Faculté des Mathématiques et Informatique — USTO MB
Département de Mathématiques — 2021/2022

# Algèbre 3
## TD n°1 : Anneaux et polynômes

---

**Exercice 1.** On munit $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois définies par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ et } (x, y) \bullet (x', y') = (xx', xy' + x'y).$$

Montrer que $(A, +, \bullet)$ est un anneau commutatif unitaire.

**Exercice 2.** Soit $C$ le centre d'un anneau $A$ (i.e. l'ensemble des éléments $c$ de $A$ tel que pour tout élément $x$ de $A$, on ait: $cx = xc$). Montrer que $C$ est un sous-anneau de $A$.

**Exercice 3.** Soit $A$ un anneau vérifiant ($xa = bx \Longrightarrow a = b$, $a, b, x \in A$ ).
Montrer que :

1. $A$ est un anneau commutatif.
2. S'il existe $e \neq 0$ tel que $e^2 = e$, alors $A$ est unitaire d'élément neutre $e$.

**Exercice 4.** Soit $A$ un anneau. On note 1 l' élément neutre de la deuxième loi de $A$ tel que pour tout élément $a, b \in A$ on a $ab = 1$ et $ba \neq 1$. Montrer que :

1. $(1 - ba)b = 0$.
2. $1 - ba = (1 - ba)^2$.
3. $(b^n(1 - ba))^2 = 0$, $n \geq 1$.

**Exercice 5.** Dans (1) et (2), on note 1 l' élément neutre de la deuxième loi de $A$.

1. Montrer que dans un anneau intègre et unitaire $A$, tout élément admettant un inverse à gauche (ou à droite) est inversible.
2. Supposons que dans un anneau $A$, les éléments $a, b, ab - 1$ sont inversibles. Montrer que $a - b^{-1}$ est inversible dans $A$ et que $(a - b^{-1})^{-1} = b(ab - 1)^{-1}$.

**Exercice 6.** Soit $A$ est un anneau et $B$ une partie non vide de $A$. Désignons par :

$$N_B = \{a \in A;\ a.b = 0\ \forall b \in B\}.$$

1. Montrer que $N_B$ est un idéal à gauche de $A$.
2. Montre que si $I$ est un idéal à gauche de $A$, alors $N_I$ est un idéal bilatère.

**Exercice 7.** Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes :

1. $-X^8 + 2X^4 - 1$.
2. $X^5 - X^3 - X^2 + 1$.
3. $1 - X^8$.

**Exercice 8.** Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$.
2. $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27^X + 38$ par $X^2 - X - 7$.
3. $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.
4. $X^n + X + 1$ par $(X - 1)^2$.
5. $X^n$ par $(X - 1)^2$.
6. $(X + 1)^n$ par $(X - 1)^2$.
7. $(X + 1)^n$ par $X^2 + 1$.

**Exercice 9.** Soit $A$ un anneau commutatif unitaire. On désigne par $A[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $A$. Soit $P(X) = 2X^3 - 3X^2 - 5$ et $Q(X) = 7X^3 + 33X - 4$. Calculer $P(X)Q(X)$ et $P(X) + Q(X)$ dans les trois cas suivants :

1. $\mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.