Travail à faire.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer la réduite de Jordan en précisant la base et la matrice de passage.
4. Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$.
5. Préciser la solution vérifiant $\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$
6. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$ par deux méthodes.

Corrigé

1.

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 2-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda-3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ \lambda-3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1-\lambda \\ \lambda-2 & 1 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\
&= (2-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3. \quad \textbf{(1 pt)}
\end{aligned}$$

Donc A admet une valeur propre triple $\lambda = 2$. **(0.25 pt)**

2. On a

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit clairement que $\dim\ker(A-2I) = 1 \neq 3$. Ainsi la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est différent de cette même valeur dans le polynôme caractéristique. On en déduit que A n'est pa diagonalisable. **(1 pt)**

3. Cherchons une base de vecteurs propres pour J :

$$(x,y,z) \in \ker(A-2I) \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Ainsi, $\ker(A-2I) = Vect\{v_1\}$, où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **(0.5 pt)**

Cherchons les vecteurs v_2, v_3 tels que

$$(A-2I)v_2 = v_1, \quad \textbf{(0.25 pt)}\ (A-2I)v_3 = v_2, \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

ce qui donne $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(0.5 pt)** et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **(0.5 pt)**

Donc, dans la base $\mathcal{B}_J = (v_1, v_2, v_3)$, on a :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

Ainsi la matrice de passage P est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et on a} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

4. On a

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N, \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

avec

$$DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0. \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

C'est donc la décomposition de Dunford.

$$\begin{aligned} \exp(tJ) &= \exp(tD)\exp(tN) \\ &= \exp(tD)\Big(I + \frac{tN}{1!} + \frac{(tN)^2}{2!}\Big) \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, alors la solution de $Y'(t) = JY(t)$ est donnée par

$$Y(t) = \exp(tJ)C = e^{2t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2} \\ c_2 + c_3 t \\ c_3 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

La solution de $X'(t) = AX(t)$ est donc

$$X(t) = PY(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2(1+t) + c_3\Big(1 + t + \frac{t^2}{2}\Big) \\ c_1 + c_2 t + c_3\Big(1 + \frac{t^2}{2}\Big) \\ c_2 + c_3(1+t) \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.25 pt)}.$$

5. $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 1 \end{cases}$ **(0.25 pt)** Donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} + te^{2t} + \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ e^{2t} + \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ e^{2t} + te^{2t} \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

6. Calcul de A^n, $n \in \mathbb{N}$

- $1^{\text{ière}}$ **métode**: D'après la question 4. la formule du binme de NEWTON permet d'écrire

$$J^n = (D+N)^n = D^n + nD^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}D^{n-2}N^2. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Puis, $A^n = PJ^nP^{-1}$. **(0.5 pt)**

- $2^{\text{ième}}$ **métode** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^n par $P_A(X)$ fournit trois réels a_n, b_n et c_n et un polynôme Q tels que $X^n = P_A(X)Q + a_nX^2 + b_nX + c_n$. **(0.25 pt)** En prenant les valeurs des membres en 2, puis la valeur des deux membres ainsi que de leurs drivées d'ordre 1 et 2 en 2, on obtient
$$\begin{cases} 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ 2a_n + b_n = 2^n \\ 2a_n = 2^{n-1} \end{cases} \quad \textbf{(0.25 pt)} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 2^{n-2} \\ b_n = 2^n - 2^{n-1} \\ c_n = 2^n - 2^{n+1} \end{cases} \quad \textbf{(0.25 pt)}$$
Le théorème de CAYLEY-HAMILTON fournit alors

$$A^n = 2^{n-2}A^2 + (2^n - 2^{n-1})A + (2^n - 2^{n+1})I. \quad \textbf{(0.25 pt)}$$