Ch 1 : Systèmes différentiels linéaires et Exponentielle matricielle

$x'(t) = a\,x(t) \longrightarrow x = k e^{at} \; / \; k \in \mathbb{R}$.

Déf : On appelle système différentiel linéaire un système de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21} x_1(t) + \dots + a_{2n} x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1} x_1(t) + \dots + a_{nn} x_n(t). \end{cases}$$

On pose :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \; ; \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ alors}$$

$$\underline{X'(t) = A \cdot X(t)}.$$

Si A est diagonale :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{nn} x_n(t) \end{cases} \longrightarrow \left\{ X(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{a_{11} t} \\ k_2 e^{a_{22} t} \\ \vdots \\ k_n e^{a_{nn} t} \end{pmatrix} \; k_i \in \mathbb{R} \right.$$

2) Exponentielles des matrices + deux lois internes et une loi externe (!)

$e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!}$ Série entière de rayon de convergence $+\infty$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$M_n(\mathbb{K})$ est une algèbre munie d'une norme $\|.\|$

On définit $e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$; absolument convergente

Car $\sum_{k \geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge vers $e^{\|A\|}$ ($\|A\| \in \mathbb{R}$)

donc e^A converge normalement donc elle converge simplement $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$

$\forall A$, $\exists P$ polynome / $e^A = P(A)$ (!)

On appelle exponentielle matricielle la matrice définie par $e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$

Propriétés :

1) $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ si $AB = BA$

2) $\forall P \in M_n(\mathbb{K}) / \det(P) \neq 0$: $e^{P^{-1}AP} = P^{-1} e^A P$.

Preuve : easy.

3) $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)} = e^{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$ → Preuve !

4) Si D est diagonale $\quad S_p(A) = \{a_{ii} / i = 1$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Proof: easy}$$

5) Si $A = PDP^{-1}$ est diagonalisable alors $e^A = P e^D P^{-1}$ avec D diagonale.

5) ~~Exponentielle d'une matrice nilpotente~~

Soit N une matrice nilpotente d'indice k :

$$e^N = \sum_{i \geq 0} \frac{N^i}{i!} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{N^i}{i!}$$

Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si le polynome caractéristique $P_A(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{K}$, alors

$$e^A = P \times e^D \times e^N \times P^{-1} \quad \text{avec } D \text{ diagonale et } N \text{ nilpotente}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

Rq Tout polynome dans $\mathbb{C}$ est scindé.

III) Résolution d'un système différentiel $X'(t) = A X(t)$.

La solution générale d'un système différentiel linéaire $X'(t) = A X(t)$. est $X(t) = e^{At} X_0$

Exp: Résoudre :

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_1(t) - 3x_3(t) \\
x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t) - 6x_3(t) \\
x_3'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + 5x_3(t)
\end{aligned}
$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} X(t)$$

$$X\cancel{(t)} = \quad X(t) = e^{tA} X_0 .$$

$$= e^{tD + tN} . X_0 .$$

$$=$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

$$\dim \ker(A - I_3) = 3 - rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

A non diagonalisable.

$$\cancel{\frac{1}{P_A(\lambda)} = \frac{1}{(1-\lambda)^2(2-\lambda)}} =$$

$$\dim \ker(A - 2I_3) = 1$$

$$V = (x, y, z) \in \ker(A - 2I_3) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 2z \end{cases} \longrightarrow \boxed{V_1 = (2, 1, 1)}$$

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_3(t). \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_3'(t) = -x_3(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

l'ordre $rg(A)$:

la dimension de la plus grande matrice inversible extraite de A

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$

$$\dim E_{\lambda_2} = 3 - rg(A + I_3)$$

$$= 3 - 2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode de recherche de D et N : $A = PDP^{-1}$

Soit $f \in End(E)$, ~~et~~ $\dim E = n$ (resp. $A \in M_n(K)$).

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \pm \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \; ; \; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n.$$

$$N_{\lambda_i} = \ker (A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i} \quad , \dim N_{\lambda_i} = \alpha_i$$

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} N_{\lambda_i}$$

$B_i = (v_1^i, \dots, v_{\alpha_i}^i)$ base de N_{λ_i}

$$\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$$

On définit $d(v_j^i) = \lambda_i v_j \quad \forall i = 1, \dots, k$
$\forall j = 1, \dots, \alpha_i$

$\forall x \in E : x = x_1 + x_2 + \dots + x_k \; / \; x_i \in N_{\lambda_i}$

$d(x) = d(x_1) + \dots + d(x_k) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$

d est diagonalisable (diagonale dans $\mathcal{V}$).

$n = f - d$ Mq : n nilpotente, $nod = don$

d : $\Delta = PDP^{-1}$ avec $P = (V_1, \dots, V_n)$

do it after changing the basis pb

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$v \in N_{\lambda_2} \Rightarrow (A - I_3)^2 v = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0$$

$$v_2 = (1, 0, 0), \quad v_3 = (0, 1, 0)$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad , N = A - D.$$

$\det(P) = 1, \quad P^{-1} = {}^t(C) \; / \; c_{ij} = (-1)^{i+j} |P_{ij}|$

$$\begin{array}{lll} c_{11} = 0 & c_{21} = 0 & c_{31} = 1 \\ c_{12} = 1 & c_{22} = 0 & c_{32} = -2 \\ c_{13} = 0 & c_{23} = 1 & c_{33} = 1 \end{array} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = A - D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A = N + D$ ✓

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

X

Wrong!!

Redo the exp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1- Mq A n'est pas diagonalisable et donner la Réduction de Jordan

En déduire son polynome.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ & \end{pmatrix}$$

$$= (-1-\lambda) + \lambda(2+\lambda)(1-\lambda)$$

$$= -1-\lambda + (1+\lambda)\lambda$$

$\lambda_1 I_{d} \cdot N = \lambda_1 N \cdot I_d$

$J = D + N$

$J_{\alpha_1}(\lambda_1) = \lambda_1 I_{\alpha_1} + N$

$A = P(D+N)P^{-1}$

$= (PD + PN)P^{-1}$

$= PDP^{-1} + PNP^{-1}$

$\lambda_1 I_{\alpha_1} N = \lambda_1 N I_{\alpha_1} = N \lambda_1 I_{\alpha_1}$

$$\begin{pmatrix} \square & & 0 \\ & \square & \\ 0 & & \square \end{pmatrix}$$

$x = x_1 + x_2 + x_3$

$DNx = DNx_1 + \cdot$

$= N \cdot$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \quad P_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

$$V \in E_{\lambda_2} \Rightarrow (A - 2I_3)V = 0$$

$$E_{\lambda_1} = Vect(\underbrace{(1,2,0)}_{V_1}, \underbrace{(0,0,1)}_{V_2})$$

$$E_{\lambda_1} = Vect((1,2,0),(0,0,1)) = Vect((1,2,0),(1,2,1))$$

Si $\{V_1 \,;\, V_2\}$ est libre alors $\{V_1 \,;\, V_1 + V_2\}$ est

aussi libre (la démonstration est simple)

Donc on peut remplacer V_2 par $V_1 + V_2 = (1,2,1)$

dans la base de E_{λ_1} et on a: $\begin{cases} V_1 = (1,2,0) \\ V_2 = (1,2,1) \end{cases}$

Soit $w = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, Aw = V_2 + 2w$

$$\begin{cases} y = 1 + 2x \\ -4x + 4y = 2 + 2y \\ -2x + y + 2z = 1 + 2z \end{cases} \Rightarrow \quad y = 1 + 2x$$

Pour $z = 0$, $x = 0 \Rightarrow y = 1$

et $w = (0, 1, 0)$

Avec $\{V_1, V_2, w\}$ libre donc c'est une

base de $\mathbb{R}^3$ et $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (2-\lambda)\left(\lambda(\lambda-4)+4\right) =$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)(\lambda-2)^2 = -(\lambda-2)^3.$$

$\lambda = 2.$

$$\begin{cases} y = 2x. \\ -4x + \cancel{4y} = \cancel{2y}. \\ -2x + y + \cancel{2z} = \cancel{2z}. \end{cases}$$

$\cancel{x = 0}$ $\cancel{y = x}$. $y = 2x$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 \\ \cancel{2} \\ \cancel{3} \end{pmatrix}$.

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(A - 2I)\,w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \\ -2x + y = 1. \end{cases}$$