Université des Sciences et de laTechnologie d'Oran
Département de Génie Civil - Maths2
Fiche de TD N^{0}2 (2019/2020)
Applications Linéaires

Exercice 1. Dire parmi lesquelles parmi les applications suivantes sont linéaires de E dans F:
1) $E = F = \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = (x+y, 2+x)$
2) $E = F = \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = (x^2+y, 2+x)$
3) $E = F = \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = (\frac{y}{x^2+1}, \frac{x}{x^2+y^2+2})$
4) $E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}^2$; $f(x,y,z) = (ye^z, y\sin(z))$
5) $E = F = \mathbb{R}^3$; $f(x,y,z) = (x-y, y, x-y+z)$

Exercice 2.
Montrer que les applications f suivantes sont linéaires. Trouver $Kerf$, Imf, leur dimensions et dire si f est bijective?
1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x-y, x+3y, y)$
2) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (2x+z, x-y-z)$
3) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-z, z-y, y-z)$

Exercice 3. 1) On suppose qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vérifie

$$f(1,0) = (2,3); f(0,1) = (1,4)$$

Trouver f, i.e. $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
2) Déterminer $Kerf$ et Imf. Quel est le rang de f?

3) Est ce que f est un automorphisme?

Exercice 4. Soient $\{e_1, e_2\}$ $\{u_1, u_2, u_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.
1) Donner l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui vérifie

$$f(u_1) = e_1 + e_2, f(u_2) = 2e_1 - e_2, f(u_3) = e_1 - 2e_2,$$

2) Déterminer $Kerf$ et Imf ainsi que leurs dimensions.
3) f est-elle un isomorphisme? justifier.

Corrigé de la fiche de TD 2 : Applications linéaires

Exercice 1 :

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y,\ 2+x)$

on a : $f(0,0) = (0+0,\ 2+0) = (0,2) \neq (0,0)$

donc f n'est pas une application linéaire.

2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2+y,\ 2+x)$, même réponse

3) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+1}, \frac{x}{x^2+y^2+2}\right)$

$f(0,0) = (0,0)$, on ne peut rien conclure.

Contre-exemple : $(x,y) = (2,3)$, $\alpha = 2$

$$f(2(x,y)) = f(2x,2y) = f(4,6) = \left(\frac{6}{17}, \frac{4}{16+36+2}\right) = \left(\frac{6}{17}, \frac{4}{54}\right)$$

$$2f(x,y) = 2f(2,3) = 2.\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{15}\right) = \left(\frac{6}{5}, \frac{4}{15}\right)$$

On voit bien que $f(2(2,3)) \neq 2f(2,3)$

alors f n'est pas linéaire.

4) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (ye^z,\ y\sin(z))$

$f(0,0,0) = (0e^0,\ 0\sin(0)) = (0,0)$, on ne peut rien conclure.

Contre-exemple : $(x,y,z) = (1,2,1)$, $\alpha = 2$

$$f(\alpha(x,y,z)) = f(2,4,2) = (4e^2,\ 4\sin(2)) = (4e^2,\ 4\sin(2))$$

$$\alpha f(x,y,z) = 2f(1,2,1) = 2(2e^1,\ 2\sin(1)) = (4e,\ 4\sin(1))$$

On voit bien que : $f(2(1,2,1)) \neq 2f(1,2,1)$

alors f n'est pas linéaire.

5/ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-y,\ y,\ x-y+z)$

a) Soit $X = (x_1, y_1, z_1)$ $Y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(X+Y) = f(\underbrace{x_1+x_2}_{a}, \underbrace{y_1+y_2}_{b}, \underbrace{z_1+z_2}_{c}) = f(a,b,c)$$

$$= (a-b,\ b,\ a-b+c)$$

$$= (x_1+x_2-y_1-y_2,\ y_1+y_2,\ x_1+x_2-y_1-y_2+z_1+z_2)$$

$$= (x_1-y_1,\ y_1,\ x_1-y_1+z_1) + (x_2-y_2,\ y_2,\ x_2-y_2+z_2)$$

$$= f(x_1,y_1,z_1) + f(x_2,y_2,z_2)$$

$$= f(X)+f(Y).$$

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(\alpha X) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$= (\alpha x - \alpha y,\ \alpha y,\ \alpha x - \alpha y + \alpha z)$$

$$= \alpha(x-y,\ y,\ x-y+z)$$

$$= \alpha f(x,y,z)$$

$$= \alpha . f(X)$$

de (a) et (b), on déduit que f est linéaire.

Exercice 2 :

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x-y,\ x+3y,\ y)$.

a) f linéaire ?

Soient $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha X + \beta Y) = f(\underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}_{a},\ \underbrace{\alpha y_1 + \beta y_2}_{b}) = f(a,b)$$

$$= (a-b,\ a+3b,\ b)$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2,\ \alpha x_1 + \beta x_2 + 3\alpha y_1 + 3\beta y_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2)$$

$$= (\alpha x_1 - \alpha y_1,\ \alpha x_1 + 3\alpha y_1,\ \alpha y_1) + (\beta x_2 - \beta y_2,\ \beta x_2 + 3\beta y_2,\ \beta y_2)$$

$$= \alpha(x_1 - y_1,\ x_1 + 3y_1,\ y_1) + \beta(x_2 - y_2,\ x_2 + 3y_2,\ y_2)$$

$$= \alpha f(x_1, y_1) + \beta f(x_2, y_2)$$

d'où f est linéaire.

> $f : E \longrightarrow F$ est linéaire si :
> - $\forall X, Y \in E$, $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$
> - $\forall \alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall X \in E$, $f(\alpha X) = \alpha f(X)$
>
> ou bien :
> $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall X, Y \in E$, $f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$

$\mathrm{Ker} f = \{X \in E,\ f(X) = 0_F\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (0,0,0)\}$

$$f(x,y) = (0,0,0) \iff (x-y,\ x+3y,\ y) = (0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

d'où $\mathrm{Ker} f = \{(0,0)\}$, alors $\dim \mathrm{Ker} f = 0$

on déduit que f est injective

on sait que: $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

alors $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

$2 = 0 + ?$

d'où $\dim \operatorname{Im} f = 2$

$\operatorname{Im} f = \{ f(x,y) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$f(x,y) = (x-y,\ x+3y,\ y)$

$= (x, x, 0) + (-y, 3y, y)$

$= x\underbrace{(1,1,0)}_{u_1} + y\underbrace{(-1,3,1)}_{u_2} = x.u_1 + y.u_2$

alors la famille $\{u_1, u_2\}$ st une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$,

comme $\dim \operatorname{Im} f = 2$ alors $\{u_1, u_2\}$ st une base pour $\operatorname{Im} f$

$\operatorname{Im} f = \{ \alpha u_1 + \beta u_2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ u_1 = (1,1,0),\ u_2 = (-1,3,1) \}$

$\dim \mathbb{R}^2 = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3$ alors f ne peut être bijective.

2) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (2x+z,\ x-y-z)$.

- f application linéaire (m̂ raisonnement)
- $\ker f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (0,0) \}$

$f(x,y,z) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x+z = 0 \\ x-y-z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -2x \\ y = x-z = x+2x = 3x. \end{cases}$

alors $X = (x,y,z) \in \ker f \iff X = (x, 3x, -2x) = x\underbrace{(1,3,-2)}_{u} = x.u$

alors $\{u(1,3,-2)\}$ st une famille génératrice pour $\ker f$, comme $u \neq (0,0,0)$

alors $\{u\}$ st une famille libre donc c'st une base pour $\ker f$.

$\dim \ker f = 1$ $\qquad \ker f = \{ \alpha . u,\ \alpha \in \mathbb{R},\ u = (1,3,-2) \}$

$\dim \ker f \neq 0$ alors f n'st pas injective.

$\mathrm{Im} f = \{ f(x,y,z) \in \mathbb{R}^2, \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$. $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$

alors $\dim \mathrm{Im} f = 3 - 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = (2x+z, \ x-y-z)$$
$$= (2x, x) + (0,-y) + (z,-z) = x\underbrace{(2,1)}_{v_1} + y\underbrace{(0,-1)}_{v_2} + z\underbrace{(1,-1)}_{v_3}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ st une famille génératrice pour Imf, elle ne peut être libre car $\dim \mathrm{Im} f = 2$.

On remarque : $v_1 - 2v_3 = v_2$ alors $\{v_1, v_3\}$ st une famille génératrice et puisque $\dim \mathrm{Im} f = 2$ alors c'st une base pour Imf.

$$\mathrm{Im} f = \{ \alpha v_1 + \beta v_3, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ v_1 = (2,1), v_3 = (1,-1) \}$$

$\dim \mathrm{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ alors f st surjective.

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq \dim \mathbb{R}^2 = 2$ alors f ne peut pas être bijective

3/ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-z, \ z-y, \ y-z)$.

- f linéaire (à faire)
- Ker f ?

$$f(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ z - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ z = y \end{cases} \iff x = y = z$$

$$X = (x,y,z) \in \mathrm{Ker} f \iff X = (x,x,x) = x\underbrace{(1,1,1)}_{u} = x \cdot u.$$

$\{u\}$ st une famille génératrice. Comme $u \neq (0,0,0)$ alors $\{u\}$ libre d'où $\{u\}$ st une base pour Ker f, $\dim \mathrm{Ker} f = 1$.

$$\mathrm{Ker} f = \{ \alpha(1,1,1), \ \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

$\dim \mathrm{Ker} f = 1 \neq 0 \implies f$ n'st pas injective

- $\mathrm{Im} f = ?$ $\dim E = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f \implies \dim \mathrm{Im} f = 3 - 1 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ f non surjective

$$f(x,y,z) = (x - z, \ z - y, \ y - z) = (x,0,0) + (0,-y,y) + (-z,z,-z)$$
$$= x\underbrace{(1,0,0)}_{u_1} + y\underbrace{(0,-1,1)}_{u_2} + z\underbrace{(-1,1,-1)}_{u_3}$$ d'où f non bijective

$\{u_1, u_2, u_3\}$ st une famille génératrice de Imf. Elle ne peut être libre car $\dim \mathrm{Im} f = 2$. On remarque : $\cancel{u_1 - u_2 + u_3}$ $u_3 = -u_1 - u_2$.

$\{u_1, u_2\}$ st une famille génératrice et $\dim \mathrm{Im} f = 2$ alors $\{u_1, u_2\}$ base pour Imf.

Exercice 3 : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ / $f(\underbrace{1,0}_{e_1}) = (2,3)$, $f(\underbrace{0,1}_{e_2}) = (1,4)$

$\{e_1, e_2\}$ base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1) $f(x,y) = f[(x,0)+(0,y)] = f(x(1,0)+y(0,1))$

$= x f(1,0) + y f(0,1)$ (f est linéaire par hypothèse)

$= x(2,3) + y(1,4) = (2x+y, 3x+4y)$.

2) $\mathrm{Ker} f = ?$

$f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ 3x+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ 3x+4(-2x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$

$\mathrm{Ker} f = \{(0,0)\} \Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 0$

$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim F$ $(F = \mathbb{R}^2)$

d'où f $\left.\begin{array}{l} \mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^2 \\ \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow f$ surjective

f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective (f isomorphisme)

Comme $E = F = \mathbb{R}^2$ alors f est un automorphisme

$\mathrm{rang}\, f = \dim \mathrm{Im} f = 2$.

Exercice 4 : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} e_1 = (1,0) \\ e_2 = (0,1) \end{cases}$ $\begin{cases} u_1 = (1,0,0) \\ u_2 = (0,1,0) \\ u_3 = (0,0,1) \end{cases}$

$f(u_1) = f(1,0,0) = e_1 + e_2 = (1,1)$

$f(u_2) = f(0,1,0) = (2,-1)$

$f(u_3) = f(0,0,1) = (1,-2)$

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f\left(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\right) \\ &= x f(1,0,0) + y f(0,1,0) + z f(0,0,1) \\ &= x f(u_1) + y f(u_2) + z f(u_3) \\ &= x(1,1) + y(2,-1) + z(1,-2) = (x+2y+z,\ x-y-2z). \end{aligned}$$

$\ker f = ?$

$f(x,y,z) = (0,0) \iff \begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y-z \\ x = y+2z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -2y-z \\ -2y-z = y+2z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -2y-z \\ z = -y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = z \\ z = -y \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$

$X = (x,y,z) \in \ker f \iff X = (z,-z,z) = z\underbrace{(1,-1,1)}_{u}$

$\{u(1,-1,1)\}$ est une famille génératrice de $\ker f$, $\neq (0,0,0)$ alors libre donc c'est une base pour $\ker f$, $\dim \ker f = 1 \neq 0$ alors f non injective.

$\ker f = \{\alpha(1,-1,1),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

$\dim E = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2 = \dim F = \dim \mathbb{R}^2$

alors $\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2}$ d'où f surjective.

$\dim E = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq \dim F = \dim \mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow f$ ne peut être un isomorphisme.