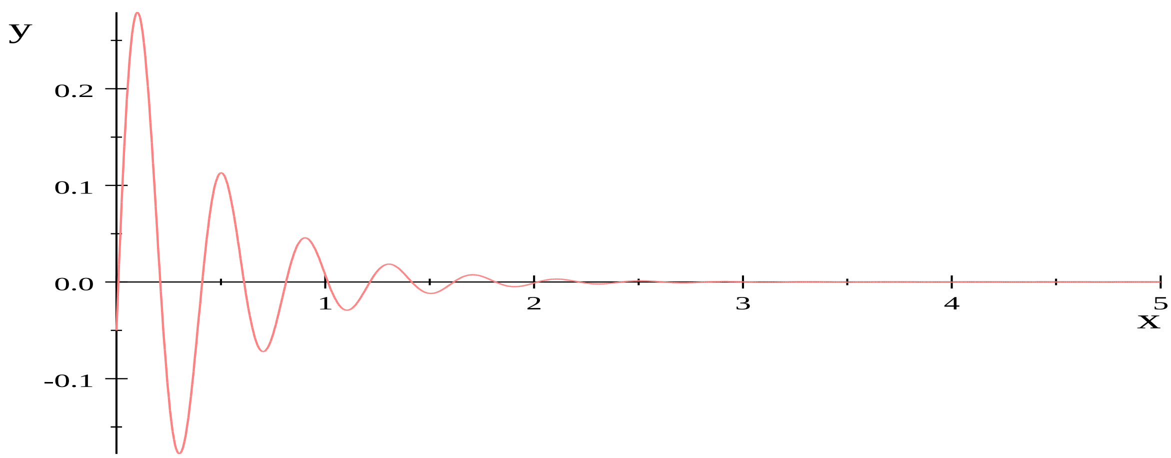

180
150
120
90
60
30
0
Angle de phase (°)
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
r = (Ω/ωn)
ξ=0.1
0.2
0.3
0.5
0.7
ξ=1.0

Exemple :

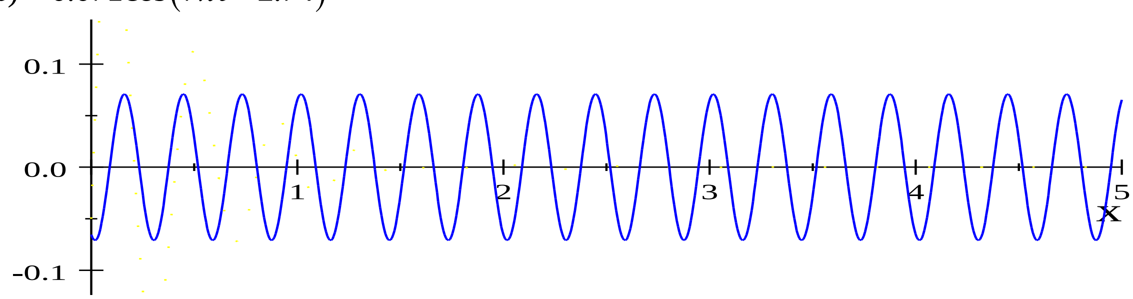
Pour un système vibratoire, $m = 10\,kg$, $k = 2500\,N/m$, et $c = 45\,N-s/m$. Une force harmonique d'amplitude $180\,N$ et de fréquence $3{,}5\,Hz$ agit sur la masse. Si le déplacement et la vitesse initiale de la masse sont $x_0 = 15\,mm$ et $v_0 = 5\,m/s$, trouver la solution complète qui représente le mouvement de la masse.

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t\right) + \frac{X_0}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}\cos\left(\Omega t-\alpha\right)$$

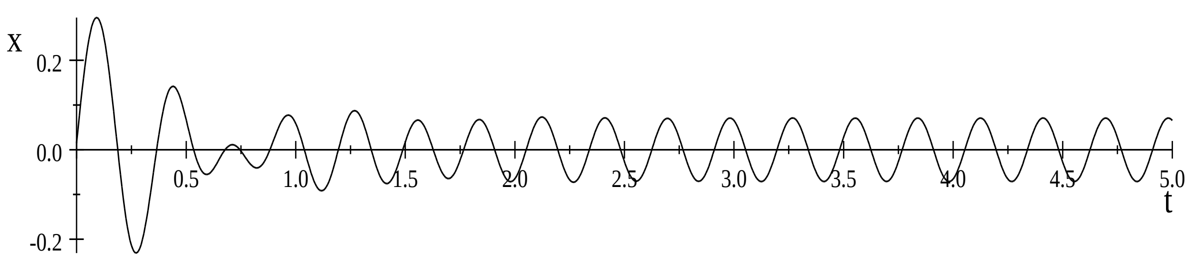
$$x_h(t) = e^{-2.25t}\left(0.03\cos 15.65t + 0.29\sin 15.65t\right)$$



$$x_p(t) = 0.071\cos\left(7\pi t - 2.74\right)$$



$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{-2.25t}\left(0.08\cos 15.65t + 0.29\sin 15.65t\right) + 0.071\cos\left(7\pi t - 2.74\right)$$



Facteur d'amortissement

L'amplitude à la résonance est donné par :

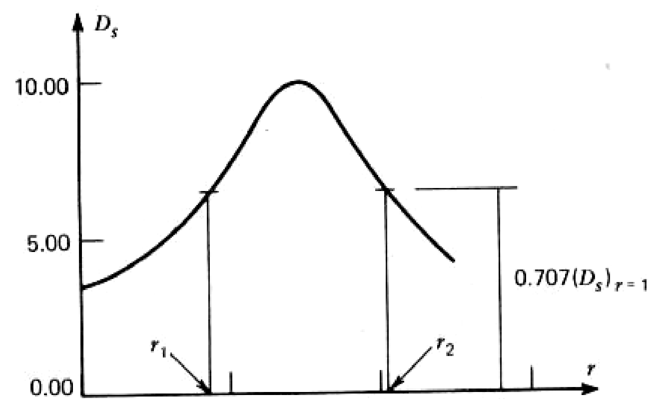
$$\left(D_S\right)_{r=1}=\left(\frac{X}{X_0}\right)_{r=1}=\frac{1}{2\xi}$$

la *méthode de la demi - puissance,* va être décrite. Une partie de la courbe de la réponse fréquentielle est montrée sur la figure. Les fréquences au-dessus et au-dessous de la résonance à laquelle l'amplitude de réponse est $\sqrt{2}/2$ fois l'amplitude de réponse résonnante sont désignées sous le nom de *points de demi - puissance* Ω_1 et Ω_2 avec les rapports de fréquences correspondants r_1 et r_2. Ces fréquences peuvent être obtenues en prenant $X_i=(\sqrt{2}/2)\,X_{r=1}$ et en employant l'équation

$$D_S=\frac{X}{X_0}=\frac{1}{\left[\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2\right]^{1/2}}$$

En élevant aux carrée cette équation, nous obtenons :

$$\left(\frac{X}{X_0}\right)^2=\frac{1}{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}$$



En posant $X_i=(\sqrt{2}/2)\,X_{r=1}$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\xi}\right)^2=\frac{1}{\left(1-r_i^2\right)^2+\left(2\,\xi\,r_i\right)^2}$$

où $r_i=r_1$ *ou* r_2, et cette équation peut être réécrite

$$r_i^4-2(1-2\xi^2)r_i^2+(1-8\xi^2)=0$$

dont les racines sont données par :

$$r_i^2=(1-2\xi^2)\pm 2\xi\sqrt{1+\xi^2}$$

En supposant que $\xi<<1$ et négligeant les termes d'ordre supérieur en ξ, on arrive au résultat

$$r_i^2=1\mp 2\xi$$

En utilisant l'expansion binomiale, on obtient

$$r_1=(1-2\xi)^{1/2}=1-\frac{1}{2}(2\xi)+\ldots$$

$$r_2=(1+2\xi)^{1/2}=1+\frac{1}{2}(2\xi)+\ldots$$

et comme $\xi<<1$,

$$r_2-r_1=2\xi$$

d'où

$$\xi=\frac{r_2-r_1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\Omega_2-\Omega_1}{\omega_n}\right)$$