Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques

USTO MB
2020/2021

Examen final d'Algèbre 4

Durée : 1h15

Exercice 1. (8 pts)
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B}$ la base de E formée des polynômes $1, X, X^2$ et $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$. On considère les trois formes linéaires sur E suivantes :

$$\ell_1(P) = P(1),\ \ell_2(P) = P'(1),\ \ell_3(P) = \int_0^1 P(x)dx.$$

1. Quelles sont les coordonnées de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 dans $\mathcal{B}^*$?
2. Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base du dual E^*.
3. Trouver une base de E dont (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est la base duale.

Exercice 2. (12 pts)
Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par :

$$\varphi(x, y) = \alpha x_1 y_1 - x_1 y_3 + 2x_2 y_2 - x_3 y_1 - \alpha x_3 y_3, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Première partie :

1. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer en fonction du réel α l'orthogonale de $F = \text{Vect}\{(1, -1, 2)\}$.
3. Déterminer le rang de φ et son noyau. Est-ce une forme non dégénérée ?

Seconde partie :

1. Donner la forme quadratique q associée à φ.
2. Trouver une décomposition de q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires.
3. Selon les valeurs du réel α, déterminer le rang et la signature de q.

بِالتّوفيق

Corrigé

Exercice 1. (8 pts)

1. Les coordonnées de ℓ_i dans la base duale de $(1, X, X^2)$ sont obtenus en calculant $\ell_i(1), \ell_i(X), \ell_i(X^2)$. On obtient :
$$\ell_1(1) = 1, \ell_1(X) = 1, \ell_1(X^2) = 1, \quad \textbf{(0.75 pt)}$$
$$\ell_2(1) = 0, \ell_2(X) = 1, \ell_2(X^2) = 2, \quad \textbf{(1.5 pts)}$$
$$\ell_3(1) = 1, \ell_3(X) = \frac{1}{2}, \ell_3(X^2) = \frac{1}{3}. \quad \textbf{(1.5 pts)}$$

2. Pour montrer que l'on obtient une base, il suffit de vérifier que la matrice composée des coefficients calculés dans la question précédente est inversible. Or,
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \quad \textbf{(2 pts)}$$
est non nul, ce qui montre que la matrice est inversible.

3. Notons $\mathcal{B}'$ la base de E que l'on cherche, de sorte que $\mathcal{B}'^* = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est la base duale. On a
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}' = {}^t(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}\mathcal{B}'^*)^{-1} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 6 & -2 & -6 \\ -3 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(2 pts)}$$
Par conséquent, $\mathcal{B}' = (-3X^2 + 6X - 2, \frac{3}{2}X^2 - 2X + \frac{1}{2}, 3X^2 - 6X + 3)$ **(0.25 pt)** est la base recherchée.

Exercice 2. (12 pts)
Première partie :

1. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pt)}$$

2. Soit $v = (1, -1, 2)$, alors $F^\perp = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ \varphi(x, v) = 0, \forall v \in F\}$.
Ainsi
$$\begin{aligned} \varphi(x, v) = 0 \ &\Leftrightarrow\ \alpha x_1 - x_3 - 2x_2 - 2x_1 - 2\alpha x_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ (\alpha - 2)x_1 - 2x_2 - (2\alpha + 1)x_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ x_2 = \frac{\alpha - 2}{2}x_1 - \frac{2\alpha + 1}{2}x_3 \\ &\Leftrightarrow\ x = x_1\big(1, \frac{\alpha - 2}{2}, 0\big) + x_3\big(0, -\frac{2\alpha + 1}{2}, 1\big) \quad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$
d'où
$$F^\perp = \mathrm{Vect}\{\big(1, \frac{\alpha - 2}{2}, 0\big), \big(0, -\frac{2\alpha + 1}{2}, 1\big)\}. \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

3. $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = -2(\alpha^2+1) \neq 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. **(1 pt)** Donc $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$. **(0.25 pt)**
   $(x,y,z) \in \ker(\varphi) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(0.5 pt)** on résout le système suivant

$$\begin{cases} \alpha x - z = 0 \\ 2y = 0 \\ -x - \alpha z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = z = 0. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

   Ainsi $\ker(\varphi) = \{0\}$. **(0.25 pt)** et donc φ est non dégénérée. **(0.25 pt)**

Seconde partie :

1. $q(x) = \alpha x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - \alpha x_3^2$. **(0.75 pt)**
2. Pour réduire la forme q on distingue deux cas :

   - Si $\alpha = 0$, alors

$$\begin{aligned} q(x) &= 2x_2^2 - 2x_1x_3 \\ &= 2x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3)^2. \quad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

   - Si $\alpha \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} q(x) &= \alpha x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - \alpha x_3^2 \\ &= \alpha\left(x_1 - \frac{1}{\alpha}x_3\right)^2 + 2x_2^2 - \left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)x_3^2. \quad \textbf{(2 pts)} \end{aligned}$$

3. Signature et rang de q.
   Notons pour p le nombre des coefficients positifs et pour n le nombre des coefficients négatifs et rappelons que $\mathrm{sign}(q) = (p,n)$

   - Pour $\alpha = 0$, **(0.25 pt)** $\mathrm{sign}(q) = (2,1)$ **(0.25 pt)** et $\mathrm{rg}(q) = 3$. **(0.25 pt)**
   - Pour $\alpha > 0$, **(0.25 pt)** on a : $-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right) < 0$, **(0.5 pt)** ainsi $\mathrm{sign}(q) = (2,1)$ **(0.25 pt)** et $\mathrm{rg}(q) = 3$. **(0.25 pt)**
   - Pour $\alpha < 0$, **(0.25 pt)** on a : $-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right) > 0$, **(0.5 pt)** ainsi $\mathrm{sign}(q) = (2,1)$ **(0.25 pt)** et $\mathrm{rg}(q) = 3$. **(0.25 pt)**