Ch 2: Systèmes différentiels linéaires et exponentielle matricielle

$x'(t) = a\,x(t) \longrightarrow x = k e^{at} \,/\, k \in \mathbb{R}$.

Déf On appelle système différentiel linéaire un système de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21} x_1(t) + \dots + a_{2n} x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1} x_1(t) + \dots + a_{nn} x_n(t). \end{cases}$$

On pose :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ alors}$$

$$\underline{X'(t) = A\,X(t)}.$$

Si A est diagonale :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{nn} x_n(t) \end{cases} \longrightarrow \left\{ X(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{a_{11} t} \\ k_2 e^{a_{22} t} \\ \vdots \\ k_n e^{a_{nn} t} \end{pmatrix} \right. k_i \in \mathbb{R}.$$

2) Exponentielles des matrices + des lois mixtes et une loi externe !

$e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!}$ Série entière de rayon de convergence $+\infty$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$M_n(\mathbb{K})$ est une algèbre munie d'une norme $\|.\|$

On définit $e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$, absolument convergente

Car $\sum_{k \geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge vers $e^{\|A\|}$ ($\|A\| \in \mathbb{R}$)

donc e^A converge normalement donc elle converge simplement $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$

$\forall A ; \exists P$ polynome / $e^A = P(A)$!

On appelle exponentielle matricielle la matrice définie par $e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$

Propriétés :

1) $e^{A+B} = e^A . e^B$ si $AB = BA$

2) $\forall P \in M_n(\mathbb{K}) / \det(P) \neq 0$: $e^{P^{-1}AP} = P^{-1} e^A P$.

Preuve : easy.

3) $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)} = e^{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$ → Preuve !

4) Si D est diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \to \text{Preuve: en}$$

$Sp(A) = \{a_{ii}; \ldots$

4) Si $A = PDP^{-1}$ est diagonalisable alors $e^A = Pe^D P^{-1}$ avec D diagonale.

5) Exponentielle d'une matrice nilpotente :

Soit N une matrice nilpotente d'indice k :

$$e^N = \sum_{i \geq 0} \frac{N^i}{i!} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{N^i}{i!}$$

Théorème Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si le polynome caractéristique $P_A(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{K}$, alors

$$e^A = P \times e^D \times e^N \times P^{-1}$$ avec D diagonale et N nilpotente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

Rq Tout polynome dans $\mathbb{C}$ est scindé !!

La solution générale d'un système différentiel linéaire $X'(t) = AX(t)$. est $X(t) = e^{At} X_0$

Exp: Résoudre :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 3x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) - 6x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 5x_3(t) \end{cases}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} X(t)$$

$$X\cancel{(t)} = \quad X(t) = \cancel{P_D}\, e^{tA} X_0$$

$$= \cancel{X_0}\, e^{tD + tN} . X_0$$

$$=$$

4) Si D est diagonale $\quad Sp(A) = \{a_{ii} \, /$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Preuve}$$

5) Si $A = PDP^{-1}$ est diagonalisable alors $e^A = P e^D P^{-1}$ avec D diagonale.

5) Exponentielle d'une matrice nilpotente :

Soit N une matrice nilpotente d'indice k :

$$e^N = \sum_{i \geq 0} \frac{N^i}{i!} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{N^i}{i!}$$

Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si le polynome caracteristique $P_A(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{K}$, alors

$$e^A = P \times e^D \times e^N \times P^{-1}$$ avec D diagonale et N nilpotente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

Tout polynome dans $\mathbb{C}$ est scindé.

4) $$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_3(t). \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_3'(t) = -x_3(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'ordre $rg(A)$: la dimension de la plus grande matrice inversible extraite de A

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$

$$\dim E_{\lambda_2} = 3 - rg(A + I_3)$$

$$= 3 - 2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

$$\dim \ker(A - I_3) = 3 - rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

A non diagonalisable.

$\cancel{P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)} =$

$\dim \ker (A - 2I_3) = 1$

$V = (x, y, z) \in \ker(A - 2I_3) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 2z \end{cases} \rightarrow \boxed{V_1 = (2, 1, 1)}$

1 Méthode de recherche de d et N : $\quad A = PDP^{-1}$

Soit $f \in End(E)$, ~~et~~ $\dim E = n$ (resp $A \in M_n(K)$).

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \pm \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \quad / \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n.$$

$$N_{\lambda_i} = \ker (A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}, \quad \dim N_{\lambda_i} = \alpha_i$$

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} N_{\lambda_i}$$

$B_i = (v_1^i, \dots, v_{\alpha_i}^i)$ base de N_{λ_i}

$$\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$$

On définit $d(v_j^i) = \lambda_i v_j \quad \forall i = 1, \dots, k$
$\forall j = 1, \dots, \alpha_i$

$\forall x \in E : \quad x = x_1 + x_2 + \dots + x_k \ / \ x_i \in N_{\lambda_i}$

$d(x) = d(x_1) + \dots + d(x_k) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$

d est diagonalisable (diagonale dans $\mathcal{V}$).

$n = f - d$ Mq : n nilpotente, $n \circ d = d \circ n$

d : $\Delta = PDP^{-1}$ avec $P = (V_1, \dots, V_n)$

do it after changing the basis plz

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$v \in N_{\lambda_2} \Rightarrow (A - I_3)^2 v = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0$$

$V_2 = (1,0,0), \quad V_3 = (0,1,0)$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad , N = A - D.$$

$\det(P) = 1, \quad P^{-1} = {}^t(C) \;/\; C_{ij} = (-1)^{i+j} |P_{ij}|$

$C_{11} = 0 \qquad C_{21} = 0 \qquad C_{31} = 1$

$C_{12} = 1 \qquad C_{22} = 0 \qquad C_{32} = -2 \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$C_{13} = 0 \qquad C_{23} = 1 \qquad C_{33} = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = A - D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A = N + D$ ✓

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

X

Wrong !!

Redo the exp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1- Mq A n'est pas diagonalisable et donner la Réduction de Jordan

En déduire son polynome.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda) + \lambda(2+\lambda)(1-\lambda)$$

$$= -1-\lambda + (1+\lambda)\lambda$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & 0 & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ & \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 I_d \cdot N =$

$\lambda_1 N \cdot I_d$

$J = D + N$

$J_{\alpha_1}(\lambda_1) = \lambda_1 I_{\alpha_1} + N$

$A = P(D+N)P^{-1}$

$= (PD + PN)P^{-1}$

$\lambda_1 I_{\alpha_1} N = \lambda_1 N I_{\alpha_1} = N \lambda_1 I_{\alpha_1}$ $= PDP^{-1} + PNP^{-1}$

$x = x_1 + x_2 + x_3$

$D.Nx = DNx_1 + \cdots$

$= N \cdot$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad P_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

$V \in E_{\lambda_2} \Rightarrow (A - 2I_3)V = 0$

$$E_{\lambda_1} = Vect((\underbrace{1,2,0}_{V_1}),(\underbrace{0,0,1}_{V_2}))$$

$E_{\lambda_1} = Vect((1,2,0),(0,0,1)) = Vect((1,2,0),(1,2,1))$

Si $\{V_1, V_2\}$ est libre alors $\{V_1, V_1+V_2\}$ est aussi libre (la démonstration est simple)

Donc on peut remplacer V_2 par $V_1 + V_2 = (1,2,1)$ dans la base de E_{λ_1} et on a : $\begin{cases} V_1 = (1,2,0) \\ V_2 = (1,2,1) \end{cases}$

Soit $w = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / Aw = V_2 + 2w$

$$\begin{cases} y = 1+2x \\ -4x+4y = 2+2y \\ -2x+y+2z = 1+2z \end{cases} \Rightarrow y = 1+2x$$

Pour $z=0$, $x=0 \Rightarrow y = 1$

et $w = (0,1,0)$

Avec $\{V_1, V_2, w\}$ libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ et $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$