Université des Sciences et de laTechnologie d'Oran
Département de Génie Civil - Maths2
Fiche de TD N^{0}1 (2019/2020)
Espaces Vectoriels

Exercice 1. Vérifier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 1\}$
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y \geq \ 0\}$
$G = \{(1, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Exercice 2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le sous-ensemble H défini par

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y + z = 0 \text{ et } x + 2y = 0\right\}$$

1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner une base de H. Quelle est la dimension de H?
3) H est-il égal à $\mathbb{R}^3$? Justifier.

Exercice 3. 1) Quelles sont les familles libres parmis les familles suivantes:
$F_1 = \{(1, 1, 0) \,; (1, 0, 0) \,; (0, 1, 1)\}$, $F_2 = \{(0, 1, 1, 0) \,; (1, 1, 1, 0) \,; (2, 1, 1, 0)\}$
$F_3 = \{(2, 0, 2) \,; (1, 1, 4) \,; (-1, 3, 2)\}$

2) Montrer que la famille $\{(1, 2) \,; (2, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

3) Montrer que la famille $\{(2, 0, 2) \,; (1, 1, 4) \,; (-1, 3, 2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Soit l'ensemble

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2y - z = 0\right\}$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner une base de E. Quelle est sa dimension?
3) E est-il égal à $\mathbb{R}^3$? justifier.

Corrigé du TD 1 _ Maths 2 — 2019 - 2020

Espaces Vectoriels

Exercice 1 :

Rappel : E ~~espace~~ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si
- $E = \phi$ $[(0,0,0) \in E]$
- $\forall X, Y \in E,\ X+Y \in E$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X \in E,\ \alpha . X \in E$

- $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z = 1\}$

On remarque que $(0,0,0) \notin E$

Car $0+0+0 = 0 \neq 1$ donc

E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

- $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y \geq 0\}$
  - $(0,0,0) \in F$ car $y = 0 \geq 0$ alors $F \neq \emptyset$
  - Soient $(x,y,z), (x',y',z') \in F$ alors $y \geq 0,\ y' \geq 0$

    $(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$.

    comme $\begin{cases} y \geq 0 \\ y' \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y+y' \geq 0$

    donc $(x,y,z)+(x',y',z') \in F$
  - Soit $(x,y,z) \in F$ alors $y \geq 0$ et soit $\alpha = -2$

    $\alpha(x,y,z) = (-2)(x,y,z) = (-2x, -2y, -2z)$

    or $-2y \leq 0$ donc $(-2)(x,y,z) \notin F$

  On déduit alors que F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Rq : On pouvait directement donner un contre-exemple :
$\alpha = -2$, $(x,y,z) = (1,1,1) \in F$
$(-2)(1,1,1) = (-2,-2,-2) \notin F$
car $y = -2 < 0$

- $G = \{(1, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y, z \in \mathbb{R}\}$.

  $(0,0,0) \notin G$ alors G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

- $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

  Contre-exemple : $(x,y,z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0) \in H$ car $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2 + (0)^2 < 1$

  $\alpha = 16$, $\alpha(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0) = (8, 4, 0) \notin H$ car $8^2 + 4^2 > 1$

  alors H n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 : $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z = 0 \text{ et } x+2y=0\}$

1/ H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

- $(0,0,0) \in H$ car $0+0+0=0$ et $0+2.0=0$ donc $H \neq \emptyset$
- Soit $(x,y,z) \in H$, $(x',y',z') \in H$

$$(x,y,z)+(x',y',z') = (\underbrace{x+x'}_{a}, \underbrace{y+y'}_{b}, \underbrace{z+z'}_{c}) = (a,b,c) \in H \ ?$$

$$a+b+c = x+x'+y+y'+z+z' = (\underbrace{x+y+z}_{=0}) + (\underbrace{x'+y'+z'}_{=0}) = 0 \quad ((x,y,z)\in H,\ (x',y',z')\in H)$$

$$a+2b = x+x'+2(y+y') = (\underbrace{x+2y}_{=0}) + (\underbrace{x'+2y'}_{=0}) = 0 \quad (\ \text{''}\ )$$

donc $(x,y,z)+(x',y',z') \in H$.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x,y,z) \in H$, $\alpha(x,y,z) \in H$?

$$\alpha(x,y,z) = (\underbrace{\alpha x}_{a}, \underbrace{\alpha y}_{b}, \underbrace{\alpha z}_{c})$$

$$a+b+c = \alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha(\underbrace{x+y+z}_{=0}) = 0 \quad ((x,y,z)\in H)$$

$$a+2b = \alpha x + 2(\alpha y) = \alpha(\underbrace{x+2y}_{=0}) = 0 \quad (\ \text{''}\ )$$

donc $\alpha(x,y,z) \in H$

Cl : H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

2) **Base de H :**

$(x,y,z) \in H$ vérifie $x+y+z=0$ et $x+2y=0$

alors $x = -2y$ et $z = -x-y = +2y-y = y$

alors $(x,y,z) \in H$ s'écrit $(-2y,y,y) = y(\underbrace{-2,1,1}_{u})$

$\{u\}$ est une famille génératrice de H, $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ alors $\{u\}$ libre

donc $\{u\}$ est une base de H. dim H = 1

3) $H \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim H \neq \dim \mathbb{R}^3$ alors $H \neq \mathbb{R}^3$

Exercice 3 :

- $F_1 = \{(1,1,0) ; (1,0,0) ; (0,1,1)\}$

$\alpha(1,1,0)+\beta(1,0,0)+\gamma(0,1,1) = (0,0,0) \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha=\beta=\gamma=0$

$$\alpha(1,1,0)+\beta(1,0,0)+\gamma(0,1,1)=(0,0,0) \iff \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+\gamma=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

d'où F_1 libre.

- $F_2 = \{(0,1,1,0) ; (1,1,1,0) ; (2,1,1,0)\}$.

$$\alpha(0,1,1,0)+\beta(1,1,1,0)+\gamma(2,1,1,0)=(0,0,0,0) \iff \begin{cases} \beta+2\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta=-2\gamma \\ \alpha-2\gamma+\gamma=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta=-2\gamma \\ \alpha=\gamma \end{cases}$$

donc si on prend $\gamma=1$ on a : $\alpha=1$, $\beta-2$. qui ne sont pas tous nuls

et $1(0,1,1,0)-2(1,1,1,0)+1(2,1,1,0)=(0,0,0,0)$

donc F_2 n'est pas libre.

- $F_3 = \{(2,0,2) ; (1,1,4) ; (-1,3,2)\}$

$$\alpha(2,0,2)+\beta(1,1,4)+\gamma(-1,3,2)=0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} 2\alpha+\beta-\gamma=0 \\ \beta+3\gamma=0 \\ 2\alpha+4\beta+2\gamma=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha-4\gamma=0 \\ \beta=-3\gamma \\ 2\alpha-12\gamma+2\gamma=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha=2\gamma \\ \beta=-3\gamma \\ -6\gamma=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

d'où F_3 est libre.

2) $\{(1,2);(2,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$?

$\{(1,2),(2,1)\}$ famille libre :

$$\alpha(1,2)+\beta(2,1)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta=0\\ 2\alpha+\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-2\beta\\ -3\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$$

d'où $\{(1,2),(2,1)\}$ est libre.

cardinal de cette famille (nombre de vecteurs) est égal à 2

et $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ alors $\{(1,2);(2,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Rq : $\left.\begin{array}{l} E \text{ e.v de dim} = n. \\ \mathcal{B} \text{ est une famille à } n \text{ vecteurs} \\ \text{libre } \underline{\text{ou}} \text{ génératrice} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{B}$ est une base de E

3) la famille $\{(2,0,2);(1,1,4);(-1,3,2)\}$ est libre (question 1)

son cardinal est égal à 3 et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

d'où c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 :

1) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 2y\}$

$= \{(x, y, 2y) \in \mathbb{R}^3,\ y, x \in \mathbb{R}\}.$

- E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

* $(0,0,0) \in E$ car $2.\underset{y}{0} - \underset{z}{0} = 0$

* Soient $(x,y,z), (x', y', z') \in E$,

$(x,y,z) + (x',y',z') = (\underbrace{x+x'}_{a}, \underbrace{y+y'}_{b}, \underbrace{z+z'}_{c})$

$2b - c = 2(y+y') - (z+z') = \underbrace{(2y-z)}_{0} + \underbrace{(2y'-z')}_{0} = 0$

car $(x,y,z) \in E$, $(x',y',z') \in E$. d'où $(x,y,z) + (x',y',z') \in E$

* Soit $(x,y,z) \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha(x,y,z) = (\underbrace{\alpha x}_{a}, \underbrace{\alpha y}_{b}, \underbrace{\alpha z}_{c})$

$2b - c = 2(\alpha y) - (\alpha z) = \alpha(\underbrace{2y - z}_{0}) = \alpha . 0 = 0$ $((x,y,z) \in E)$

d'où $\alpha(x,y,z) \in E$

cl : E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Base de E ?

un élément de E s'écrit : $(x, y, 2y)$ avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

$(x, y, 2y) = (x, 0, 0) + (0, y, 2y)$

$= x\underbrace{(1,0,0)}_{u} + y\underbrace{(0,1,2)}_{v}$

$\boxed{\begin{array}{c} \text{cl : } \{u, v\} \text{ base de } E \\ \dim E = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3 \\ \text{alors } E \neq \mathbb{R}^3 \end{array}}$

$\{u, v\}$ est une famille génératrice de E.

$\{u, v\}$ est libre ? $\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^3} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha = \beta = 0$

$\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ d'où $\{u, v\}$ libre