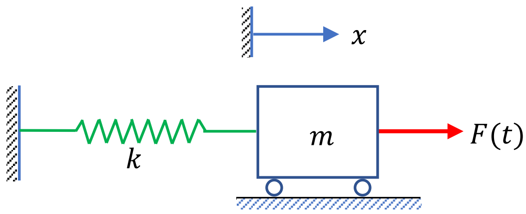
الجمهوريـــــــــــــــــــة الجزائريــــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيــــــة
وزارة التعليـــــــــم العــــــــالي والبحــــــث العلــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

Système à 1DDL Forcé sans amortissement

Exercice 1

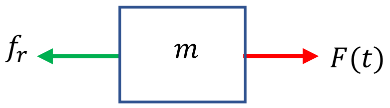
Pour le système à un degré de liberté, avec $m = 5\,kg, k = 2500\,N/m, F_0 = 20\,N$, et la pulsation d'excitation $\Omega = 18\,rad/s$. La masse possède les conditions initiales $x_0 = 0.01\,m$ et $v_0 = 1\,m/s$. Déterminer le déplacement de la masse à $t = 1\,s$.



Solution :

Equation de mouvement

Isoler la masse et tracer le diagramme du corps libre



Application de la 2ème loi de Newton

$$\xrightarrow{+} \sum f_x = ma_x$$

$$ma_x = -f_r + F(t)$$

Relier les forces aux paramètres du problème

$$f_r = kx$$

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t$$

Remplacer dans l'équation d'équilibre dynamique

$$m\ddot{x} = -k\,x + F_0 \cos \Omega t$$

$$m\ddot{x} + \,k\,x = F_0 \cos \Omega t$$

La solution complète est :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \cos \Omega t$$

En utilisant les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$, une expression générale de la réponse d'un système masse-ressort à une excitation harmonique (cos) est :

$$x(0) = x_0$$

$$A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0 + \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \cos 0 = x_0$$

$$A_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\Omega^2} = x_0 - \frac{X_0}{1 - r^2}$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A_1 \sin \omega_n t + \omega_n A_2 \cos \omega_n t - \Omega \frac{X_0}{1 - r^2} \sin \Omega t$$

$$\dot{x}(0) = v_0,$$

$$-\omega_n A_1 \sin 0 + \omega_n A_2 \cos 0 - \Omega \frac{X_0}{1 - r^2} \sin 0 = v_0$$

$$\omega_n A_2 = v_0 \quad \Longrightarrow A_2 = \frac{v_0}{\omega_n}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{X_0}{1 - r^2}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right) \sin \omega_n t + \frac{X_0}{1 - r^2} \cos \Omega t$$

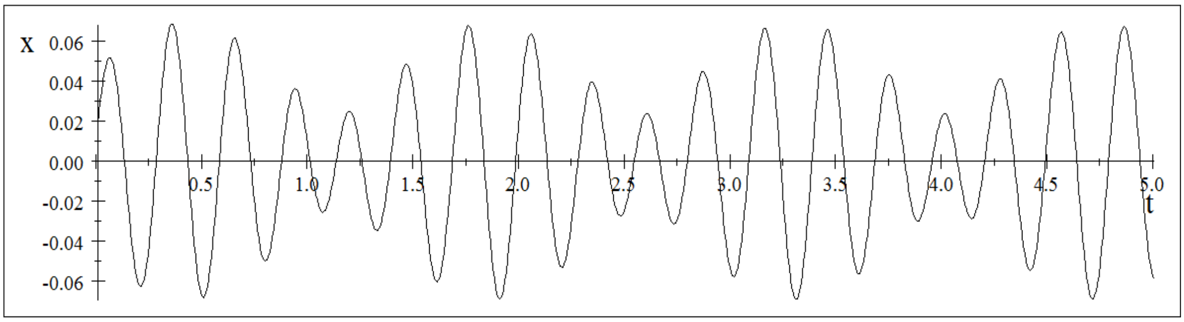
Les données : $k = 2500\ N/m,\ \ m = 5\ kg,\ \ \Omega = 18\ rad/s,\ F_0 = 20\ N,\ x_0 = 0.01\ m$ et $v_0 = 1\ m/s$.

Application numérique $\quad \omega_n = \sqrt{\frac{2500}{5}} = 22.361\ \ rad\ /\ s$

$$X_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{20}{2500} = 0.008\ m,\ \text{ déplacement statique dû à } F_0$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{18}{22.261} = 0.805, \text{rapport des fréquences}$$

$$x(t) = \left(0.01 - \frac{0.008}{1 - 0.805^2}\right) \cos 22.36t + \left(\frac{1}{22.36}\right) \sin 22.36t + \frac{0.008}{1 - 0.805^2} \cos 18t$$



$$x(1) = 0.0107\ m$$

الجمهوريـــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــــة
وزارة التعليـــــــــم العـــــــــالي والبحـــــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

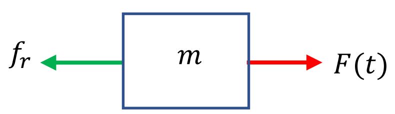
Exercice 2

Pour le système à un degré de liberté, avec $m = 10\,kg, k = 4000\,N/m, F_0 = 40\,N$, et la pulsation d'excitation $\Omega = 20\,rad/s$. Les conditions initiales $x_0 = 0.02\,m$ et $v_0 = 0$. Déterminer le déplacement de la masse après $t = 0.5\,s$ et $t = 1\,s$.

Solution :

Equation de mouvement

Isoler la masse et tracer le diagramme du corps libre



Application de la 2ème loi de Newton

$$\overset{+}{\longrightarrow} \sum f_x = ma_x$$

$$ma_x = -f_r + F(t)$$

Relier les forces aux paramètres du problème

$$f_r = kx$$

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t$$

Remplacer dans l'équation d'équilibre dynamique

$$m\ddot{x} = -k\,x + F_0 \cos \Omega t$$

$$m\ddot{x} + \; k\,x = F_0 \cos \Omega t$$

Les données : $k = 4000\,N/m,\;\; m = 10\,kg,\;\; \Omega = 20\,rad/s,\; F_0 = 40\,N,\; x_0 = 0.02\,m$ ev$_0 = 0$.t $v_0 = 0$.

$$X_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{40}{4000} = 0.01\,m,\;\text{déplacement statique dû à } F_0$$

Application numérique $\omega_n = \sqrt{\frac{4000}{10}} = 20 \;\; rad/s$

A la résonance la solution complète (démontrer dans le cours) est :

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t + \omega_n \mathrm{t} \frac{X_0}{2} \sin \omega_n t$$

الجمهوريـــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العـــــــالي والبحـــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

Condition aux limites :

$$x_0 = 0.02\ m$$

$$A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0 + \frac{X_0 \omega_n 0}{2} \sin 0 = 0.02$$

$$A_1 = x_0 = 0.02\ m$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A_1 \sin \omega_n t + \omega_n A_2 \cos \omega_n t + \frac{X_0 \omega_n \mathrm{t}}{2} \cos \omega_n t$$

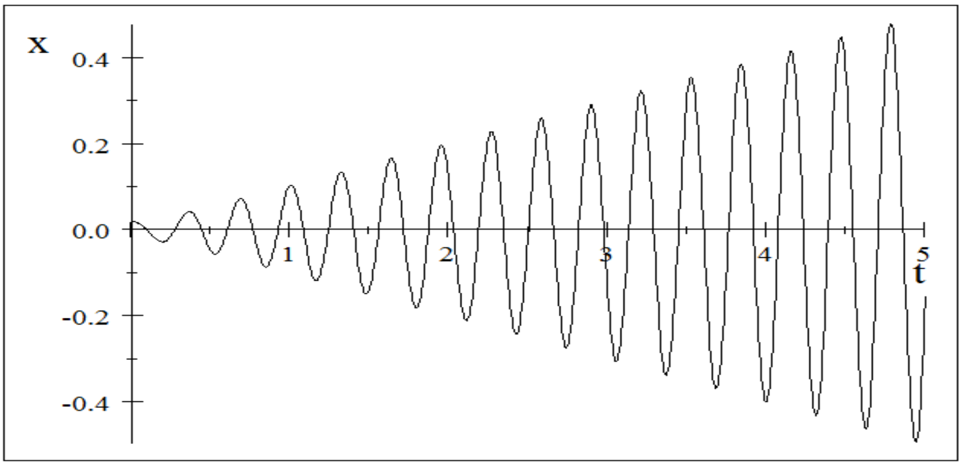
$$v_0 = 0.$$

$$-\omega_n A_1 \sin 0 + A_2 \omega_n \cos 0 + \frac{X_0 \omega_n 0}{2} \cos 0 = v_0$$

$$A_2 = \frac{v_0}{\omega_n} = 0$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{X_0 \omega_n \mathrm{t}}{2} \sin \omega_n t$$

$$x(t) = 0.02 \cos 20t + \frac{0.01 \times 20\mathrm{t}}{2} \sin 20t$$



$$x(t = 0.5) = -4.398\ cm$$

$$x(t = 1.0) = +9.946\ cm$$

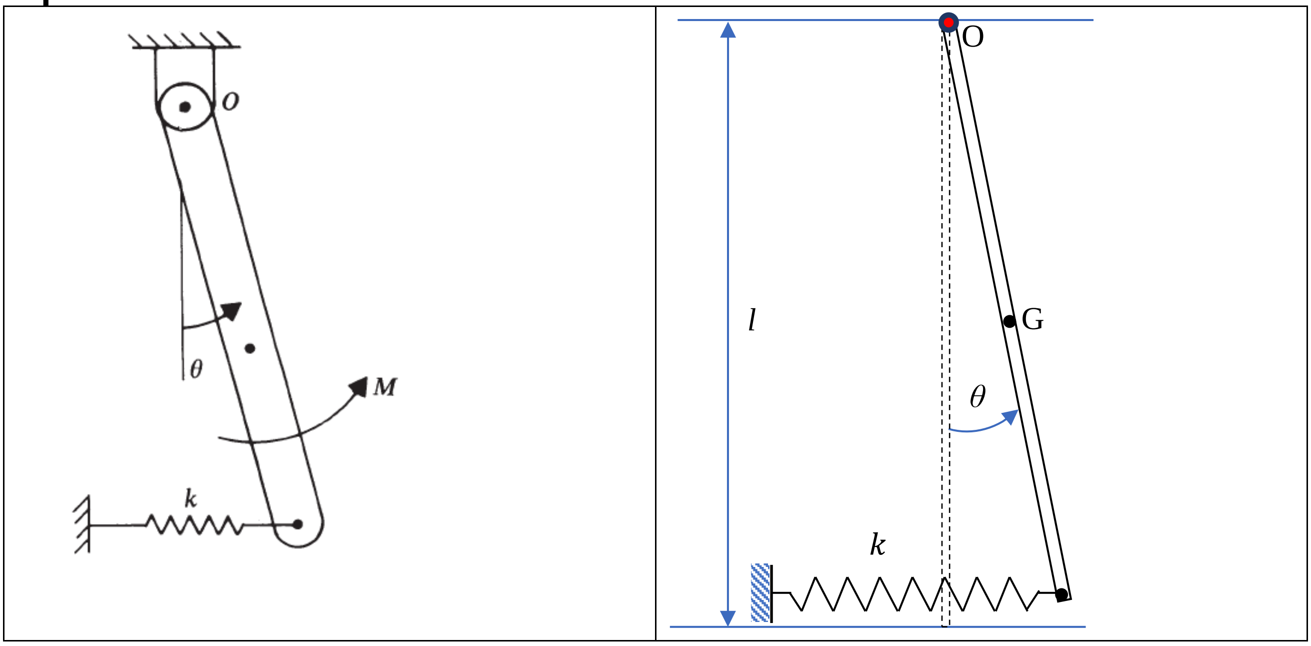
الجمهوريـــــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العـــــــالي والبحـــــــث العلـــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

<u>Exercice 3</u>

Une barre uniforme (figure ci-dessous) de masse m et de longueur l, articulée au point O et connectée à un ressort linéaire de coefficient de rigidité k. Si la barre est soumise à un moment $M(t) = M_0 \sin \Omega t$, déterminer la réponse dans l'état permanent du système.

Equations du mouvement



Energie Cinétique

$$T = \tfrac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2$$

Energie Potentielle

- Ressort

$$V_r = \tfrac{1}{2} k e^2 = \tfrac{1}{2} k x^2$$

$$x = l\theta$$

$$V_r = \tfrac{1}{2} k l^2 \theta^2$$

- Barres

$$V_b = mg\, \tfrac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

Approximation pour des angles faibles : $1-\cos\theta \simeq \frac{\theta^2}{2}$

$$V_b = \tfrac{1}{4} mgl\theta^2$$

$$V = \tfrac{1}{2} k l^2 \theta^2 + \tfrac{1}{4} mgl\theta^2$$

Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

Pour notre cas

$$q = \theta$$

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

La fonction de dissipation est nulle $(R=0)$ pas d'amortissement.

La force généralisée est $(Q_\theta = M_0 \sin \Omega t)$

L'équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_0 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = J_0 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2} k l^2 \theta^2 + \frac{1}{4} mgl\theta^2\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k l^2 \theta + \frac{1}{2} mgl\theta$$

$$J_0 \ddot{\theta} + \left(kl^2 + \frac{1}{2} mgl\right)\theta = M_0 \sin \Omega t$$

$$m_e = J_0 = \frac{1}{3} m l^2 \quad ; \quad k_e = kl^2 + \frac{1}{2} mgl$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{3(2kl + mg)}{2ml}} = \sqrt{\frac{3k}{m} + \frac{3g}{2l}}$$

La solution permanente est de la forme

$$\theta_p(t) = \Theta \sin \Omega t$$

$$\ddot{\theta}_p(t) = -\Omega^2 \Theta \sin \Omega t$$

$$-\Omega^2 J_0 \Theta \sin \Omega t + \left(kl^2 + \frac{1}{2} mgl\right)\Theta \sin \Omega t = M_0 \sin \Omega t$$

$$\left(kl^2 + \frac{1}{2} mgl - \Omega^2 J_0\right)\Theta = M_0$$

$$\Theta = \frac{M_0}{\left(kl^2 + \frac{1}{2} mgl - \Omega^2 J_0\right)}$$

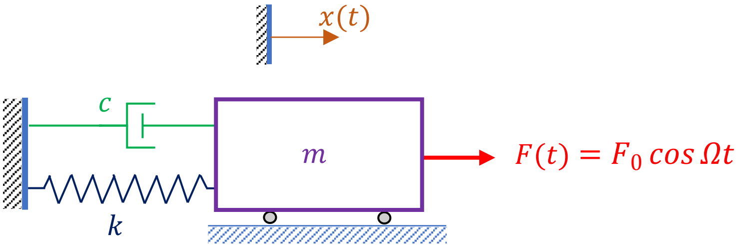
$$\theta_p(t) = \frac{M_0}{\left(kl^2 + \frac{1}{2} mgl - \Omega^2 J_0\right)} \sin \Omega t$$

الجمهوريـــــــــــــــــــــة الجزائريــــــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــــة
وزارة التعليــــــــــم العـــــــــالي والبحـــــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

Exercice 4

Déterminer la réponse permanente du système à un degré de liberté avec amortissement visqueux soumis à une force d'excitation harmonique.



Solution

L'équation de mouvement

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

La réponse forcée

$$x(t) = X \cos(\Omega t - \alpha)$$
$$\dot{x}(t) = -\Omega X \sin(\Omega t - \alpha)$$
$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X \cos(\Omega t - \alpha)$$

La force de rappel

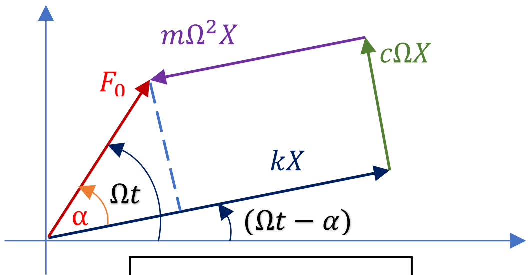
$$f_r(t) = kx(t) = kX \cos(\Omega t - \alpha)$$

La force d'amortissement

$$f_a(t) = c\dot{x}(t) = c\Omega X \cos\left(\Omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

La force d'inertie

$$f_i(t) = m\ddot{x}(t) = m\Omega^2 X \cos(\Omega t - \alpha + \pi)$$



Polygone des forces

L'amplitude X

$$F_0^2 = (kX - m\Omega^2 X)^2 + (c\Omega X)^2$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$$

La phase α

$$\tan \alpha = \frac{c\Omega X}{kX - m\Omega^2 X} = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}\right)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \cos(\Omega t - \alpha)$$

$$x(t) = \frac{X_0}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cos(\Omega t - \alpha)$$

où $r = \frac{\Omega}{\omega_n}$, $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$, $X_0 = \frac{F_0}{k}$

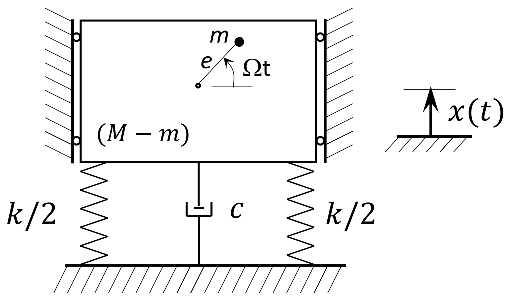
الجمهوريـــــــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــــة
وزارة التعليـــــــــم العـــــــالي والبحــــــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

Exercice 5

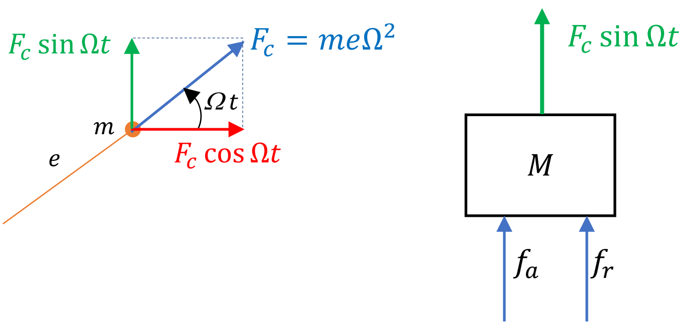
Le balourd dans les machines tournantes est une source commune des vibrations d'excitation, cette situation est illustrée schématiquement sur la figure ci-contre. Soit $(M - m)$ la masse de la machine et m la masse du balourd, qui tourne avec $\Omega \;\; rad/s$.

a) Déterminer l'équation du mouvement vertical de la machine.
b) Déterminer l'expression pour l'état permanent de la réponse u/u₀ de ce système. On pose $X_0 = \dfrac{me\Omega^2}{k}$.



Solution :

L'équation de mouvement de la masse



$$M\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + F_c \sin \Omega t$$
$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\Omega^2 \sin \Omega t$$

$$x_p(t) = \frac{me\Omega^2/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\Omega t - \alpha) = \frac{X_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\Omega t - \alpha)$$

où $r = \frac{\Omega}{\omega_n}$, $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$, $\alpha = \mathrm{atan}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)$.

$$\frac{x_p(t)}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\Omega t - \alpha)$$