1) Formes linéaires : ~~et~~ Dualité

Définition : Soit E un espace vect ~~de Dim n~~ sur $\mathbb{K}$

on appelle forme linéaire sur E toute application linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$

Exp 1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) = x + y - z$

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ l'espace des polynômes à coeficient dans $\mathbb{K}$ pour tout $a \in \mathbb{K}$ on définie

L'application $f : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}$

$P \longrightarrow f(P) = P(a)$

f est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$

On appelle Espace dual de E donnée E^* L'espace vectoriel des forme linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$

$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

Exp 3 $f : C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

Exp $E = M_n(\mathbb{K})$

$$f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$A \longrightarrow f(A) = Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2) base duale d'une base de E.

Soit $B(e_1 \dots e_n)$ base de E alors $\forall x \in E$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

L'application $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longrightarrow e_i^*(x) = x_i$$

est une forme linéaire sur E appelée i^e coordonnée relative à la base B.

Proposition 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Soit $(\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ alors l'application

~~$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$~~
~~$(x_1 \dots x_n) \mapsto \varphi(x_1 \dots x_n)$~~

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$$
$$x \to \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$

2) Réciproquement pour toute forme linéaire φ sur $\mathbb{K}^n$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

<u>Preuve</u> 1) évident à vérifier

2) Soit $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base de $\mathbb{K}^n$

$\forall x \in \mathbb{K}^n$ $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \Rightarrow \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\varepsilon_i)$

il suffit de poser $\lambda_i = \varphi(\varepsilon_i)$ unique

<u>Proposition 2</u> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dim n finie alors E^* est un espace vect de dim n sur $\mathbb{K}$

si $B(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* qui vérifie $e_i^*(e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et on a $\dim E = \dim E^*$.

Ex 1 Si $B=(e_1, e_2, e_3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$

Trouver sa base duale

Ex 2 Si $V\left(V_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, V_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, V_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ base de $\mathbb{R}^3$

Trouver sa base dual V^*

Preuve $e_1^*(x) = e_1^*(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1 e_1^*(e_1) + x_2 e_1^*(e_2) + x_3 e_1^*(e_3)$

$= x_1$

$e_2^*(x) = x_2$, $e_3^*(x) = x_3$

Si $B(e_1 \dots e_n)$ base de $\mathbb{R}^n$ alors

$B^*\left(e_i^*(x) = x_i\right)_{i=1..n}$ base de $(\mathbb{R}^n)^*$

$$V_1^* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow V_1^*(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = V_1^*(x)$$

$V_1^*(V_1) = 1$, $V_1^*(V_2) = 0$ $V_1^*(V_3) = 0$

$V_1^*(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$.

$$\begin{cases} V_1^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ V_1^*\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = a_1 - a_3 = 0 \\ V_1^*(e_2\dots) = a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = a_1 = 1 \\ a_2 = -a_3 = -1 \end{cases}$$

$$V_1^*(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3$$

$$V_2^*(x) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \qquad V_1^*(V_i) = \delta_i^1$$

$$b_3 = 1$$
$$b_1 = 0$$
$$b_2 = +1$$

$$\begin{cases} V_2^*(V_2) = b_1 - b_3 = 1 \\ V_2^*(V_1) = b_1 + b_2 + b_3 = 0 \\ V_2^*(V_3) = b_2 + b_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_2^*(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_3$$

$$V_3^*(V_i) = \delta_i^3 \Rightarrow \begin{cases} V_3^*(V_1) = 0 \\ V_3^*(V_2) = 0 \\ V_3^*(V_1) = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

$$V_3^*(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

$$(*) \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = -1 \end{cases}$$

$$V_3^*(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + 2x_2 - x_3$$

Hyperplan :

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vect. de dim n, on appelle hyperplan H de E tout s.e.v de E de dimension $(n-1)$, c'est aussi le noyau d'une forme linéaire φ sur E

$$H = \{x \in E : \varphi(x) = 0\} = \operatorname{Ker} \varphi.$$

H est aussi dit de co-dimension 1.

Proposition Si $B(e_i)$ base de E $B^*(e_i^*)$ est une base de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire

on pose $\displaystyle \phi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) \cdot e_i^*$

pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ $\displaystyle \phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i^*(e_j)$

or $e_i^*(e_j) = \delta_i^j$ alors

$\phi(e_j) = \varphi(e_j)$ $j = 1 \dots n$

ϕ et φ coïncident sur la base $B \Rightarrow \varphi \equiv \phi$

<u>prédual</u> :

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, E^* l'espace dual $\varphi(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ base de E^*

alors il existe une unique base $V(V_1 \dots V_n)$ de E dont la base duale est V ie $V_i^* = \varphi_i$

la base φ est appelée base préduale de V

<u>Preuve</u> Soit $\varphi(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ base de E^* et soit

$$\phi : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$x \longrightarrow \phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

ie ϕ bijective. Montrons que $\ker \phi = \{0\}$

ϕ est linéaire. Soit $x \neq 0 \in \ker \phi$ alors

$\varphi_1(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0$ il existe alors $\varphi \in E^*$,

$\varphi(x) \overset{\neq 0}{=} 1$ et $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$

alors $\varphi(x) = \sum_{i=1} \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ absurde

alors $\ker \phi = \{0\}$ et par conséquent ϕ est un isomorphisme

Soit $\mathcal{E}(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ base de $\mathbb{K}^n$ alors

$B = (\phi^{-1}(\varepsilon_1), \dots \phi^{-1}(\varepsilon_n))$ est la base de E qui vérifie $B^* = \varphi$

$$\varphi_j(\phi^{-1}(\varepsilon_i)) = ?$$

$$\phi(\phi^{-1}(\varepsilon_i)) = (\varphi_1(\phi^{-1}(\varepsilon_i)), \varphi_2(\phi^{-1}(\varepsilon_i)), \dots, \varphi_n(\phi^{-1}(\varepsilon_i)))$$

$$= \varepsilon_i = ($$

$$\varphi_i(\phi^{-1}(\varepsilon_i)) = 1$$

$$\varphi_i(\phi^{-1}(\varepsilon_j)) = 0 \quad i \neq j$$

<u>Notion de bidual</u> :

<u>Definition</u> Soit E un e.v de dim n, E^* son Dual, note E^*, L'espace vectoriel dual de E^* noté E^{**} est appelé bidual de E

$$\text{Soit } \phi : E \longrightarrow E^{**}$$

$$x \longrightarrow \tilde{x} : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\varphi \longrightarrow \tilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$$

alors ϕ est un isomorphisme.

il suffit de montrer que $\ker \phi = \{0\}$

Soit $x \in \ker \phi \Rightarrow \phi(x) = 0 \Rightarrow \forall \varphi \in E^*\ \tilde{x}(\varphi) = \varphi(x) = 0$

impossible car $\exists \varphi \in E^*$ tq $\varphi(x) = 1 \neq 0$

En effet : $x = \sum x_i e_i \in E$ non nulle $\exists$ certains i_0 tq $e^*_{i_0}(x) = x_{i_0} \neq 0$

Orthogonalité :

On dit que $f \in E^*$ et $x \in E$ sont orthogonaux ssi $\langle f, x \rangle = f(x) = 0$

Soit F un s.ev de E on note

$$F^\perp = \{ f \in E^* ; \forall x \in F \ f(x) = 0 \}$$

$F^\perp$ est un s.ev de E appelé orthogonale de F dans E.

Si W est un s.ev de E^* on note

$$W^\circ = \{ x \in E : \forall f \in W \ f(x) = \langle f, x \rangle = 0 \}$$

W° est un s.ev de E appelé orthogonale de W

Rq Si $(v_1, \dots, v_n)$ base de F alors

$$F^\perp = \{ f \in E^* \text{ tq } f(v_1) = f(v_2) = \dots = f(v_n) = 0 \}$$

de m si $W = \langle f_1 \cdots f_n \rangle$ alors

$$W^0 = \{x \in E : f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0\}$$

Proposition :

i) si $V_1 \subseteq V_2 \subset E$ alors $V_2^{\perp} \subseteq V_1^{\perp} \subset E^*$

ii) si $W_1 \subseteq W_2 \subseteq E^*$ alors $W_2^0 \subseteq W_1^0$

iii) $\{0_E\}^{\perp} = E^*$ et $E^{\perp} = \{0_{E^*}\}$

iv) $\{0_{E^*}\}^0 = E$ et $E^{*0} = \{0_E\}$

Theoreme Soit E un e.v de dim finie soit

alors

i) pour tout V sev de E on a

$\dim V + \dim V^{\perp} = \dim E$ et $(V^{\perp})^0 = V$

ii) pour tout $W \subset E^*$ $\dim W + \dim W^0 = \dim E^* = \dim E$

et $(W^0)^{\perp} = W$

Preuve

i) Soit $\pi : E \longrightarrow E/V$

$$x \longrightarrow \dot{x}$$

Considérons l'application $\varphi : (E/V)^* \longrightarrow V^\perp$

$$\dot{f} \longrightarrow f \circ \pi$$

φ est un Isomorphisme.

alors $\dim (E/V)^* = \dim E/V = \dim E - \dim V = \dim V^\perp$

ii) Considérons l'application

$$\eta : (E^*)^* \longrightarrow W^*$$

$$x \longrightarrow \hat{x}|_W$$

~~x~~ : Soit $x \in E$ on pose $\hat{x}$ l'application linéaire

$$\hat{x} : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f \longrightarrow \hat{x}(f) = f(x)$$

alors $\hat{x} \in E^{**}$

η est surjective et $\operatorname{Ker} \eta = \{x \in E : \eta(x) = 0\}$
$= \{x \in E \mid \hat{x}|_W = 0\} = \{x \in E : \forall f \in W^*\ f(x) = 0\}$

Application transposée:

Soit E, F deux $\mathbb{K}$- espaces vectoriels, $u: E \to F$ une application linéaire. Pour tout $f \in F^*$ (i.e $f: F \to \mathbb{K}$ linéaire)

$\forall$ $f \circ u : E \to \mathbb{K}$ linéaire, $f \circ u \in E^*$

on appelle transposée de u l'application linéaire

$$
\begin{aligned}
{}^t u : F^* &\longrightarrow E^* \\
f &\longrightarrow {}^t u(f) = f \circ u
\end{aligned}
$$

Proposition, Soient E, F, G deux e.v.t de dimension finie sur $\mathbb{K}$ alors

i) $rg\, u = rg\, {}^t u$, ii) $Im({}^t u) = (Ker\, u)^{\perp}$

iii) $Ker({}^t u) = (Im\, u)^{\perp}$

iv) ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$

$u: E \to F$, $v: F \to G$

$(E/V)^*$ est isomorphe à $V^\perp$

Considérer l'application $\pi : E \longrightarrow E/V$

$$x \longrightarrow \dot{x} = \pi(x)$$

Surjective non injective

et considérer l'application

$$\psi : (E/V)^* \longrightarrow V^\perp \subset E^*$$

$$\varphi \longrightarrow \psi(\varphi) = \varphi \circ \pi$$

$$\begin{tikzcd} E/V \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \\ E \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\varphi \circ \pi"'] & \end{tikzcd}$$

ψ est un isomorphisme :

i) ψ injective. $\ker \psi = \{\varphi \in (E/V)^* \text{ tq } \psi(\varphi) = 0\}$

$\psi(\varphi) = \varphi \circ \pi \equiv 0 \iff \forall x \in E \ \varphi \circ \pi(x) = 0$

$\iff \forall x \in E \ \varphi(\pi(x)) = 0$ Comme π est surjective

alors $\varphi \equiv 0$ sur $E/V \Rightarrow \ker \psi = \{0\}$

ii) $\operatorname{Im}\psi = V^{\perp}$ i.e ψ surjective

Soit $\varphi \in (E/_V)^*$ alors $\psi(\varphi) \in E^*$

$\psi(\varphi) : E \longrightarrow \mathbb{K}$. linéaire

Soit $x \in V$. $\psi(\varphi)(x) = \varphi \circ \pi(x) = \varphi(\pi(x))$
$= \varphi(\dot{x}) = \varphi(\dot{0}) = 0$

car $x \in V$ alors $\dot{x} = 0$

d'où pour tout $x \in V$ $\psi(\varphi) \in V^{\perp}$ $\quad \operatorname{Im}\psi \subset V^{\perp}$

Soit $f \in V^{\perp} \Rightarrow \forall x \in V \quad f(x) = 0$

~~on défini~~ $\cancel{\varphi(x) = f \circ \pi}$

on défini la fonction $\varphi(\dot{x})$ par $\varphi(\dot{x}) = f(x)$

$$\begin{aligned} \varphi : E/_V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \dot{x} &\longrightarrow \varphi(\dot{x}) = f(x) \end{aligned}$$

on alors $\psi(\varphi) = \varphi \circ \pi = f$

~~Si $\dot{x} = \dot{y}$ alors $\varphi(\dot{x}) = \varphi(\dot{y}) \Leftrightarrow f(x) = f(y)$~~

~~$f(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in V \Rightarrow \dot{x} = \dot{y}$~~

$\dot{x} = \dot{y} \overset{?}{\Longrightarrow} \varphi(\dot{x}) = \varphi(\dot{y})$

$\dot{x} = \dot{y} \Leftrightarrow x - y \in V \Rightarrow f(x-y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \varphi(\dot{x}) = \varphi(\dot{y})$

(c) $\dim W + \dim W^{\circ} = \dim E$

D'après la définition de bidual on a

L'isomorphisme $\eta : E \longrightarrow E^{**}$

$x \longrightarrow \tilde{x} : E^{*} \longrightarrow \mathbb{K}$

$\varphi \longrightarrow \tilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$

η est un isomorphisme $\dim E = \dim E^{**}$

Soit $W \in E^{*}$, $W^{\circ} = \{x \in E : \forall f \in W \; f(x) = 0\}$

~~Soit $\gamma : (E^{*})^{*} \longrightarrow W^{*}$~~

~~$\varphi \longrightarrow \gamma(\varphi) =$~~

~~$x \longrightarrow \tilde{x}|_W$~~

$\gamma : E \longrightarrow W^{*}$

$x \longrightarrow \tilde{x}|_W$

$\ker \gamma = \{x \in E : \gamma(x) = 0\}$

$= \{x \in E \text{ tq } \tilde{x}|_W \equiv 0\}$

$\cancel{= \{x \in E : \tilde{x}(t) = 0 \ \forall t \in E\}}$

$= \cancel{W}^0 = \{x \in E \text{ tq } \forall f \in W \ \tilde{x}(f) = 0\}$

$= \{x \in E \text{ tq } \forall f \in W \ f(x) = 0\} = W^0$

alors $\dim E = \dim W^0 + \dim \operatorname{Im} \gamma$

il suffit de montrer que $\operatorname{Im} \gamma = W^*$ ie γ surjective

d'où $\dim E = \dim W^0 + \dim W$