Méthodes Numériques
(ST/L2 2020/2021)

Dr. Khaldi Nassima et Dr. Medjadj Imene

13 avril 2021

Table des matières

Introduction

Ce document notes de cours méthodes numériques recouvre est destiné principalement aux étudiants de la 2 ème année L.M.D.
L'objectif de méthodes numériques est de concevoir et d'étudier des méthodes de résolution de certains problèmes mathématiques (en général issus et de la modélisation de problèmes réels), a titre d'exemples : commande optimale, structure (pneus, carrosserie, ...), biologie mathématique : propagation d'épidémie ..., modèle mathématique en médecine : cardiologie, cancer ..., et bien d'autres applications.
En pratique, méthodes numériques se proposent d'étudier les propriétés mathématiques des algorithmes et leur mise en œuvre (programmation).
.

Chapitre 1

Notions d'erreurs

1.0.1 Introduction

Le mot **erreur** ne signifie pas **faute** (c'est à dire l'existence d'une faute dans le raisonnement ou dans l'algorithme), mais plutôt des erreurs qui apparaissent durant les calucls, par exemple lorsqu'on utilise des valeurs approchées, ou bien en arrondissant (il y a une différence entre la calculette de poche et l'ordinateur). Même très petite au départ, ces erreurs peuvent s'accumuler lorsqu'on effectue un très grand nombre d'opérations et peuvent compromettre la précision des résultats. Notre but est de minimiser l'erreur.

1.0.2 Erreurs absolue et relative

Les quantités $\sqrt{2}$, e et $\frac{1}{3}, \pi$ sont exactes. Mais $\sqrt{2} = 1.414$, $e = 2.71$ et $\frac{1}{3} = 0.333, \pi = 3.1415$ sont des quantités approximatives. Puisqu'il y a toujours un écart entre la valeur exacte et la valeur approchée donc il y a une erreur.

Erreur absolue

Définition 1.0.1 *Soit x une quantité à calculer et x^* la valeur calculée (la valeur approchée de x). L'erreur absolue de x^* (sur x), est définie par :*

$$E_a(x) = |x - x^*|. \tag{1.1}$$

Exemple 1.0.2 *On suppose que la valeur exacte est $x = 2021,001$ et que les valeurs mesurées sont :*
$x_1^* = 2021,01$, $x_2^* = 2020,991$ *et* $x_3^* = 2021$. *Alors, on a*

$$E_{a_1}(x) = |x - x_1^*| = 0.009$$

$$E_{a_2}(x) = |x - x_2^*| = 0.01$$

$$E_{a_3}(x) = |x - x_3^*| = 0,001.$$

Comme l'erreur absolue $E_{a_3}(x)$ est la plus petite alors $x_3^* = 2021$ est la valeur la plus proche de x. Ainsi plus l'erreur absolue de x^* est petite plus la valeur approchée x^* est précise.

Erreur relative

Définition 1.0.3 *Soit x une quantité à calculer et x^* la valeur calculée (la valeur approchée de x). L'erreur relative est définie par :*

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|}. \tag{1.2}$$

Généralement, on donne l'erreur relative sous la forme de pourcentage tel qu'on multiplie $E_r(x)$ par 100%.

Exemple 1.0.4 *On reprend l'exemple précédent $x_1^* = 2021,01$, $x_2^* = 2020,991$ et $x_3^* = 2021$ valeur approchée de $x = 2021.001$, alors :*

$$E_{r_1}(x) = \frac{E_{a_1}(x)}{|x|} = \frac{0.009}{|2021,001|} = \frac{9 \times 10^{-3}}{2021001 \times 10^{-3}} = \frac{9}{2021001}.$$

Alors $E_{r_1}(x) \simeq 4 \times 10^{-4}\%$.

$$E_{r_2}(x) = \frac{E_{a_2}(x)}{|x|} = \frac{0,01}{|2021,001|} = \frac{10^{-2}}{2021001 \times 10^{-3}} = \frac{10}{2021001}.$$

Alors $E_{r_2}(x) \simeq 5 \times 10^{-4}\%$.

$$E_{r_3}(x) = \frac{E_{a_3}(x)}{|x|} = \frac{0,001}{|2021,001|} = \frac{10^{-3}}{2021001 \times 10^{-3}} = \frac{1}{2021001}.$$

Alors $E_r(x) \simeq 5 \times 10^{-5}\%$.

Majoration des erreurs absolue et relative

En pratique, il est difficile d'évaluer les erreurs absolue et relative, car on ne connaît généralement pas la valeur exacte de x et l'on n'a que x^*. Pour les apprécier on introduit la notion de majorant de l'erreur absolue et de l'erreur relative.

Définition 1.0.5 *On définit un majorant de l'erreur absolue Δx d'une valeur approchée x^* par :*

$$E_a(x) = |x - x^*| \leq \Delta x \Leftrightarrow x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$$

tel que Δx est un nombre réel positif.

Définition 1.0.6 *On définit un majorant de l'erreur relative δx d'une valeur approchée x^* par :*

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|} \leq \delta x \tag{1.3}$$

tel que δx est un nombre réel positif

Par suite le majorant de l'erreur relative à x^* est défini par

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x^*|}. \tag{1.4}$$

Dans le cas de quantités mesurées expérimentalement dont on ne connaît que la valeur approximative, on dispose souvent d'une borne supérieure pour l'erreur absolue qui dépend de la précision des instruments de mesure utilisés.

Remarque 1.0.7 *Soit x un nombre tel que $x_1 \leq x \leq x_2$ alors $x^* = \frac{x_1+x_2}{2}$ est une approximation de x avec une majoration de l'erreur absolue $\Delta x = \frac{x_2-x_1}{2}$.*

Exemple 1.0.8 *1.Une surface est donné par $x = 60m^2 \pm 2\%$. L'erreur relative à la valeur approchée $x^* = 60m^2$ est $\delta x = 0,02$. Alors l'erreur absolue est :*

$$\Delta x = x^* \delta x = 60 \times 0,02 = 1,2m^2.$$

D'où, la surface exacte est $x \in [x^* - \Delta x, \quad x^* + \Delta x] = [58.8, \quad 61.2]$.
2. Un volume est donné $x = 512.4m^3 \pm 1.5$. L'erreur absolue à la valeur approchée $x^* = 512.4m^3$ est $\Delta x = 1.5$. Alors l'erreur relative est :

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x^*} = \frac{1.5}{512.4} = 0.3\%.$$

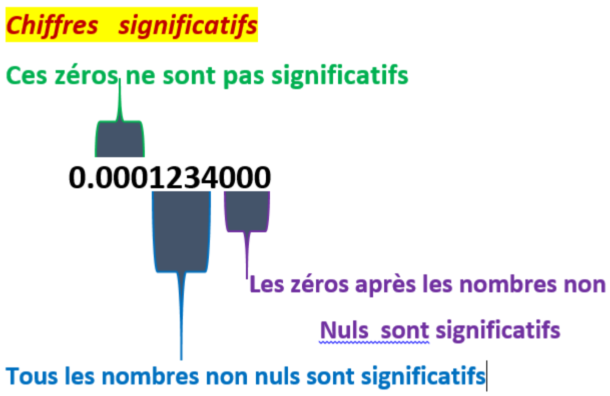
3. La masse volumique $\rho = 19.81g/cm^3 \pm 1.3\%$. L'erreur relative est : $\delta = 0.013, x^* = 19.81$, alors l'erreur absolue est :

$$\Delta x = x^* \delta x = 19.81 \times 0,0013 = 0,3g/cm^3.$$

1.0.3 Chiffres significatifs

Définition 1.0.9 *Un chiffre significatif d'un nombre approché est le seul chiffre qu'on doit garder, c'est à dire tout chiffre dans sa représentation décimale différent du zéro ; et un zéro qui se trouve entre deux chiffres, ou il constitue un chiffre conservé.*

Exemple 1.0.10 *Une approximation à 5 décimales de 0.02010 est*
$\underline{0.0}2010$ *les zéros soulignés ne sont pas significatifs car ils ne servent qu'à indiquer les ranges des autres chiffres.*
$0.02\underline{0}10$ *Le zéro souligné étant placé entre les chiffres significatifs 2 et 1, zéro est lui même un chiffre significatif.*
$0.0201\underline{0}$ *le zéro souligné traduit le fait que le nombre approché a conservé la décimale 10^{-5}, c'est un chiffre significatif.*



Définition 1.0.11 *Un chiffre significatif d'un nombre approché x^* est dit exact (c s e) si l'erreur absolue de x^* vérifie :*

$$\Delta x \leq 0,5 \times 10^m$$

avec m est le rang de ce chiffre significatif.
D'où

- *Si $\Delta x \leq 0,5 \times 10^{-n}$, alors le $n^{\text{ème}}$ chiffre significatif après la virgule est exact*
- *Si : $\Delta x \leq 0,5 \times 10^{n-1}$, alors le $n^{\text{ème}}$ chiffre significatif avant la virgule est exact.*

Propriétés :

1. Si un chiffre significatif est exact, alors tous les chiffres à sa gauche sont exacts.
2. Si un chiffre n'est pas exact, alors tous ceux à sa droite ne le sont pas.

Exemple 1.0.12 1. *On approche $x = \pi$ par $x^* = 3,14$. On a*

$$\Delta(x) = 0,001592 \leq 0,5 \times 10^{-2}.$$

Alors, les trois chiffres 3, 1 et 4 sont des chiffres significatif exacts.
Pour $x^* = 3,1415$. On a

$$\Delta(x) = 0,000092 \leq 0,5 \times 10^{-3}.$$

Alors, les trois chiffres 3, 1 et $4,1$ sont des chiffres significatif exacts.

2. *Soient $x = 223,864$ et $x^* = 223,887$, alors*

$$\Delta x = 0,023 \leq 0,5 \times 10^{-1}$$

D'où, les quatres chiffres significatif $2, 2, 3, 8$ sont exacts.

Remarque 1.0.13 *Il y a une relation entre l'erreur relative et les chiffres significatifs, en effet,*

1. *Si un nombre approximatif possède n chiffres significatifs exacts, alors son erreur relative est $< 5 \times 10^{-n}$ (sauf si le nombre est 1 suivi de $(n-1)$ zéros).*
2. *Si l'erreur relative à x^* est $< 0,5 \times 10^{-n}$ alors x^* possède au moins n chiffres significatifs exacts.*

1.0.4 Arrondissement et représentation des nombres

L'arrondissement d'un nombre à n chiffres significatifs se fait par la règle suivante :

1. Si le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif est > 5, on augmente le $n^{ème}$ chiffre de 1.
2. Si le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif est < 5, les chiffres retenus restent inchangés.
3. Si le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif est 5 alors on a deux cas :
   - Si tous les chiffres, situés après le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif, sont des zéros. On applique la règle du chiffre pair, c'est à dire si le $n^{ème}$ est impair on lui ajoute 1, par contre s'il est pair alors on le change pas.
   - Parmi les chiffres rejetés, situés après le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif, il existe au moins un qui soit non nul. On ajoute 1 au $n^{ème}$ chiffre.

Exemple 1.0.14 *1. Arrondir $x = 0.254$ à deux (02) chiffres significatifs. Comme $4 < 5$ alors $x^* \simeq 0.25$.*

2. Arrondir $x = 0.4368$ à trois (03) chiffres significatifs. Comme $8 > 5$ alors $x^* \simeq 0.437$

3. Arrondir $x = 1.534500$ à quatre (04) chiffres significatifs. Tous les chiffres rejetés sont des zéros. Le $4^{ème}$ chiffre étant pair, on a alors $x^* \simeq 1.534$.

4. Arrondir $x = 1.5347500$ à cinq (05) chiffres significatifs. Tous les chiffres rejetés sont des zéros. Le $5^{ème}$ chiffre étant impair, on a alors $x^* \simeq 1.5348$.

5. Arrondir $x = 23.6050420$ à quatre (04) chiffres significatifs. Parmi les chiffres rejeté s'il existe au moins un qui soit non nul. Donc, $x^* \simeq 23.61$.

1.0.5 Règles pour les opérations mathématiques de donnés numériques

Addition et Soustraction

Le résultat doit avoir autant de décimales que la donnée qui en a le moins c'est à dire [nombre de chiffres significatifs après la virgule.]

Exemple 1.0.15 *Soit n le plus petit nombre de chiffres significatifs après le virgule.*

1. $S = 1.014 + 1.27 + 120.142 (n = 2)$, alors $S = 122.426$ on arrondi à $122,43$

2. $S = 1.1 \times 10^3 + 1.23 \times 10^4 + 4.5 \times 10^5 = (0.011 + 0.123 + 4.5) \times 10^5 (n = 1)$, alors $S = 4.634 \times 10^5$ on arrondi à 4.6

3. $D = 1.4 - 0.0012 = 0.3988$, $(n = 1)$ on arrondi à 0.4

4. $D = 1.14 \times 10^5 - 1.151 \times 10^3 = (1.14 - 0.01151) \times 10^5 (n = 2)$, alors $D = 1.12849 \times 10^5$ on arrondi à 1.13×10^5

Multiplication et Division

Le résultat doit avoir autant de chiffres significatifs que la donnée qui en a le moins.

Exemple 1.0.16 *Soit n le plus petit nombre de chiffres significatifs.*

1. $P = 1.01 \times 27$, $(n = 2)$, *alors* $P = 27.27$ *on arrondi à* 27.
2. $P = 3.1415 \times 1.51$, $(n = 3)$, *alors* $P = 4.7436$ *on arrondi à* 4.74
3. $D = 0.010 \div 0.200 = 0.05$, $(n = 2)$, *alors* $D = 0.05$ *on arrondi à* 0.050.
4. $D = 2900 \div 9.01$, $(n = 3)$, *alors* $D = 321.86$ *on arrondi à* 322.

Chapitre 2

Résolution d'équations algébriques

Nous sommes souvent confrontés à la résolution l'équation non linéaire du type :

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

où f est une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Le problème est de trouver les valeurs de x dans l'intervalle $[a, b]$ satisfaisant l'équation $f(x) = 0$.
En général, les méthodes de résolution de l'équation non linéaire $f(x) = 0$ sont des méthodes itératives. Elles consistent à construire une suite x_n convergente (plus rapidement possible) vers la solution.

2.1 Méthode de Dichotomie (ou bissection)

Le principe de la méthode de Dichotomie repose sur le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 2.1.1 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$.*

2.1.1 Principe de la méthode

Pour déterminer la solution de l'équation $f(x) = 0$, avec f une fonction continue sur $[a, b]$, il faut d'abord localiser la racine $\overline{x}$ dans l'intervalle $[a, b]$, où $\overline{x}$ est une racine simple.
On procède de la manière suivante :

1. On divise l'intervalle $[a, b]$ en deux parties égales et on pose $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Alors

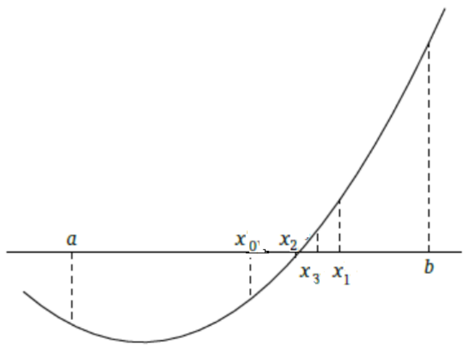
$$\begin{cases} \overline{x} \in [a, x_0], & \text{si } f(a)f(x_0) < 0 \\ \overline{x} \in [x_0, b], & \text{si } f(b)f(x_0) < 0. \end{cases}$$

2. On note le nouveau intervalle contenant $\overline{x}$ par $[a_1, b_1]$:

$$\begin{cases} a_1 = a \quad \textit{et} \quad b_1 = x_0 & \text{si } \ \overline{x} \in [a, x_0] \\ a_1 = x_0 \quad \textit{et} \quad b_1 = b & \text{si } \ \overline{x} \in [x_0, b]. \end{cases} \tag{2.2}$$

3. En itérant ce procédé, on obtient une suite de valeurs :

$$x_0 = \frac{a+b}{2}, x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, \ldots, x_n = \frac{a_n+b_n}{2}.$$



Construction des premiers itérés de la méthode de dichotomie.

2.1.2 Etude de convergence

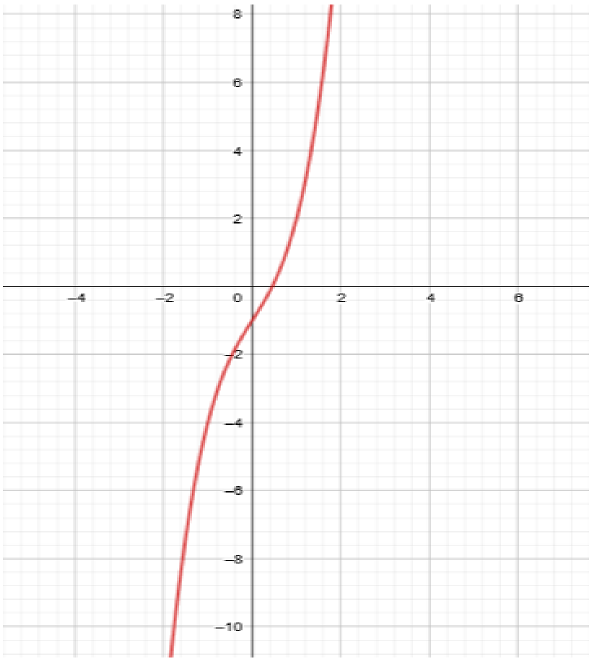
Théorème 2.1.2 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Nous supposons que $f(a) \times f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $c \in]a,b[$. Si l'algorithme de dichotomie arrive jusqu'à l'étape n (de sorte que $x_i \neq c$, pour $i = 0, \ldots, n$) alors*

$$|x_n - c| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}. \tag{2.3}$$

Remarque 2.1.3 *D'après le théorème 2.1.2 les itérations par la méthode de la dichotomie s'achèvent à la n-ème étape quand $|x_n - \overline{x}| \leq \frac{|b_n - a_n|}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$, où ε est une tolérance fixée et $\overline{x}$ est la racine dans $[a,b]$. Donc pour avoir une erreur $|x_n - \overline{x}| \leq \varepsilon$ if suffit de prendre le plus petit entier positif n qui vérifie*

$$n \geq \frac{ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{ln2} - 1.$$

Exemple 2.1.4 *Soit l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$, on pose $f(x) = x^3 + 2x - 1, I = [0,1]$ on a : $f(0) = -1, f(1) = 2$ et donc $f(0).f(1) < 0$ d'après le T.V.I $\exists c \in]0,1[$ tel que $f(c) = 0$.*



Calculons les 4 premières itérations en utilisant la méthode de la dichotomie :

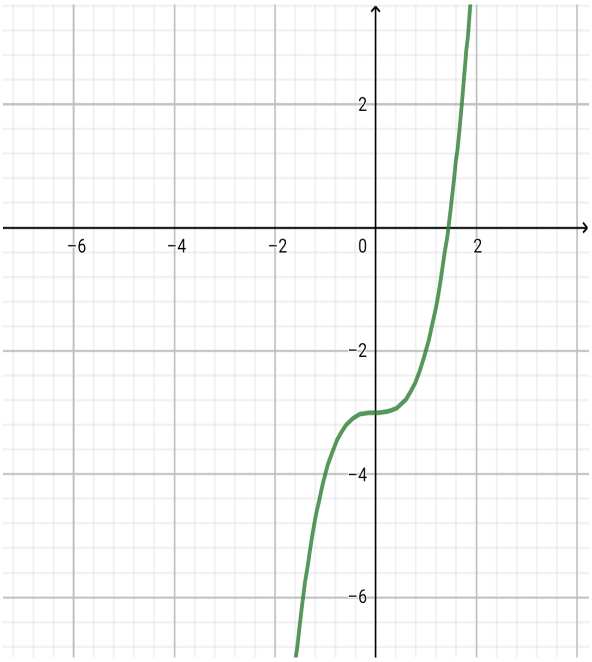
i	a_i	b_i	$x_i = \frac{a_i+b_i}{2}$	$f(a_i)$	$f(x_i)$	$f(b_i)$	$f(a_i) \times f(x_i)$
0	*0*	*1*	$\frac{1}{2}$	*-1*	0.125	*2*	*<0*
1	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	*-1*	-0.484	0.125	*>0*
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	-0.484	-0.197	0.125	*>0*
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	-0.197	-0.41	0.125	*>0*

Ainsi $I_4 = [\frac{7}{16}, \frac{1}{2}], x_4 = \frac{15}{32}$*. Si l'erreur est infèrieur ou égale à* $\epsilon = 10^{-6}$*, alors :*

$$n \geq \frac{ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{ln2} - 1 = 18,931$$

d'où $n = 19$.

Exemple 2.1.5 *Soit* $f(x) = x^3 - 3$*.* f *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*. L'unique solution de l'équation* $f(x) = 0$ *est* $\sqrt[3]{3}$*. On veut approcher la valeur de* $\sqrt[3]{3}$*.*



Nous allons calculer les quatres premières itérations :

i	a_i	b_i	$x_i = \frac{a_i+b_i}{2}$	$f(a_i)$	$f(x_i)$	$f(b_i)$	$f(a_i) \times f(x_i)$
0	*1*	*2*	$\frac{3}{2}$	*-2*	$\frac{3}{8}$	*5*	*<0*
1	*1*	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	*-2*	-$\frac{67}{64}$	$\frac{3}{8}$	*>0*
2	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{8}$	$-\frac{67}{64}$	$-\frac{205}{512}$	$\frac{3}{8}$	*>0*
3	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{23}{16}$	$-\frac{205}{512}$	$-\frac{212}{4096}$	$\frac{3}{8}$	*>0*

Ainsi $I_4 = [\frac{23}{16}, \frac{3}{2}], x_4 = \dfrac{47}{32}$.
Si on prend l'estimation de l'erreur d'arrondis $\varepsilon = 10^{-2}$*, alors d'après le théorème de convergence on obtient :*

$$n \geq \frac{ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{ln2} - 1 = 5,64$$

d'où $n = 6$.

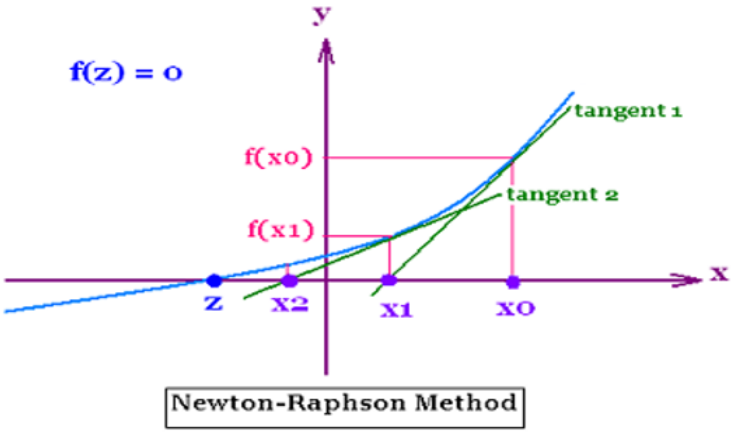
2.2 Méthode de Newton-Raphson

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $f'(x) \neq 0 \; \forall x \in [a,b]$ et on suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans l'intervalle $[a,b]$.

2.2.1 Principe de la méthode

Géométriquement :

En partant d'un point x_0, on trace la tangente de la courbe de f en $(x_0, f(x_0))$. L'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses, nous donne le point x_1.
Le nouveau point x_1 obtenu est ainsi plus proche du zéro de la fonction et on recommence l'opération jusqu'à la précision souhaitée.



Analytiquement :

Le principe de la méthode de Newton-Raphson consiste à remplacer le problème non linéaire $f(x) = 0$ par un problème affine $g(x) = 0$, où g est la "meilleure approximation affine" de f au voisinage de x_0 donné. On identifie la représentation de g à la tangente à la courbe de f au point d'abscisse au voisinage de x_0. En effet, par la formule de Taylor on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \tag{2.4}$$

On suppose que $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, et nous définisons x_1 tel que $g(x_1) = 0$. Notons que x_1 est bien définie lorsque $f'(x_0) \neq 0$ donné par :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Nous construisons ainsi par récurrence, sous réserve que $x_n \in [a, b]$, la suite comme suit :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \quad \textit{donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2.2 Etude de convergence

Théorème 2.2.1 *(convergence globale de la méthode de Newton -Raphson) Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$ telle que*

i) $f(a) \times f(b) < 0$;

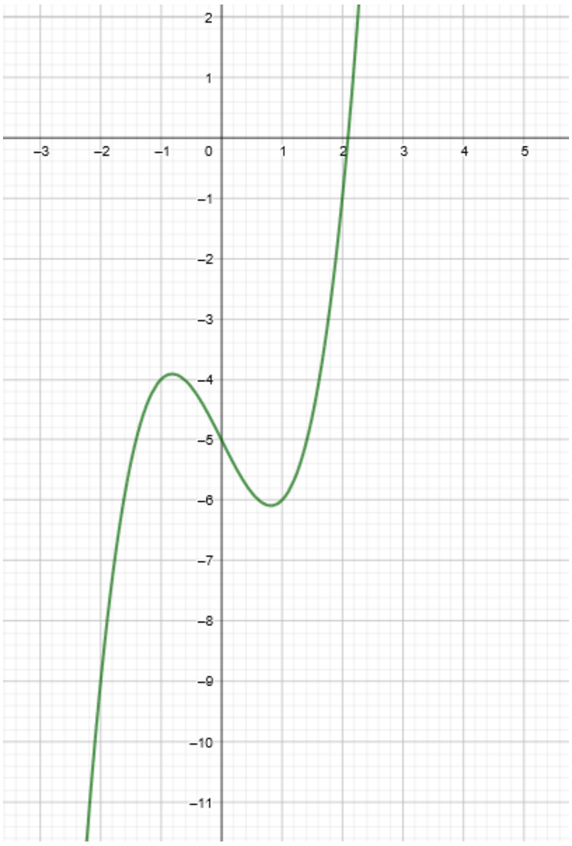
ii) $f'(x)$ *et* $f''(x)$ *sont non nulles et gardent des signes constants dans* $[a, b]$.

Alors la suite des itérés de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \textit{pour tout} \;\; n \in \mathbb{N},$$

avec $x_0 \in [a, b]$ *converge vers l'unique zéro* $x^* \in [a, b]$ *de* f. *En partant de l'approximation* x_0 *dans* $[a, b]$ *vérifiant* $f(x_0) \times f''(x_0) \geq 0$..

Exemple 2.2.2 *Soit l'équation* $x^3 - 2x - 5 = 0, I = [2, 3]$, *on pose* $f(x) = x^3 - 2x - 5$ $f(2) = -1, f(3) = 16$, *alors* $f(2)f(3) < 0 \Rightarrow_{T.V.I} \exists c \in]2, 3[, f(c) = 0$.

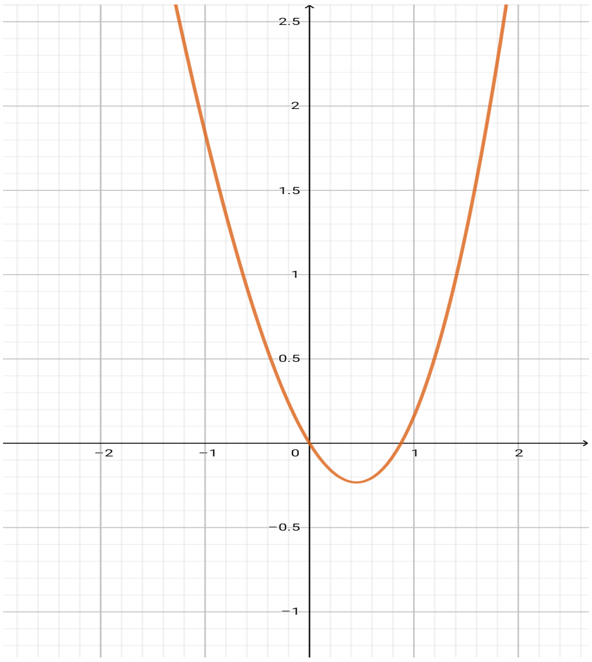


De plus $f'(x) = 3x^2 - 2, f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \notin [2, 3]$ *alors* $f'(x) \neq 0, \forall x \in [2, 3]$, *d'autre part* $f''(x) = 6x > 0, \forall x \in [2, 3]$ *ainsi d'après le théorème de convergence la suite Newton-Raphson converge*

$$\begin{cases} x_0 \in [2, 3] \quad \textit{donnée telle que} f(x_0)f''(x_0) \geq 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.6}$$

Sachant que $f''(x) > 0, \forall x \in [2,3]$, *alors il suffit prendre un* x_0 *pour lequel* $f(x_0) > 0$ *par exemple* $x_0 = 3$. *En utilisant la suite de Newton pour trois itérations, on trouve :*
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.36$
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \simeq 2.127$
$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \simeq 2.095$. *On s'arrête jusqu'à :* $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$, *où* ϵ *est une tolérance finie.*

Exemple 2.2.3 *Soit* $f(x) = x^2 - \sin x$ *sur* $[\frac{1}{2}, 1]$ *et soit* $x_0 = \frac{\pi}{4}$.



On a $f'(x) = 2x - \cos x > 0$ *sur* $[\frac{1}{2}, 1]$ *et* $f''(x) = 2 + \sin x > 0$ *sur* $[\frac{1}{2}, 1]$. *En utilisant la suite de Newton pour trois itérations, on trouve :*
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,52659376$
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,26811032$
$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,06720375.$

2.3 Méthode de point fixe

2.3.1 Principe de la méthode

La méthode de point fixe consiste à transformer l'équation non linéaire $f(x) = 0$ en un problème équivalent

$$g(x) = x \tag{2.7}$$

où la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a la propriétée suivante

$$\overline{x} = g(\overline{x}) \quad \textit{si et seulement si} \quad f(\overline{x}) = 0.$$

Définition 2.3.1 *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $\overline{x} \in \mathbb{R}$ est tel que $g(\overline{x}) = \overline{x}$, on dit que $\overline{x}$ est un point fixe de g (l'image de $\overline{x}$ par g est lui-même).*

La méthode de point fixe consiste à la construction d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \quad \textit{donnée} \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.8}$$

2.3.2 Etude de convergence

Le théoreme suivant nous donne les conditions de convergence de la suite de la méthode de point fixe.

Théorème 2.3.2 *Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On se donne $x_0 \in [a, b]$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$g(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$ (condition de stabilité)*
2. *Il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$ pour tout $x, y \in [a, b]$ (condition de contraction stricte) (ou bien $|g'(x)| \leq k < 1$, $\forall x \in [a, b]$.*

Alors

i) g est continue,

ii) g a un et un seul point fixe $\overline{x}$dans $[a, b]$,

iii) La suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers $\overline{x}$ pour tout choix de x_0 dans $[a, b]$.

De plus, si x^* est la solution de l'équation $g(x) = x$ alors

$$|x^* - x_n| \leq \frac{k^n}{1 - k}|x_1 - x_0|, \quad n \geq 1. \tag{2.9}$$

Exemple 2.3.3 *Soit l'équation (E_2) $e^x - 4x^2 = 0$ avec $x \in \mathbb{R}$.*

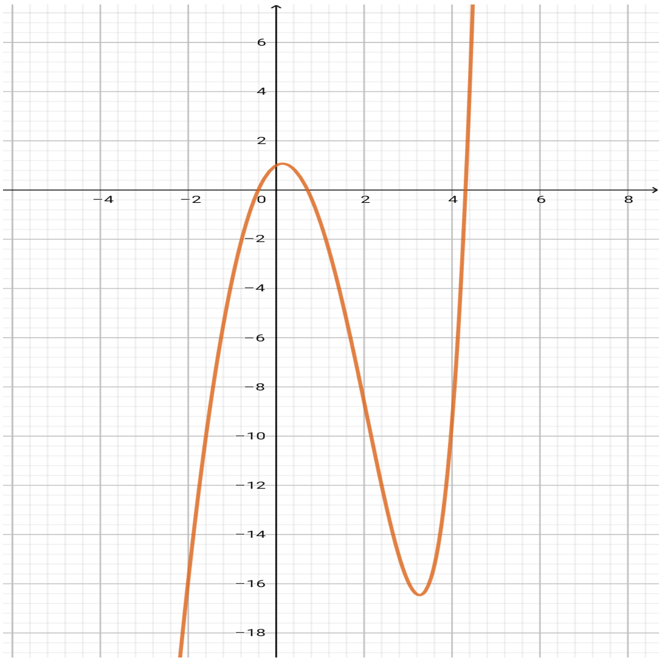
1. ***Montrons que (E_2) admet deux racines réelles de signe contraire :***
   On pose $f(x) = e^x - 4x^2$, f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus

   $$f(-1) = -3.63, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = -1.28$$

   Alors d'après théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I) $\exists c_1 \in [-1, 0]$ et $c_2 \in [0, 1]$ tels que

   $$f(c_i) = 0, \quad i = 1, 2$$

2. ***Localisons graphiquement les racines dans des intervalles de la forme*** $[n, n+1]$ ***(**n **est un entier naturel) :***



Les racines de l'équations (Ed_2) *sont dans* $I_1 = [-1, 0]$, $I_2 = [0, 1]$ *et* $I_3 = [4, 5]$.

3. ***Déterminons la racine négative en utilisant la méthode de point fixe avec une erreur inférieur à*** 10^{-2} ***:***
On a $f(x) = e^x - 4x^2$ *alors*
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 4x^2$$
ou
$$x = \pm\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$$
On note $g_1(x) = \ln 4x^2$, $g_2(x) = -\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$ *et* $g_3(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$.
D'autre part, pour déterminer la racine negative de l'équation (Ed_2) *on prend* $I = [-1, 0]$. *vérifions les conditions du théorème de point fixe. On ne peut pas choisir* $g_1(x)$ *parce qu'elle n'est pas définie sur* I *et aussi la fonction* $g_3(x)$ *qui est positive.*
Par contre la fonction $g_2([-1, 0]) \subset [-1, 0]$ *et* $|g_2'(x)| < k$ *où* $0 \leq k < 1$. *En effet,* $g_2(-1) = -\frac{e^{\frac{-1}{2}}}{2}$ *et* $g_2(0) = -\frac{1}{2}$
et $g_2'(x) = -\frac{e^{\frac{x}{2}}}{4} < 0$ *alors* $g_2([-1, 0]) \subset [-1, 0]$.
D'autre part, $|g_2''(x)| = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{8} > 0$.

Donc $|g_2'(x)| \leq \frac{1}{4} < 1$. *D'où la méthode de point fixe converge.*
On choisit $x_0 = -1$, *on a*

$$x_1 = g_2(x_0) = -0.3032$$

En utilisant le critère d'arrêt suivant pour calculer le nombre d'itérations :

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|x_1-x_0|}\right)}{\ln k}$$

avec $\varepsilon = 10^{-2}$ *et* $k = \frac{1}{4} = \max\limits_{x\in[-1,0]} |g_2'(x)|$
Donc

$$n \geq 3.0294$$

D'où $n = 4$

$$x_2 = g_2(x_1) = -0.4296$$

$$x_3 = g_2(x_2) = 0,4033$$

$$x_4 = g(x_3) = -0.4086.$$

4. *L'équation* (E_2) *admet une racine positive dans l'intervalle* $[4, 5]$.
   Déterminons cette racine en utilisant la méthode de point fixe avec une erreur inférieur à 10^{-2} ***:***

   On prend $g_1(x) = \ln 4x^2$. *On a*

$$g_1(4) = 4.158, g_1(5) = 4.605$$

et

$$g_1'(x) = \frac{2}{x} > 0, \quad \forall x \in [4, 5]$$

alors $g_1(x)$ *est croissante donc* $g_1([4, 5]) \subset [4, 5]$. *D'autre part,* $|g_1'(x)| = g_1'(x)$ *et*

$$g_1''(x) = \frac{-2}{x^2} < 0$$

Donc $g_1'(x)$ *est décroissante.*
Ainsi

$$\max_{x\in[4,5]}(|g_1'(x)|) = g_1'(4) = \frac{1}{2} < 1$$

Alors d'après théorème de point fixe il existe un seul point fixe sur $[4, 5]$ *et la suite du point fixe est*

$$\begin{cases} x_0 \in [4, 5] \quad \textit{donnée} \\ x_{n+1} = g_1(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.10}$$

On calcule le nombre d'itérations pour $x_0 = 4$ *et* $\varepsilon = 10^{-2}$.
Alors $x_1 = g_1(4) = 4.158$
Alors

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln k} \simeq 4.98$$

D'où $n = 5$.

$$x_2 = g_1(x_1) = 4.236$$
$$x_3 = g_1(x_2) = 4.273$$
$$x_4 = g_1(x_3) = 4.290$$
$$x_5 = g_1(x_4) = 4.298$$