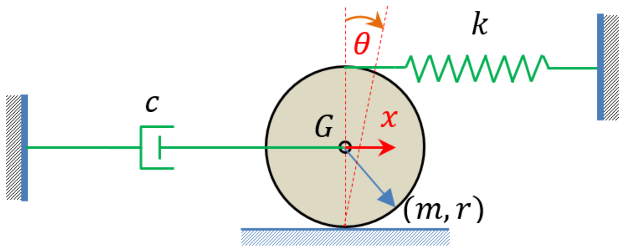
Partie Vibration

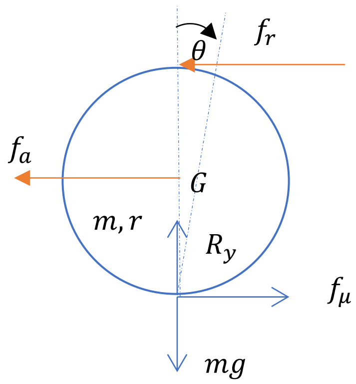
Un disque de masse m, de rayon r et de moment d'inertie $I_G = \frac{1}{2}mr^2$.

a) Déterminer l'équation de mouvement du système en supposant que le disque roule sans glissement en fonction de x.

b) Déterminer la pulsation propre et le facteur d'amortissement.

c) Si le coefficient d'amortissent est $c = \frac{1}{2}\sqrt{km}$, le disque est relâché à partir de $\theta(0) = \theta_0 = 9°$ sans vitesse initiale, trouver le déplacement du centre du disque.





On trace le diagramme du corps isolé

Les forces appliquées sur le disque dans la direction x.

Force de rappel du ressort $f_r = k * x_r$.

Force d'amortissement $f_a = c * \dot{x}_G$.

Force d'adhérence f_μ inconnue.

La relation la rotation et le déplacement du disque est $x = \theta * r$

Les relations cinématiques

$$x = r\theta$$

$$\dot{x} = r\dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

D'où les forces

$$f_r = k * x_r = k * 2x = 2kx$$

$$f_a = c * \dot{x}_G = c\dot{x}$$

1ère Méthode

En utilisant les équilibres dynamiques linéaire et angulaire du disque

$$\sum F = ma_x$$

$$-f_a - f_r + f_\mu = ma_x$$

$$-c\dot{x} - 2kx + f_\mu = m\ddot{x}$$

$$\sum \mathcal{M}_G = I_G\ddot{\theta}$$

$$f_r r + f_\mu r = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mr\ddot{x}$$

$$2kx + f_\mu = = \frac{1}{2}m\ddot{x}$$

En éliminant la force de frottement inconnue, et en utilisant les relations cinématiques, on trouve

$$f_\mu = -\frac{1}{2}m\ddot{x} - 2kx$$

Remplaçons l'équation des forces

$$-c\dot{x} - 2kx - \frac{1}{2}m\ddot{x} - 2kx \quad = m\ddot{x}$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + 4kx = 0$$

2ème Méthode

En utilisant les équilibres dynamiques autour du centre instantané de rotation du disque

$$\sum \mathcal{M}_P = I_P\ddot{\theta}$$

$$-f_a r - f_r \times 2r += I_P\ddot{\theta}$$

$I_P = I_G + mr^2$ (Relation de Huygens)

$$-c\dot{x}r - 4kxr = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + 4kx = 0$$

3ème Méthode

L'énergie cinétique (le disque a un mouvement de rotation et un mouvement de translation)

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle (pour une rotation θ du disque le ressort s'allonge de $2r\theta = 2x$)

$$V = \frac{1}{2}k(2x)^2 = 2kx^2$$

La fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2$$

Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2}m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}$$

D'où l'équation de mouvement

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + 4kx = 0$$

On transforme l'équation de mouvement sous la forme

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2c}{3m}\dot{x} + \frac{8k}{3m}x = 0$$

La pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\frac{8k}{3m}} = 2\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

Le facteur d'amortissement

$$2\xi\omega_n = \frac{2c}{3m}$$

$$\xi = \frac{c}{3m\omega_n} = \frac{c}{3m\times 2}\sqrt{\frac{3m}{2k}} = \frac{c}{2\sqrt{6km}}$$

Si $c = \frac{\sqrt{km}}{2}$

$$\xi = \frac{\frac{\sqrt{km}}{2}}{2\sqrt{6km}} = \frac{1}{4\sqrt{6}} < 1$$

La réponse est de la forme

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\}$$

L'expression de la vitesse

$$\dot{x}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\} + e^{-\xi\omega_n t}[-\omega_d A_1 \sin\omega_d t + \omega_d A_2 \cos\omega_d t]$$

Les conditions initiales

$$\theta(0) = \theta_0 \Rightarrow x(0) = r\theta_0$$

$$e^0\{A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0\} = r\theta_0$$

$$A_1 = r\theta_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$-\xi\omega_n e^0\{A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0\} + e^0[-\omega_d A_1 \sin 0 + \omega_d A_2 \cos 0] = 0$$

$$-\xi\omega_n A_1 + \omega_d A_2 = 0$$

$$A_2 = \frac{\xi\omega_n r\theta_0}{\omega_d}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left\{r\theta_0 \cos\omega_d t + \frac{\xi\omega_n r\theta_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right\}$$