LMD – Maths & Informatique

1 ère Année

Semestre 1

Unité Découverte

Module: Physique 1

Mécanique du Point

A.KIES

Table de la matière

I. Notions de Base

II. Rappels Mathématiques

III. Cinématique du Point

IV. Dynamique du Point

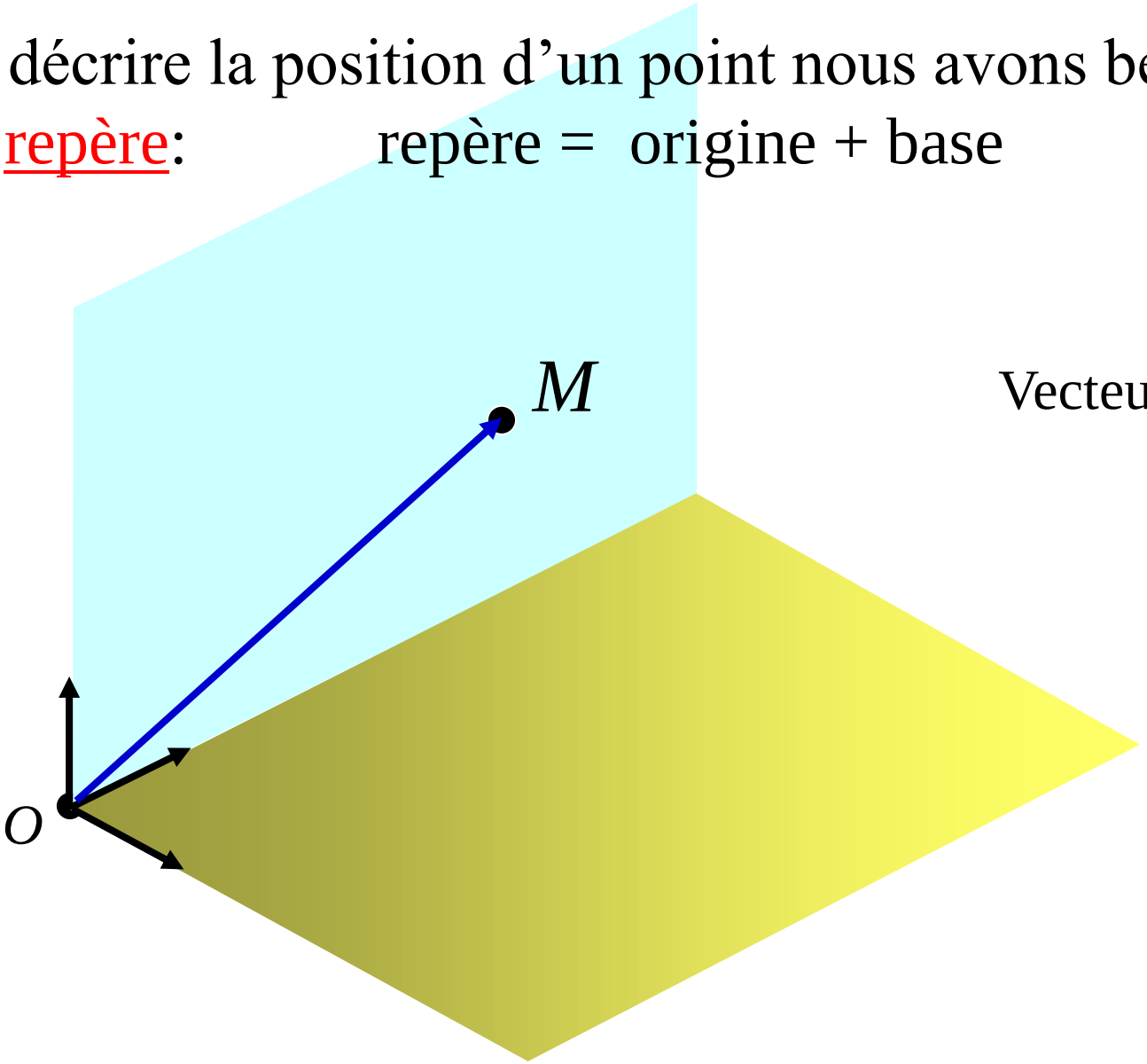
V. Travail et Énergie

III. Cinématique du Point

1. Position dépendant du temps et notion de Référentiel
2. Dérivée d'un vecteur: vitesse et accélération
3. Vitesse et accélération dans différentes bases
4. Le mouvement relatif.

1. Position dépendant du temps et Notion de Référentiel

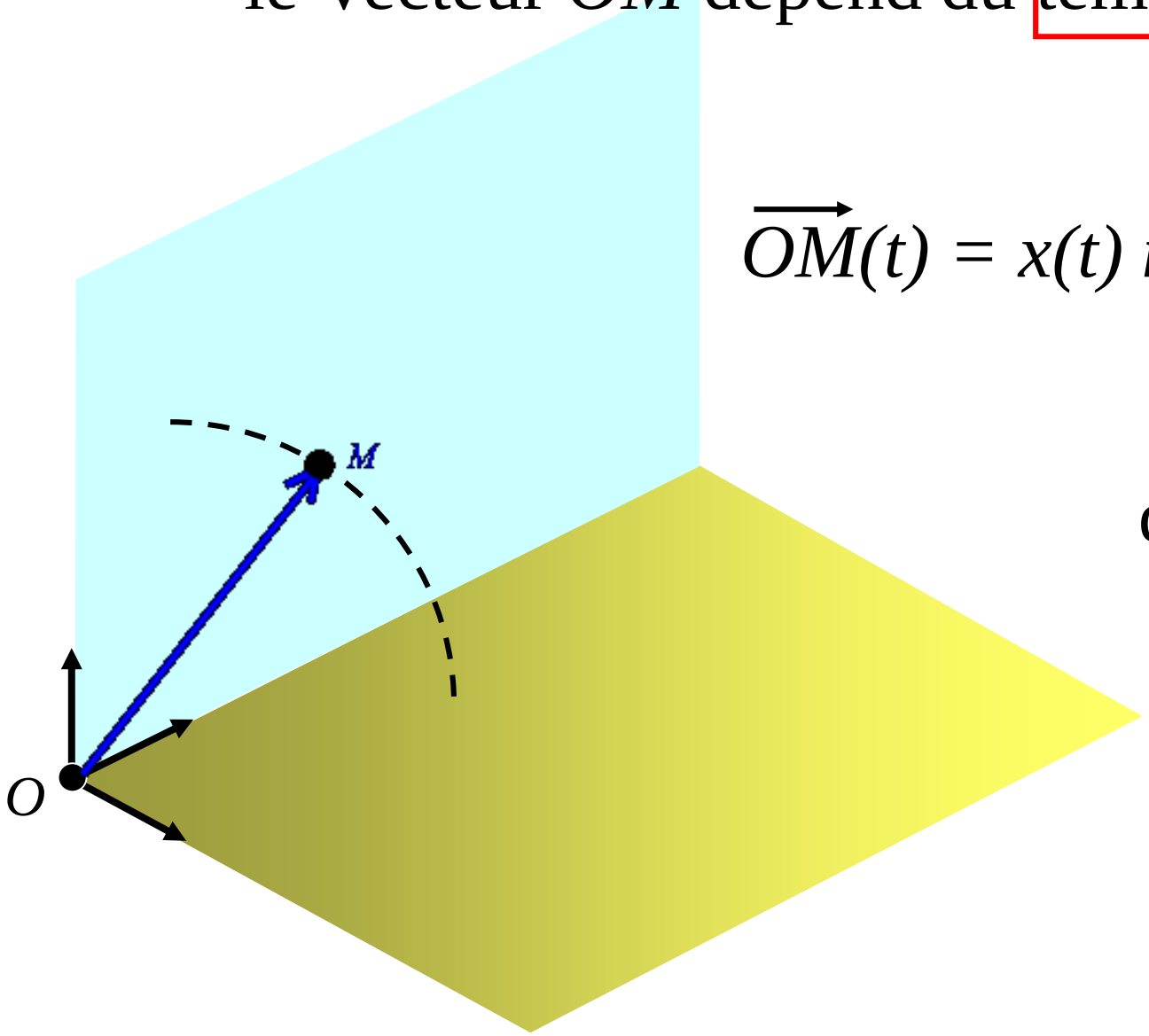
Pour décrire la position d'un point nous avons besoin d'un repère: repère = origine + base



Vecteur OM

Si le point *M* est en mouvement :

le Vecteur *OM* dépend du temps



$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$$

Mais ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) dépendent ils du temps ?

Dans certains cas oui.

« Un corps est en mouvement, donc sa position dépend du temps. »



Cette phrase, est elle juste ?

Cette phrase n'est ni juste ni fausse, cela dépend de qui observe ce corps.

D'où la nécessité d'introduire en physique la notion d'observateur.

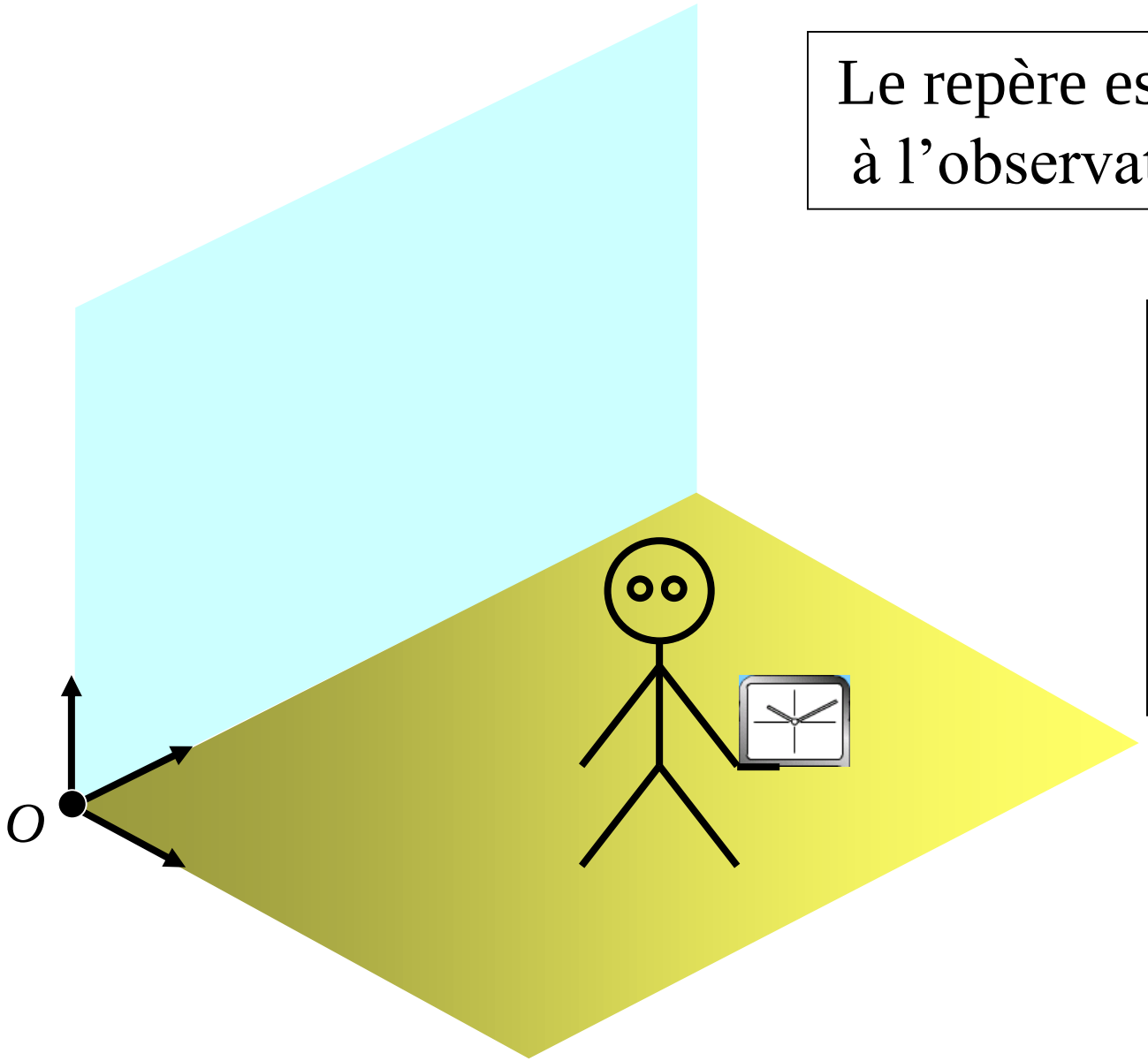
L'observateur est en quelque sorte le témoin du temps.

Donc, pour décrire le mouvement d'un corps nous avons besoin d' un repère + un observateur

un repère + un observateur = un référentiel

un repère + un observateur = un référentiel

Le repère est lié à l'observateur



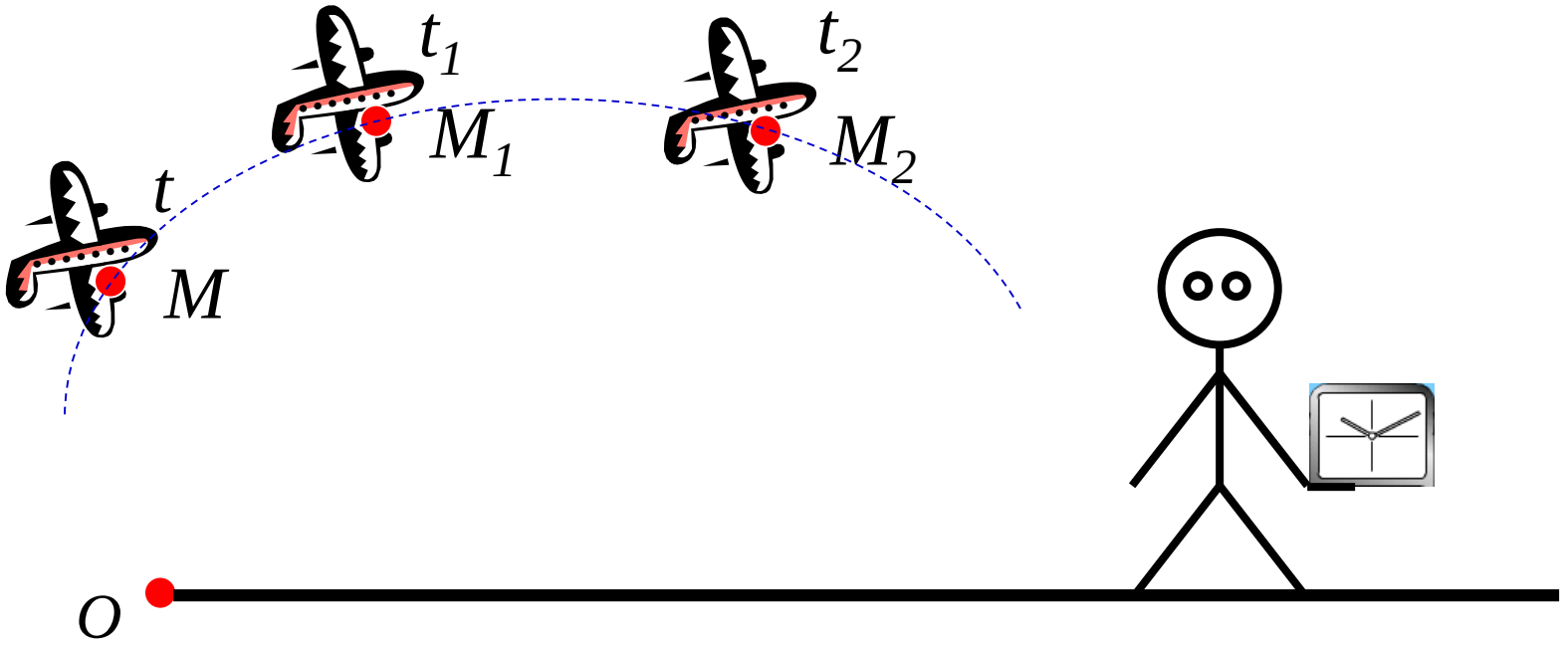
Les vecteurs de base et l'origine sont fixes par rapport à l'observateur

1. Dérivée d'un vecteur: vitesse et accélération

Nous discutons ici la dérivée par rapport au temps

On choisit un référentiel (R) d'origine O.

Un mobile M se déplace.

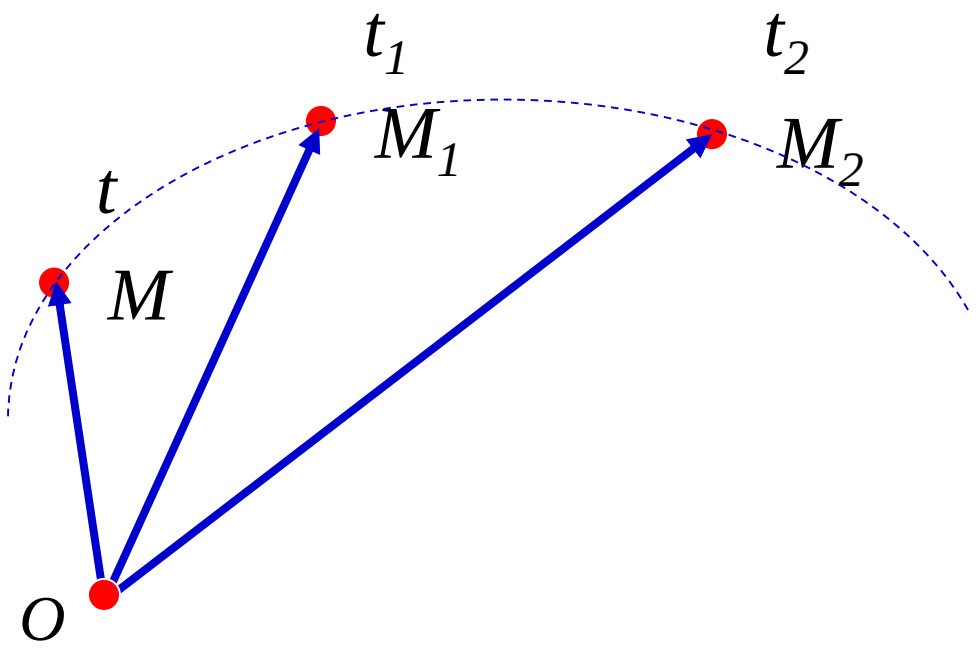


1. Dérivée d'un vecteur: vitesse et accélération

Nous discutons ici la dérivée par rapport au temps

On choisit un référentiel (R) d'origine O.

Un mobile M se déplace.



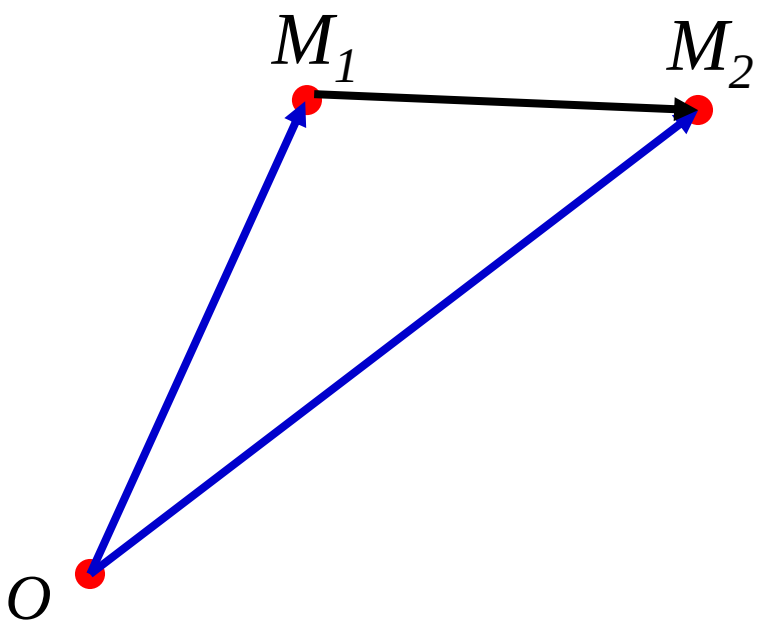
$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM}(t_1)$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM}(t_2)$$

Définition:

La vitesse moyenne du mobile est donnée par:

$$\overrightarrow{V_m} = \frac{\overrightarrow{OM}(t_2) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{t_2 - t_1}$$



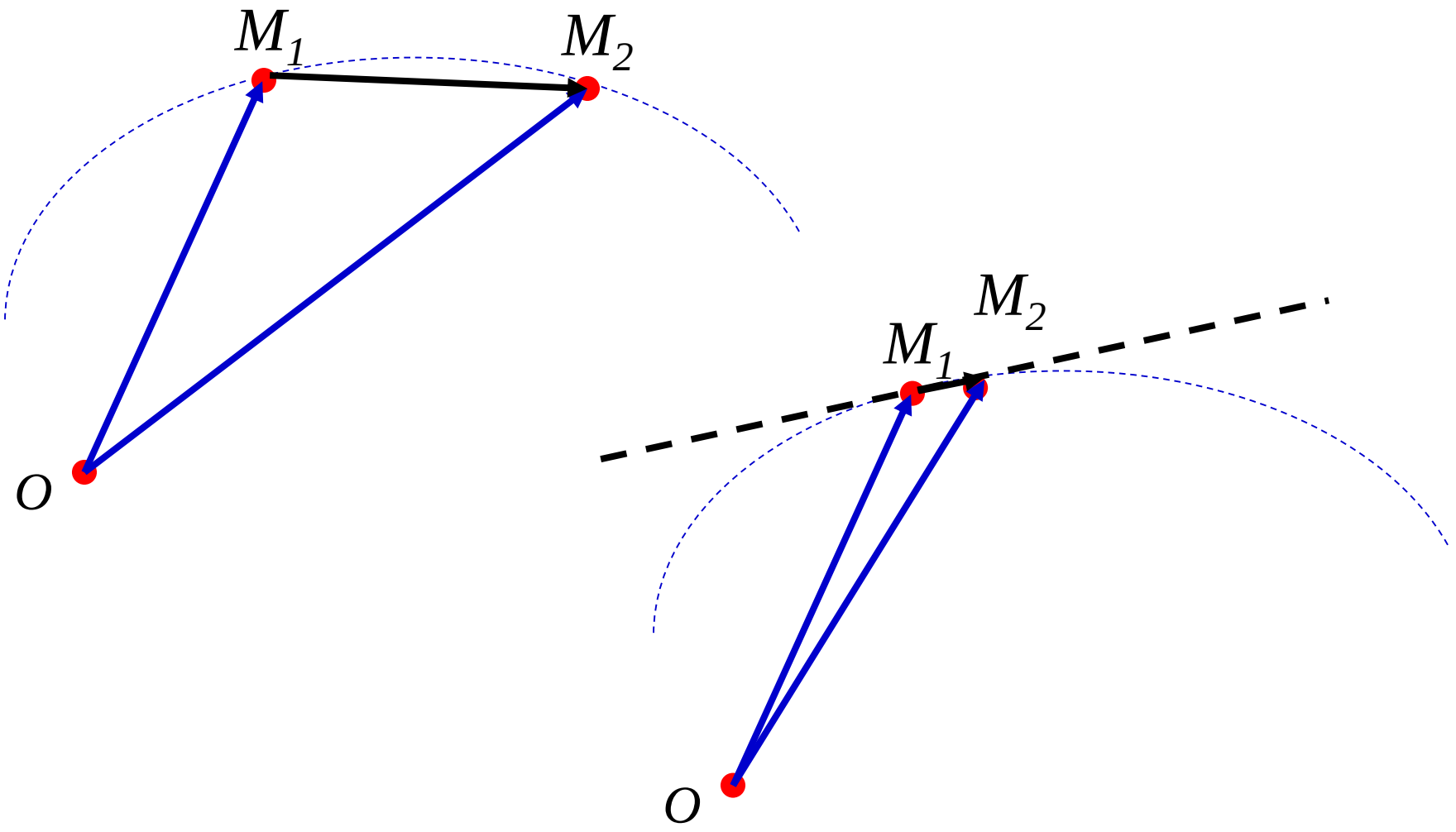
$$\overrightarrow{V_m} \;//\; \overrightarrow{M_1M_2}$$

A la limite où t_1 et t_2 sont des instants très rapprochés, on définit <u>la vitesse instantanée:</u>

$$\overrightarrow{V(t_1)} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\overrightarrow{OM}(t_2) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Comparer avec:

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



La vitesse instantanée est tangente à la trajectoire

Souvent on note: $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$

Et <u>la vitesse instantanée</u> peut s'écrire aussi:

$$\overrightarrow{V(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

En pratique, dériver un vecteur revient à dériver ses composantes:

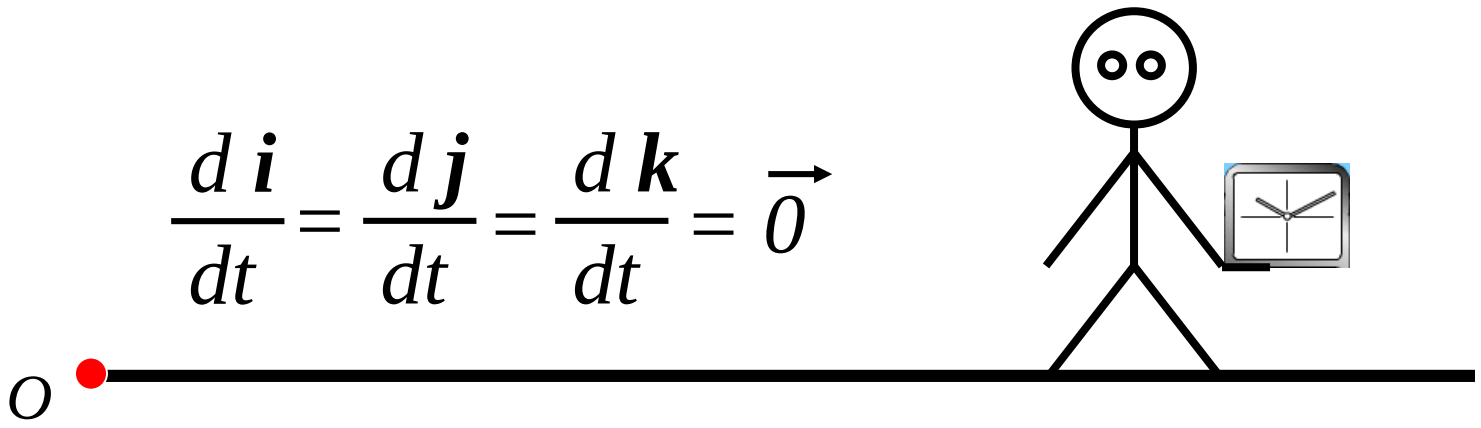
Exemple: $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$

$$\overrightarrow{V(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d\,[\,x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}\,]}{dt}$$

$$= \frac{d\,[\,x(t)\,\mathbf{i}]}{dt} + \frac{d\,[\,y(t)\,\mathbf{j}]}{dt} + \frac{d\,[\,z(t)\,\mathbf{k}]}{dt}$$

$$\overrightarrow{V(t)} = \frac{d\,x(t)}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{d\,y(t)}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{d\,z(t)}{dt}\,\mathbf{k}$$

$$\frac{d\,\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\,\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\,\mathbf{k}}{dt} = \vec{0}$$



En conclusion, dans un référentiel (*R)* lié à une base (**i**, **j**, **k**) :

$$\overrightarrow{V} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right/_{\mathrm{R}}$$

et

$$\overrightarrow{V} = \frac{dx}{dt}\,\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\,\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\,\boldsymbol{k}$$

Le « $/R$ *» exprime le fait que* $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \overrightarrow{0}$

Définition:

L'accélération moyenne est donnée par:

$$\overrightarrow{\gamma_m} = \frac{\overrightarrow{V(t_2)} - \overrightarrow{V(t_1)}}{t_2 - t_1}$$

L'accélération instantanée est donnée par:

$$\overrightarrow{\gamma} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\overrightarrow{V(t_2)} - \overrightarrow{V(t_1)}}{t_2 - t_1}$$

Et donc: dans un référentiel (*R*) lié à une base

(**i**, **j**, **k**), c-à-d: $\frac{d\,\boldsymbol{i}}{dt} = \frac{d\,\boldsymbol{j}}{dt} = \frac{d\,\boldsymbol{k}}{dt} = \vec{0}$

$$\vec{\gamma} = \left.\frac{\overrightarrow{dV}}{dt}\right/_{\mathrm{R}}$$

En général: $\vec{V} = V_x\ \boldsymbol{i} + V_y\ \boldsymbol{j} + V_z\ \boldsymbol{k}$

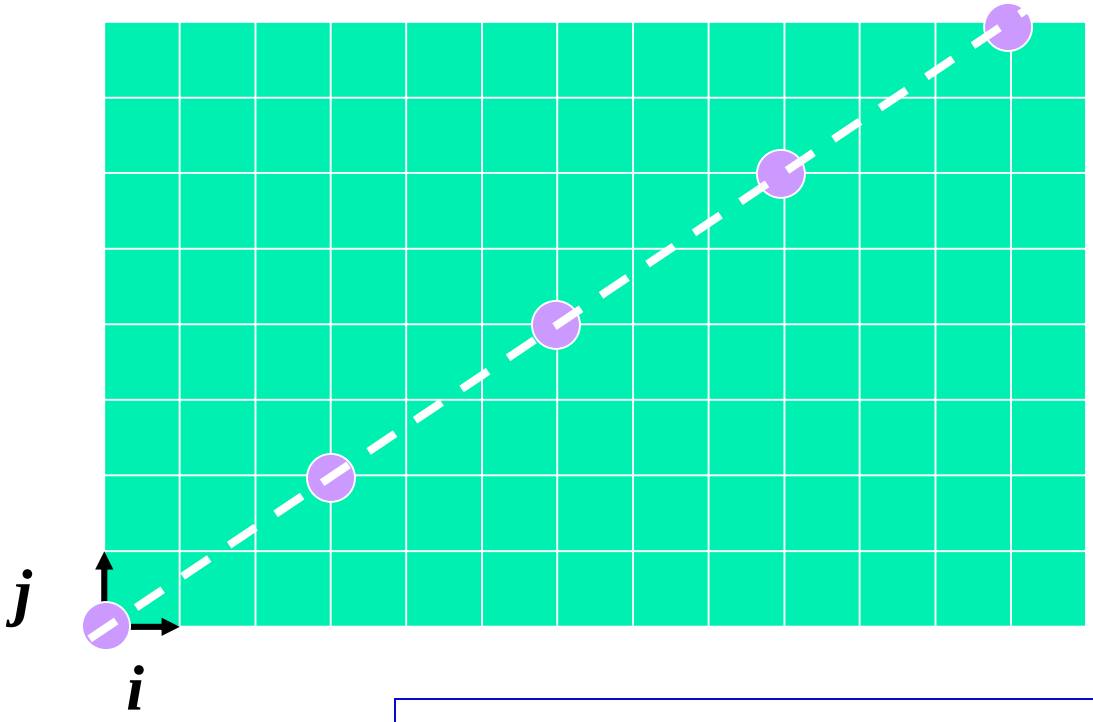
Et donc:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\,V_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{d\,V_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{d\,V_z}{dt}\boldsymbol{k}$$

Exemple 1: $\overrightarrow{OM} = 3\,t\ \boldsymbol{i} + 2\,t\ \boldsymbol{j}$

$\overrightarrow{V} = 3\ \boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j}$

$\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$



$t = 0\ ;\ x = 0\ ;\ y = 0$

$t = 1\ ;\ x = 3\ ;\ y = 2$

$t = 2\ ;\ x = 6\ ;\ y = 4$

$t = 3\ ;\ x = 9\ ;\ y = 6$

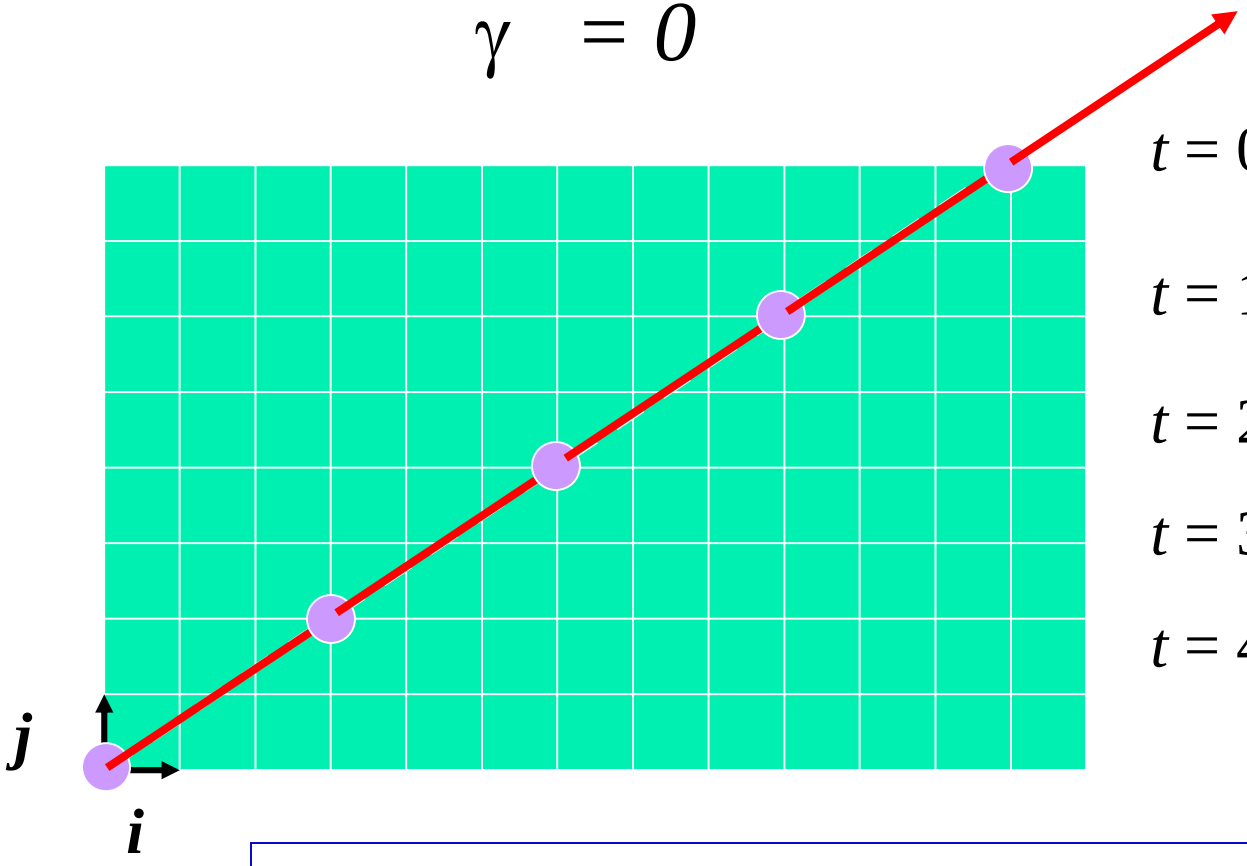
$t = 4\ ;\ x = 12\ ;\ y = 8$

La trajectoire est une droite:
Le mouvement est rectiligne

Exemple 1: $\overrightarrow{OM} = 3\,t\ \boldsymbol{i} + 2\,t\ \boldsymbol{j}$

$\overrightarrow{V} = 3\ \boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j}$

$\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$



$t = 0\ ;\ V_x = 3\ ;\ V_y = 2$

$t = 1\ ;\ V_x = 3\ ;\ V_y = 2$

$t = 2\ ;\ V_x = 3\ ;\ V_y = 2$

$t = 3\ ;\ V_x = 3\ ;\ V_y = 2$

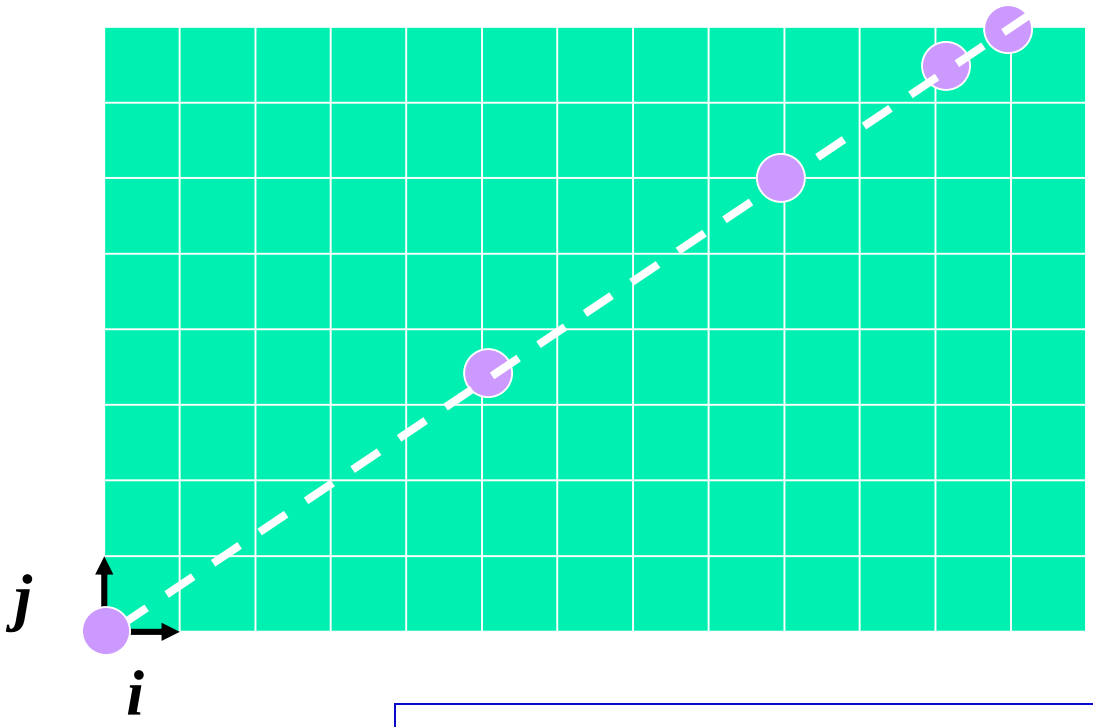
$t = 4\ ;\ V_x = 3\ ;\ V_y = 2$

Le vecteur vitesse est constant:
Le mouvement est rectiligne uniforme

Exemple 2: $\overrightarrow{OM} = 0.75\,(-t^2+8t)\,\boldsymbol{i} + 0.5\,(-t^2+8t)\,\boldsymbol{j}$

$\overrightarrow{V} = 1.5\,(-t+4)\,\boldsymbol{i} + (-t+4)\,\boldsymbol{j}$

$\overrightarrow{\gamma} = -1.5\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$



$t = 0$; $x = 0$; $y = 0$

$t = 1$; $x = 5.25$; $y = 3.5$

$t = 2$; $x = 9$; $y = 6$

$t = 3$; $x = 11.25$; $y = 7.5$

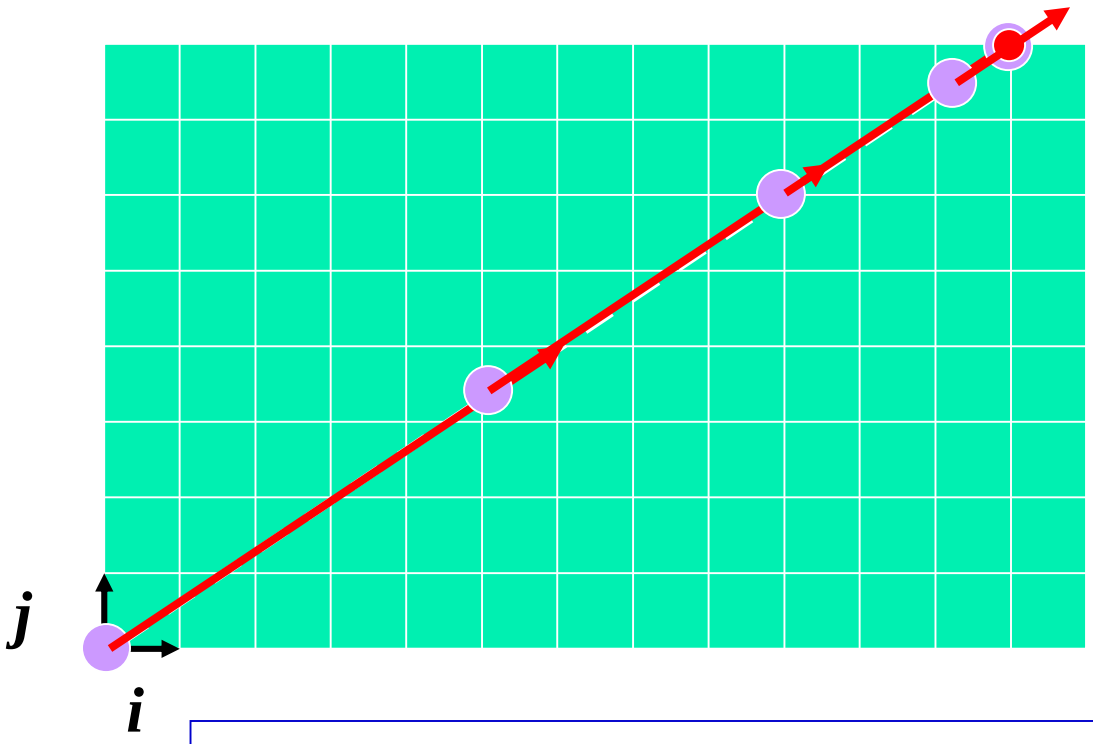
$t = 4$; $x = 12$; $y = 8$

La trajectoire est une droite:
Le mouvement est rectiligne

Exemple 2: $\overrightarrow{OM} = 0.75\,(-t^2+8t)\,\boldsymbol{i} + 0.5\,(-t^2+8t)\,\boldsymbol{j}$

$\overrightarrow{V} = 1.5\,(-t+4)\,\boldsymbol{i} + (-t+4)\,\boldsymbol{j}$

$\overrightarrow{\gamma} = -1.5\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$



$t = 0$; $V_x = 6$; $V_y = 4$

$t = 1$; $V_x = 4.5$; $V_y = 3$

$t = 2$; $V_x = 3$; $V_y = 2$

$t = 3$; $V_x = 1.5$; $V_y = 1$

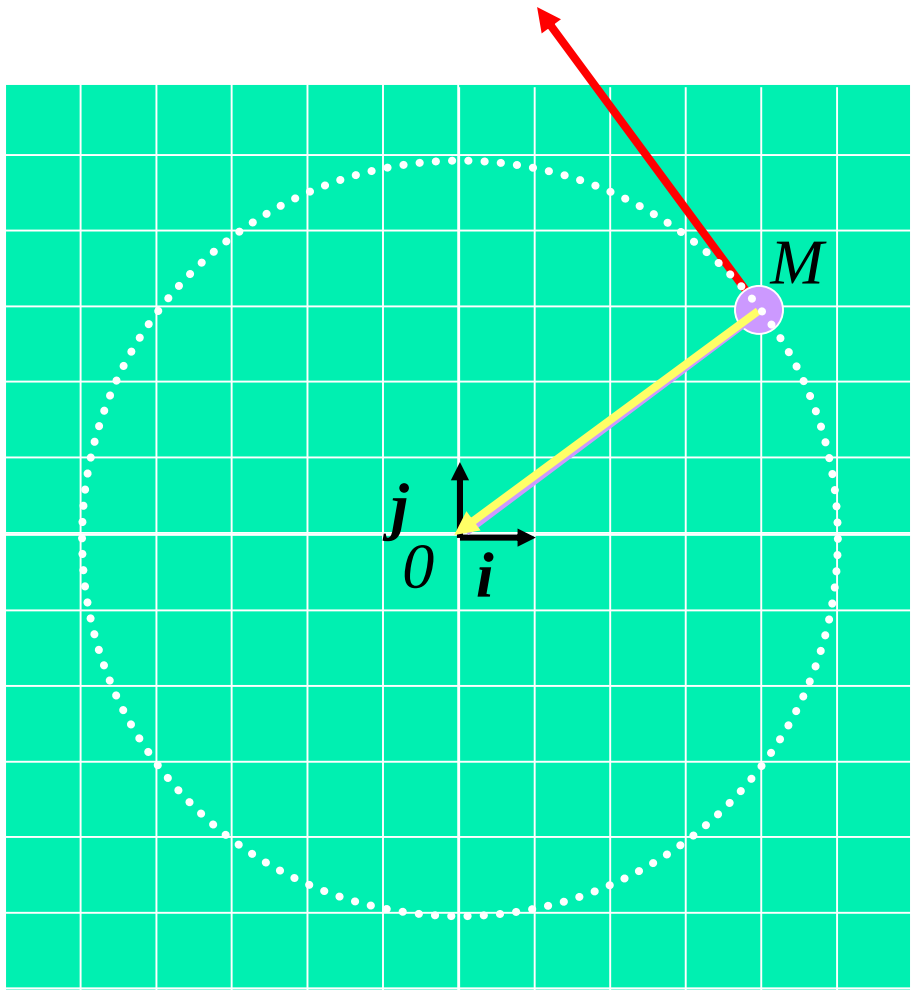
$t = 4$; $V_x = 0$; $V_y = 0$

Le vecteur accélération est constant:
Le mouvement est rectiligne uniformément varié

Exemple 3: $\overrightarrow{OM} = 5 \cos t \; \boldsymbol{i} + 5 \sin t \; \boldsymbol{j}$

$\overrightarrow{V} = -5 \sin t \; \boldsymbol{i} + 5 \cos t \; \boldsymbol{j}$

$\overrightarrow{\gamma} = -5 \cos t \; \boldsymbol{i} - 5 \sin t \; \boldsymbol{j}$



$t = 0.6435$

$x = 4 \quad ; \; y = 3$

$V_x = -3 \; ; V_y = 4$

$\gamma_x = -4 \; ; \gamma_y = -3$

Vérifier que pour tout t :

$\overrightarrow{OM} . \overrightarrow{V} = 0$

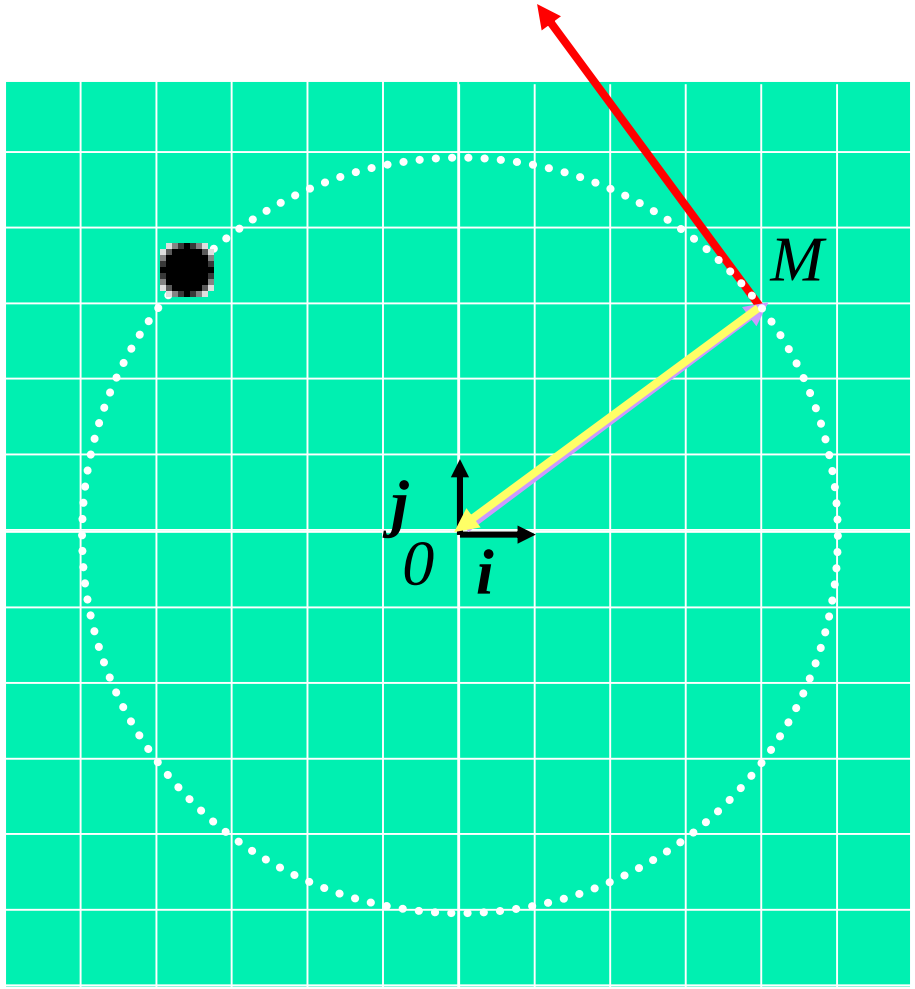
$\overrightarrow{V} . \overrightarrow{\gamma} = 0$

$\overrightarrow{\gamma} = - \overrightarrow{OM}$

Exemple 3: $\overrightarrow{OM} = 5 \cos t \ \boldsymbol{i} + 5 \sin t \ \boldsymbol{j}$

$\overrightarrow{V} = -5 \sin t \ \boldsymbol{i} + 5 \cos t \ \boldsymbol{j}$

$\overrightarrow{\gamma} = -5 \cos t \ \boldsymbol{i} - 5 \sin t \ \boldsymbol{j}$



$t = 0.6435$

$x = 4 \quad ; \ y = 3$

$V_x = -3 \ ; V_y = 4$

$\gamma_x = -4 \ ; \gamma_y = -3$

Vérifier que pour tout t :

$\overrightarrow{OM} . \overrightarrow{V} = 0$

$\overrightarrow{V} . \overrightarrow{\gamma} = 0$

$\overrightarrow{\gamma} = - \overrightarrow{OM}$

3. Vitesse et accélération dans différentes bases

Coordonnées Polaires:

$$\overrightarrow{OM} = r\,\boldsymbol{u_r}$$

$$\boldsymbol{u_r} = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{u_\theta} = -\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}$$

Dans le référentiel (*R)* lié à la base (**i**, **j**, **k**) :

$$\overrightarrow{V} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right/_{\mathrm{R}} = \frac{d\,(r\,\boldsymbol{u_r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\boldsymbol{u_r} + r\,\frac{d\boldsymbol{u_r}}{dt}$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} = \frac{d\,(\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j})}{dt} = \frac{d\cos\theta}{dt}\,\boldsymbol{i} + \frac{d\sin\theta}{dt}\,\boldsymbol{j}$$

mais, $$\frac{d\cos\theta}{dt} = -\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

et $$\frac{d\sin\theta}{dt} = \cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

donc $$\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,(-\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j})$$

c-à-d $$\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\boldsymbol{u}_\theta$$

En coordonnées polaires:

$$\overrightarrow{V} = \frac{dr}{dt}\,\boldsymbol{u}_r + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\boldsymbol{u}_\theta$$

Notation: $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$ et $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

$$\overrightarrow{V} = \dot{r}\,\boldsymbol{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta$$

<u>Exercice</u> Montrer que:

Devoir à rendre le Mardi 16/10/2004

$$\overrightarrow{\gamma} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\boldsymbol{u}_r + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\boldsymbol{u}_\theta$$

Coordonnées Cylindriques:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\, \boldsymbol{u}_\rho + z\, \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{u}_\rho = \cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\theta\, \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{u}_\theta = -\sin\theta\, \boldsymbol{i} + \cos\theta\, \boldsymbol{j}$$

Dans le référentiel (*R)* lié à la base (**i**, **j**, **k**) :

$$\overrightarrow{V} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{d\rho}{dt}\boldsymbol{u}_\rho + \rho\frac{d\boldsymbol{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$$

En coordonnés cylindriques la vitesse est:

$$\overrightarrow{V} = \frac{d\rho}{dt}\boldsymbol{u}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{V} = \dot{\rho}\,\boldsymbol{u}_{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_{\theta} + \dot{z}\,\boldsymbol{k}$$

Et l'accélération:

$$\overrightarrow{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2)\,\boldsymbol{u}_{\rho} + (2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta})\,\boldsymbol{u}_{\theta} + \ddot{z}\,\boldsymbol{k}$$

Remarques à propos de la dérivée des vecteurs unitaires dans les coordonnées cylindriques:

Sachant que: $\boldsymbol{u}_{\rangle} = \boldsymbol{u}_{\theta} \wedge \boldsymbol{k}$, on a:

$$\frac{d\boldsymbol{u}_{\rangle}}{dt} = \dot{\theta}\, \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{u}_{\rangle} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\boldsymbol{u}_{\theta}}{dt} = \dot{\theta}\, \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{u}_{\theta}$$

Si on a un vecteur quelconque **A** :

$$\mathbf{A} = A_{\rangle}\, \boldsymbol{u}_{\rangle} + A_{\theta}\, \boldsymbol{u}_{\theta} + A_{z}\, \boldsymbol{k}$$

On calcul la dérivée de **A** en dérivant d'abord ses composantes comme d'habitude puis on ajoute le terme $\dot{\theta}\,\boldsymbol{k} \wedge \mathbf{A}$ qui tient compte du fait que la base est locale.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{A}_{\rho}\,\boldsymbol{u}_{\rho} + \dot{A}_{\theta}\,\boldsymbol{u}_{\theta} + \dot{A}_{z}\,\boldsymbol{k} + \dot{\theta}\,\boldsymbol{k} \wedge \mathbf{A}$$

Par exemple, on retrouve facilement l'accélération:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{\rho}\,\boldsymbol{u}_{\rho} + (\rho\,\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\,\dot{\theta})\,\boldsymbol{u}_{\theta} + \ddot{z}\,\boldsymbol{k}$$

$$+ \dot{\theta}\,\boldsymbol{k} \wedge (\dot{\rho}\,\boldsymbol{u}_{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_{\theta} + \dot{z}\,\boldsymbol{k})$$

Coordonnés Sphériques:

$$\overrightarrow{OM} = r\,\boldsymbol{u_r}$$

$$\overrightarrow{V} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right/_{\mathrm{R}} = \frac{d\,(r\,\boldsymbol{u_r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\boldsymbol{u_r} + r\,\frac{d\boldsymbol{u_r}}{dt}$$

Avec:

$\boldsymbol{u_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$

$$\frac{d\boldsymbol{u_r}}{dt} = \cos\theta\,\dot{\theta}\cos\varphi\,\boldsymbol{i} - \sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{k}$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} = \cos\theta\ \dot{\theta}\ \cos\varphi\ \boldsymbol{i} + \cos\theta\ \dot{\theta}\ \sin\varphi\ \boldsymbol{j} - \sin\theta\ \dot{\theta}\ \boldsymbol{k} - \sin\theta\ \sin\varphi\ \dot{\varphi}\ \boldsymbol{i} + \sin\theta\ \cos\varphi\ \dot{\varphi}\ \boldsymbol{j}$$

Rappel:

$$\boldsymbol{u}_\theta = \cos\theta\ \cos\varphi\ \boldsymbol{i} + \cos\theta\ \sin\varphi\ \boldsymbol{j} - \sin\theta\ \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{u}_\varphi = -\sin\varphi\ \boldsymbol{i} + \cos\varphi\ \boldsymbol{j}$$

Donc:
$$\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\ \boldsymbol{u}_\theta + \sin\theta\ \dot{\varphi}\ \boldsymbol{u}_\varphi$$

Et:
$$\overrightarrow{V} = \dot{r}\ \boldsymbol{u}_r + r\ \dot{\theta}\ \boldsymbol{u}_\theta + r\ \sin\theta\ \dot{\varphi}\ \boldsymbol{u}_\varphi$$

Pour calculer l'accélération, on a besoin de:

$$\frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{dt} = -\sin\theta\,\dot{\theta}\cos\varphi\,\boldsymbol{i} - \sin\theta\,\dot{\theta}\,\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - \cos\theta\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{k} - \cos\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{j}$$

c-à-d: $$\frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_r + \cos\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_\varphi$$

et: $$\frac{d\boldsymbol{u}_\varphi}{dt} = -\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{i} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{j}$$

$$= -\dot{\varphi}\,(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j})$$

$$= -\dot{\varphi}\,(\sin\theta\,\boldsymbol{u}_r + \cos\theta\,\boldsymbol{u}_\theta)$$

À vérifier

$$\vec{\gamma} = \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_R = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\boldsymbol{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_\varphi\right)$$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} = {} & \ddot{r}\,\boldsymbol{u}_r + \dot{r}\left(\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_\varphi\right) \\ & + \left(\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\boldsymbol{u}_\theta + r\,\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_r + \cos\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_\varphi\right) \\ & + \left(r\sin\theta\,\ddot{\varphi} + r\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} + \dot{r}\sin\theta\,\dot{\varphi}\right)\boldsymbol{u}_\varphi \\ & - r\sin\theta\,\dot{\varphi}^2\left(\sin\theta\,\boldsymbol{u}_r + \cos\theta\,\boldsymbol{u}_\theta\right)\end{aligned}$$

Et donc:

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} = {} & \left(\ddot{r} + r\,\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{u}_r + \\ & \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{u}_\theta + \\ & \left(r\sin\theta\,\ddot{\varphi} + r\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} + 2\,\dot{r}\sin\theta\,\dot{\varphi}\right)\boldsymbol{u}_\varphi\end{aligned}$$

Remarques à propos de la dérivée des vecteurs unitaires dans les coordonnées sphériques:

On sait que: $\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{u}_\theta \wedge \boldsymbol{u}_\varphi$, donc:

$$\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} = (\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\varphi - \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_\theta) \wedge \boldsymbol{u}_r$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{dt} = (\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\varphi + \cos\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_r) \wedge \boldsymbol{u}_\theta$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}_\varphi}{dt} = (-\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_\theta + \cos\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_r) \wedge \boldsymbol{u}_\varphi$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = (\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_r - \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_\theta + \dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\varphi) \wedge \boldsymbol{u}$$

Donc, pour ces trois vecteurs on a: $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}$

Avec: $\boldsymbol{\Omega} = \cos\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_r - \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_\theta + \dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\varphi$

Notons que: $\boldsymbol{\Omega}^2 = \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2$

En général si on a un vecteur quelconque **A** :

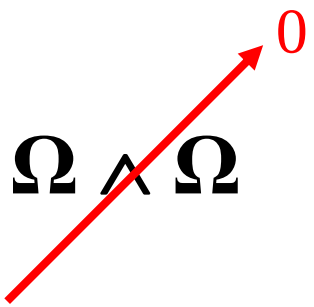
$$\mathbf{A} = A_r\,\boldsymbol{u}_r + A_\theta\,\boldsymbol{u}_\theta + A_\varphi\,\boldsymbol{u}_\varphi$$

On calcul la dérivée de **A** en dérivant d'abord ses composantes comme d'habitude puis on ajoute le terme $\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{A}$ qui tient compte du fait que la base est locale.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{A}_r \boldsymbol{u}_r + \dot{A}_\theta \boldsymbol{u}_\theta + \dot{A}_\varphi \boldsymbol{u}_\varphi + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{A}$$

En particulier, pour $\boldsymbol{\Omega}$ on a:

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \dot{\Omega}_r \boldsymbol{u}_r + \dot{\Omega}_\theta \boldsymbol{u}_\theta + \dot{\Omega}_\varphi \boldsymbol{u}_\varphi + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega}$$



Remarque:

On peut définir un repère particulier en utilisant le vecteur vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ et le vecteur accélération $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$.

Si on construit le unitaire vecteur: $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \dfrac{\vec{\mathbf{v}}}{v}$

où v est le module du vecteur $\vec{\mathbf{v}}$.

Nous avons déjà vu que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

L'accélération $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$ égale, par définition, à $\dfrac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$

peut toujours être décomposée en deux vecteurs, l'un parallèle à $\vec{\mathbf{v}}$, et l'autre perpendiculaire à $\vec{\mathbf{v}}$.

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Accélération tangentielle notée $\vec{\gamma}_t$

?

Calculons: $\vec{\gamma}.\vec{\tau} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}.\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}.\vec{\tau}$

$= \frac{dv}{dt} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}.\vec{\tau}$

Mais: $2\frac{d\vec{\tau}}{dt}.\vec{\tau} = \frac{d(\vec{\tau}.\vec{\tau})}{dt} = \frac{d\,1}{dt} = 0$

On écrit: $\vec{\gamma} = \gamma_t \vec{\tau} + \gamma_n \vec{n}$

Avec: $\gamma_t = \frac{dv}{dt}$ Et: $\gamma_n \vec{n} = v \frac{d\vec{\tau}}{dt}$

Par définition: $\gamma_n = v^2/R$, où R est le rayon de courbure

Et donc: $\vec{n} = \frac{R}{v} \frac{d\vec{\tau}}{dt}$

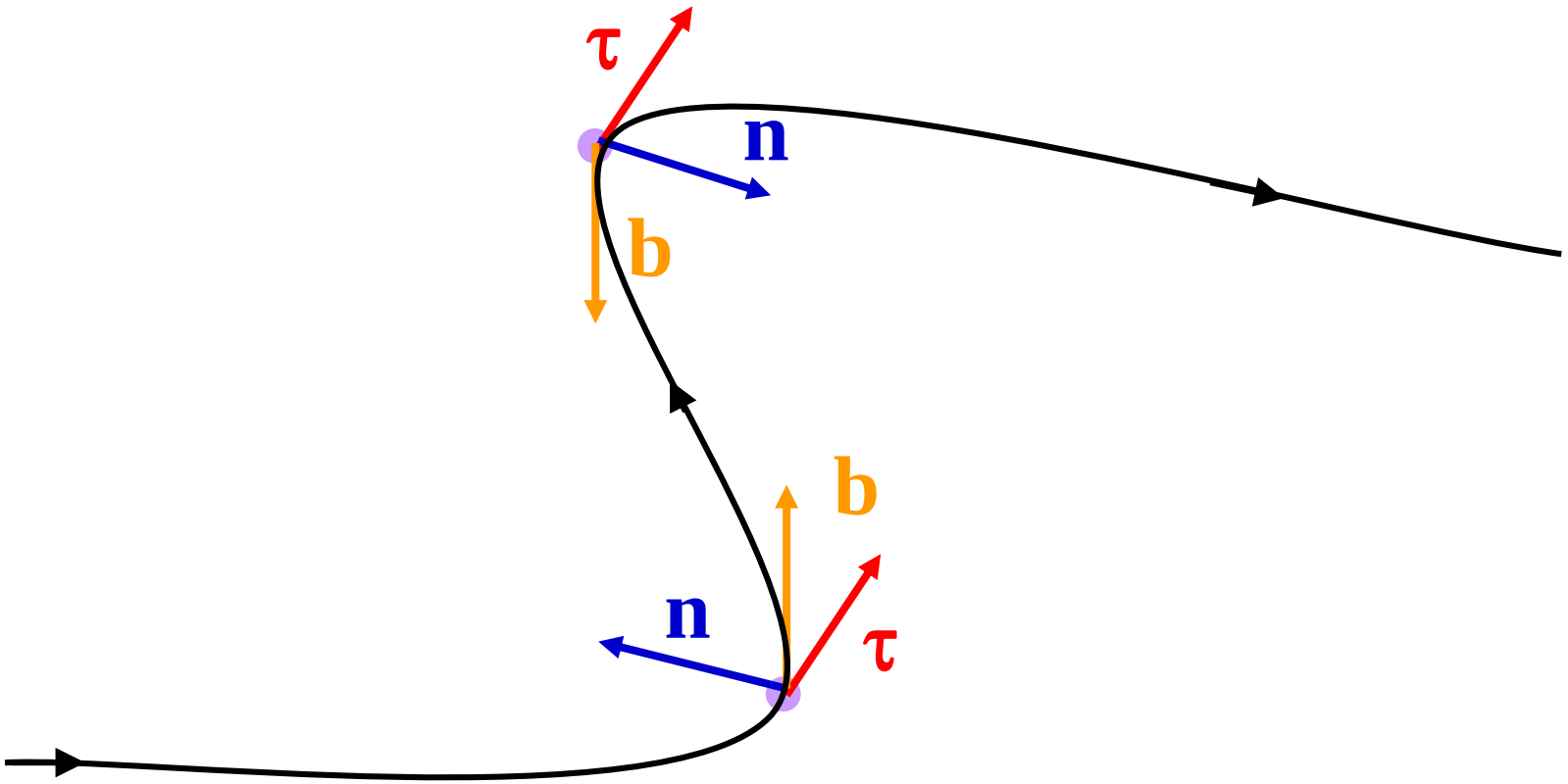
On construit ainsi le vecteur unitaire: $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$

On a: $\frac{d\vec{b}}{dt} = -\frac{v}{T}\vec{n}$ et: $\frac{d\vec{n}}{dt} = -\frac{v}{R}\vec{\tau} + \frac{v}{T}\vec{b}$

où T est le rayon de torsion

La base $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ est appelé la base de Serret Frénet

La base de Serret Frénet



EXEMPLES DE MOUVEMENTS PARTICULIERS

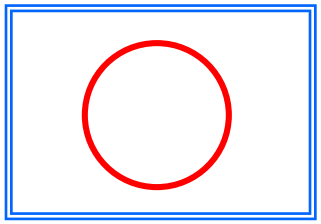
Devoir N°2:

Exercice 10, fiche 2

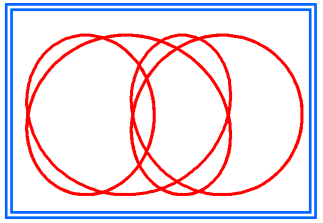
1) **Calculer la vitesse et l'accélération en coordonnées cylindriques**
2) **Calculer les rayons de courbure et de torsion**

4. Le mouvement relatif

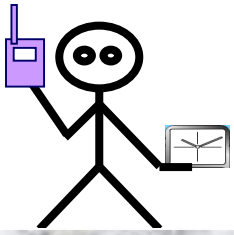
En mécanique, Il y a différentes raisons qui nous poussent à changer de référentiel. Un cas simple est celui de deux observateurs qui observent le même mobile.
Pour comprendre et se mettre d'accord sur ce qu'ils observent, il doivent savoir traduire l'information d'un référentiel à un autre.



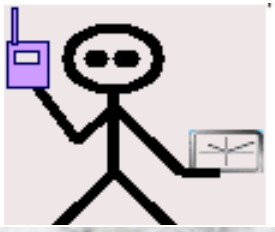
Observateur 1



Observateur 2



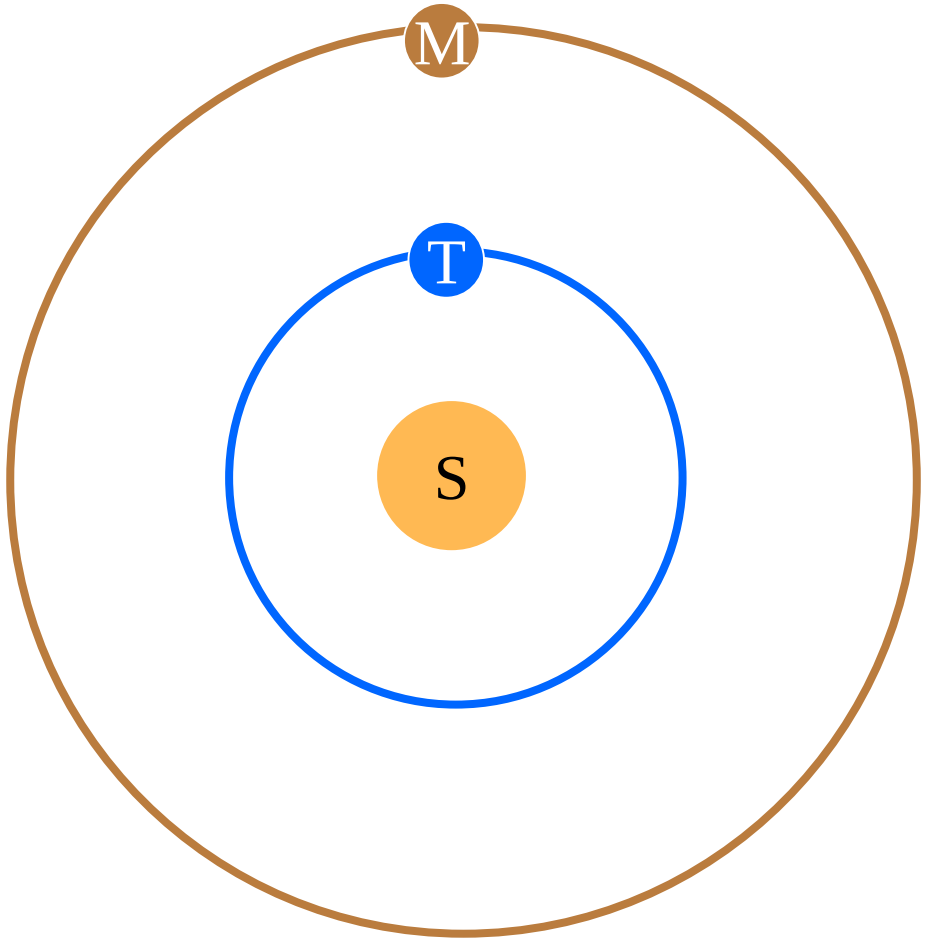
Observateur 1 fixe



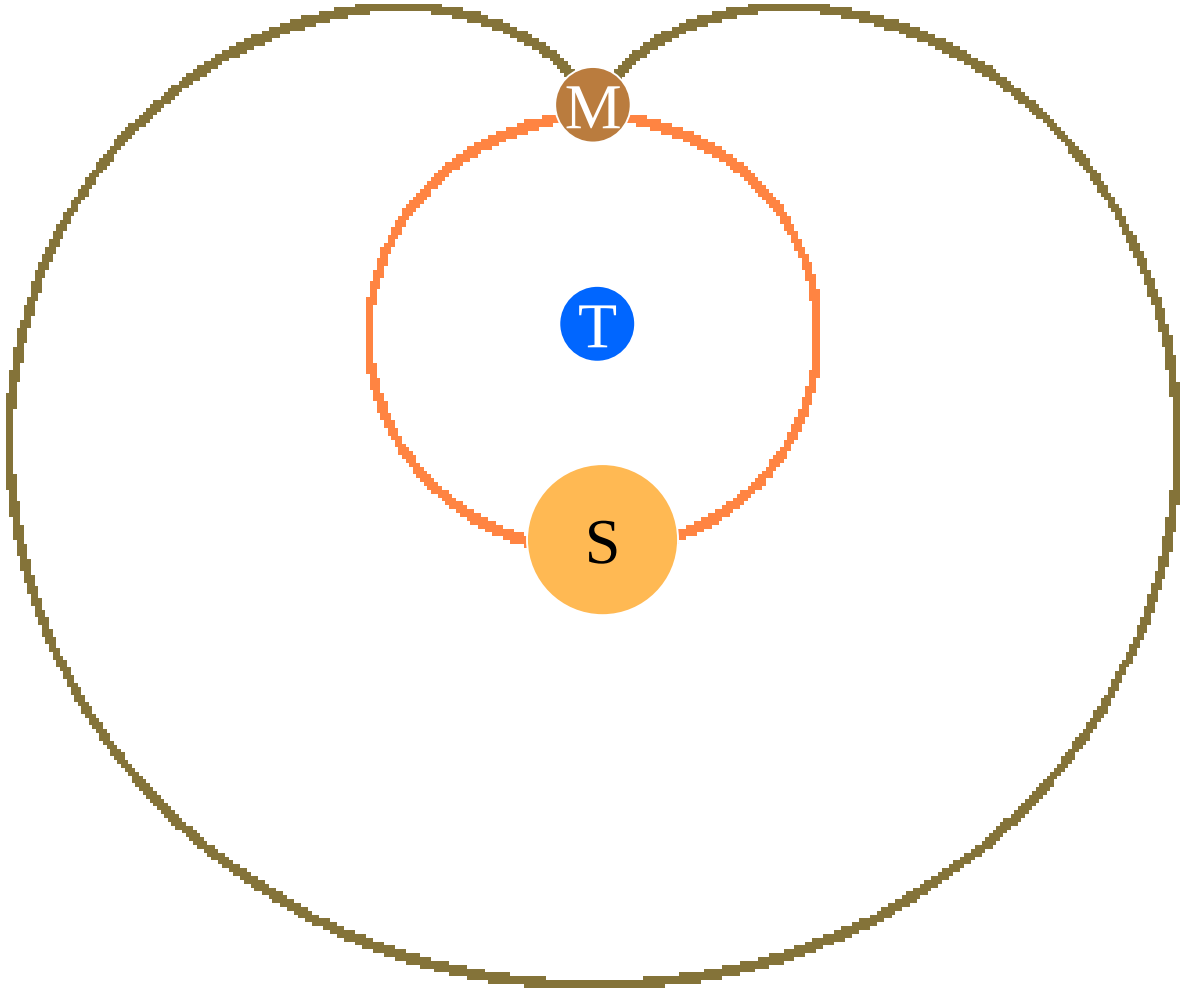
Observateur 2, en mouvement

Des mouvements compliqués peuvent prendre une forme plus simple si le référentiel est bien choisit.

Par exemple, le mouvement de mars vue par un observateur lié à la terre est compliqué alors qu'il est simple par rapport à un observateur lié au soleil.



Observateur lié au soleil



Observateur lié à la terre

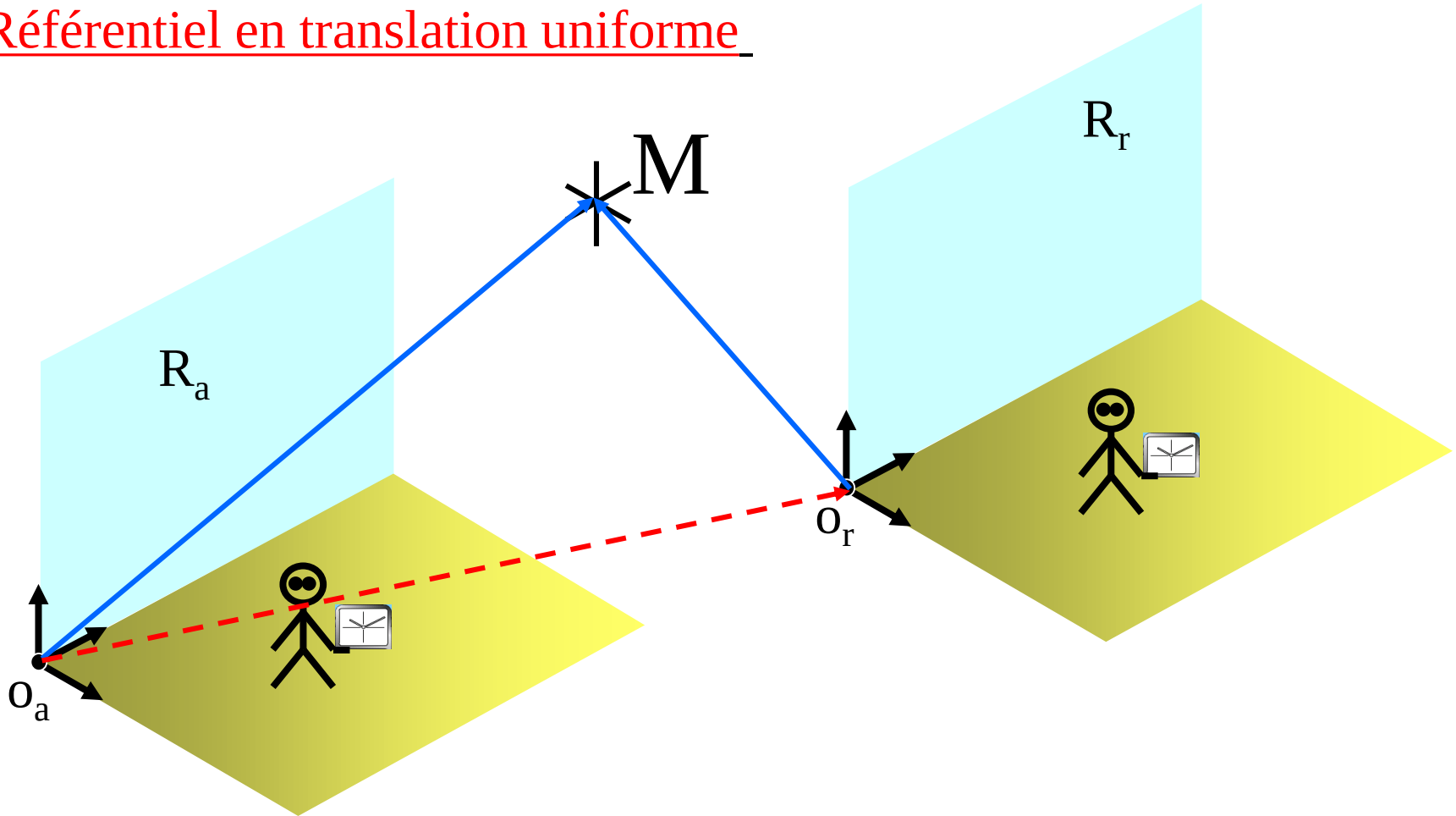
Comment voir ceci en équations?

Soit deux référentiels R_a et R_r et un mobile M en mouvement.

Pour simplifier, supposons que les deux référentiels ont la même base (***i***, ***j***, ***k***) et que O_r soit en mouvement uniforme par rapport à O_a.

Dans ce cas on parle de référentiel Galiléen (Chapitre IV) ou:

a) Référentiel en translation uniforme

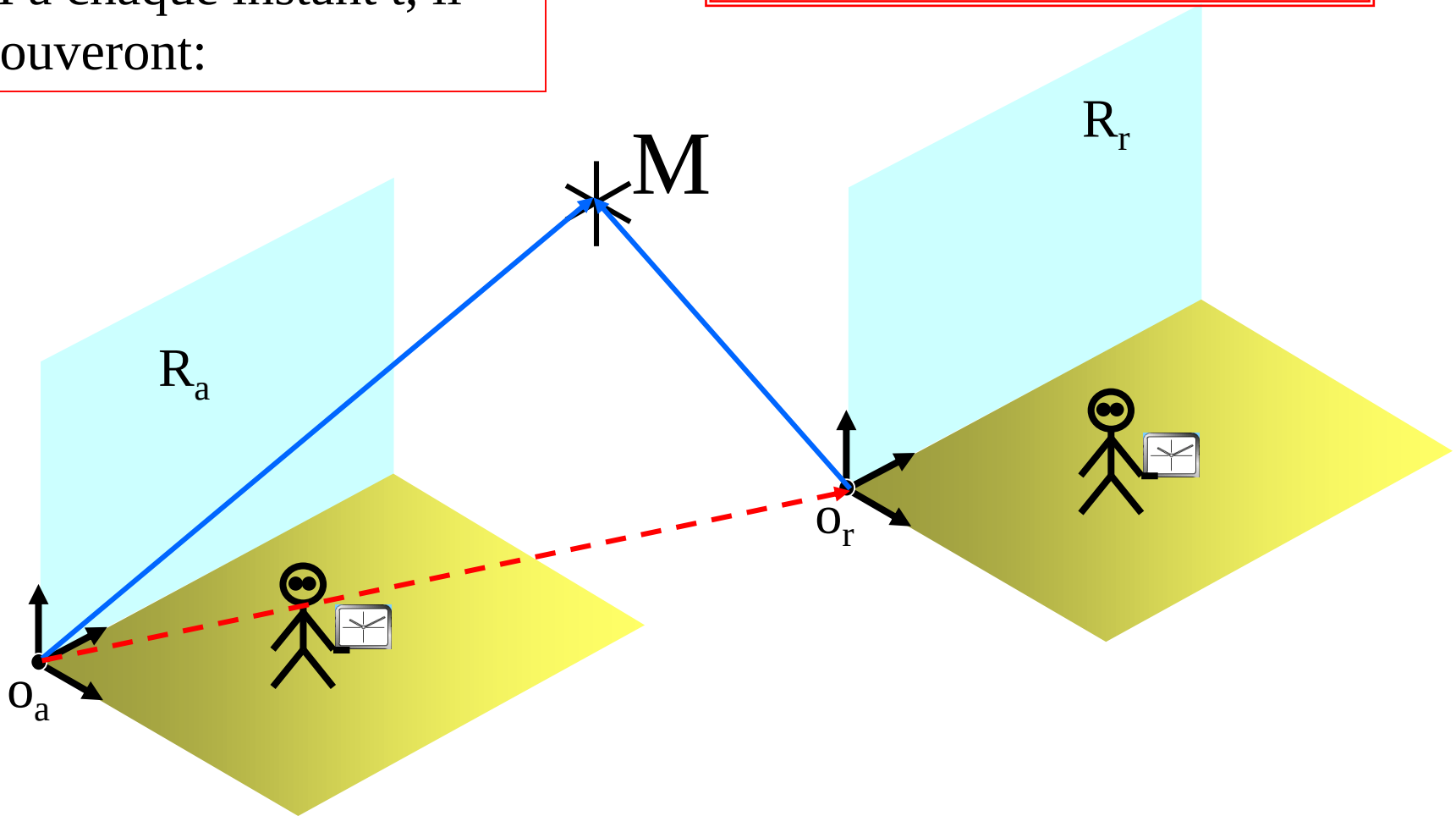


On prend $\overrightarrow{O_rO_a} = \overrightarrow{\mathbf{V}}\,t$, avec $\overrightarrow{\mathbf{V}}$ un vecteur constant.

On a choisit qu'à t=0, O_a et O_r coïncident.

Si les deux observateurs comparent la position de M à chaque instant t, il trouveront:

$$\overrightarrow{O_aM} = \overrightarrow{O_aO_r} + \overrightarrow{O_rM}$$



Maintenant, si les deux observateurs comparent la vitesse de M à chaque instant t:

L'observateur a, dérive $\overrightarrow{O_aM}$ dans son référentiel:

$$\overrightarrow{V_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_aM}}{dt}\right/_{R_a}$$

L'observateur r, fait de même pour $\overrightarrow{O_rM}$ dans le référentiel r:

$$\overrightarrow{V_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_rM}}{dt}\right/_{R_r}$$

$$\overrightarrow{V_a} = \left. \frac{d\left(\overrightarrow{O_aO_r} + \overrightarrow{O_rM} \right)}{dt} \right/_{R_a}$$

$$\overrightarrow{V_a} = \left. \frac{d\overrightarrow{O_aO_r}}{dt} \right/_{R_a} + \left. \frac{d\overrightarrow{O_rM}}{dt} \right/_{R_a}$$

Puisque les deux référentiels ont la même base, on a dans ce cas:

$$\left. \frac{d\overrightarrow{O_rM}}{dt} \right/_{R_a} = \left. \frac{d\overrightarrow{O_rM}}{dt} \right/_{R_r} = \overrightarrow{V_r}$$

Et par définition, on note $\left. \frac{d\overrightarrow{O_aO_r}}{dt} \right/_{R_a} = \overrightarrow{V_e}$

Donc $\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r}$

Vitesse absolue

Vitesse d'entraînement

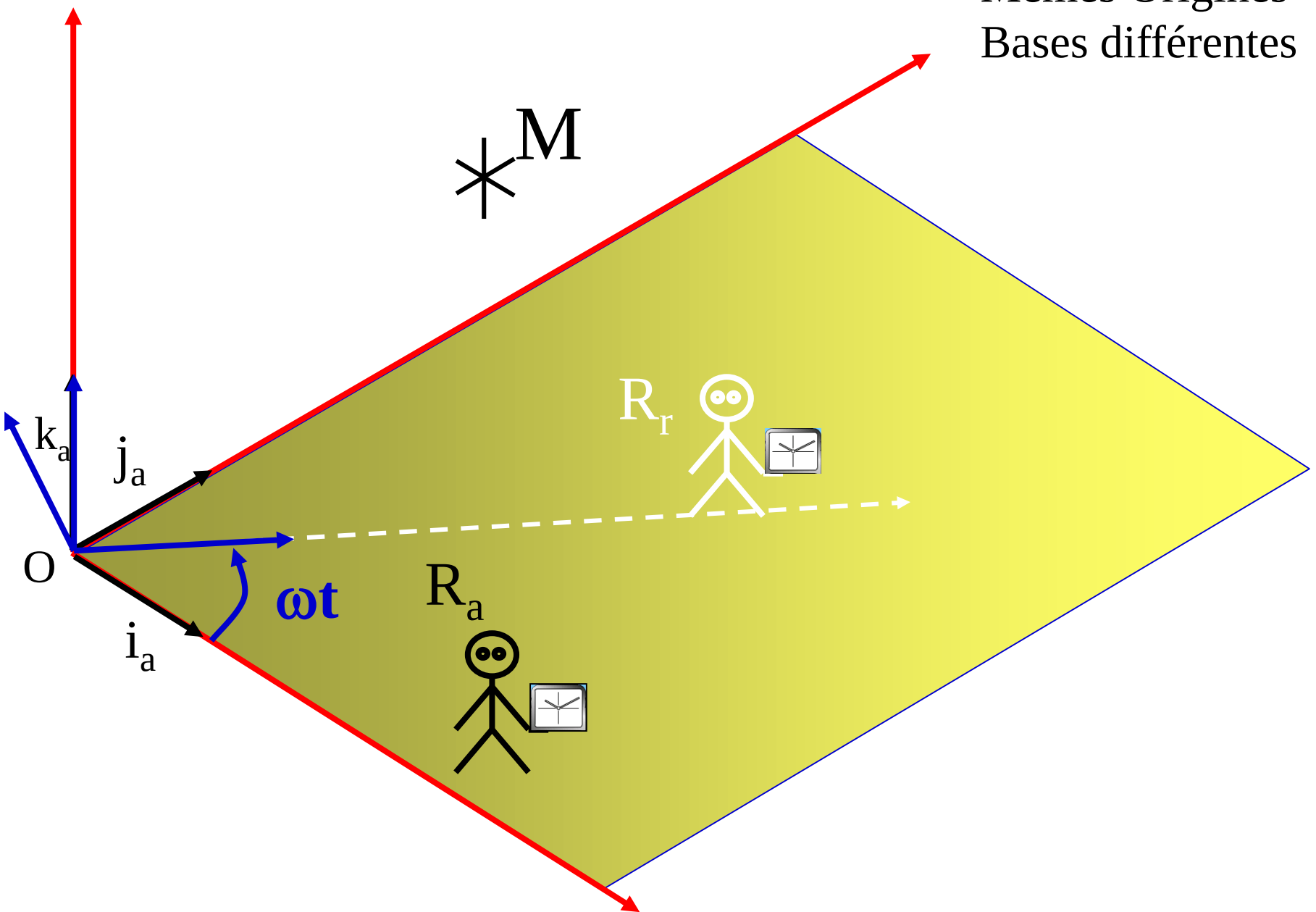
Vitesse relative

Vitesse absolue = Vitesse d'entraînement + Vitesse relative

Bien sur, la dénomination absolue et relative n'est qu'un choix arbitraire

b) Référentiel en rotation uniforme:

Mêmes Origines
Bases différentes



$\overrightarrow{OM}$ est le même dans les deux référentiels

Observateur a

$$\overrightarrow{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big/_{R_a}$$

Observateur r

$$\overrightarrow{V_r} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big/_{R_r}$$

On part de: $$\overrightarrow{V_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right/_{R_a}$$

En exprimant $\overrightarrow{OM}$ dans la base du référentiel r:

$$\overrightarrow{OM} = x_r \boldsymbol{i_r} + y_r \boldsymbol{j_r} + z_r \boldsymbol{k_r}$$

Et en utilisant le résultat démontré pour les coordonnées cylindriques sur la dérivé d'un vecteur unitaire:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \dot{\theta}\ \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{u}$$

On trouve:

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_r} + \omega\ \boldsymbol{k} \wedge \overrightarrow{OM}$$