Examen final d'Algèbre 3
Durée : 1h15

Exercice 1. (8 pts)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles A_α soit diagonalisable.

Exercice 2. (12 pts)
Considérons la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\ker(A + I)$, en déduisant une valeur propre et un vecteur propre de A.
2. Déterminer les autres valeurs propres. En déduire le polynôme caractéristique de A. (Indication: Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$).
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice A est de la forme
$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\lambda \text{ valeur propre à déterminer})$$
et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
4. Déduire le polynôme minimal de A.
5. Décomposer la matrice B sous la forme $B = D + N$, D diagonale et N nilpotente.
6. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tB)$ et exprimer $\exp(tA)$ à l'aide de P et $\exp(tB)$.

بِالتّوفيق

Corrigé d'examen d'Algèbre III

Exercice 1. (8 pts)
$P_{A\alpha} = (\alpha-\lambda)^2(1-\lambda)$. La matrice A_α admet les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \alpha$ avec multiplicité respective 1 et 2. **(2 pts)**
Dans ce cas on a

$$(x,y,z) \in E_{\lambda_2} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\alpha y + z = 0 \\ -\alpha z = 0 \\ z - \alpha z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \alpha y = 0 \end{cases} \quad \textbf{(3 pts)}.$$

- Pour $\alpha \notin \{0,1\}$, on a $\dim E_{\lambda_2} = 1 \neq 2$. Par suit A_α n'est pas diagonalisable. **(1 pt)**
- Pour $\alpha = 0$, on a $\dim E_{\lambda_2} = 2$, Donc A_0 est diagonalisable. **(1 pt)**
- Pour $\alpha = 1$, on a

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I.$$

  Donc A_1 n'est pas diagonalisable. **(1 pt)**

Exercice 2. (12 pts)

1.

$$(x,y,z) \in \ker(A+I) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 5x - 2y + 3z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow z = -x = -y. \quad \textbf{(1 pt)}$$

   Ainsi

$$\ker(A+I) = Vect\{(1,1,-1)\}. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

   Donc $\lambda_1 = -1$ est une valeur propre de A associé au vecteur propre $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. **(0.5 pt)**

2. Soient $\lambda_1 = -1$, λ_2, λ_3 les trois valeurs propres de la matrice A, alors on a

$$\begin{cases} -3 = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = -1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad \textbf{(0.5 pt)} \\ -1 = \det(A) = -\lambda_2\lambda_3 \quad \textbf{(0.5 pt)} \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

   Ainsi, $P_A(\lambda) = (\lambda+1)^3$. **(0.5 pt)**

3. Cherchons les vecteurs v_2, v_3 tels que

$$(A+I)v_2 = v_1 \quad \textbf{(0.5 pt)}, \; (A+I)v_3 = v_2, \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

   ce qui donne $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(1 pt)** et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **(1 pt)** On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

4. Vu que la matrice A représente un seul bloc de Jordan d'ordre 3 associé à la valeur propre $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, alors le polynôme minimal de A est donné par :

$$m_A(X) = (X+1)^3. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

5. On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N, \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

avec

$$DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

C'est donc la décomposition de Dunford.

6.

$$\begin{aligned} \exp(tB) &= \exp(tD)\exp(tN) \\ &= \exp(tD)\Big(I + \frac{tN}{1!} + \frac{(tN)^2}{2!}\Big) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \quad \textbf{(2.5 pts)} \end{aligned}$$

Donc

$$\exp(tA) = \exp(P(tB)P^{-1}) = P\exp(tB)P^{-1}. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$