## 2) Réduction à la forme triangulaire et à la forme de Jordan :

**Déf :** On appelle matrice triangulaire supérieure de $M_n(\mathbb{K})$ (resp. inférieure) toute matrice $T(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ telle que $a_{ij}=0$ $\forall i>j$. (resp. $a_{ij}=0$ $\forall i<j$).

**Théorème :** Soit $f$ un endomorphisme de $E$, ev sur $\mathbb{K}$ de dimension $n$ (resp. $A\in M_n(\mathbb{K})$) alors $f$ est trigonalisable (i.e Il existe une base $B$ de $E$ pour laquelle $M_f(B)$ est triangulaire supérieure). (resp. $A$ est semblable à une matrice triangulaire $T$.) ssi $P_f$ (resp. $P_A$) est ~~sim~~ scindé dans $\mathbb{K}$

$$P_f(\lambda)=\prod_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i)^{\alpha_i} \quad / \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=n.$$

$$P_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i)^{\alpha_i} \quad / \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=n.$$

$A$ semblable à $T$ ssi $\exists P\in M_n(\mathbb{K})$ inversible / $A=P^{-1}\cdot T\cdot P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supp. que $A$ $(M_f)$ est semblable à une matrice triangulaire $T=(a_{ij})$, alors $\exists P$ inversible tq :

$A=P.T^{-1}.P$

$P_T(\lambda)=\det(T-\lambda I_n)=\prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-\lambda)$ donc $P_T(\lambda)$ est scindé.

donc

$P_A(\lambda)=P_T(\lambda)$ est scindé ds $\mathbb{K}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supp. que $P_A(\lambda)$ est scindé ds $\mathbb{K}$, par récurrence on a :

$n = 1$ ; vraie $P_A(\lambda) = (\lambda - a) \rightarrow T = (a)$.

$n = 2$ : $P_A(\lambda) = \begin{cases} (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \longrightarrow \text{diagonalisable donc trigon} \\ (\lambda - \lambda_1)^2 \longrightarrow \dim E_{\lambda_2} = 2 \text{ diagonalisable} \\ \phantom{(\lambda - \lambda_1)^2} \searrow \dim E_{\lambda_2} = 1 \text{ ?} \end{cases}$

$\dim E_{\lambda_1} = 1$ :

Soit $(V_1, W_1)$ une base de $E$ : $AV_1 = \lambda_1 V_1$ $(V_1 \in E_{\lambda_1})$.

$Aw_1 = \alpha V_1 + \beta W_1$

Donc

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Supposons que $\forall M \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ dont le polynome caractéristiq $P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$ / $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$ admet une réduction à la forme triangulaire ($\exists T$ triangulaire et $P$ inversible / $M = P^{-1} T P$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ /

$$P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \ / \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n \, .$$

Soit ~~$V_1$ une~~ $V_1 \in E_{\lambda_1}$ : $AV_1 = \lambda_1 V_1$, soit $(W_1, \dots, W_{n-1})$ un complément de $V_1$ (i.e $B = (V_1, W_1, \dots, W_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$).

$$M_A(B) = \begin{array}{c} V_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{c|c} \lambda_1 & \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & L \\ 0 & \end{array} \right) \ / \ L \in M_{n-1}(\mathbb{K})$$

$$P_{A,B}(\lambda) = \det(M(B) - \lambda I_n) = (\lambda - \lambda_1)\cdot \det|\mathcal{L} - \lambda I_{n-1}|$$

$$\cancel{\det(M(B) - \lambda I_{n-1})}$$

$$P_{A,B}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdot P_{\mathcal{L}}(\lambda) = \cancel{(\lambda - \lambda_1)}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \quad / \quad P_{\mathcal{L}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1 - 1} \cdot \prod_{i=2}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

Donc $P_{A,B}(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{K}$ alors $\exists T \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et $P \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ inversible / $\mathcal{L} = P^{-1}\cdot T \cdot P$

on pose

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}; \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$$

$Q$ inversible car $\det Q = \det P$

On a, $Q^{-1}\cdot M(B)\cdot Q = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \text{ligne} \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array}\right)$ triangulaire

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & P^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}}$$

$$M(B) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathcal{L} \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$Q^{-1} M(B)\cdot Q = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & Q^{-1}\mathcal{L} \\ & \end{array}\right)\cdot Q$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \cdots\cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & Q^{-1}\mathcal{L}Q = T \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(3-\lambda)(1-\lambda)+1\right]$$

$$= (1-\lambda)(3-4\lambda+\lambda^2+1) = (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)$$

$= (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)$    A n'est pas diagonalisable

$= (1-\lambda)(\lambda-2)^2$    ni trigonalisable.

car $P_A(X)$ n'est pas scindé

$P_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$    $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ double.

$$\dim E_{\lambda_2} = \ker(A - 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 3 - rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 2$$

D'où A n'est pas diagonalisable

$m_A = (\lambda - 1)(\lambda-2)^2$

A admet une réduction à une mat triangulaire

$E_{\lambda_1} = \{ V = (x, y, z) \mid AV_1 = \lambda_1 V_1 \}$
$= \{ V = (x, y, z) \mid (A - 2I_3) V_1 = 0 \}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases} \rightarrow V_1 = (1, 1, 1)$$

~~Pour $W_1 = (1, 0, 0)$, $W_2 = (0, 1, 0)$ on a $(V_1, W_1, W_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.~~

$A \cdot V_1 = V_1$.

$$\cancel{AW_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{AW_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $V_2$ et compléter $(V_1, V_2)$ en une base de $\mathbb{R}^3$ et Calculer $M(B)$.

On trouver $v_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ / $(v_1, v_2$ et $v_3)$ libre et

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_{eq}}$$

on choisit le troisième vecteur

$x = 1$

$\cancel{y = \frac{z}{3}}$

$y = 1 - \frac{z}{3}$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right)$$

$$\cancel{= (\lambda - 2)(\lambda - 1)\lambda}$$

$$= (\lambda - 2)^2 \lambda$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ double

$$\dim E_{\lambda_2} = 3 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

$A$ diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$P_A(\lambda) = -(\lambda-2)^3 \quad \lambda_1 = 2$ triple

non diagonalisable car ~~[illegible]~~

$m_A(\lambda) \neq (\lambda-2)$ (car $A \neq 2I_3$)

$V \in E_{\lambda_1}$

$$AV = 2V \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dim E_{\lambda_1} = 3 - rg(A - 2I_3) = 3 - 2 = 1$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$V = (0, 1, 1)$

Soit $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 0)$

$(V, w_1, w_2)$ base de $\mathbb{R}^3$

$$A w_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2V + 3w_1 - w_2$$

$$A w_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1 + w_2$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$w_1 = (x, y, z)$

$w_2 = (x', y', z')$

$v_1 = (0, 1, 1)$

$2$

$\lambda$ ?

$Aw_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Aw_1 = v_1 + 2w_1 \rightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 2x \\ x + y + z = 1 + 2y \\ 2x + 2z = 1 + 2z \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ x = 1/2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \cancel{y - z = -1/2} \\ z = 1/2 + y \end{matrix}$$

$$w_1 = \left(\frac{1}{2}, y, \frac{1}{2} + y\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}(1, 1, 0)}$$

$$\boxed{w_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)}$$

$$Aw_2 = w_1 + 2w_2 \rightarrow \begin{cases} 3x' + y' - z' = \frac{1}{2} + 2x' \\ x' + y' + z' = 2y' \\ 2x' + 2z' = \frac{1}{2} + 2z' \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x' + y' - z' = 1/2 \\ x' - y' + z' = 0 \\ x' = 1/4 \end{cases} \rightarrow y' - z' = 1/4 \rightarrow z' = y' - 1/4$$

$w_2 = \left(\frac{1}{4}, y', y' - \frac{1}{4}\right)$

$w_2 = \left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right)$

Réduction à la forme de Jordan.

<u>Déf:</u> On appelle réduite de Jordan toute matrice $J_k(\lambda)$ d'ordre k ($J_k(\lambda) \in M_k(\mathbb{K})$)

$$J_k(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$P_{J_k}(\lambda) = (-1)^k (\lambda_1 - \lambda)^k = \pm (\lambda_1 - \lambda)^k$$

$$m_{J_k}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^k$$

<u>Déf 2.</u> On appelle matrice de Jordan une matrice diagonale par bloc de la forme $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix}$

$$P_J(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} P_{J_i}(\lambda)$$

Matrices nilpotentes

On dit qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est nilpotente d'ordre k ssi $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$

k est le plus petit entier positif / $A^k = 0$.

Théorème de Dunford : $f \in End(E)$ / E un K-ev de dim n (resp. $A \in M_n(K)$)   Preuve !

Si le polynôme de Dunford est scindé dans K :

$$P_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \quad / \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$$

un unique couple (m, d)

alors il existe ! deux endomorphismes m et d (resp. deux matrices B et N) tq

1] $f = h + g$

2] h est nilpotent et g diagonalisable ($\exists k \in \mathbb{N}$, $h^k = 0$ ...)

3] $h \circ g = g \circ h$

resp. $A = B + N$, B diagonalisable et N nilpotente

Théorème : Toute matrice $A \in M_n(K)$ dont le polynôme caractéristique est scindé ds K possède une réduction à la forme de Jordan → Preuve !

$$J = \begin{pmatrix} J_{\alpha_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{\alpha_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{\alpha_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \left( \lambda(\lambda-2)+1 \right)$$
$$= (1-\lambda)^2 \left( \lambda^2-2\lambda+1 \right)$$

$P_A(\lambda) = (\lambda-1)^4$ non diagonalisable car $A \neq I_4$

$(A-I_4) \neq 0 \rightarrow m_A \neq \lambda-1$

A est trigonalisable

$E_{\lambda_1} = \{ V=(x,y,z,t) ; (A-I_3)V=0 \}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-x+y+z+t=0 \quad \rightarrow \quad t = x-y-z$

$-x+y+2t=0 \qquad -x+y+2x-2y-2z=0$

$x-y-2z=0$

$x=y+2z$

$t=z$

$V_1 = (1,1,0,0), V_2 = (2,0,1,1)$.

Soit $w_1 = (x, y, z, t)$, $w_2 = (x', y', z', t')$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cancel{AW_1 =}$ $A W_1 = V_2 + W_1$

$y + z + t = 2 + x$

$-x + 2y + 2t = y$

$z = 1 + z$

$t = 1 + t$

$$J = \begin{array}{cccc} V_1 & W_1 & V_2 & W_2 \\ \end{array}$$
$$J = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$A W_1 = V_1 + W_1$

$y + z + t = 1 + x$

$-x + 2y + 2t = 1 + y$

$z = z$

$t = t$

$t = 1 + x - y - z$

$x = y + 2z - 1$

$\begin{cases} x = y + 2z - 1 \\ t = z \end{cases}$

$w_1 = (2, 1, 1, 1)$

$A W_2 = V_2 + W_2 \rightarrow$ $y' + z' + t' = 2 + x'$

$-x' + 2y' + 2t' = y'$

$z' = 1 + z'$