TD 02
Cinématique du point

Exercice 01 :

Un avion doit atteindre la vitesse de 50 m/s pour pouvoir décoller. En supposant que son accélération est constante, que doit valoir au minimum celle-ci, si la piste est de 625 m de long ? Quel temps l'avion met-il alors pour décoller ?

Exercice 02 :

Un mobile M supposé ponctuel, se déplace sur une droite xx' et son accélération est constante.
A l'instant t_1 = 2 s, il se trouve au point d'abscisse x_1 = 5 cm et est animé d'une vitesse V_1 = 4 cm/s.
A l'instant t_2 = 5 s, M se trouve au point d'abscisse x_2 = 35 cm et est animé d'une vitesse V_2 = 16 cm/s.
1^0) Déterminer l'accélération du mouvement, la vitesse et l'abscisse à l'instant zéro. Ecrire l'équation horaire du mouvement.

2^0) Déterminer l'instant où le mobile change de sens. Quelle est alors sa position?

3^0) Un mobile M' se déplace sur la même droite d'un mouvement uniforme. Aux instants t_1 = 2 s et t_2 = 5 s, il se trouve en des points d'abscisses respectives x'_1 = 71 cm Et x'_2 = 57,5 cm, Déterminer l'équation horaire du mouvement de M'.

4^0) A quel l'instant les 2 mobiles se croiseront ils?

Exercice 03 :

Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy. Un point M se déplace dans le plan xOy.

Ses projections m et m' sur les axes Ox et Oy ont les mouvements définis par le

système suivant $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ Y = \sin t \end{cases}$

Montrer que le mouvement de M est circulaire uniforme ?

Calculer les coordonnées du vecteur accélération dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$?

Exercice 04 :

La terre tourne sur elle-même, autour de la ligne des pôles NS, avec une période de révolution T voisine de 24 heures.

1^0) Calculer la vitesse angulaire de rotation en rd/s?
2^0) Quelle est la vitesse d'un point de la surface terrestre situé à la latitude 1 = 45^0 ?
3^0) calculer la valeur de l'accélération centripète **a** d'un point de la surface terrestre situé à la latitude λ .
Faire l'application numérique pour λ = 45^0 et comparer a à l'accélération de la pesanteur g = 9.81 $m.s^{-2}$.

Solution TD N°2

Cinématique du Point

Rappel

* **Mouvement Rectiligne Uniforme : (M.R.U)**

Les équations Horaire du mouvement:

$$\begin{cases} a = \dfrac{dv}{dt} = 0 \quad (v = cte) \\ v = cte \\ x = vt + x_0 \quad i(x_0 : \text{valeur } x \text{ à } t=0) \end{cases}$$

* **Mouvement Rectiligne Uniformement Varié**

M.R.U.V

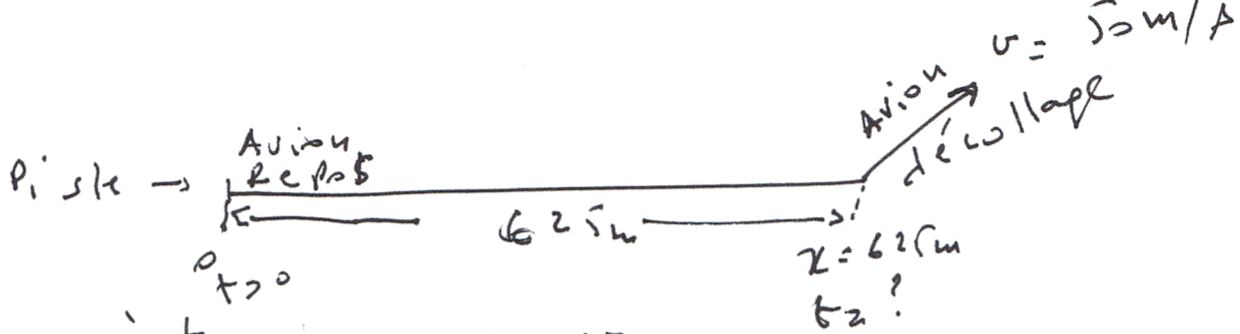
Les équations Horaire du mouvement

$$\begin{cases} a = cte \\ v = at + v_0 \quad i(v_0 : \text{valeur } v \text{ à } t=0) \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \quad (x_0 : \text{valeur } x \text{ à } t=0) \end{cases}$$

Remarque:

* $a > 0$: on dit qu'on a **M.R.U.V accéléré**
* $a < 0$: " " " **décéléré (freiné)**
* **M.R.U.V** : $\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)}$

EX01



à $t = 0$ $\quad x_0 = 0$, $v_0 = 0$

* a = ?

$$\Delta v^2 = 2a\,\Delta x$$

$$\Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a\,(x - x_0)$$

$$\Rightarrow v^2 = 2ax \Rightarrow \boxed{a = \frac{v^2}{2x}}$$

A.N. $\quad a = \dfrac{(50)^2}{2 \times 625} \Rightarrow \boxed{a = 2\ m/s^2}$

* t_0 ? : $a = 2 = cte \Rightarrow$ M.R.U.V

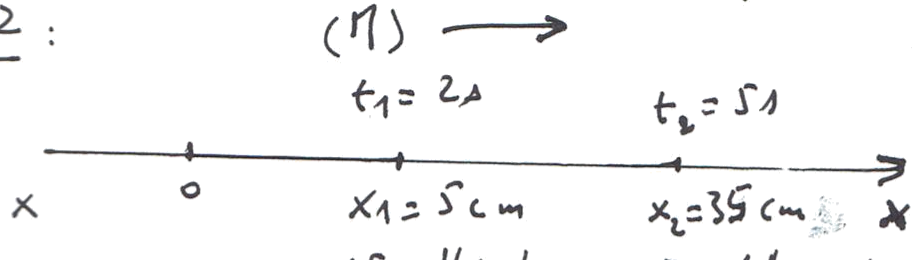
Les équations horaires :

$$\begin{cases} a = 2\ m/s^2 & -(1) \\ v = 2t & -(2) \\ x = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2 = t^2 & -(3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow v = 2t \Rightarrow \boxed{t = \dfrac{v}{2}}$ A.N $\quad t = \dfrac{50}{2} = 25\ s$

$(3) \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{x}}$ A.N $\quad t = \sqrt{625} = 25\ s$

Exo 2 :



Mobile (M)

1/° $a_M = ?$, $v_0 = ?$, $x_0 = ?$

$$\Delta v^2 = 2a\Delta x$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a_M(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_M = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(x_2 - x_1)}}$$

A.N

$$a_M = \frac{(16)^2 - (4)^2}{2(35-5)} \Rightarrow \boxed{a_M = 4\ cm/s^2}$$

$a_M = 4\ cm/s^2 = C^{te} \Rightarrow$ M.R.U.V

les équations horaires :

Mobile (M) $\begin{cases} a = 4\ cm/s^2 = C^{te} \\ v = 4t + v_0 \\ x = \frac{4}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \\ \quad = 2t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases}$

tel que v_0, x_0 : $\begin{cases} v \grave{a}\ t=0 \\ x \grave{a}\ t=0 \end{cases}$

* $v_0 = 2$

à $t_1 = 2s$ $\begin{cases} a = 4\,cm/s^2 \\ v_1 = 4t_1 + v_0 \quad -(1) \\ x_1 = 2t_1^2 + v_0 t_1 + x_0 \quad -(2) \end{cases}$

à $t_2 = 5s$ $\begin{cases} a = 4\,cm/s^2 \\ v_2 = 4t_2 + v_0 \quad -(3) \\ x_2 = 2t_2^2 + v_0 t_2 + x_0 \quad -(4) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow v_1 = 4t_1 + v_0 \Rightarrow \boxed{v_0 = v_1 - 4t_1}$

A.N : $v_0 = 4 - 4.2 = -4\,cm/s$

ou

(3) $\Rightarrow v_2 = 4t_2 + v_0 \Rightarrow \boxed{v_0 = v_2 - 4t_2}$

A.N $v_0 = 16 - 4.5 = -4\,cm/s$

$$\boxed{v_0 = -4\,cm/s}$$

* $x_0 = ?$

(2) $\Rightarrow x_1 = 2t_1^2 + v_0 t_1 + x_0$

$\Rightarrow \boxed{x_0 = x_1 - 2t_1^2 - v_0 t_1}$

A.N $x_0 = 5 - 2.(2)^2 - (-4).2 = 5\,cm$

ou

$(4) \Rightarrow X_2 = 2t_2^2 + v_0 t_2 + x_0$

$\Rightarrow \boxed{x_0 = X_2 - 2t_2^2 - v_0 t_2}$

A.N

$x_0 = 35 - 2(5)^2 - (-4)\cdot 5 = \underline{5\ cm}$

$\boxed{x_0 = 5\ cm}$

Donc : les équations horaires du mouvement du mobile M

$$\text{Mobile}(M)\begin{cases} a = 4\ cm/s^2 \\ v = 4t - 4 \\ x = 2t^2 - 4t + 5 \end{cases} \quad , \forall t$$

2) l'instant où le mobile M change de sens : $v = 0$ $\longleftarrow$ $t_0 ? , x = ?$

$\boxed{v = 0}$

donc il va s'arrêter ($v = 0$) puis il revient.

$v = 0 \Rightarrow v = 4t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{4} = 1s \Rightarrow$

$\boxed{t = 1s}$

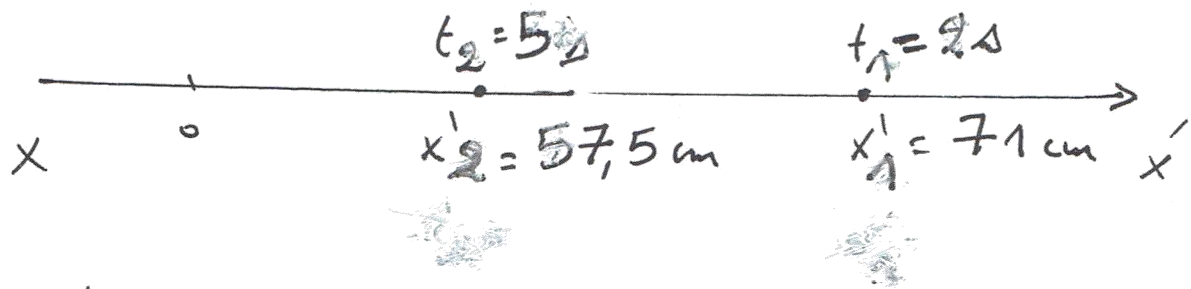
$x = ?$ position

$x = 2 \cdot (1)^2 - 4(1) + 5 = 3\ cm$

$$\boxed{x = 3\ cm}$$

3°/ Mobile (Π')

sens $\leftarrow$ (Π')



les equation Horaires du MRT du Mobile Π'

Mobile Π' se déplace sur la droite avec un Mouvement Uniforme

$\Rightarrow v = cte$.

Donc : les equations Horaire du MRU

$$\begin{cases} v = cte\ ? \\ x = vt + x_0, \quad x_0 = x(t=0) \end{cases} \quad , \quad \forall t$$

* $v = ?$

à $t_1 = 2s \Rightarrow x_1 = v t_1 + x_0$ — (1)

à $t_2 = 5s \Rightarrow x_2 = v t_2 + x_0$ — (2)

(1) - (2) $\Rightarrow x_1 - x_2 = v(t_1 - t_2)$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2}}$$

A.N :

$$v = \frac{71 - 57{,}5}{2 - 5}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = -4{,}5\ cm/s}$$

Remarque :

$v < 0$ (négative) c'est à dire que le mobile M se déplace dans le sens contraire de l'axe (xx')

* $x_0 = ?$

(1) $\Rightarrow x_1 = v t_1 + x_0 \Rightarrow \boxed{x_0 = x_1 - v t_1}$

A.N

$$x_0 = 71 - (-4{,}5) \cdot 2 = \underline{80\ cm}$$

ou

$(2) \Rightarrow x_2 = v t_2 + x_0 \Rightarrow \boxed{x_0 = x_2 - v t_2}$

A.N

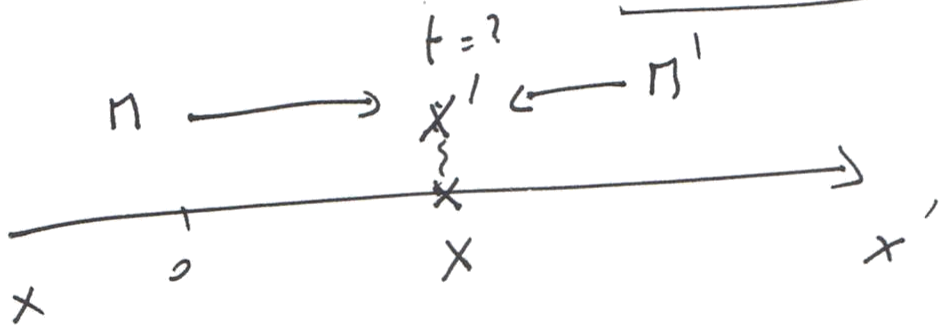
$x_0 = 57,5 - (-4,1) \cdot 5 = 80 \text{ cm}$

$\boxed{x_0 = 80 \text{ cm}}$

Donc : les éq. hor du MVT

$$\text{Mobile}(M') \begin{cases} v = -4,5 \text{ cm/s} \\ x = -4,1 t + 80 \end{cases}, \forall t$$

4/° l'instant où les 2 mobiles se croisent $\Rightarrow \boxed{x_M \equiv x'_{M'}}$



$\Rightarrow x_M = 2t^2 - 4t + 5 \quad - (1)$

$x'_{M'} = -4,5t + 80 \quad - (2)$

(1) = (2) $\Rightarrow$ $2t^2 - 4t + 5 = -4,5t + 80$

$\Rightarrow$ $2t^2 + 0,5t - 75 = 0$

$\Delta = (0,5)^2 - 4(2)(-75) =$

$= 0,25 + 600$

$= \underline{600,25} > 0$

$\Rightarrow$ $\sqrt{\Delta} = \underline{24,5} > 0$

$t_1 = \dfrac{-0,5 + 24,5}{2 \times 2} = \underline{6\ \Delta} > 0$

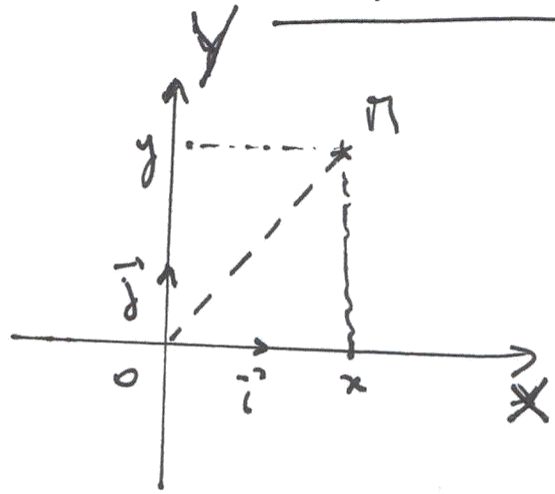
$t_2 = \dfrac{-0,5 - 24,5}{2 \times 2} = -\underline{6,25}\ \Delta < 0$

Remarque : le temps est toujours positive ($t > 0$)

car $t < 0$ $\Rightarrow$ on est dans le passé

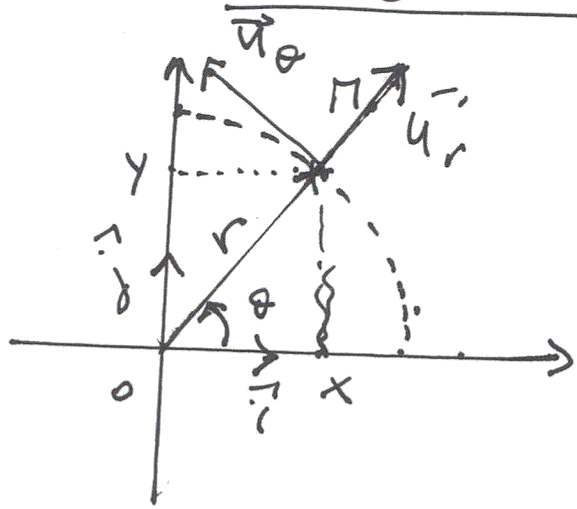
$\Rightarrow$ $\boxed{t = 6\ \Delta}$

Rappel : * Coordonnées Cartésiennes



$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ dans (O, x, y) avec la base $(\vec{i}, \vec{j})$

* Coordonnées Polaires



$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r + 0\vec{u}_\theta = r\vec{u}_r$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

dans (r, θ) avec la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

Exo3

Point M $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

1/° NVT du Point M ?

$\Rightarrow$

$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \cos t \\ y - 0 = \sin t \end{cases}$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-0)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-0)^2 = 1$

c'est l'équation d'un cercle de Rayon $\boxed{R = 1}$ et de centre $(1,0)$

$\Rightarrow$ le Mouvement du Point M est circulaire (cercle)

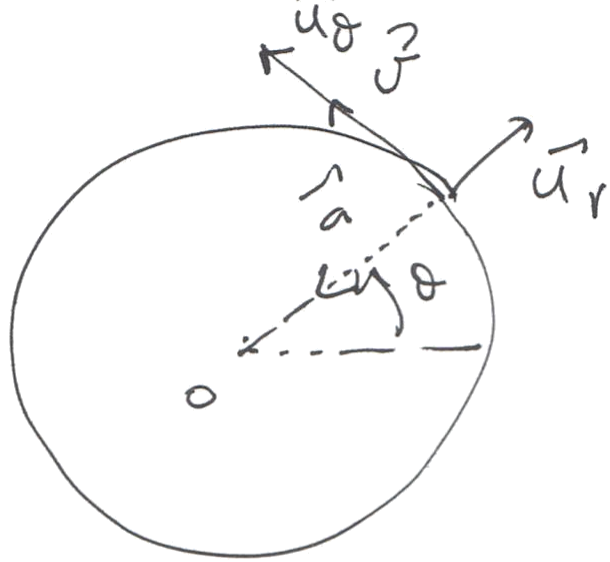
$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow \upsilon \begin{cases} \upsilon_x = \dfrac{dx}{dt} = -\sin t \\ \upsilon_y = \dfrac{dy}{dt} = +\cos t \end{cases}$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \underline{1 \text{ m/s}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon = c^{te} = 1 \text{ SI}}$$

$\Rightarrow$ le Mouvement du Point $\underline{M}$:
est <u>Circulaire</u> <u>uniforme</u>

2) $\vec{a}$ (?,!) dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$



$\vec{\upsilon} = \upsilon \vec{u}_\theta$

$\vec{a}_r = -a \vec{u}_r$

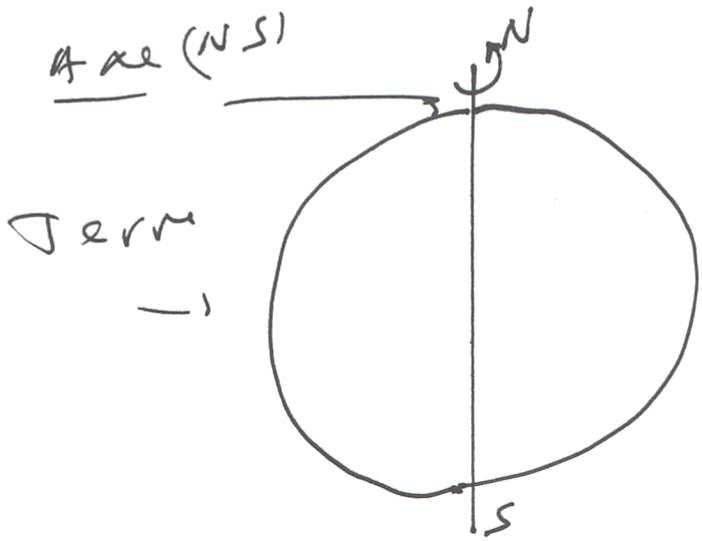
$$\boxed{\vec{a} = -\frac{\upsilon^2}{R} \vec{u}_r}$$

$\boxed{\vec{a}_\theta = \vec{0}}$ pas de composante de $\vec{a}$ sur $\vec{u}_\theta$.

$$\Rightarrow \vec{a} = -\frac{(1)^2}{1} = -\underline{\vec{u}_r}$$

$\boxed{\vec{a}\ (-1,0)}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

EX4 :



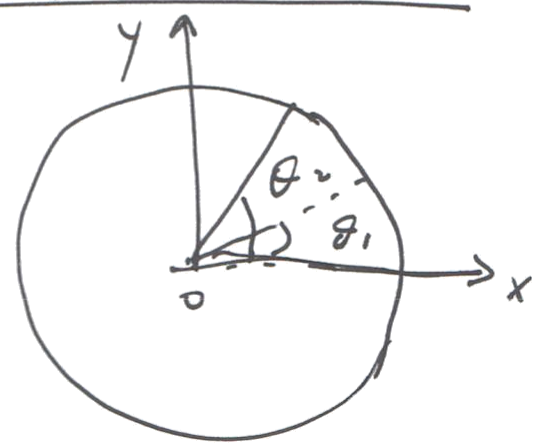
Période de révolution = temps (période) de rotation de la terre autour d'elle même = 24 heures

1/ ω : Vitesse angulaire de rotation ?

à $t_1 \longrightarrow \theta_1$

à $t_2 \longrightarrow \theta_2$

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$



Un tour complet de la terre sur elle même : $\theta = 360° = 2\pi$ rd (24 heures)

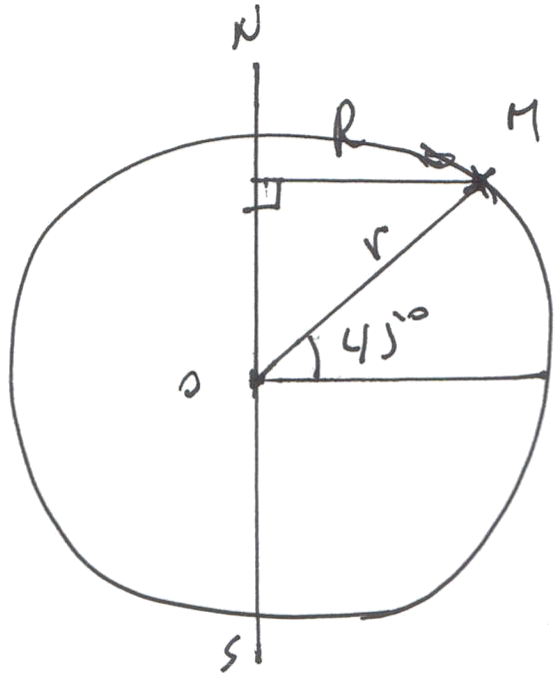
⇒ Vitesse angulaire (rd/s) :

$$\omega = \frac{\theta}{T} \quad \text{A.N} : \omega = \frac{2\pi}{24\,h}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2 \times 3{,}14 \text{ rd}}{24 \times 3600\,s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \text{ rd/s}}$$

2)°



$r = 6371$ Km

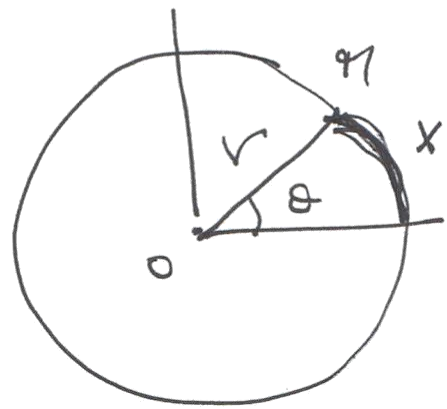
$\begin{cases} \theta = 45° \\ OM = r \end{cases}$

Vitesse du Point M : $v_M = ?$

Rappel

* rotation / point (O)

$X = r\theta$: Arc (قوس)



$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{v = r\omega}$

r : distance entre M et O (مركز دوران)

* rotation / Axe (X X')

R : distance entre M et l'axe de rotation (محور دوران)



$r = OM$ (نق)

r : rayon

$\boxed{v = R\omega}$, $\boxed{R = r\cos\theta}$

$$\boxed{v_M = R\,\omega = r\cos\vartheta\,\omega}$$

ω

$$v = 6.371.000 \cdot \cos 45^\circ \cdot 7{,}27 \cdot 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_M = 327{,}51 \quad m/s}$$

3/° $a_M = ?$

$$a_M = \frac{dv_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\cos\vartheta\,\omega\right)$$

or

$$r = c^{te}, \quad \omega = c^{te}$$

$$\Rightarrow a_M = r\omega\,\frac{d(\cos\vartheta)}{dt}$$

$$= r\omega \cdot (-\sin\vartheta)\cdot\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{a_M = -r\sin\vartheta\,\omega^2}$$

A.N

$\theta = 45°$

$a_M = 6371.10^3 . \sin 45° . (7,27.10^{-5})^2$

$\Rightarrow \boxed{a_M = 0,024 \quad m/s^2}$