الجمهوريـــــــــــــــــــة الجزائريـــــــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــــة
وزارة التعليــــــــــم العــــــــالي والبحـــــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

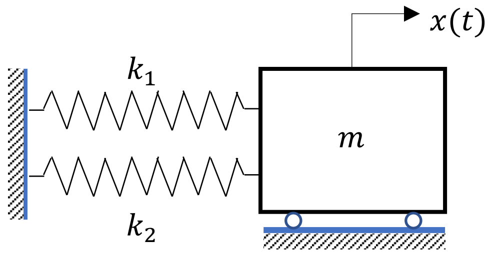
BOUTCHICHA
Djilali

Vibration libre d'un système à un degré de liberté

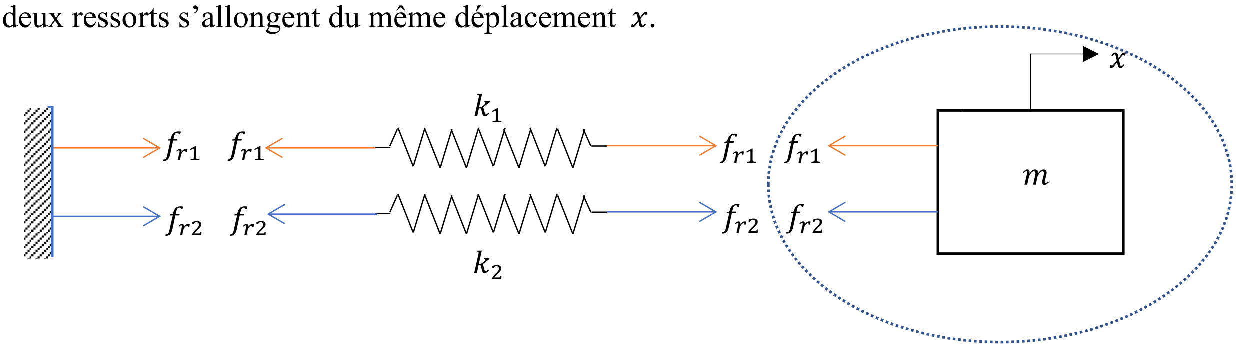
(Supplémentaires)

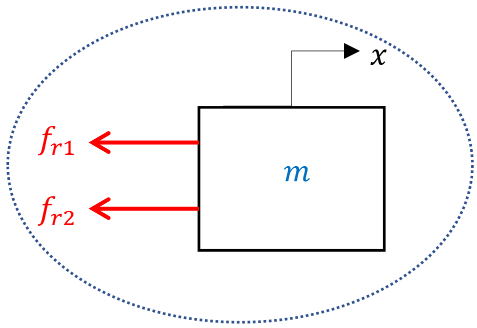
Exercice 1

Déterminer la pulsations propre (naturelle) du système illustré ci-dessous.



Les deux ressorts s'allongent du même déplacement x.





a) On isole a masse m

b) On applique la loi de la dynamique

$$\sum F_x = ma_x$$

$$-f_{r1} - f_{r1} = ma_x$$

c) On relie les forces aux variables

$$f_{r1} = k_1 x$$

$$f_{r2} = k_2 x$$

$$-k_1 x - k_2 x = m\ddot{x}$$

d) On réarrange

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{(k_1 + k_2)}{m} x = 0$$

e) La pulsation propre est

$$\omega_n = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{m}}$$

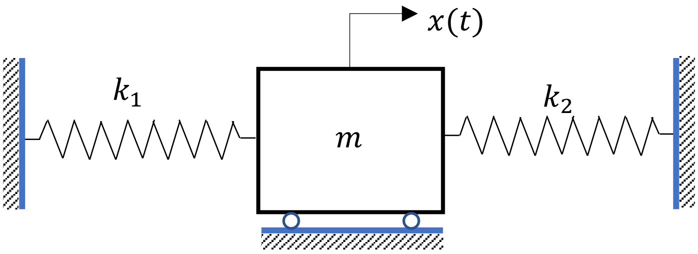
Le coefficient de raideur équivalent $k_{eq} = (k_1 + k_2)$

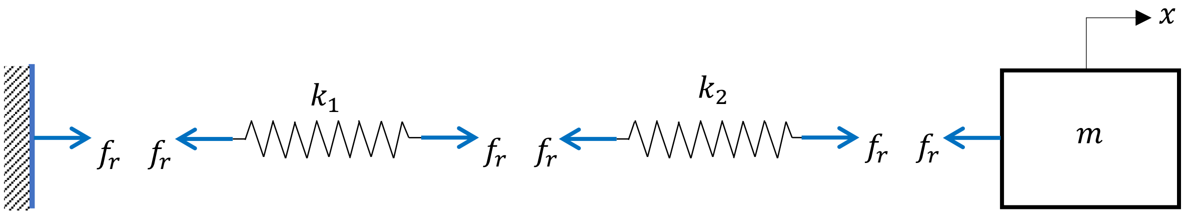
الجمهوريـــــــــــــــــــة الجزائريـــــــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــــة
وزارة التعليــــــــــــم العــــــــــالي والبحـــــــث العلــــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA Djilali

Exercice 2

Déterminer la pulsations propre (naturelle) du système illustré ci-dessous.





Le déplacement de la masse m est égal à la somme des allongements des deux ressorts

$$x = x_1 + x_2$$

La tension dans les ressorts est identique

$$f_r = k_1 x_1 = k_2 x_2 = k_{eq} x \Longrightarrow x_1 = \frac{f_r}{k_1} \; ; \; x_2 = \frac{f_r}{k_2} \quad ; \quad x = \frac{f_r}{k_{eq}}$$

$$\frac{f_r}{k_{eq}} = \frac{f_r}{k_1} + \frac{f_r}{k_2} \Longrightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

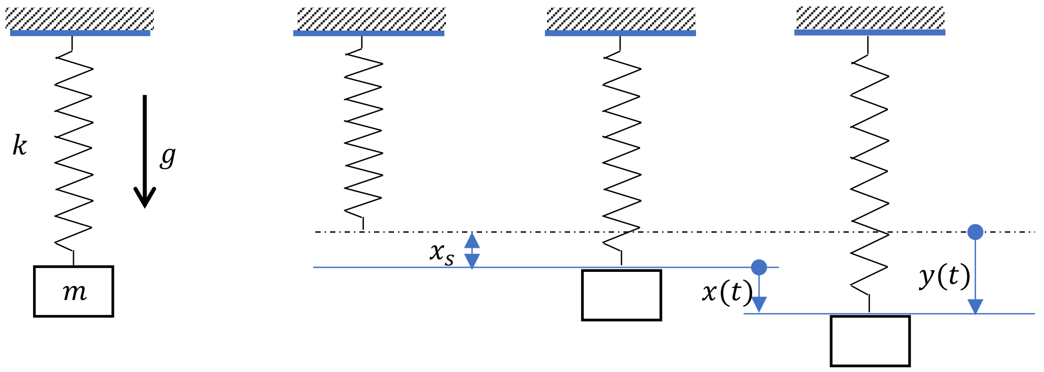
Le coefficient de raideur équivalent $\quad k_{eq} = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}.$$

Exercice 3

Déterminer l'équation de mouvement du système en fonction de (y : l'allongement total) et de (x : l'allongement relatif à la position d'équilibre statique). Discuter de l'effet de la gravité sur la fréquence naturelle.

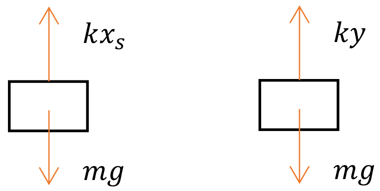
Ressort vide   Equilibre statique   Système en mouvement



Equilibre statique

$$+\downarrow \sum F = 0 \quad \Rightarrow \quad -kx_s + mg = 0$$

$$kx_s = mg \quad \Longrightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{x_s}$$



Equilibre Dynamique

$$+\downarrow \sum F = ma \qquad \Rightarrow \quad -ky + mg = ma$$

$$m\ddot{y} + ky = mg$$

Changement de variable

$$y(t) = x(t) + x_s$$

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t)$$

$$\ddot{y}(t) = \ddot{x}(t)$$

On remplace dans l'équation de mouvement

$$m\ddot{x} + kx + kx_s = mg$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

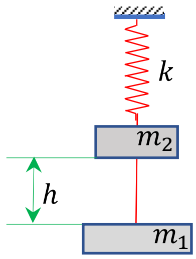
BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 4

Une masse $m_1 = 22\ kg$ suspendue à un ressort de raideur $k = 17\ kN/m$, une seconde masse $m_2 = 10kg$ tombe d'une hauteur $h = 0{,}2\ m$ et se fixe solidement à m_1.

a) Déterminer l'expression du mouvement de $x(t)$ des deux masses après l'instant de l'impact.

b) Déterminer le déplacement maximal des deux masses.



Solution

a) Le système à étudier est composé d'un corps solide de masse $m_1 + m_2$ et d'un ressort de raideur k .

L'équation de mouvement est :

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + kx = 0$$

la solution de cette équation est :

$$x(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t$$

avec ω_n la pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$$

les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$ donnent

$$A_1 = x_0, \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{v_0}{\omega_n}.$$

d'où

$$x(t) = x_0 \cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin\omega_n t$$

Détermination de x_0 :

x_0 est la position de la masse par rapport à la position d'équilibre du système à $t = 0$, à l'instant de l'impact.

avec les deux masses l'allongement statique est:

$$\delta = \frac{(m_1+m_2)g}{k},$$

l'allongement statique dû à la masse m_1 est:

$$\delta_1 = \frac{m_1 g}{k}.$$

à l'instant $t = 0$ le système se trouve au-dessus de la position d'équilibre de

$$\delta_2 = \delta - \delta_1 = \frac{m_2 g}{k}$$

Détermination de v_0 :

tout d'abord il faut déterminer la vitesse v_2 de m_2 avant le choc

$$m_2 gh = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{(Conservation de l'énergie mécanique)}$$

$$v_2 = \pm\sqrt{2gh}$$

la vitesse de la masse du système après le choc

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_0$$

si on choisit le sens positif vers le haut la vitesse est négative

$$v_0 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\sqrt{2gh}$$

Application numérique

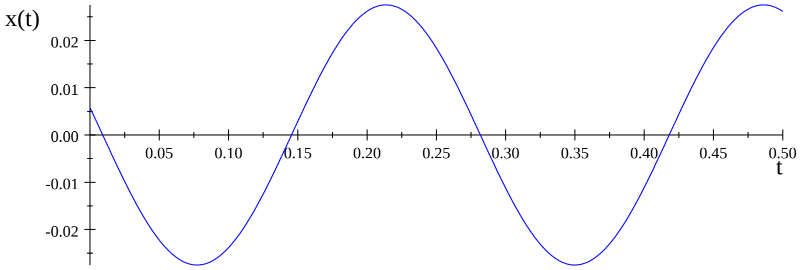
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = \sqrt{\frac{17\times10^3}{22+10}} = 23.049 = 23.05 \ \ rad/s$$

$$x_0 = \frac{m_2 g}{k} = \frac{10\times9.81}{17\times10^3} = 5.77\times10^{-3} \ \ m$$

$$v_0 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\sqrt{2gh} = -\frac{10}{(22+10)}\sqrt{2\times9.81\times0.2} = -0.61903 = -0.62 \ \ m/s$$

d'où l'expression du mouvement $x(t)$ des deux masses

$$x(t) = 5.77\times10^{-3}\cos 23.05t - \frac{0.62}{23.05}\sin 23.05t$$



le déplacement maximal

$$x_{\max} = x_0 + A$$

$$x_{\max} = x_0 + \sqrt{(x_0)^2 + (\frac{v_0}{\omega_n})^2}$$

Application numérique

$$x_{\max} = 5.77\times10^{-3} + \sqrt{\left(5.77\times10^{-3}\right)^2 + \left(\frac{-0.62}{23.05}\right)^2}$$

$$= 3.3240\times10^{-2}$$

الجمهوريـــــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العــــــالي والبحـــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 5

On considère le système représenté sur la figure ci-contre

a) Ecrire l'équation du mouvement.

b) Si on donne : $m = 1\ kg$, $k = 100\ N/m$ et $c = 5\ N.s/m$

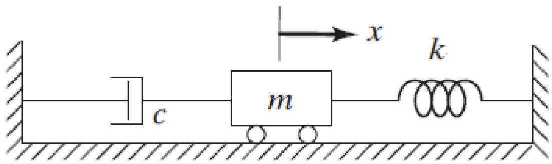
1- Calculer la pulsation propre du système.

2- Calculer le coefficient d'amortissement critique.

3- Calculer le facteur d'amortissement.

4- Calculer la pseudo-pulsation.

5- Ecrire la réponse du système pour les conditions initiales suivantes :
à $t = 0$, $x(0) = 0.1\ m$ et $v(0) = 10\ m/s$.

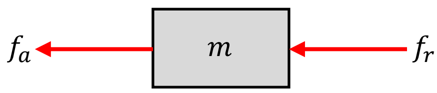


Solution

Equation de mouvement

Isoler la masse et tracer le diagramme du corps libre

Application de la 2ème loi de Newton



$$\overset{+}{\longrightarrow} \sum f_x = ma_x$$

$$ma_x = -f_a - f_r$$

Relier les forces aux paramètres du problème

$$f_r = kx$$

$$f_a = c\dot{x}$$

Remplacer dans l'équation d'équilibre dynamique

$$m\ddot{x} = -c\,\dot{x} - k\,x$$

$$m\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = 0$$

Pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\tfrac{k}{m}}; \qquad \text{Application numérique} \qquad \omega_n = \sqrt{\tfrac{100}{1}} = 10\ \ rad/s$$

Coefficient d'amortissement critique

$$c_c = 2\sqrt{km}; \qquad \text{Application numérique} \qquad c_c = 2\sqrt{100 \times 1} = 20\ \ N.s/m$$

Facteur d'amortissement

$$\xi = \tfrac{c}{c_c}; \qquad \text{Application numérique} \qquad \xi = \tfrac{5}{20} = 0.25$$

Pseudo-pulsation

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \qquad \text{Application numérique} \qquad \omega_d = 10\sqrt{1-0.25^2} = 9.68\ \ rad/s$$

La réponse pour un système sous amorti $(\xi < 1)$ est :

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t\right) = e^{-\xi\omega_n t}\left(x_0\cos\omega_d t + \tfrac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$$

$$x(t) = e^{-0.25\times 10t}\left(0.1\cos 9.68t + \tfrac{10+0.25\times10\times0.1}{9.68}\sin 9.68t\right) = e^{-2.5t}\left(0.1\cos 9.68t + 1.06\sin 9.68t\right)$$