

Chapitre III. . Décision dans l'incertitude et décisions multicritère

PARTIE II MÉTHODE PONDÉRÉE ET MÉTHODES DE
SUCRLASSEMENT ELECTRE

DR. DEKHICI L.

Décision multi critère

Exemple: choix d'un candidat Erasmus

| Actions (choix du candidat) | Critère= Moyenne des 3 années |
|-----------------------------|-------------------------------|
| Choisir Djamel | 13 |
| Choisir Sarah | 16 |
| Choisir Mohamed | 17 |
| Choisir Ali | 18 |
| Choisir Omar | 10 |
| Choisir Moataz | 14 |
| Choisir Feriel | 15 |

Actions

- ▶ **actions potentielles = décisions = Alternatives = solutions** offertes à un problème décisionnel.
- ▶ Ces actions sont listées de façon exhaustive ou non et doivent être formulées par l'utilisateur.
Les **conséquences** de chacune d'elle sont évaluées à l'aide de critères.

Critère

- ▶ Une fonction $f(X)$ qui permet de décider une action X_i par les X
- ▶ Un critère doit permettre de mesurer les préférences du décideur vis-à-vis de chaque action, relativement à un point de vue (exemple moyenne du candidat d'Erasmus, revenu du client...)

Quantitatif vs Qualitatif

- ▶ Un **critère quantitatif** = numérique
- ▶ Un **critère qualitatif**= non numérique . Son évaluation doit être ramenée à une échelle numérique définie par l'utilisateur. (satisfaction du clients, compétence d'un candidat, type de diplôme...)

Mono Critère vs. MultiCritère

- ▶ Le choix des candidats par un seul critère peut être injuste , on ajoute alors plusieurs critères (plusieurs fonctions)
- ▶ **Monocritère** tout à fait adapté si :
 - ▶ point de vue unique (ou prédominant)
 - ▶ points de vue multiples non conflictuels (ex: tournées)
- ▶ **Multi critère :**
 - ▶ Chaque catégorie homogène de points de vue \Rightarrow critère.
 - ▶ critères + intelligibles
 - ▶ pas de présupposé quant à la manière d'agréger les critères
 - ▶ mieux adapté aux contextes multi-décideurs
 - ▶ Optimiser $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$

Exemple: choix d'un candidat Erasmus en multi critère

| Actions (choix du candidat) | Critère= Moyenne des 3 année | Attestation d'anglais | Lettre de motivation Et entretien | Attestation d'italien |
|-----------------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| Choisir Djamel | 13 | A1 | Excellent | Oui |
| Choisir Sarah | 16 | B1 | Bien | Non |
| Choisir Mohamed | 17 | B2 | Bien | Non |
| Choisir Ali | 18 | A2 | Mauvais | Oui |
| Choisir Omar | 10 | C2 | Bien | Non |
| Choisir Moataz | 14 | C1 | Mauvais | Non |
| Choisir Ferial | 15 | | Très bien | Non |

Incomparable

- ▶ Moyenne dans des disciplines et niveaux différents
- ▶ On peut la remplacer par le classement du candidat dans sa promotion mais ça devient une fonction à minimiser

Exemple: choix d'un candidat Erasmus en multi critère

| Actions (choix du candidat) | Classement dans sa promotion | Attestation d'anglais | Lettre de motivation Et entretien | Attestation d'italien |
|-----------------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| Choisir Djamel | 8 | A1 | Excellent | Oui |
| Choisir Sarah | 2 | B1 | Bien | Non |
| Choisir Mohamed | 1 | B2 | Bien | Non |
| Choisir Ali | 4 | A2 | Mauvais | Oui |
| Choisir Omar | 60 | C2 | Bien | Non |
| Choisir Moataz | 9 | C1 | Mauvais | Non |
| Choisir Ferial | 10 | | Très bien | Non |

Normalisation des qualitatifs

| Actions (choix du candidat) | Classement dans sa promo | Attestation d'anglais | Lettre de motivation | Attestation d'italien |
|-----------------------------|--------------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| | min | max | max | max |
| Choisir Djamel | 8 | 1 | 5 | 1 |
| Choisir Sarah | 2 | 3 | 3 | 0 |
| Choisir Mohamed | 1 | 4 | 3 | 0 |
| Choisir Ali | 4 | 2 | 2 | 1 |
| Choisir Omar | 60 | 6 | 3 | 0 |
| Choisir Moataz | 9 | 5 | 2 | 0 |
| Choisir Ferial | 10 | 0 | 4 | 0 |

Normalisation pour mettre à l'échelle

- ▶ Valeur Sur max en cas de maximisation
- ▶ Min sur la valeur en cas de minimisation

Normalisation à l'échelle valeur/max ou min/valeur

| Actions (choix du candidat) | Classement dans sa promo | Attestation d'anglais | Lettre de motivation | Attestation d'italien |
|-----------------------------|--------------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| | min | max | max | max |
| Choisir Djamel | $1/8=$ | $1/6$ | $5/5$ | 1 |
| Choisir Sarah | $1/2$ | $3/6$ | $3/5$ | 0 |
| Choisir Mohamed | 1 | $4/6$ | $3/5$ | 0 |
| Choisir Ali | $1/4$ | $2/6$ | $2/5$ | 1 |
| Choisir Omar | $1/60$ | $6/6$ | $3/5$ | 0 |
| Choisir Moataz | $1/9$ | $5/6$ | $2/5$ | 0 |
| Choisir Feriel | $1/10$ | $0/6$ | $4/5$ | 0 |

| | c1 | C2 | C3 | C4 |
|----|------|------|------|------|
| A1 | 0,13 | 0,17 | 1,00 | 1,00 |
| A2 | 0,50 | 0,50 | 0,60 | 0,00 |
| A3 | 1,00 | 0,67 | 0,60 | 0,00 |
| A4 | 0,25 | 0,33 | 0,40 | 1,00 |
| A5 | 0,02 | 1,00 | 0,60 | 0,00 |
| A6 | 0,11 | 0,83 | 0,40 | 0,00 |
| A7 | 0,10 | 0,00 | 0,80 | 0,00 |

Fonction de préférence P

- ▶ Relation de Préférence (P, I) : Le critère $f(s)$ permet de différencier les actions de \square . Il implique de façon naturelle une relation de préférence (P, I) sur les éléments de \square pris deux à deux et telle que:
- ▶ $f(a) > f(b) \square aPb$ (P : Préférence, a est **préférée** à b)

Indifférence

- ▶ $f(a) = f(b) \square aIb$ (I : Indifférence, a est **indiffèrent** à b)

Seuils d'indifférence

- ▶ Une marge d'indifférence q
- ▶ Il y a indifférence entre les alternatives et lorsque l'écart de leur évaluation tombe dans la plage $[-q, q]$.
- ▶ Exemple avoir comme moyenne un 17 ou un 17,5 est pareille
- ▶ F qui est la moyenne est un quasi-critère avec un seuil.
- ▶ $f(b)-q \leq f(a) \leq f(b)+q \leftrightarrow a \sim b$

Fonction imcomparable

- ▶ $f(a) < f(b) \square aRb$ (R : Rejet, a n'est pas comparable avec b)

dominance

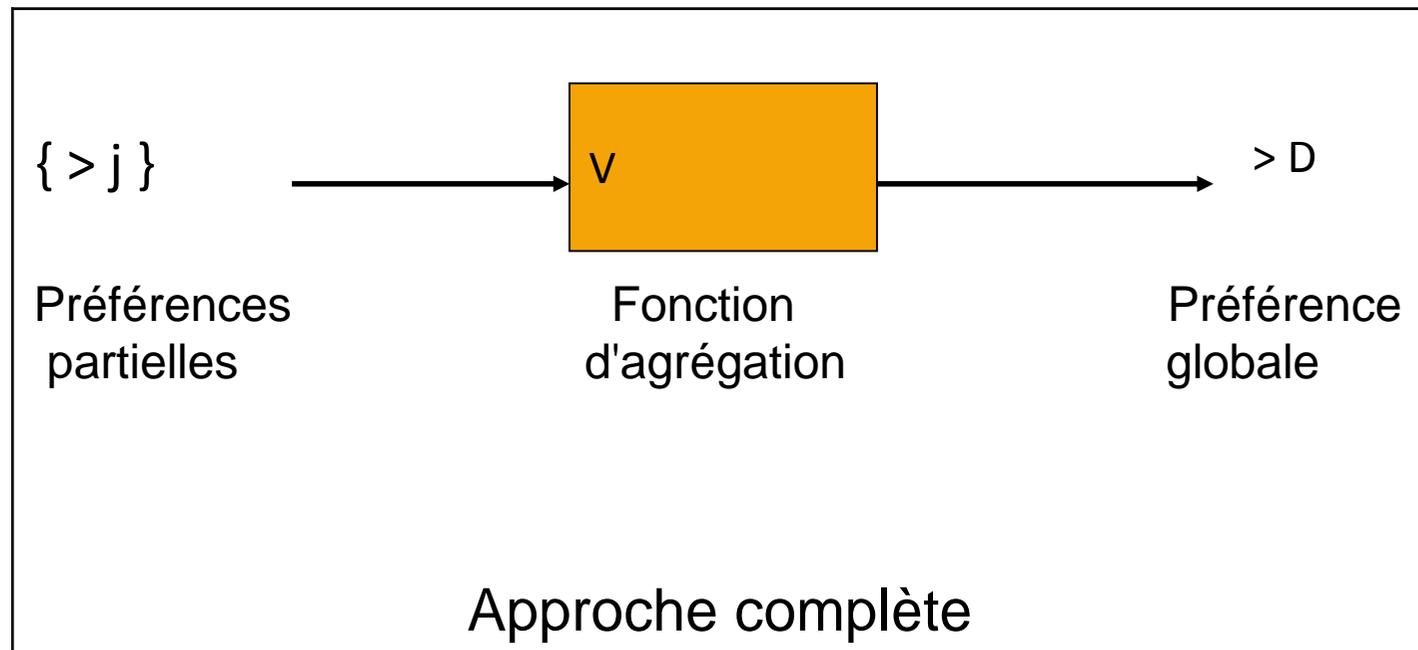
- ▶ Une solution $x = (x_1, \dots, x_m)$ domine strictement une solution $y = (y_1, \dots, y_m)$ Ssi $i=1 \dots m$ $f_i(y) < f_i(x)$ si la solution x domine strictement la solution y nous allons noter $y < x$.
- ▶ Une solution $x = (x_1, \dots, x_m)$ domine faiblement une solution $y = (y_1, \dots, y_m)$ Ssi $i=1 \dots m$ $f_i(Y) \leq f_i(X)$ si la solution x domine faiblement la solution y nous allons noter $y \leq x$.
- ▶ Une solution $x = (x_1, \dots, x_m)$ domine une solution $y = (y_1, \dots, y_m)$ Ssi il existe un i de $\{1 \dots m\}$ $f_i(Y) \leq f_i(x)$, et il existe un j de $\{1 \dots m\}$ où $f_j(y) < f_j(x)$

Efficacité

- ▶ Une solution x^* est une solution efficace s'il n'existe pas de x tel que $z(x)$ domine $z(x^*)$.

Approche du critère unique de synthèse

21



Meilleur compromis

- ▶ Rationnalité limitée

Décision multi critère

MÉTHODE DE MOYENNE PONDÉRÉE

Méthode de Moyenne pondéré

- ▶ Le décideur ajoute des coefficients

Moyenne pondérée

| | c1 | C2 | C3 | C4 | moyenne pondérée | |
|---------------|------|------|------|------|------------------|---------|
| coefficient K | 3 | 4 | 5 | 2 | 14 | somme K |
| A1 | 0,13 | 0,17 | 1,00 | 1,00 | 0,574 | |
| A2 | 0,50 | 0,50 | 0,60 | 0,00 | 0,053 | |
| A3 | 1,00 | 0,67 | 0,60 | 0,00 | 0,085 | |
| A4 | 0,25 | 0,33 | 0,40 | 1,00 | 0,101 | |
| A5 | 0,02 | 1,00 | 0,60 | 0,00 | 0,082 | |
| A6 | 0,11 | 0,83 | 0,40 | 0,00 | 0,076 | |
| A7 | 0,10 | 0,00 | 0,80 | 0,00 | 0,023 | |

Décision multi critère

MÉTHODE DE SURCLASSEMENT

Méthodes de Surclassement

Comparaison par paire

On citera:

- ▶ Famille d'Algorithmes ELECTRE
- ▶ Famille d'Algorithmes PROMETHEE

Méthodes ELECTRE

- ▶ ELECTRE est une famille de méthodes mathématiques d'analyse multicritère, développée par [Bernard Roy](#) à partir des années 1960.
L'acronyme [ELECTRE](#) signifie **EL**imination **Et C**hoix **T**raduis ant la **RE**alité.

Surclassement S

$$aSb \Rightarrow (aPb \vee aQb \vee aIb)$$

Seuils

- ▶ **Seuil de préférence (p_j)** : Seuil à partir duquel la différence entre deux actions est strictement perceptible et fait préférer l'une à l'autre.
- ▶ • **Seuil d'indifférence (q_j)** : En dessous de ce seuil, deux actions a et b ne peuvent plus être départagées.

Exemple: Matrice de Performance Multi critères

somme
K=10

| Criteria | Noise | Distance | pollution | Environnement | recreations | |
|----------------|-------|----------|-----------|---------------|-------------|----|
| Weights | | | | | | |
| k | 3 | 2 | 3 | 1 | | 1 |
| site1 | 10 | 20 | 5 | 10 | | 16 |
| site2 | 0 | 5 | 5 | 16 | | 10 |
| site3 | 0 | 10 | 0 | 16 | | 7 |
| site4 | 20 | 5 | 10 | 10 | | 13 |
| site5 | 20 | 10 | 15 | 10 | | 13 |
| site6 | 20 | 10 | 20 | 13 | | 13 |
| Seuil q | - | - | - | - | | - |
| Seuil P | - | - | - | - | | - |

ELECTRE I: Matrice de concordance

Pour chaque a et b action

$$C(a, b) = \frac{\sum_{g_k(a) \geq g_k(b)} w_k}{\sum w_j}$$

| | site1 | site2 | site3 | site4 | site5 | site6 |
|-------|--------------|--------------|-------|-------|-------|-------|
| site1 | 1,000 | 0,900 | 0,900 | 0,400 | 0,400 | 0,300 |
| site2 | 0,400 | 1,000 | 0,800 | 0,300 | 0,100 | 0,100 |
| site3 | 0,100 | 0,600 | 1,000 | 0,300 | 0,300 | 0,300 |
| site4 | 0,700 | 0,900 | 0,700 | 1,000 | 0,500 | 0,400 |
| site5 | 0,700 | 0,900 | 0,900 | 1,000 | 1,000 | 0,600 |
| site6 | 0,700 | 0,900 | 0,900 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |

ELECTRE I: matrice de discordance

$$D(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \forall j \in F : g_j(a) \geq g_j(b) \\ \frac{1}{\delta} \max_j [g_j(b) - g_j(a)] & \text{Sinon} \end{cases}$$

δ est la plus grande différence de performances entre deux actions quelconques

- ▶ Indice de discordance = $20 - 0 = 20$

ELECTRE I: matrice de discordance

| Criteria | Noise | Distance | pollution | Environnement | recreations | |
|-----------|-------|----------|-----------|---------------|-------------|----|
| Weights k | | 3 | 2 | 3 | 1 | 1 |
| site1 | | 10 | 20 | 5 | 10 | 16 |
| site2 | | 0 | 5 | 5 | 16 | 10 |
| site3 | | 0 | 10 | 0 | 16 | 7 |
| site4 | | 20 | 5 | 10 | 10 | 13 |
| site5 | | 20 | 10 | 15 | 10 | 13 |
| site6 | | 20 | 10 | 20 | 13 | 13 |
| Seuil q | | | | | | |
| Seuil P | | | | | | |

- ▶ Indice de discordance = $20 - 0 = 20$
- ▶ $D(S1, S2) = 1/20 * \max(-10; -5; 0; 6) = 6/20 = 0,3$
- ▶ $D(S5, S4) = 0$

| | site1 | site2 | site3 | site4 | site5 | site6 |
|-------|-------|--------------|-------|--------------|-------|-------|
| site1 | 0,000 | 0,300 | 0,300 | 0,500 | 0,500 | 0,750 |
| site2 | 0,750 | 0,000 | 0,250 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| site3 | 0,500 | 0,250 | 0,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| site4 | 0,750 | 0,300 | 0,300 | 0,000 | 0,250 | 0,500 |
| site5 | 0,500 | 0,300 | 0,300 | 0,000 | 0,000 | 0,250 |
| site6 | 0,500 | 0,150 | 0,150 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Le graphe de surclassement: surclassement et seuils

$$aSb \Leftrightarrow (C(a, b) \geq \mu_c) \wedge (D(a, b) \leq \mu_d)$$

- ▶ L'action a surclasse b si
- ▶ la concordance est supérieure ou égale au seuil exigé de concordance
- ▶ et la discordance est inférieure au seuil de discordance toléré.

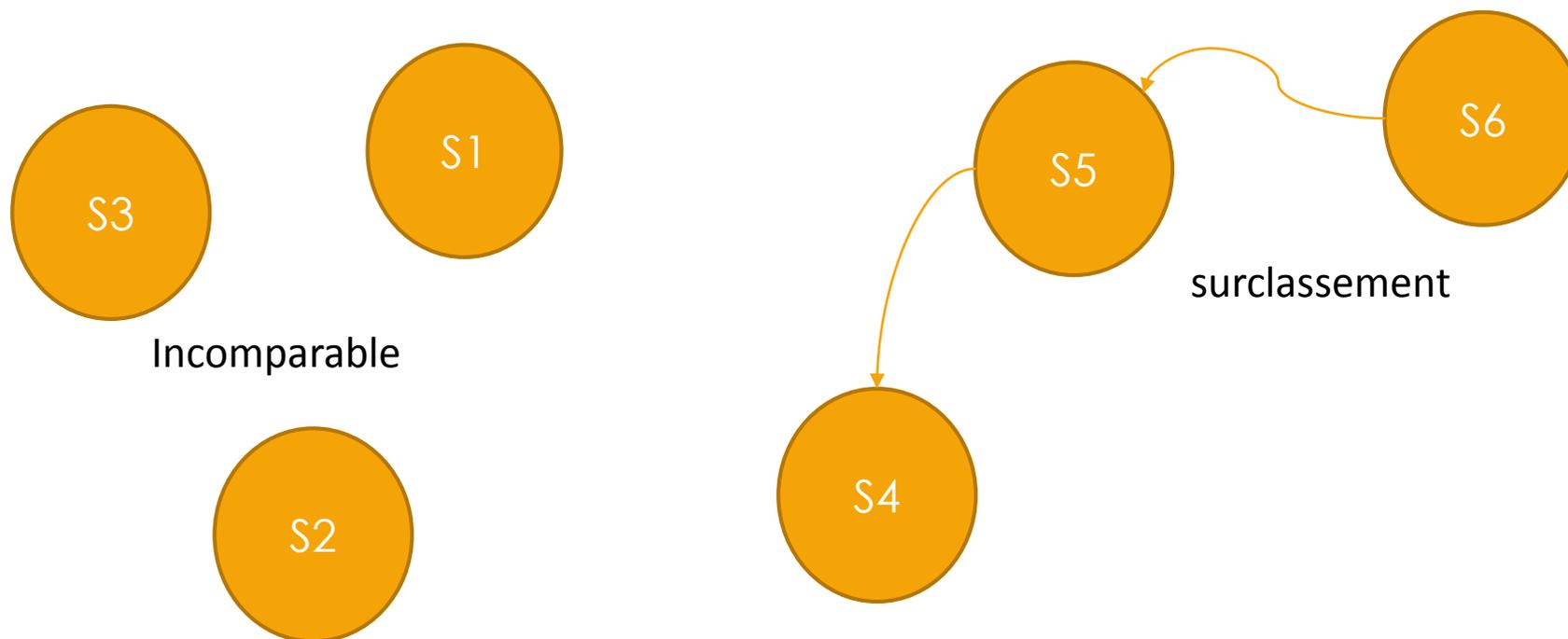
Le graphe de surclassement: matrice de surclassement avec seuils égaux à 1 et 0

| C | site1 | site2 | site3 | site4 | site5 | site6 | D | site1 | site2 | site3 | site4 | site5 | site6 |
|----------|--------------|--------------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|--------------|-------|--------------|-------|-------|
| site1 | 1,000 | 0,900 | 0,900 | 0,400 | 0,400 | 0,300 | site1 | 0,000 | 0,300 | 0,300 | 0,500 | 0,500 | 0,750 |
| site2 | 0,400 | 1,000 | 0,800 | 0,300 | 0,100 | 0,100 | site2 | 0,750 | 0,000 | 0,250 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| site3 | 0,100 | 0,600 | 1,000 | 0,300 | 0,300 | 0,300 | site3 | 0,500 | 0,250 | 0,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| site4 | 0,700 | 0,900 | 0,700 | 1,000 | 0,500 | 0,400 | site4 | 0,750 | 0,300 | 0,300 | 0,000 | 0,250 | 0,500 |
| site5 | 0,700 | 0,900 | 0,900 | 1,000 | 1,000 | 0,600 | site5 | 0,500 | 0,300 | 0,300 | 0,000 | 0,000 | 0,250 |
| site6 | 0,700 | 0,900 | 0,900 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | site6 | 0,500 | 0,150 | 0,150 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Outranking
matrix:

| | site1 | site2 | site3 | site4 | site5 | site6 |
|-------|-------|-------|-------|----------|----------|-------|
| site1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| site2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| site3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| site4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| site5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| site6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Graphe de surclassement



Matrice de surclassement avec seuils égaux à 0,9 pour C et 0,15 pour D?

| C | site1 | site2 | site3 | site4 | site5 | site6 | D | site1 | site2 | site3 | site4 | site5 | site6 |
|----|--------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|-------|--------------|-------|-------|
| e1 | 1,000 | 0,900 | 0,900 | 0,400 | 0,400 | 0,300 | site1 | 0,000 | 0,300 | 0,300 | 0,500 | 0,500 | 0,750 |
| e2 | 0,400 | 1,000 | 0,800 | 0,300 | 0,100 | 0,100 | site2 | 0,750 | 0,000 | 0,250 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| e3 | 0,100 | 0,600 | 1,000 | 0,300 | 0,300 | 0,300 | site3 | 0,500 | 0,250 | 0,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| e4 | 0,700 | 0,900 | 0,700 | 1,000 | 0,500 | 0,400 | site4 | 0,750 | 0,300 | 0,300 | 0,000 | 0,250 | 0,500 |
| e5 | 0,700 | 0,900 | 0,900 | 1,000 | 1,000 | 0,600 | site5 | 0,500 | 0,300 | 0,300 | 0,000 | 0,000 | 0,250 |
| e6 | 0,700 | 0,900 | 0,900 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | site6 | 0,500 | 0,150 | 0,150 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Outranking matrix:

| | site1 | site2 | site3 | site4 | site5 | site6 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| site1 | | | | | | |
| site2 | | | | | | |
| site3 | | | | | | |
| site4 | | | | | | |
| site5 | | | | | | |
| site6 | | | | | | |

Dessinez le Graphe de surclassement avec seuils égaux à 0,9 pour C et 0,15 pour D?