CONVERGENCE DES MÉTHODES ITÉRATIVES

DR. REDOUANE TLEMSANI

MATRICE À DIAGONALE DOMINANTE

- Une matrice carrée *A* est à diagonale dominante si

$$\forall i \in [1, n], \; |a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| \qquad |7| > |2| + |0|$$

$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| \qquad |5| > |3| + |-1|$$

$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| \qquad |-6| > |0| + |5|$$

C'est donc une matrice à diagonale dominante.

MATRICE À DIAGONALE DOMINANTE

$$\begin{bmatrix} 20 & 12 & 25 \\ 12 & -18 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|a_{11}| < |a_{12}| + |a_{13}| \qquad |20| < |12| + |25|$$

$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| \qquad |-18| > 12 + |2|$$

$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| \qquad |5| > |1| + |2|$$

Ce n'est donc pas une matrice à diagonale dominante.

MATRICE SYMÉTRIQUE DÉFINIE POSITIVE

- Une matrice A est **symétrique** si $A^T = A$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 5 \\ 12 & 15 & 2 \\ 5 & 2 & 25 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 5 \\ 12 & 15 & 2 \\ 5 & 2 & 25 \end{bmatrix}$$

MATRICE SYMÉTRIQUE DÉFINIE POSITIVE

- **Mineur principal** d'une matrice carrée :

Soit A ϵ R_{nxn} est une matrice. Les mineurs principaux d'ordre k de cette matrice sont les déterminants des matrices tronquées $(a_{ij})_{1<i<j<k}$ pour k allant de 1 à n

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Les mineurs principaux de la matrice A sont $\Delta i,_{i = 1;2;3}$, tels que :

$\Delta_1 = 2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (2) * (-1) - (0) * (0) = -2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4+1=5$$

MATRICE SYMÉTRIQUE DÉFINIE POSITIVE

- La matrice symétrique A ϵ M_{nxn} est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs ($\forall$ i=1,n Δ_i>0)

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 5 \\ 12 & 15 & 2 \\ 5 & 2 & 25 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 5 \\ 12 & 15 & 2 \\ 5 & 2 & 25 \end{bmatrix}$$

1) $\Delta 1 = 20>0:$

2) $\Delta 2 = \begin{vmatrix} 20 & 12 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = (20) * (15) - (12) * (12) = 156 > 0$

3) $\Delta 3 = \begin{vmatrix} 20 & 12 & 5 \\ 12 & 15 & 2 \\ 5 & 2 & 25 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 15 & 2 \\ 2 & 25 \end{vmatrix} - 12 \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

=7420-3480-255=3685>0

NORMES MATRICIELLES

Les normes matricielles de ||A|| en termes des éléments de A que l'on note a_{ij}

$$\|A\|_1 = \max_{j=1\ldots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1\ldots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 5 \\ 12 & 15 & 2 \\ 5 & 2 & 25 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max_{j=1\ldots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = max[|20| + |12| + |5|, |12| + |15| + |2|, |5| + |2| + |25|]$$
$$= max|37{,}29{,}32| = 37$$

$$\|B\|_\infty = \max_{i=1\ldots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = max[|2| + |0| + |1|, |0| + |-1| + |1|, |1| + |0| + |-2|]$$
$$= max|3{,}2{,}3| = 3$$

LE RAYON SPECTRALE

Le **rayon spectral** d'une matrice est le maximum des modules des valeurs propres

$$\boxed{\rho(A) = \max|\lambda_i|}$$

Pour le calcul des valeurs propres λ_i, on calcule le déterminant de $A-\lambda I$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Convergence des méthodes itératives

Le rayon spectrale

A-λI= $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ - $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $= \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}$

$$det(A - \quad I)=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\big((-\lambda)(1-\lambda) - 1\big) + (\lambda + 1) + (1 - 1 + \lambda)$$

$$= -\lambda\big((-\lambda + \lambda^2 - 1)\big) + 2\lambda + 1$$

$$= \lambda^2 - \lambda^3 + \lambda + 2\lambda + 1 \quad = -\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 1$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 1$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda - 1)$$

Convergence des méthodes itératives

Le rayon spectrale

$$det(A-\lambda I) = -(\lambda+1)\left(\lambda-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(\lambda-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)$$

Les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_1 = -1\,, \qquad \lambda_2 = 1+\sqrt{2}, \qquad \lambda_3 = 1-\sqrt{2}$$

$$\rho(A) = \max|\lambda_i| = 1+\sqrt{2}$$

Convergence des méthodes itératives

Conditions Suffisantes

1. Si A est à **diagonale dominante** alors les méthodes de **Jacobi et de Gauss-Seidel convergent**
2. Si A est **strictement symétrique définie positive** alors la méthode de **Gauss-Seidel converge et la méthode de la relaxation converge pour 0 < ω < 2.**

3. $\|A\|_1 = \max_{j=1\ldots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1$

4. $$\|A\|_\infty = \max_{i=1\ldots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$$

Convergence des méthodes itératives

Condition nécessaire & Suffisantes

- La méthode itérative de forme $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+C$, converge si et seulement si

$$\rho(B)<1$$

$B = D^{-1}(E + F)$: Méthode de Jacobi

$B=(D - E)^{-1}F$: Méthode de Gauss-Seidel

$B=\left(\frac{D}{w}-E\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}D+F\right)$: Méthode de Relaxation

Convergence des méthodes itératives

Etude de Convergence

Exemple 1

Calculer les approximations successives de la solution du système par les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel. Dans quels cas ces méthodes convergent-elles vers la solution du problème ?

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{(k+1)} = \dfrac{1}{a}\left(1 - by^{(k)}\right) \\ y^{(k+1)} = \dfrac{1}{b}\left(1 - ax^{(k)}\right) \end{cases}$$

Convergence des méthodes itératives

Commençons par les conditions suffisantes,

A est à diagonale dominante si $\forall i \in [1, n], \; |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$

A est à diagonale si $|a| \succ |b|$

alors les méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel convergent si

$$|a| \succ |b|$$

Convergence des méthodes itératives

2

A est strictement symétrique définie positive

A = $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ A^T = $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

Donc $A=A^T$ ce **qui** veut dire que A est Symétrique
A ϵ M_{nxn} est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux
Sont strictement positifs ($\forall$ i=1,n $\Delta i>0$)
Det(A)= $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$ $=a^2 - b^2$ Det(A)>0 si $a^2 > b^2$ → $|a| \succ |b|$

La méthode de Gauss Seidel converge si $|a| \succ |b|$

Convergence des méthodes itératives

3

Condition nécessaire & Suffisantes (**Méthode de Jacobi**)

Matrice de Jacobi: $J=D^{-1}(E+F)$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad -E= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad -F= \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$$

$$E+F= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathbf{D^{-1}(E+F)} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b/a \\ -b/a & 0 \end{pmatrix}$

qui veut $J= \begin{pmatrix} 0 & -b/a \\ -b/a & 0 \end{pmatrix}$

Convergence des méthodes itératives

3

Condition nécessaire & Suffisantes (**Méthode de Jacobi**)

J= $\begin{pmatrix} 0 & -b/a \\ -b/a & 0 \end{pmatrix}$

Pour que la méthode de Jacobi converge si et seulement si ρ(j)<1

Calculons det(j-λI) $\Longrightarrow \lambda = \frac{b}{a}$ ou $\lambda = -\frac{b}{a}$

$$\rho(j) = \max\{|\lambda i|\} = \frac{|b|}{|a|}$$

La méthode de Jacobi converge si ρ(j)<1⇒ $|b| \prec |a|$

Convergence des méthodes itératives

4

La solution successive par la méthode de Gauss Seidel du système

A = $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{1}{a}\left(1 - by^{(k)}\right) \\ y^{(k+1)} = \frac{1}{b}\left(1 - ax^{(k+1)}\right) \end{cases}$

Pour que la méthode de Gauss Seidel converge si et seulement si $\rho(G)<1$

G: est la matrice de Gauss-Seidel, $G=(D-E)^{-1}F$

Convergence des méthodes itératives

4

G: est la matrice de Gauss-Seidel, $G=(D-E)^{-1}F$

$$G=\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} * \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{array}\right)_{l_2 = l_2 - \frac{b}{a} l_1} \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & -b/a & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & -b/a^2 & 1/a \end{array}\right)$$

Convergence des méthodes itératives

4

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -b/a^2 & 1/a \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -b/a^2 & 1/a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b/a \\ 0 & {b^2}/{a^2} \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -b/a \\ 0 & {b^2}/{a^2} \end{pmatrix}$$

$$det(G - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & -b/a \\ 0 & {b^2}/{a^2} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & -b/a \\ 0 & {b^2}/{a^2} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left(\frac{b^2}{a^2} - \lambda\right)$$

Convergence des méthodes itératives

4

$$det(G-\lambda I)=0 \Longrightarrow -\lambda\left(\frac{b^2}{a^2}-\lambda\right)=0 \Longrightarrow \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\rho(j) = \max\{|\lambda_i|\}=\max\left\{|0|, \left|\frac{b^2}{a^2}\right|\right\}=\frac{|b^2|}{|a^2|}$$

La méthode de Gauss Seidel converge si $\rho(G)<1 \Rightarrow |b^2| \prec |a^2|$
$\Rightarrow |b| \prec |a|$

Convergence des méthodes itératives

Etude de Convergence

Exemple 2

1. *On considère le système Ax = b, où:* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice de relaxation est donnée par :

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}D + F\right)$$

Où D, -E et -F sont respectivement les matrices Diagonale, Triangulaire inférieure et Triangulaire supérieure avec A = D - E - F.

1- Ecrire la matrice Lw de la méthode de relaxation.

2- déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre ω pour la convergence de la méthode de relaxation.

Convergence des méthodes itératives

Etude de Convergence

a) Ecrire la matrice Lw de la méthode de relaxation.

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad -E=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad -F=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

La matrice de relaxation est donnée par :

$$\mathcal{L}_w=\left(\frac{D}{w}-E\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}D+F\right)$$

$$D/w=\begin{bmatrix}1/\omega & 0 & 0\\ 0 & 1/\omega & 0\\ 0 & 0 & 1/\omega\end{bmatrix}$$

$$(D/w)-E=\begin{bmatrix}1/\omega & 0 & 0\\ 0 & 1/\omega & 0\\ 0 & 0 & 1/\omega\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\omega & 0 & 0\\ 1 & 1/\omega & 0\\ 0 & 0 & 1/\omega\end{bmatrix}$$

Convergence des méthodes itératives

Etude de Convergence

$$\left(\frac{D}{w}-\mathrm{E}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1/\omega & 0 & 0\\ 1 & 1/\omega & 0\\ 0 & 0 & 1/\omega\end{bmatrix}^{-1}$$

Qui est l'inverse de la matrice $\left(\frac{D}{w}+E\right)$

En utilisant le principe de la méthode d'élimination de Gauss, on calcule l'inverse de la matrice de la manière suivante $[A|I_d] \Longrightarrow [I_d|A]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1/\omega & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1/\omega & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/\omega & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \quad L_2=L_2-(\omega)L_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc}1/\omega & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\omega & 0 & -\omega & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/\omega & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Convergence des méthodes itératives

Etude de Convergence

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega^2 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \omega \end{array}\right] \qquad \left(\frac{D}{w} - \mathrm{E}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \omega & 0 & 0 \\ -\omega^2 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{1-w}{w} D + F\right) = \begin{bmatrix} (1-\omega)/\omega & 0 & 0 \\ 0 & (1-\omega)/\omega & 0 \\ 0 & 0 & (1-\omega)/\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-\omega)/\omega & 0 & 0 \\ 0 & (1-\omega)/\omega & -1 \\ 0 & 0 & (1-\omega)/\omega \end{bmatrix}$$

Convergence des méthodes itératives

Etude de Convergence

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}D + F\right) = \begin{bmatrix} \omega & 0 & 0 \\ -\omega^2 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} (1-\omega)/\omega & 0 & 0 \\ 0 & (1-\omega)/\omega & -1 \\ 0 & 0 & (1-\omega)/\omega \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-\omega) & 0 & 0 \\ -\omega(1-\omega) & (1-\omega) & -\omega \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix}$$

Convergence des méthodes itératives

Etude de Convergence

b) déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre ω pour la convergence de la méthode de relaxation.

$$det(\mathcal{L}_w - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} (1-\omega) & 0 & 0 \\ -\omega(1-\omega) & (1-\omega) & -\omega \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} (1-\omega)-\lambda & 0 & 0 \\ -\omega(1-\omega) & (1-\omega)-\lambda & -\omega \\ 0 & 0 & (1-\omega)-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= ((1-\omega)-\lambda) * \det\begin{pmatrix} (1-\omega)-\lambda & 0 \\ 0 & (1-\omega)-\lambda \end{pmatrix}$$

Convergence des méthodes itératives

Etude de Convergence

$det(\mathcal{L}_w - \lambda I)$=$((1-\omega)-\lambda)$*$\left((1-\omega)-\lambda\right)^2$=$\left((1-\omega)-\lambda\right)^3$

$det(\mathcal{L}_w - \lambda I)$=0 $\Rightarrow$ $\left((1-\omega)-\lambda\right)^3$=0

Les valeurs propres de Lw sont $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1-\omega$

donc $\rho(\mathcal{L}_w)$=$|1-\omega|$

Convergence des méthodes itératives

Etude de Convergence

on a alors les équivalences suivantes :

La procédure de relaxation est convergente :

$$\rho(\mathcal{L}_w)<1 \Leftrightarrow |1-\omega|<1$$
$$\Leftrightarrow 0<\omega<2$$