الجمهوريـــــــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيــــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــــم العـــــــالي والبحــــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA Djilali

Pendules couplés

Pendule physique

Le pendule est constitué d'une barre de longueur l et de masse m qui peut osciller librement sous l'effet de son poids autour d'un axe O. La distance entre le centre de masse du pendule et l'axe de rotation est $^{l}/_{2}$.

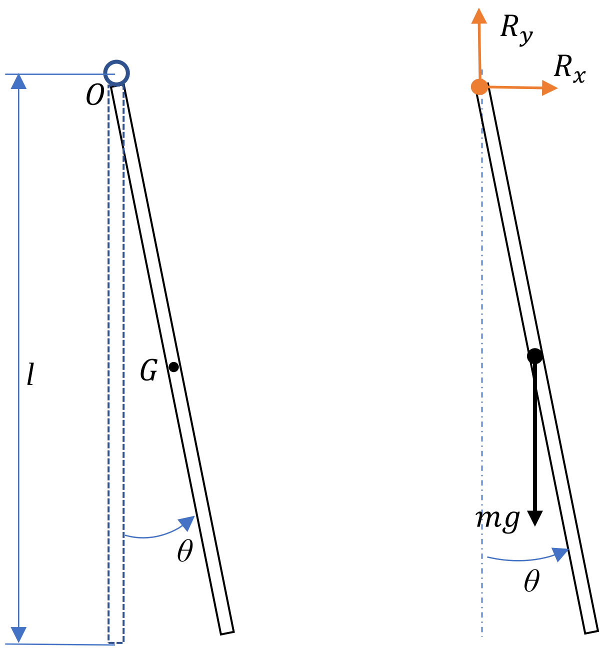


Diagramme du corps libre du pendule physique

BOUTCHICHA
Djilali

L'équation du mouvement

On applique la 2eme loi de Newton des moments autour du point d'articulation O.

$$\sum \mathcal{M}_{/O} = J_0\ \alpha$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{f_r/_O}} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{f_r}$$
$$\overrightarrow{(\mathcal{M}_{P/_O})} = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{mg}$$
$$(\mathcal{M}_{P/_O}) = -\frac{l}{2} mg.\sin\theta$$

(Les moments des forces de réactions R_x et R_y autour de O sont nuls.)

$$J_O\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\frac{l}{2}\ \sin\theta$$

Pour de faibles amplitudes de vibration, on utilise les approximations :
$\sin\theta \approx \theta$, ce qui donne :

$$J_O\,\ddot{\theta} + \frac{mgl}{2}\theta = 0$$
$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{2J_O}}$$

avec $J_O = J_G + m(\frac{l}{2})^2 = \frac{1}{12}\ ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}\ ml^2$

La fréquence naturelle est

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}$$

La période est

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}$$

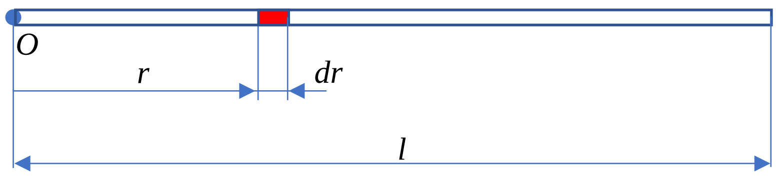
الجمهوريـــــــــــــــة الجزائريــــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليــــــــــم العـــــــــالي والبحـــــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA
Djilali

Moment d'inertie

L'expression donnée pour $J = ml^2$ n'est valable que pour un pendule formé par une masse ponctuelle (pendule mathématique). Dans le cas où la masse a une certaine extension spatiale (pendule physique), il faut tenir compte de sa géométrie. Dans notre cas, le pendule est formé par une barre prismatique de longueur l. Donc le centre de masse ne se trouve au milieu de la barre. En plus, il faut tenir compte de la distribution de la masse au moment d'inertie total du pendule.

$$J = \int_0^l r^2\, dm$$



Ici, r est la distance entre un élément de masse dm et l'axe de rotation.

$dm = \mu dr$; $\mu = \frac{m}{l}$ masse linéique

$$J_O = \int_0^l r^2 \frac{m}{l} dr = \frac{1}{3}\frac{m}{l} r^3|_0^l = \frac{1}{3}\, ml^2$$

Pour le calcul du moment d'inertie par rapport au centre de masse d'une tige

$$J_G = \int_{-l/2}^{l/2} r^2 \frac{m}{l} dr = \frac{1}{3}\frac{m}{l} r^3|_{-l/2}^{+l/2} = \frac{1}{3}\frac{m}{l}\left(\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\frac{l}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{12}\, ml^2$$

Il est important de comprendre que le moment d'inertie dépend du choix de l'axe de rotation. Dans la pratique, il s'avère souvent plus facile de calculer le moment d'inertie J_G par rapport à un axe qui passe par le centre de masse G d'un corps. Pour déterminer ensuite le moment d'inertie par rapport à un autre axe, parallèle au premier, le théorème des axes parallèles (théorème de Huygens) Steiner s'applique :

$$J_O = J_G + md^2$$

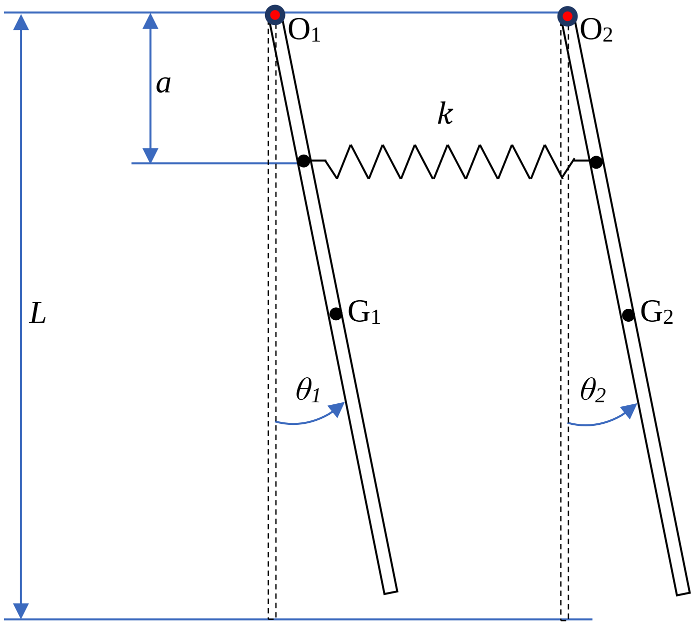
où m est la masse totale du corps en rotation et d est la distance entre le centre de masse et l'axe de rotation.

Pour une barre de dimensions transversales négligeables devant la longueur

$$J_O = J_G + m(\tfrac{l}{2})^2 = \frac{1}{12}\, ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}\, ml^2$$

الجمهوريــــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيــــــــة الشعبيـــــــة
وزارة التعليــــــــــم العــــــــالي والبحـــــــث العلــــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique
BOUTCHICHA
Djilali

Equations du mouvement



Energie Cinétique

$$T = \tfrac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2$$

Energie Potentielle

- Ressort

$$V_r = \tfrac{1}{2} k e^2 = \tfrac{1}{2} k \left(x_2 - x_1\right)^2$$

$x_1 = a\theta_1$ et $x_2 = a\theta_2$

$$V_r = \tfrac{1}{2} k a^2 \left(\theta_2 - \theta_1\right)^2$$

- Barres

$$V_b = mg\,\tfrac{l}{2}(1-\cos\theta_1) + mg\,\tfrac{l}{2}(1-\cos\theta_2)$$

Approximation pour des angles faibles : $1-\cos\theta \simeq \frac{\theta^2}{2}$

$$V_b = \tfrac{1}{4} mgl\theta_1^2 + \tfrac{1}{4} mgl\theta_2^2$$

$$V = \tfrac{1}{2} k a^2 \left(\theta_2 - \theta_1\right)^2 + \tfrac{1}{4} mgl\theta_1^2 + \tfrac{1}{4} mgl\theta_2^2$$

Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = F_i \qquad i = 1,2$$

Pour notre cas

$q_1 = \theta_1$ et $q_2 = \theta_2$

La fonction de dissipation est nulle $\left(R = 0\right)$ pas d'amortissement.

Les forces généralisées sont nulles $\left(F_1 = F_2 = 0\right)$ pas de forces extérieures.

La première équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_1}+\frac{\partial V}{\partial \theta_1}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}=\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1}\left(\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}=J_1\dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)=J_1\ddot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1}=\frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\frac{1}{2}ka^2\left(\theta_2-\theta_1\right)^2+\frac{1}{4}mgl\theta_1^2+\frac{1}{4}mgl\theta_2^2\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1}=ka^2\left(\theta_2-\theta_1\right)\left(-1\right)+\frac{1}{2}mgl\theta_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1}=\left(\frac{1}{2}mgl+ka^2\right)\theta_1-ka^2\theta_2$$

$$J_1\ddot{\theta}_1+\left(\frac{1}{2}mgl+ka^2\right)\theta_1-ka^2\theta_2=0$$

La deuxième équation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_2}+\frac{\partial V}{\partial \theta_2}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}=\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2}\left(\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}=J_2\dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right)=J_2\ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2}=\frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(\frac{1}{2}ka^2\left(\theta_2-\theta_1\right)^2+\frac{1}{4}mgl\theta_1^2+\frac{1}{4}mgl\theta_2^2\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2}=ka^2\left(\theta_2-\theta_1\right)\left(+1\right)+\frac{1}{2}mgl\theta_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1}=-ka^2\theta_1+\left(\frac{1}{2}mgl+ka^2\right)\theta_2$$

$$J_2\ddot{\theta}_2-ka^2\theta_1+\left(\frac{1}{2}mgl+ka^2\right)\theta_2=0$$

Le système de deux équations de mouvement

$$J_1\ddot{\theta}_1+\left(\frac{1}{2}mgl+ka^2\right)\theta_1-ka^2\theta_2=0$$

$$J_2\ddot{\theta}_2-ka^2\theta_1+\left(\frac{1}{2}mgl+ka^2\right)\theta_2=0$$

Dans un mode propre on suppose que les deux pendules oscillent avec la même fréquence

$$\theta_1(t) = A_1\cos(\omega t+\phi)$$
$$\theta_2(t) = A_2\cos(\omega t+\phi)$$
$$\ddot{\theta}_1(t) = -\omega^2 A_1\cos(\omega t+\phi)$$
$$\ddot{\theta}_2(t) = -\omega^2 A_2\cos(\omega t+\phi)$$

On remplace dans les équations de mouvement

$$-\omega^2 J_1 A_1\cos(\omega t+\phi)+\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2\right)A_1\cos(\omega t+\phi)-ka^2A_2\cos(\omega t+\phi)=0$$
$$-\omega^2 J_2 A_2\cos(\omega t+\phi)-ka^2A_1\cos(\omega t+\phi)+\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2\right)A_2\cos(\omega t+\phi)=0$$
$$\left\{\left[\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2\right)-\omega^2J_1\right]A_1-ka^2A_2\right\}\cos(\omega t+\phi)=0$$
$$\left\{-ka^2A_1+\left[\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2\right)-\omega^2J_2\right]A_2\right\}\cos(\omega t+\phi)=0$$

comme $\cos(\omega t+\phi)\neq 0 \Rightarrow$

$$\left[\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2\right)-\omega^2J_1\right]A_1-ka^2A_2=0$$
$$-ka^2A_1+\left[\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2\right)-\omega^2J_2\right]A_2=0$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix}\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2\right)-\omega^2J_1 & -ka^2\\ -ka^2 & \left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2\right)-\omega^2J_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\\A_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

Pour avoir une solution non triviale il faut que le déterminant soit nul

$$\begin{vmatrix}\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2\right)-\omega^2J_1 & -ka^2\\ -ka^2 & \left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2\right)-\omega^2J_2\end{vmatrix}=0$$

$$\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2-\omega^2J_1\right)\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2-\omega^2J_2\right)-\left(-ka^2\right)^2=0$$

J_1 et J_2 moment d'inertie massique par rapport aux axes de rotation pour une tige de longueur l et de masse m oscillant autour d'un axe passant par son extrémité

$$J_1=J_2=\tfrac{1}{3}ml^2$$
$$\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2-\tfrac{1}{3}ml^2\omega^2\right)^2-\left(ka^2\right)^2=0$$
$$\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2-\tfrac{1}{3}ml^2\omega^2-ka^2\right)\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2-\tfrac{1}{3}ml^2\omega^2+ka^2\right)=0$$
$$\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2-\tfrac{1}{3}ml^2\omega^2-ka^2\right)=0\ ,\ \Rightarrow\ \omega_1^2=\tfrac{3}{2}\tfrac{g}{l}\ ;\ \Rightarrow T_1=2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$
$$\left(\tfrac{1}{2}mgl+ka^2-\tfrac{1}{3}ml^2\omega^2+ka^2\right)=0\ ,\ \Rightarrow\ \omega_2^2=\tfrac{3}{2}\tfrac{g}{l}+6\left(\tfrac{a}{l}\right)^2\tfrac{k}{m}\ ;\ \Rightarrow T_1=2\pi\sqrt{\frac{2ml^2}{3\left(mgl+4ka^2\right)}}$$

الجمهوريـــــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العــــــــالي والبحـــــث العلــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique
BOUTCHICHA Djilali

Les fractions modales

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\left[\left(\frac{1}{2}mgl + ka^2\right) - \frac{1}{3}ml^2\omega^2\right]}{ka^2}$$

Mode 1

$$r_1 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{(1)} = \frac{\left[\left(\frac{1}{2}mgl + ka^2\right) - \frac{1}{3}ml^2\omega_1^2\right]}{ka^2}$$

$$r_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}mgl + ka^2\right) - \frac{1}{3}ml^2\frac{3}{2}\frac{g}{l}}{ka^2} = 1$$

Mode 2

$$r_2 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{(2)} = \frac{\left[\left(\frac{1}{2}mgl + ka^2\right) - \frac{1}{3}ml^2\omega_2^2\right]}{ka^2}$$

$$r_2 = \frac{\left(\frac{1}{2}mgl + ka^2\right) - \frac{1}{3}ml^2\left(\frac{3}{2}\frac{g}{l} + 6\left(\frac{a}{l}\right)^2\frac{k}{m}\right)}{ka^2} = -1$$

Les réponses

$$\theta_1(t) = A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t$$

$$\theta_2(t) = r_1 A_1\cos\omega_1 t + r_1 B_1\sin\omega_1 t + r_2 A_2\cos\omega_2 t + r_2 B_2\sin\omega_2 t$$

$r_1 = 1$ et $r_2 = -1$

$$\theta_1(t) = A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t$$

$$\theta_2(t) = A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t - A_2\cos\omega_2 t - B_2\sin\omega_2 t$$

Les vitesses

$$\dot{\theta}_1(t) = -\omega_1 A_1\sin\omega_1 t + \omega_1 B_1\cos\omega_1 t - \omega_2 A_2\sin\omega_2 t + \omega_2 B_2\cos\omega_2 t$$

$$\dot{\theta}_2(t) = -\omega_1 A_1\sin\omega_1 t + \omega_1 B_1\cos\omega_1 t + \omega_2 A_2\sin\omega_2 t - \omega_2 B_2\cos\omega_2 t$$

Les conditions initiales :

On distingue trois types fondamentaux d'oscillations.

$$\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_2(t) = 0$$

$$-\omega_1 A_1\sin 0 + \omega_1 B_1\cos 0 - \omega_2 A_2\sin 0 + \omega_2 B_2\cos 0 = 0$$

$$-\omega_1 A_1\sin 0 + \omega_1 B_1\cos 0 + \omega_2 A_2\sin 0 - \omega_2 B_2\cos 0 = 0$$

$$\omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 = 0$$

$$\omega_1 B_1 - \omega_2 B_2 = 0$$

$$\Rightarrow B_1 = B_2 = 0$$

الجمهوريـــــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــــم العـــــــالي والبحـــــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA Djilali

Oscillations symétriques
Conditions initiales :

$$\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$$

$$\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_2(t) = 0$$

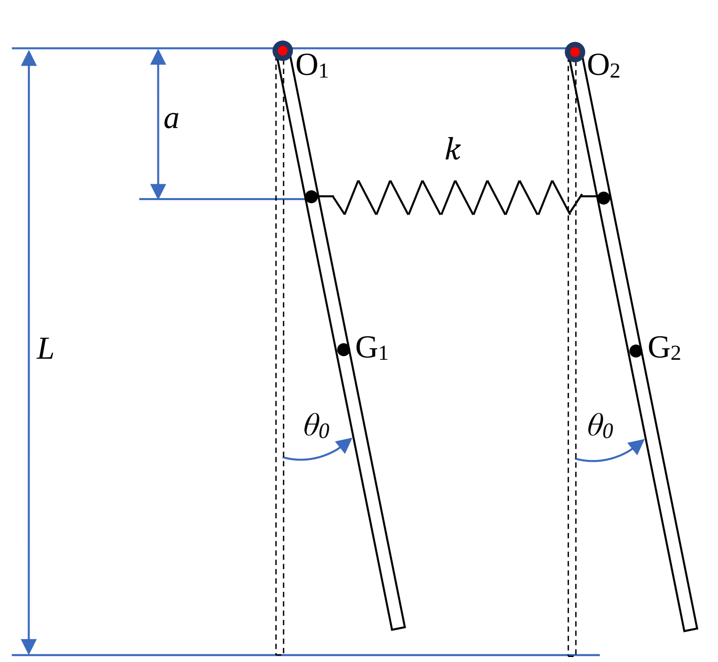
$$A_1 \cos 0 + A_2 \cos 0 = \theta_0$$

$$A_1 \cos 0 - A_2 \cos 0 = \theta_0$$

$\Rightarrow A_1 = \theta_0$ et $A_2 = 0$

$$\theta_1(t) = \theta_0 \cos \omega_1 t$$

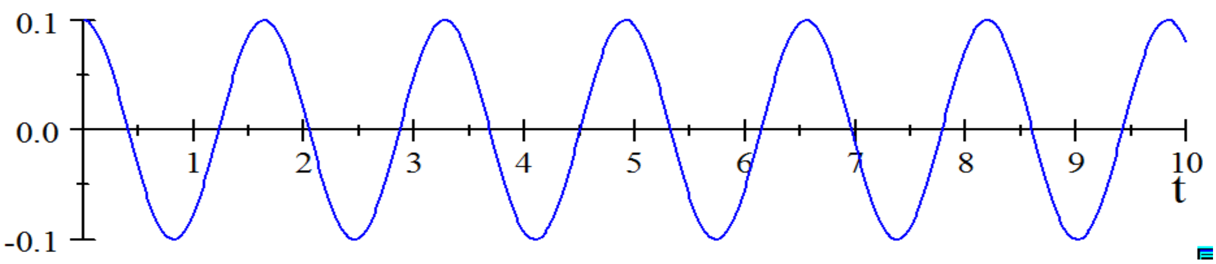
$$\theta_2(t) = \theta_0 \cos \omega_1 t$$



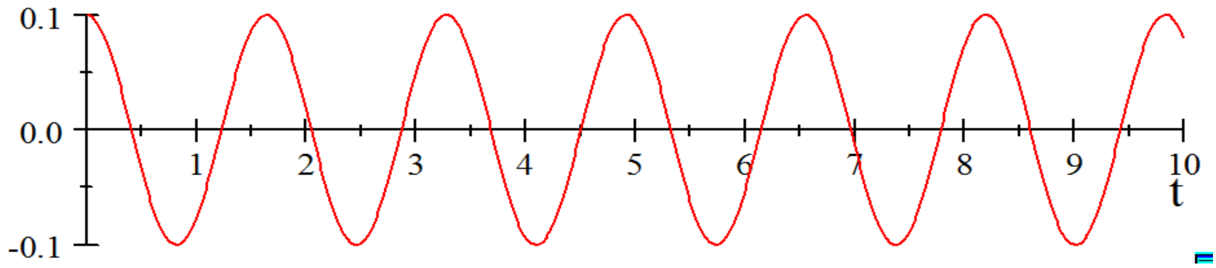
Il s'agit d'une oscillation à une seule fréquence. Le couplage ne joue aucun rôle, puisque le ressort reste toujours dans le même état de tension. Il est alors naturel qu'on retrouve la période du pendule physique.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

$$\theta_1(t) = 0.1\cos(3.834t)$$



$$\theta_2(t) = 0.1\cos(3.834t)$$



BOUTCHICHA
Djilali

Oscillations antisymétriques
Conditions initiales :

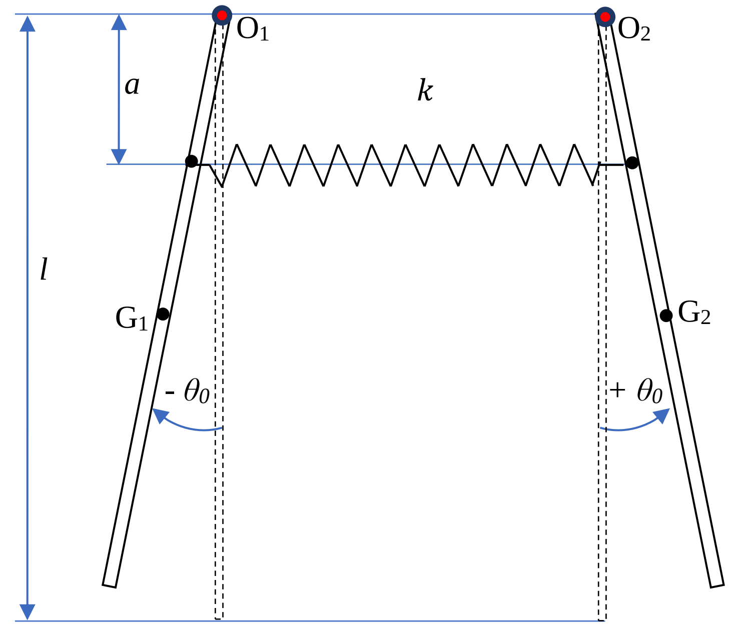
$$\theta_1(0) = -\theta_0 \quad \text{et} \quad \theta_2(0) = \theta_0$$

$$\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_2(t) = 0$$

$$A_1 \cos 0 + A_2 \cos 0 = -\theta_0$$
$$A_1 \cos 0 - A_2 \cos 0 = \theta_0$$

$$\Rightarrow \; A_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_2 = -\theta_0$$

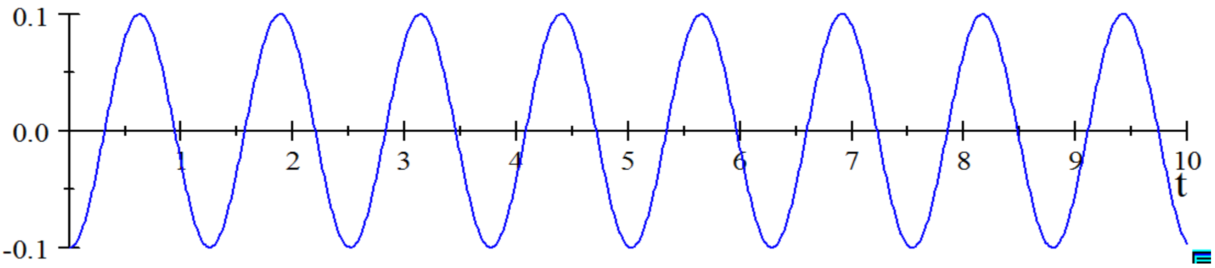
$$\theta_1(t) = -\theta_0 \cos \omega_2 t$$
$$\theta_2(t) = +\theta_0 \cos \omega_2 t$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{6ka^2}{ml^2}}$$



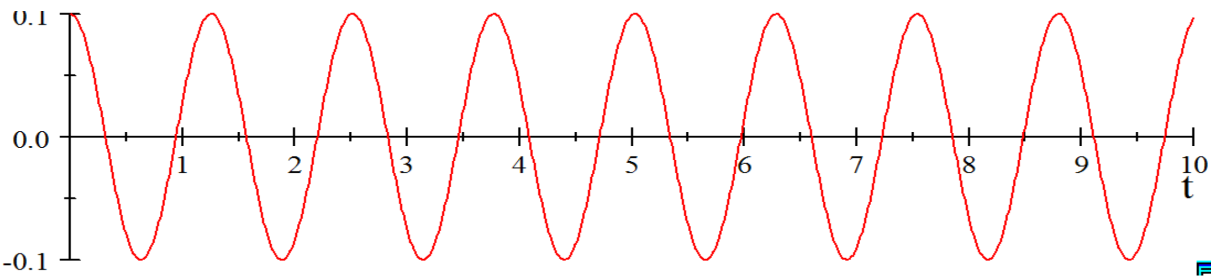
Il s'agit de nouveau d'une oscillation à une seule fréquence, mais le couplage entre les deux pendules résulte en une diminution de la période (équivalent à une augmentation de la fréquence).

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{2ml^2}{3\left(mgl + 4ka^2\right)}}$$

$$\theta_1(t) = -0.1\cos(5t)$$



$$\theta_1(t) = +0.1\cos(5t)$$



الجمهوريـــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العـــــــالي والبحـــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA Djilali

Oscillations avec battements
Conditions initiales

$$\theta_1(0)=0 \quad \text{et} \quad \theta_2(0)=+\theta_0$$

$$\dot{\theta}_1(t)=\dot{\theta}_2(t)=0$$

$$\theta_1(0)=A_1\cos 0+A_2\cos 0=0$$

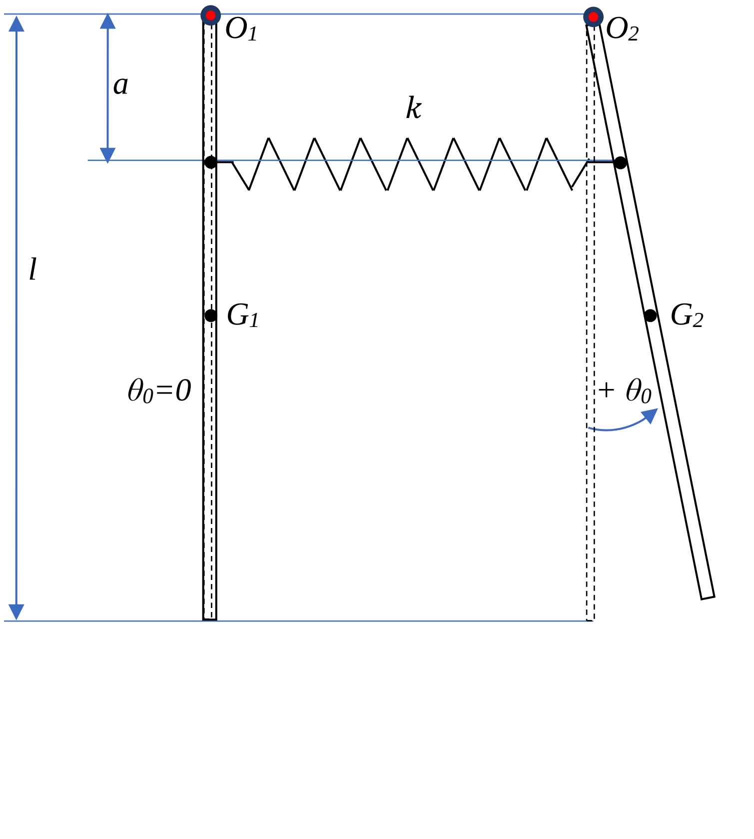
$$\theta_2(0)=A_1\cos 0-A_2\cos 0=\theta_0$$

$$A_1=+\theta_0/2$$

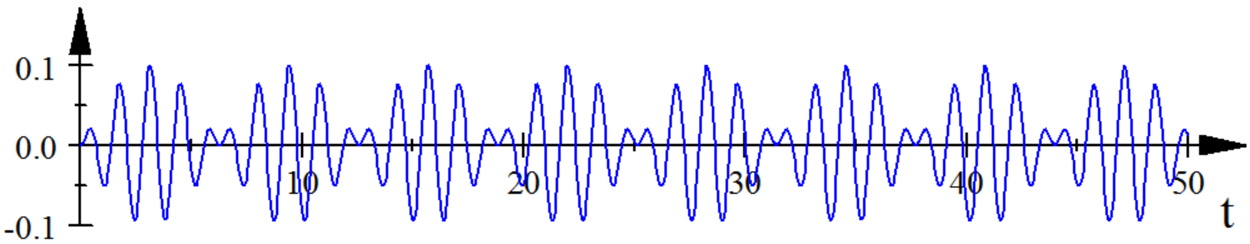
$$A_2=-\theta_0/2$$

$$\theta_1(t)=\frac{\theta_0}{2}\cos\omega_1 t-\frac{\theta_0}{2}\cos\omega_2 t$$

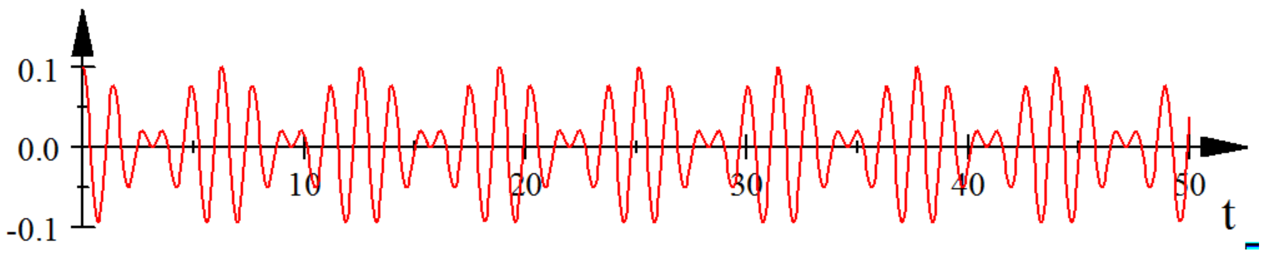
$$\theta_2(t)=\frac{\theta_0}{2}\cos\omega_1 t+\frac{\theta_0}{2}\cos\omega_2 t$$



$$\theta_1(t)=0.05\cos(3.8t)-0.05\cos(5t)$$



$$\theta_2(t)=0.05\cos(3.8t)+0.05\cos(5t)$$



Solution : En utilisant des relations trigonométriques on obtient

$$\theta_1(t) = \theta_0 \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) \times \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t)$$

$$\theta_2(t) = \theta_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) t \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right) t$$

Si le moment de force dû au couplage est faible vis-à-vis du moment de force dû au poids, alors $ka^2 \ll mgl$, et on voit que ω_1 est voisin de ω_2, c-à-d $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 + \omega_1$. Il s'ensuit que les fonctions $\sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$ et $\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$ varient lentement par rapport à $\sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right)$ et $\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right)$.

On observe que l'amplitude d'un des pendules, variant à la fréquence $\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)$, est modulée par la faible fréquence $\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)$. Le déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre le sinus et le cosinus traduit les battements entre les deux pendules : lorsqu'un pendule est à son amplitude maximale, l'autre est arrêté. L'énergie mécanique passe progressivement à chaque oscillation d'un des pendules sur l'autre par l'intermédiaire du ressort de couplage.

La période d'oscillation τ vaut $\tau = \frac{2\pi}{(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})} = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}$

et la période de battement T_b (qui correspond au temps compris entre trois arrêts consécutifs du même pendule) $T_b = \frac{2\pi}{(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})} = \frac{2T_1T_2}{T_1 - T_2}$

Détermination de la constante de rappel k du ressort

On peut déterminer la constante de rappel k du ressort en mesurant les périodes T_1 et T_2 des pendules couplés. $k = \frac{mgl}{2a^2}\left(\frac{T_1^2}{T_2^2} - 1\right)$.

BOUTCHICHA Djilali

Valeurs des fréquences pour différentes positions du ressort

$$f_1 = f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}$$

$$\Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + 6\left(\frac{a}{l}\right)^2 \frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + 6\left(\frac{a}{l}\right)^2 \frac{k}{m}}}$$

Premier cas

$$a = \frac{l}{4}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + 6\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{3}{8}\frac{k}{m}}$$

Deuxième cas

$$a = \frac{l}{2}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{3}{2}\frac{k}{m}}$$

Troisième cas

$$a = \frac{3l}{4}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + 6\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{27}{8}\frac{k}{m}}$$