الجمهوريـــــــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــــم العــــــــــالي والبحـــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

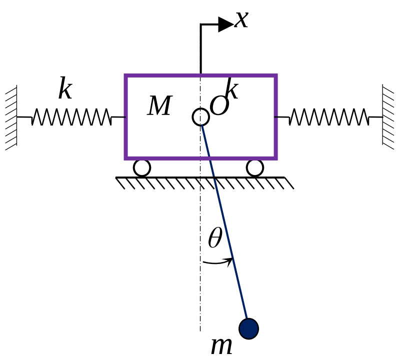
BOUTCHICHA Djilali

Exercice 1

Un Chariot de masse M repose sans frottement sur un plan horizontal oscille sous l'action de deux ressorts identiques de rigidité k fixés à la masse par l'une de leurs extrémités et à un support fixe par l'autre ; un pendule **simple** de longueur l et de masse m est articulé au point O.

a) Déterminer les équations de mouvement en utilisant les équations de Lagrange. L'angle θ reste faible.

b) Calculer les deux fréquences naturelles si on donne $M = 10\ kg$, $m = 0{,}5\ kg$, $l = 0{,}3\ m$ et $k = 720\ kN/m$.



Solution

Energies potentielles

Energie potentielle élastique des deux ressorts

$$E_{p1} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Energie potentielle de gravitation du pendule simple

$$E_{p2} = mgy_m$$

$$y_m = l - l\cos\theta = l(1 - \cos\theta)$$

Pour θ faible $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots$

$$E_{p2} = \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

Energie potentielle du système

$$E_p = E_{p1} + E_{p2}$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

Energies cinétiques

Energie cinétique du chariot

$$E_{c1} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

Energie cinétique du pendule simple

$$E_{c2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\right)^2$$

BOUTCHICHA
Djilali

Autre méthode pour déterminer l'énergie cinétique
Position de m

$$\begin{cases} x_m = x + l\sin\theta \\ y_m = l\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v_m = \begin{cases} \dot{x}_m = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_m = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$v_m^2 = \left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(-l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2$$

$$v_m^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta$$

Pour θ faible $\cos\theta \approx 1$

$$v_m^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}$$

$$E_{c2} = \tfrac{1}{2} m v_m^2$$

$$E_{c2} = \tfrac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\right)$$

Energie cinétique du système

$$E_c = E_{c1} + E_{c2}$$

$$E_c = \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\right)^2$$

Equations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0 \quad avec \;\; i = 1{,}2$$

Pour la coordonnée généralisée $q_1 = x$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2kx$$

d'où la première équation de mouvement

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + 2kx = 0 \qquad (1)$$

Pour la coordonnée généralisée $q_2 = \theta$

BOUTCHICHA
Djilali

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial \theta}+\frac{\partial E_p}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}+ml\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta}+ml\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta}=mgl\theta$$

d'où la deuxième équation de mouvement

$$ml\ddot{x}+ml^2\ddot{\theta}+mgl\theta=0 \qquad (2)$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix}(M+m) & ml\\ ml & ml^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}2k & 0\\ 0 & mgl\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Les solutions sont cherchées sous la forme

$$\begin{cases}x=X\cos\omega t\\ \theta=A\cos\omega t\end{cases},\quad \begin{cases}x=X\sin\omega t\\ \theta=A\sin\omega t\end{cases}\ \text{ou}\ \begin{cases}x=Xe^{i\omega t}\\ \theta=Ae^{i\omega t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=X\cos\omega t\\ \theta=A\cos\omega t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}=-\omega^2X\cos\omega t\\ \ddot{\theta}=-\omega^2A\cos\omega t\end{cases}$$

Et en les reportant dans le système d'équations de mouvement, le système homogène suivant est obtenu:

$$\begin{bmatrix}2k-\omega^2(M+m) & -\omega^2ml\\ -\omega^2ml & mgl-\omega^2ml^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}X\\ A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Les solutions autres que les solutions triviales $X=A=0$ sont déduites des valeurs de ω qui annulent l

déterminant de la matrice

BOUTCHICHA
Djilali

$$\begin{vmatrix} 2k-\omega^2(M+m) & -\omega^2 ml \\ -\omega^2 ml & mgl-\omega^2 ml^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$Ml^2 m\omega^4 - (2kl^2 m + glm^2 + Mglm)\omega^2 + 2gklm = 0$$

$$\omega^4 - \left[\frac{2k}{M} + \frac{M+m}{M}\frac{g}{l}\right]\omega^2 + \frac{2k}{M}\frac{g}{l} = 0$$

avec $M = 10\,kg,\ \ m = 0{,}5\,kg,\ \ l = 0{,}3\,m$ et $k = 720\times 10^3 N/m.$

$$\omega^4 - \left[\frac{2\times720\times10^3}{10} + \frac{10+0.5}{10}\frac{9.81}{0.3}\right]\omega^2 + \frac{2\times720\times10^3}{10}\frac{9.81}{0.3} = 0$$

$$\omega^4 - 1.\,4403\times10^5\omega^2 + 4.\,7088\times10^6 = 0$$

on pose $\lambda = \omega^2$

$$\lambda^2 - 1.\,4403\times10^5\lambda + 4.\,7088\times10^6 = 0 \quad ,$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 32.701 \\ \lambda_2 = 1.44\times10^5 \end{array}$$

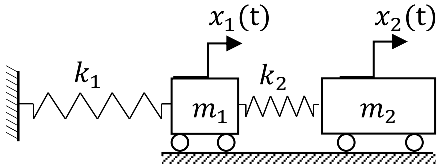
Les pulsations propres :

$\omega_1 = 5.72\ \ rad/s$ & $\omega_2 = 379.47\ \ rad/s$

BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 2

Trouver les fréquences naturelles du système suivant, avec :
$m_1 = m,\ m_2 = 2m\ ,\ k_1 = k\ \ \&\ \ k_2 = 2k.$
Déterminer la réponse du système quand $k = 1000\,N/m\,,\ m = 20\ kg$, et les valeurs initiales des déplacements des masses m_1 et m_2 sont 1 et -1 respectivement.



Solution

Les équations de mouvement

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - 2kx_2 = 0$$
$$2m\ddot{x}_2 - 2kx_1 - 2kx_2 = 0$$

Supposons que le mouvement est sinusoïdal

$$x_1(t) = X_1\sin(\omega t + \varphi)$$
$$x_2(t) = X_2\sin(\omega t + \varphi)$$

donc

$$\left(3k - m\omega^2\right)X_1 - 2kX_2 = 0$$
$$-2kX_1 + \left(2k - 2m\omega^2\right)X_2 = 0$$

$$X_2 = \frac{\left(3k - m\omega^2\right)}{2k}X_1$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} (3k - m\omega^2) & -2k \\ -2k & (2k - 2m\omega^2) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour avoir une solution non triviale il faut que le déterminant soit égal à zéro,

d'où l'équation caractéristique :

$$(3k - m\omega^2)(2k - 2m\omega^2) - 4k^2 = 0$$

Les deux pulsations propres sont :

$$2m^2\omega^4 - 8km\omega^2 + 2k^2 = 0$$
$$\omega^4 - 4\tfrac{k}{m}\omega^2 + \tfrac{k^2}{m^2} = 0$$
$$\lambda^2 - 4\tfrac{k}{m}\lambda + \tfrac{k^2}{m^2} = 0\ ,$$

La solution est:

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)\frac{k}{m};$$
$$\lambda_2 = \omega_2^2 = \left(2 + \sqrt{3}\right)\frac{k}{m},$$

Fractions modales

$$r_i = \left(\tfrac{X_2}{X_1}\right)^{(i)} = \tfrac{3k - m\omega_i^2}{2k}$$

Mode 1

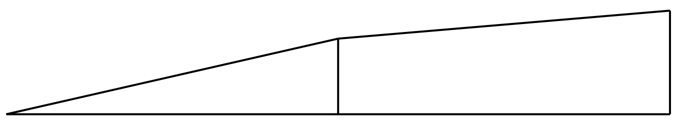
$$r_1 = \left(\tfrac{X_2}{X_1}\right)^{(1)} = \tfrac{3k - m\omega_1^2}{2k} = \tfrac{3k - m\left(2-\sqrt{3}\right)\frac{k}{m}}{2k} = 1.366$$

Mode 2

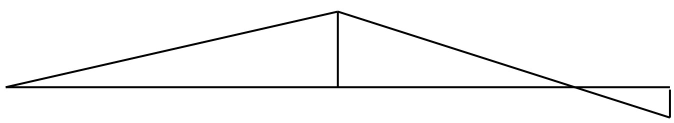
$$r_2 = \left(\tfrac{X_2}{X_1}\right)^{(2)} = \tfrac{3k - m\omega_2^2}{2k} = \tfrac{3k - m\left(2+\sqrt{3}\right)\frac{k}{m}}{2k} = -0.366$$

Vecteurs propres

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.366 \end{pmatrix}$$



$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.366 \end{pmatrix}$$



Les solutions générales

$$x_1(t) = A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin\omega_1 t + A_2 \cos\omega_2 t + B_2 \sin\omega_2 t$$
$$x_2(t) = r_1 A_1 \cos\omega_1 t + r_1 B_1 \sin\omega_1 t + r_2 A_2 \cos\omega_2 t + r_2 B_2 \sin\omega_2 t$$

Les vitesses

$$\dot{x}_1(t) = -\omega_1 A_1 \sin\omega_1 t + \omega_1 B_1 \cos\omega_1 t - \omega_2 A_2 \sin\omega_2 t + \omega_2 B_2 \cos\omega_2 t$$
$$\dot{x}_2(t) = -\omega_1 A_1 r_1 \sin\omega_1 t + \omega_1 B_1 r_1 \cos\omega_1 t - \omega_2 A_2 r_2 \sin\omega_2 t + \omega_2 B_2 r_2 \cos\omega_2 t$$

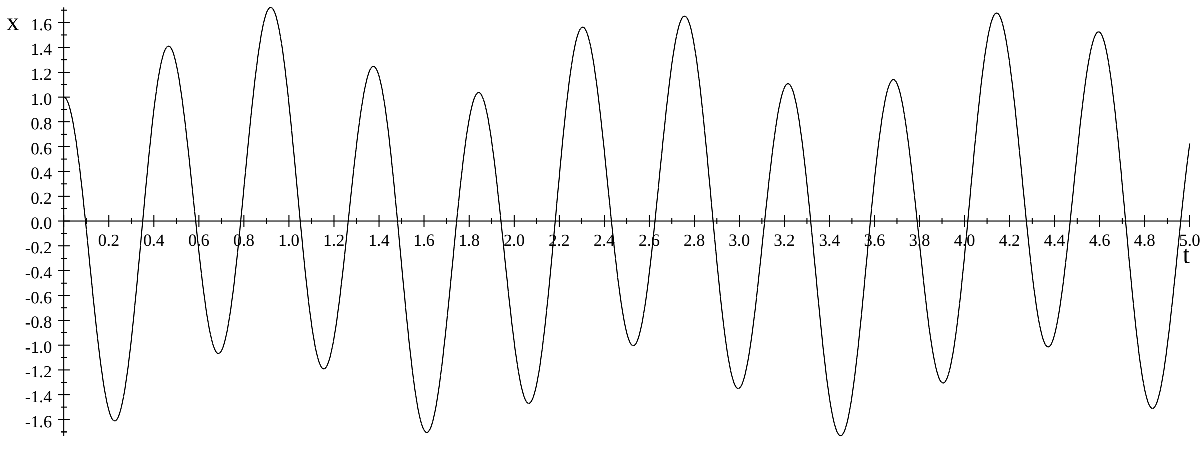
الجمهوريــــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليــــــم العــــــالي والبحـــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

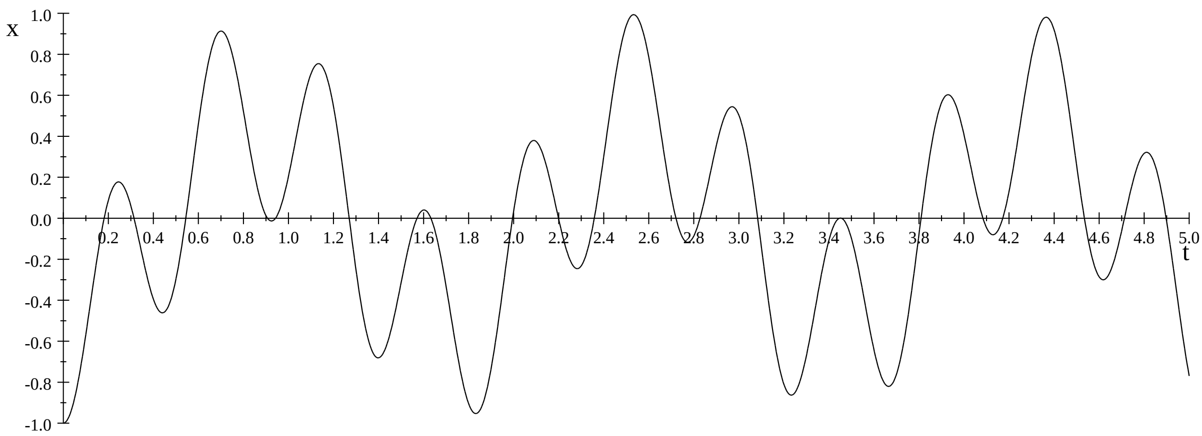
BOUTCHICHA
Djilali

Conditions initiales	
$x_1(0) = 1 = A_1 + A_2$ $x_2(0) = -1 = r_1 A_1 + r_2 A_2$ $\dot{x}_1(0) = 0 = \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2$ $\dot{x}_2(0) = 0 = \omega_1 B_1 r_1 + \omega_2 B_2 r_2$	$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ 1.366 A_1 - 0.366 A_2 = -1 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -0.366 \\ A_2 = +1.366 \end{cases}$ $\begin{cases} \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 = 0 \\ 1.366 \omega_1 B_1 - 0.366 \omega_2 B_2 = 0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 0 \\ B_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\frac{k}{m}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\frac{1000}{20}} = 3.66 \ \ rad/s \\ \omega_2 = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\frac{k}{m}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\frac{1000}{20}} = 13.66 \ \ rad/s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = -0.366\cos 3.66t + 1.366\cos 13.66t \\ x_2(t) = -0.5\cos 3.66t - 0.5\cos 13.66t \end{cases}$$



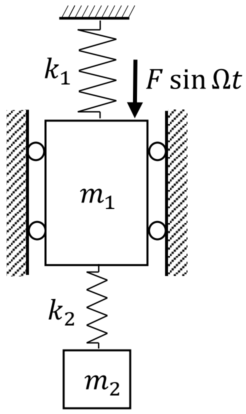


الجمهوريـــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العـــــــالي والبحـــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA
Djilali

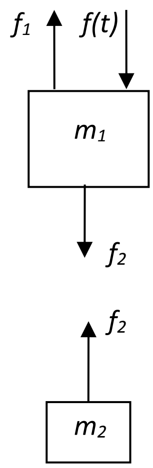
Exercice 3

Un système composé de deux masses m_1 et m_2 et deux ressorts k_1 et k_2 (figure ci-contre). La masse m_1 est soumise à une force d'excitation *f(t).* Déterminer la réponse en régime permanent de chaque masse. Pour quelle condition la masse m_1 ne bouge pas ?



Solution

Tracer le diagramme du corps libre de chaque masse.



Appliquer la seconde loi de Newton à chaque corps.

$$+\downarrow \sum F_1 = m_1 \ddot{x}_1 = f + f_2 - f_1$$

$$+\downarrow \sum F_2 = m_2 \ddot{x}_2 = -f_2$$

Relier les forces élastiques aux déplacements.

$$f_1 = k_1 e_1 = k_1 u_1$$

$$f_2 = k_1 e_2 = k_2 (u_2 - u_1)$$

Combiner et simplifier.

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = f(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0$$

Avec $f(t) = F \sin \Omega t$

Ou sous forme matricielle

BOUTCHICHA
Djilali

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \sin \Omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Résoudre les équations de mouvement en régime permanent.

On suppose que le mouvement est harmonique.

$$x_1 = X_1 \sin \Omega t$$

$$x_2 = X_2 \sin \Omega t$$

Substituer dans le système d'équations

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\Omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

D'où les valeurs des amplitudes

$$X_1 = \frac{F(k_2 - m_2\Omega^2)}{\left[k_1 + k_2 - m_1\Omega^2\right]\left[k_2 - m_2\Omega^2\right] - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{F k_2}{\left[k_1 + k_2 - m_1\Omega^2\right]\left[k_2 - m_2\Omega^2\right] - k_2^2}$$

Les réponses des deux masses sont

$$x_1 = \frac{(k_2 - m_2\Omega^2)F}{\left[k_1 + k_2 - m_1\Omega^2\right]\left[k_2 - m_2\Omega^2\right] - k_2^2} \sin \Omega t$$

$$x_2 = \frac{k_2 F}{\left[k_1 + k_2 - m_1\Omega^2\right]\left[k_2 - m_2\Omega^2\right] - k_2^2} \sin \Omega t$$

Les conditions sur m_2 et k_2 pour que la masse m_1 reste immobile est $(k_2 - m_2\Omega^2) = 0$.

C'est-à-dire $\dfrac{k_2}{m_2} = \Omega^2$.