

# Chapitre III. . Décision dans l'incertitude et décisions multicritère

PARTIE II MÉTHODE PONDÉRÉE ET MÉTHODES DE  
SUCRLASSEMENT ELECTRE

**DR. DEKHICI L.**

# Décision multi critère

# Exemple: choix d'un candidat Erasmus

Actions (choix du candidat)	Critère= Moyenne des 3 années
Choisir Djamel	13
Choisir Sarah	16
Choisir Mohamed	17
Choisir Ali	18
Choisir Omar	10
Choisir Moataz	14
Choisir Feriel	15

# Actions

- ▶ **actions potentielles = décisions = Alternatives = solutions** offertes à un problème décisionnel.
- ▶ Ces actions sont listées de façon exhaustive ou non et doivent être formulées par l'utilisateur.  
Les **conséquences** de chacune d'elle sont évaluées à l'aide de critères.

# Critère

- ▶ Une fonction  $f(X)$  qui permet de décider une action  $X_i$  par les  $X$
- ▶ Un critère doit permettre de mesurer les préférences du décideur vis-à-vis de chaque action, relativement à un point de vue (exemple moyenne du candidat d'Erasmus, revenu du client...)

# Quantitatif vs Qualitatif

- ▶ Un **critère quantitatif** = numérique
- ▶ Un **critère qualitatif**= non numérique . Son évaluation doit être ramenée à une échelle numérique définie par l'utilisateur. (satisfaction du clients, compétence d'un candidat, type de diplôme...)

# Mono Critère vs. MultiCritère

- ▶ Le choix des candidats par un seul critère peut être injuste , on ajoute alors plusieurs critères (plusieurs fonctions)
- ▶ **Monocritère** tout à fait adapté si :
  - ▶ point de vue unique (ou prédominant)
  - ▶ points de vue multiples non conflictuels (ex: tournées)
- ▶ **Multi critère :**
  - ▶ Chaque catégorie homogène de points de vue  $\Rightarrow$  critère.
  - ▶ critères + intelligibles
  - ▶ pas de présupposé quant à la manière d'agréger les critères
  - ▶ mieux adapté aux contextes multi-décideurs
  - ▶ Optimiser  $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$

# Exemple: choix d'un candidat Erasmus en multi critère

Actions (choix du candidat)	Critère= Moyenne des 3 année	Attestation d'anglais	Lettre de motivation Et entretien	Attestation d'italien
Choisir Djamel	13	A1	Excellent	Oui
Choisir Sarah	16	B1	Bien	Non
Choisir Mohamed	17	B2	Bien	Non
Choisir Ali	18	A2	Mauvais	Oui
Choisir Omar	10	C2	Bien	Non
Choisir Moataz	14	C1	Mauvais	Non
Choisir Ferial	15		Très bien	Non



# Incomparable

- ▶ Moyenne dans des disciplines et niveaux différents
- ▶ On peut la remplacer par le classement du candidat dans sa promotion mais ça devient une fonction à minimiser

# Exemple: choix d'un candidat Erasmus en multi critère

Actions (choix du candidat)	Classement dans sa promotion	Attestation d'anglais	Lettre de motivation Et entretien	Attestation d'italien
Choisir Djamel	8	A1	Excellent	Oui
Choisir Sarah	2	B1	Bien	Non
Choisir Mohamed	1	B2	Bien	Non
Choisir Ali	4	A2	Mauvais	Oui
Choisir Omar	60	C2	Bien	Non
Choisir Moataz	9	C1	Mauvais	Non
Choisir Ferial	10		Très bien	Non

# Normalisation des qualitatifs

Actions (choix du candidat)	Classement dans sa promo	Attestation d'anglais	Lettre de motivation	Attestation d'italien
	min	max	max	max
Choisir Djamel	8	1	5	1
Choisir Sarah	2	3	3	0
Choisir Mohamed	1	4	3	0
Choisir Ali	4	2	2	1
Choisir Omar	60	6	3	0
Choisir Moataz	9	5	2	0
Choisir Ferial	10	0	4	0

# Normalisation pour mettre à l'échelle

- ▶ Valeur Sur max en cas de maximisation
- ▶ Min sur la valeur en cas de minimisation

# Normalisation à l'échelle valeur/max ou min/valeur

Actions (choix du candidat)	Classement dans sa promo	Attestation d'anglais	Lettre de motivation	Attestation d'italien
	<b>min</b>	<b>max</b>	<b>max</b>	<b>max</b>
Choisir Djamel	$1/8=$	$1/6$	$5/5$	1
Choisir Sarah	$1/2$	$3/6$	$3/5$	0
Choisir Mohamed	1	$4/6$	$3/5$	0
Choisir Ali	$1/4$	$2/6$	$2/5$	1
Choisir Omar	$1/60$	$6/6$	$3/5$	0
Choisir Moataz	$1/9$	$5/6$	$2/5$	0
Choisir Feriel	$1/10$	$0/6$	$4/5$	0

	c1	C2	C3	C4
A1	0,13	0,17	1,00	1,00
A2	0,50	0,50	0,60	0,00
A3	1,00	0,67	0,60	0,00
A4	0,25	0,33	0,40	1,00
A5	0,02	1,00	0,60	0,00
A6	0,11	0,83	0,40	0,00
A7	0,10	0,00	0,80	0,00

# Fonction de préférence $P$

- ▶ Relation de Préférence  $(P, I)$  : Le critère  $f(s)$  permet de différencier les actions de  $\square$ . Il implique de façon naturelle une relation de préférence  $(P, I)$  sur les éléments de  $\square$  pris deux à deux et telle que:
- ▶  $f(a) > f(b) \square aPb$  ( $P$  : Préférence,  $a$  est **préférée** à  $b$ )

# Indifférence

- ▶  $f(a) = f(b) \square aIb$  (  $I$  : Indifférence, a est **indiffèrent** à b )



# Seuils d'indifférence

- ▶ Une marge d'indifférence  $q$
- ▶ Il y a indifférence entre les alternatives et lorsque l'écart de leur évaluation tombe dans la plage  $[-q, q]$ .
- ▶ Exemple avoir comme moyenne un 17 ou un 17,5 est pareille
- ▶  $F$  qui est la moyenne est un quasi-critère avec un seuil.
- ▶  $f(b)-q \leq f(a) \leq f(b)+q \leftrightarrow a \sim b$

# Fonction imcomparable

- ▶  $f(a) < f(b) \not\Rightarrow aRb$  (R : Rejet, a n'est pas comparable avec b)

# dominance

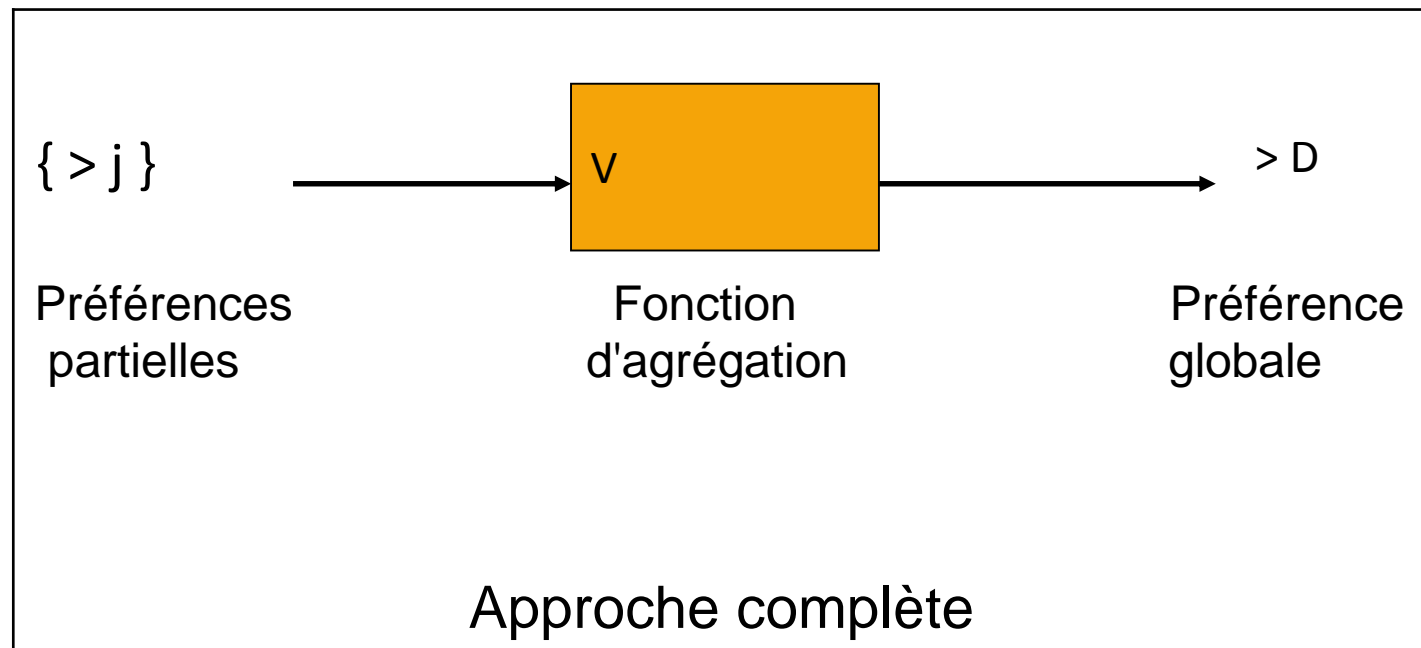
- ▶ Une solution  $x = (x_1, \dots, x_m)$  domine strictement une solution  $y = (y_1, \dots, y_m)$  Ssi  $i=1 \dots m$   $f_i(y) < f_i(x)$  si la solution  $x$  domine strictement la solution  $y$  nous allons noter  $y < x$ .
- ▶ Une solution  $x = (x_1, \dots, x_m)$  domine faiblement une solution  $y = (y_1, \dots, y_m)$  Ssi  $i=1 \dots m$   $f_i(Y) \leq f_i(X)$  si la solution  $x$  domine faiblement la solution  $y$  nous allons noter  $y \leq x$ .
- ▶ Une solution  $x = (x_1, \dots, x_m)$  domine une solution  $y = (y_1, \dots, y_m)$  Ssi il existe un  $i$  de  $\{1 \dots m\}$   $f_i(Y) \leq f_i(x)$ , et il existe un  $j$  de  $\{1 \dots m\}$  où  $f_j(y) < f_j(x)$

# Efficacité

- ▶ Une solution  $x^*$  est une solution efficace s'il n'existe pas de  $x$  tel que  $z(x)$  domine  $z(x^*)$ .

# Approche du critère unique de synthèse

21



# Meilleur compromis

- ▶ Rationnalité limitée

# Décision multi critère

MÉTHODE DE MOYENNE PONDÉRÉE

# Méthode de Moyenne pondéré

- ▶ Le décideur ajoute des coefficients



# Moyenne pondérée

	c1	C2	C3	C4	moyenne pondérée	
coefficient K	3	4	5	2	14	somme K
A1	0,13	0,17	1,00	1,00	<b>0,574</b>	
A2	0,50	0,50	0,60	0,00	0,053	
A3	1,00	0,67	0,60	0,00	0,085	
A4	0,25	0,33	0,40	1,00	0,101	
A5	0,02	1,00	0,60	0,00	0,082	
A6	0,11	0,83	0,40	0,00	0,076	
A7	0,10	0,00	0,80	0,00	0,023	

# Décision multi critère

MÉTHODE DE SURCLASSEMENT

# Méthodes de Surclassement

Comparaison par paire

On citera:

- ▶ Famille d'Algorithmes ELECTRE
- ▶ Famille d'Algorithmes PROMETHEE

# Méthodes ELECTRE

- ▶ ELECTRE est une famille de méthodes mathématiques d'analyse multicritère, développée par [Bernard Roy](#) à partir des années 1960.  
L'acronyme [ELECTRE](#) signifie **EL**imination **Et** **C**hoix **T**raduis ant la **RE**alité.

# Surclassement S

$$aSb \Rightarrow (aPb \vee aQb \vee aIb)$$

# Seuils

- ▶ **Seuil de préférence ( $p_j$ )** : Seuil à partir duquel la différence entre deux actions est strictement perceptible et fait préférer l'une à l'autre.
- ▶ • **Seuil d'indifférence ( $q_j$ )** : En dessous de ce seuil, deux actions  $a$  et  $b$  ne peuvent plus être départagées.

# Exemple: Matrice de Performance Multi critères

somme  
K=10

Criteria	Noise	Distance	pollution	Environnement	recreations	
<b>Weights</b>						
<b>k</b>	3	2	3	1		1
<b>site1</b>	10	20	5	10		16
<b>site2</b>	0	5	5	16		10
<b>site3</b>	0	10	0	16		7
<b>site4</b>	20	5	10	10		13
<b>site5</b>	20	10	15	10		13
<b>site6</b>	20	10	20	13		13
<b>Seuil q</b>	-	-	-	-		-
<b>Seuil P</b>	-	-	-	-		-

# ELECTRE I: Matrice de concordance

Pour chaque a et b action

$$C(a, b) = \frac{\sum_{g_k(a) \geq g_k(b)} w_k}{\sum w_j}$$

	site1	site2	site3	site4	site5	site6
site1	1,000	<b>0,900</b>	0,900	0,400	0,400	0,300
site2	<b>0,400</b>	1,000	0,800	0,300	0,100	0,100
site3	0,100	0,600	1,000	0,300	0,300	0,300
site4	0,700	0,900	0,700	1,000	0,500	0,400
site5	0,700	0,900	0,900	1,000	1,000	0,600
site6	0,700	0,900	0,900	1,000	1,000	1,000



# ELECTRE I: matrice de discordance

$$D(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \forall j \in F : g_j(a) \geq g_j(b) \\ \frac{1}{\delta} \max_j [g_j(b) - g_j(a)] & \text{Sinon} \end{cases}$$

$\delta$  est la plus grande différence de performances entre deux actions quelconques

- ▶ Indice de discordance =  $20 - 0 = 20$

# ELECTRE I: matrice de discordance

Criteria	Noise	Distance	pollution	Environnement	recreations	
Weights k		3	2	3	1	1
site1		10	20	5	10	16
site2		0	5	5	16	10
site3		0	10	0	16	7
site4		20	5	10	10	13
site5		20	10	15	10	13
site6		20	10	20	13	13
Seuil q						
Seuil P						

- ▶ Indice de discordance =  $20 - 0 = 20$
- ▶  $D(S1, S2) = 1/20 * \max(-10; -5; 0; 6) = 6/20 = 0,3$
- ▶  $D(S5, S4) = 0$

	site1	site2	site3	site4	site5	site6
site1	0,000	<b>0,300</b>	0,300	0,500	0,500	0,750
site2	0,750	0,000	0,250	1,000	1,000	1,000
site3	0,500	0,250	0,000	1,000	1,000	1,000
site4	0,750	0,300	0,300	0,000	0,250	0,500
site5	0,500	0,300	0,300	<b>0,000</b>	0,000	0,250
site6	0,500	0,150	0,150	0,000	0,000	0,000

# Le graphe de surclassement: surclassement et seuils

$$aSb \Leftrightarrow (C(a, b) \geq \mu_c) \wedge (D(a, b) \leq \mu_d)$$

- ▶ L'action a surclasse b si
- ▶ la concordance est supérieure ou égale au seuil exigé de concordance
- ▶ et la discordance est inférieure au seuil de discordance toléré.

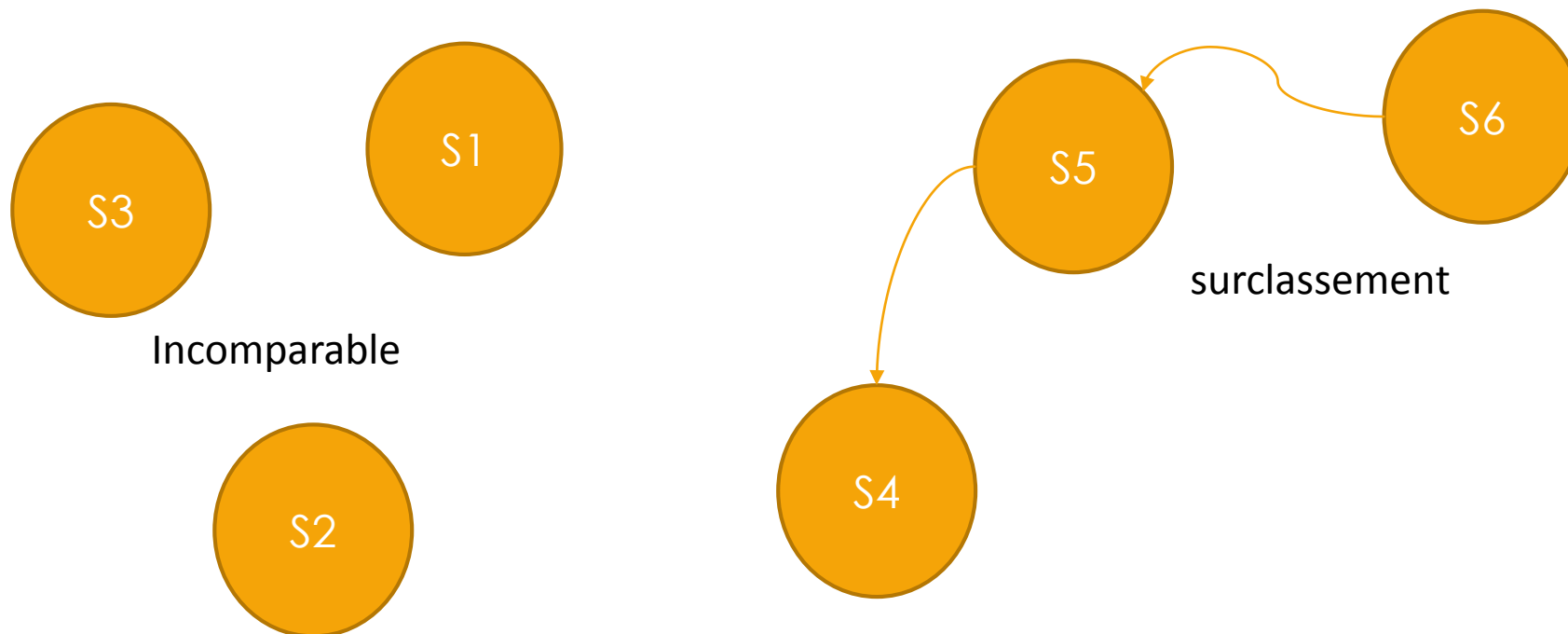
# Le graphe de surclassement: matrice de surclassement avec seuils égaux à 1 et 0

<b>C</b>	site1	site2	site3	site4	site5	site6	<b>D</b>	site1	site2	site3	site4	site5	site6
site1	1,000	<b>0,900</b>	0,900	0,400	0,400	0,300	site1	0,000	<b>0,300</b>	0,300	0,500	0,500	0,750
site2	<b>0,400</b>	1,000	0,800	0,300	0,100	0,100	site2	0,750	0,000	0,250	1,000	1,000	1,000
site3	0,100	0,600	1,000	0,300	0,300	0,300	site3	0,500	0,250	0,000	1,000	1,000	1,000
site4	0,700	0,900	0,700	1,000	0,500	0,400	site4	0,750	0,300	0,300	0,000	0,250	0,500
site5	0,700	0,900	0,900	1,000	1,000	0,600	site5	0,500	0,300	0,300	<b>0,000</b>	0,000	0,250
site6	0,700	0,900	0,900	1,000	1,000	1,000	site6	0,500	0,150	0,150	0,000	0,000	0,000

Outranking  
matrix:

	site1	site2	site3	site4	site5	site6
site1	1	0	0	0	0	0
site2	0	1	0	0	0	0
site3	0	0	1	0	0	0
site4	0	0	0	1	0	0
site5	0	0	0	<b>1</b>	1	0
site6	0	0	0	<b>1</b>	<b>1</b>	1

# Graphe de surclassement



# Matrice de surclassement avec seuils égaux à 0,9 pour C et 0,15 pour D?

C	site1	site2	site3	site4	site5	site6	D	site1	site2	site3	site4	site5	site6
e1	1,000	<b>0,900</b>	0,900	0,400	0,400	0,300	site1	0,000	<b>0,300</b>	0,300	0,500	0,500	0,750
e2	<b>0,400</b>	1,000	0,800	0,300	0,100	0,100	site2	0,750	0,000	0,250	1,000	1,000	1,000
e3	0,100	0,600	1,000	0,300	0,300	0,300	site3	0,500	0,250	0,000	1,000	1,000	1,000
e4	0,700	0,900	0,700	1,000	0,500	0,400	site4	0,750	0,300	0,300	0,000	0,250	0,500
e5	0,700	0,900	0,900	1,000	1,000	0,600	site5	0,500	0,300	0,300	<b>0,000</b>	0,000	0,250
e6	0,700	0,900	0,900	1,000	1,000	1,000	site6	0,500	0,150	0,150	0,000	0,000	0,000

Outranking matrix:

	site1	site2	site3	site4	site5	site6
site1						
site2						
site3						
site4						
site5						
site6						

Dessinez le Graphe de surclassement avec seuils égaux à 0,9 pour C et 0,15 pour D?