LMD – Maths & Informatique

1 ère Année

Semestre 1

Unité Découverte

Module: Physique 1

Mécanique du Point

A.KIES

Table de la matière

I. Notions de Base

II. Rappels Mathématiques

III. Cinématique du Point

IV. Dynamique du Point

V. Travail et Énergie

V. Travail et Énergie

1. Travail et puissance d'une force
2. Le théorème de l'énergie cinétique
3. L'énergie potentiel
4. Conservation de l'énergie mécanique
5. Exemples

1. Travail et puissance d'une force

Définition du Travail d'une force

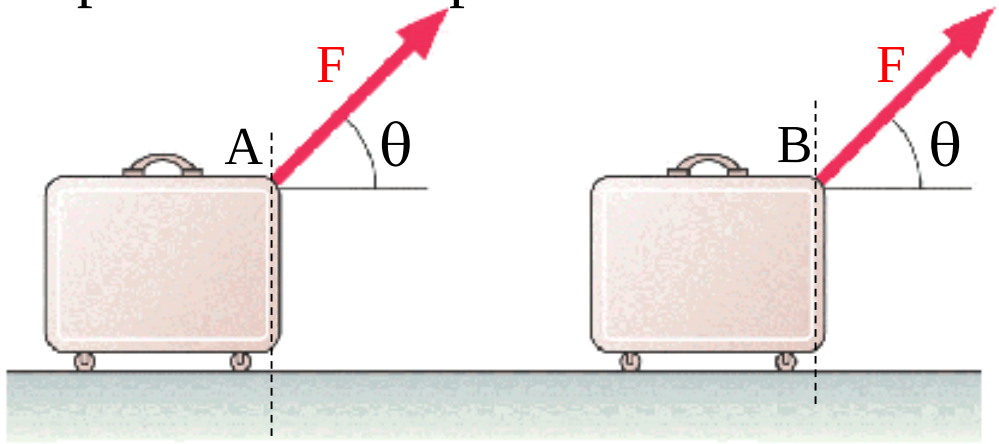
Cas d'une force constante parallèle à un déplacement en ligne droite

$W = F\,(AB)$



Cas d'une force constante non parallèle au déplacement

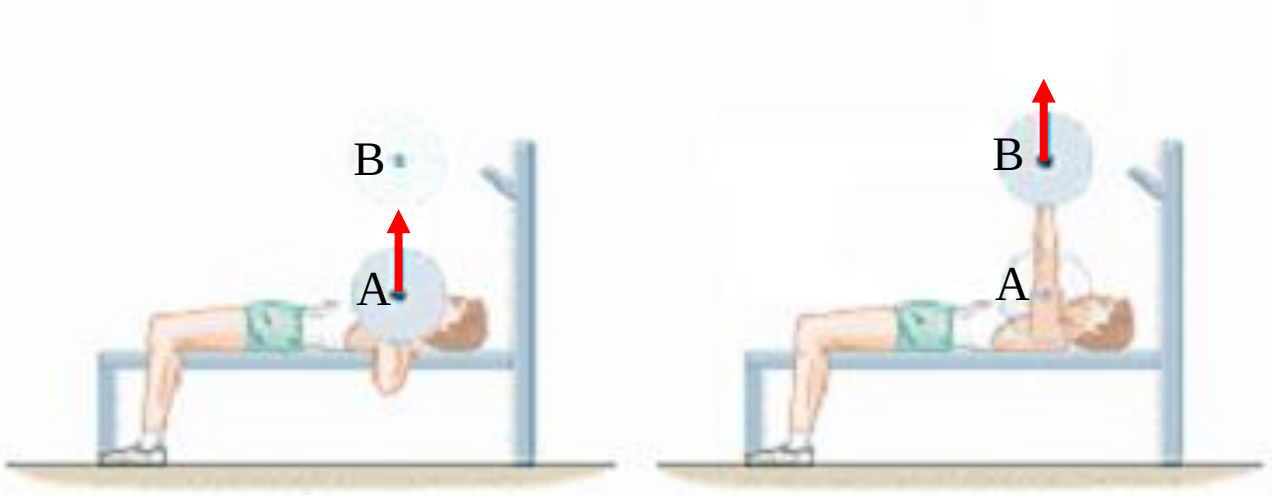
$W = F\,(AB)\cos\theta$



Unité de travail = Newton × metre = Joule

$W = F\,(AB)\cos\theta = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$ (Produit Scalaire)

Le travail peut être négatif ou positif



Positif

$\theta=0$

$W = + F\,(AB)$

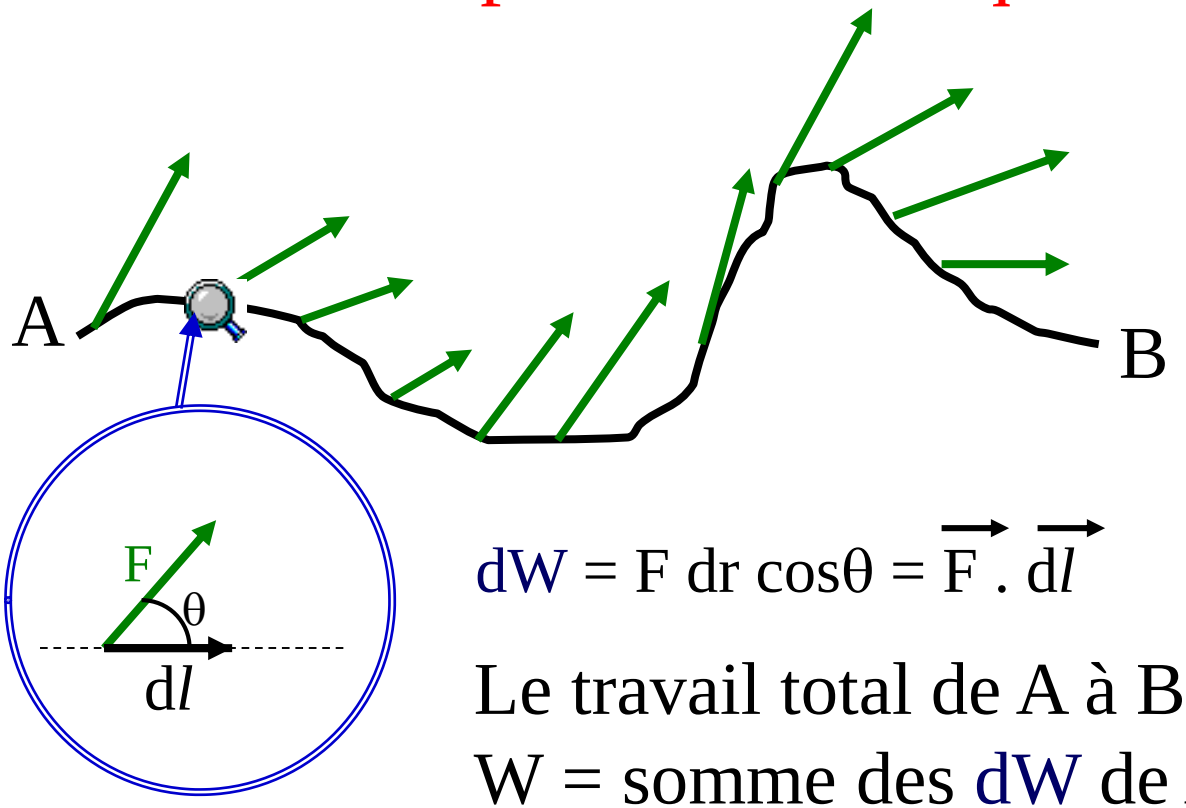
Négatif

$\theta=180°$

$W = - F\,(AB)$

Et si $\vec{F}$ n'est pas constante ?

Et si le déplacement est quelconque ?



$dW = F\, dr \cos\theta = \vec{F} . d\vec{l}$

Le travail total de A à B est:

W = somme des dW de A à B

Noté par: $W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{l}$

Définition de la puissance d'une force

La puissance P est le travail d'une force par unité de temps.

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Unité de puissance = Joule/seconde = Watt

2. Théorème de l'énergie cinétique

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{l} = \int_A^B \vec{F}.\vec{v}\, dt$$

En utilisant: $\vec{F} = m\,\vec{\gamma} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

On a: $W_{A\to B} = \int_A^B m\,\vec{v}.d\vec{v}$

$$W_{A\to B} = \int_A^B m\ v.dv = \int_A^B \tfrac{1}{2}\, m\ d(v^2)$$

$$W_{A\to B} = \tfrac{1}{2}\, m\ v_B^{\,2} - \tfrac{1}{2}\, m\ v_A^{\,2}$$

$$W_{A\to B} = \tfrac{1}{2} m v_B^2 - \tfrac{1}{2} m v_A^2$$

La quantité $K = \tfrac{1}{2} m v^2$ est par définition l'énergie cinétique

La variation de l' énergie cinétique d' un point matériel lorsqu' il parcourt sa trajectoire d' un point A à un point B est égale au travail de la résultante des forces appliquées au point matériel de A à B le long de la trajectoire.

$$W_{A\to B} = K_B - K_A$$

Remarque: l'énergie cinétique est souvent notée par E_c

3. L'énergie potentielle

On considère une particule située en M(x,y,z) et soumise à une force F.

Le travail élémentaire dW_x de cette force se déplaçant d'une distance élémentaire dx dans la direction x est:

$$dW_x = F_x\, dx$$

De même pour les directions dy et dz :

$$dW_y = F_y\, dy$$
$$dW_z = F_z\, dz$$

Le travail total est:

$$dW = dW_x + dW_y + dW_z = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = \vec{F}.d\vec{l}$$

Rappel: $\vec{F} = F_x\, \vec{i} + F_y\, \vec{j} + F_z\, \vec{k}$

$$d\vec{l} = dx\, \vec{i} + dy\, \vec{j} + dz\, \vec{k}$$

On ne considère pour l'instant que la direction x: (une dimension)

$$dW = F\,dx$$

Dans le cas où l'on peut écrire: $F = -\dfrac{dU}{dx}$

On dit que F dérive d'une énergie potentielle U.

Par exemple, la force de rappel d'un ressort:

$$F = -k\,x = -\frac{dU}{dx} \qquad \text{On a,} \quad U = \tfrac{1}{2}\,k\,x^2$$

Et donc, l'énergie potentielle d'un ressort est: $U = \tfrac{1}{2}\,k\,x^2$

Un autre exemple, lors d'un déplacement verticale d'un objet de masse M, le poids est (axe des z orienté vers le haut):

$$p = -M\,g = -\frac{dU}{dz} \qquad \text{On a,} \quad U = M\,g\,z$$

Si: $$F = -\frac{dU}{dx}$$

La variation de l'énergie potentielle est donc par définition:

$$dU = -F\,dx = -dW$$

C'est à dire que:

La variation de l'énergie potentiel au cours d' un déplacement élémentaire dx est égale et de signe opposé au travail de la force.

Remarque: l'énergie potentielle est souvent notée par E_p

Si l'on considère maintenant le cas général à plusieurs dimensions, la force F dépend en général de *x*, *y* et *z*.

Et l'énergie potentielle U doit aussi dépendre de *x*, *y* et *z*.

Dans ce cas, F dérive d'une énergie potentielle U si:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$\frac{\partial U}{\partial x}$ étant la dérivée de U par rapport à *x*, en supposant *y* et *z* constantes

$\frac{\partial U}{\partial y}$ étant la dérivée de U par rapport à *y*, en supposant *x* et *z* constantes

$\frac{\partial U}{\partial z}$ étant la dérivée de U par rapport à *z*, en supposant *x* et *y* constantes

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Ces trois expressions sont rassemblées en une seule
en utilisant la notation suivante:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

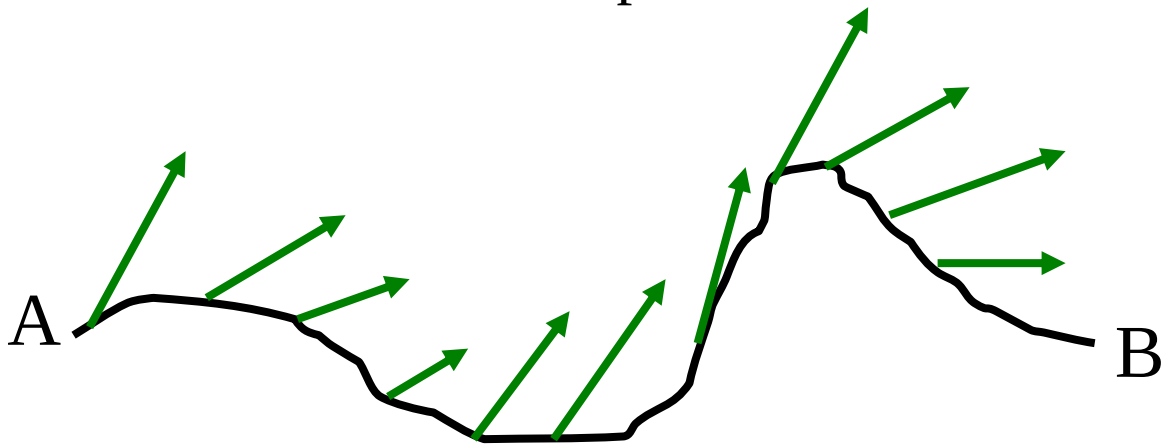
Il existe une autre notation, à savoir : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, U$

Pour une fonction à plusieurs variables, on a :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\, dx + \frac{\partial U}{\partial y}\, dy + \frac{\partial U}{\partial z}\, dz = -\vec{F}\, d\vec{l} = -dW$$

La variation de l'énergie potentiel au cours d' un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ est égale et de signe opposé au travail de la force.

Que peut on dire dans le cas d'un déplacement sur un chemin quelconque?



$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{l} = -\int_A^B dU = -(U_B - U_A)$$

Et donc,

$$W_{A\to B} = U_A - U_B$$

$$W_{A \to B} = U_A - U_B$$

Si une force F dérive d'une énergie potentielle U, le travail de cette force lors d'un déplacement AB quelconque ne dépend que du point de départ A et du point d'arrivée B.

Remarque: $$W_{A \to A} = U_A - U_A = 0$$

Si une force F dérive d'une énergie potentielle U, le travail de cette force est nul sur un contour fermé.

Une force qui dérive d'une énergie potentielle est appelée

force conservative

Réciproquement:

Si le travail d'une force lors d'un déplacement quelconque ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée, on dit que cette force est conservative et dérive d'une énergie potentielle.

- **Remarque:**

  En mécanique, la plupart des forces étudiées sont conservatives, cependant, certaines forces ne le sont pas comme par exemple les forces de frottement.

  Pour les forces non conservatives (dissipatives), on a:

$$W_{A \to A} \neq 0$$

4. Conservation de l'énergie mécanique

Nous avons montré précédemment qu'on a toujours:

$$W_{A \to B} = K_B - K_A$$

Et que dans le cas de forces conservatives, on a:

$$W_{A \to B} = U_A - U_B$$

Donc: $U_A - U_B = K_B - K_A$

C'est à dire: $K_A + U_A = K_B + U_B$

La somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle est constante pour une particule soumise à des forces conservatives

Cette somme est appelée l'énergie mécanique.

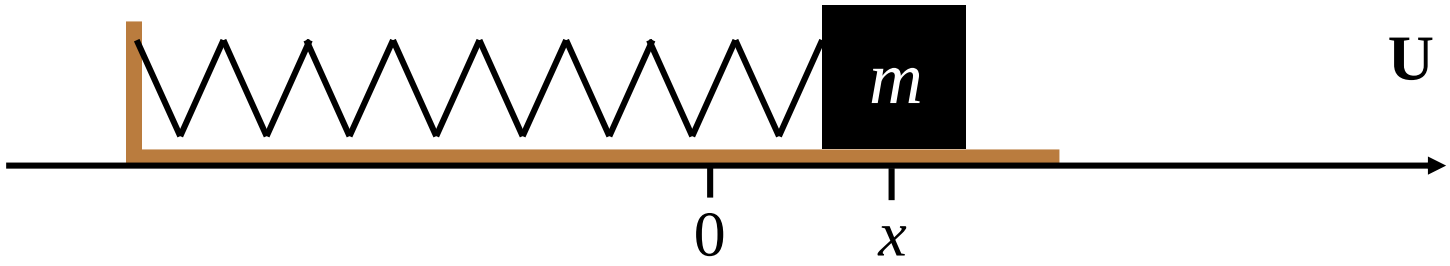
$$E = K + U$$

L'énergie mécanique d'une particule soumise à des forces conservatives est constante.

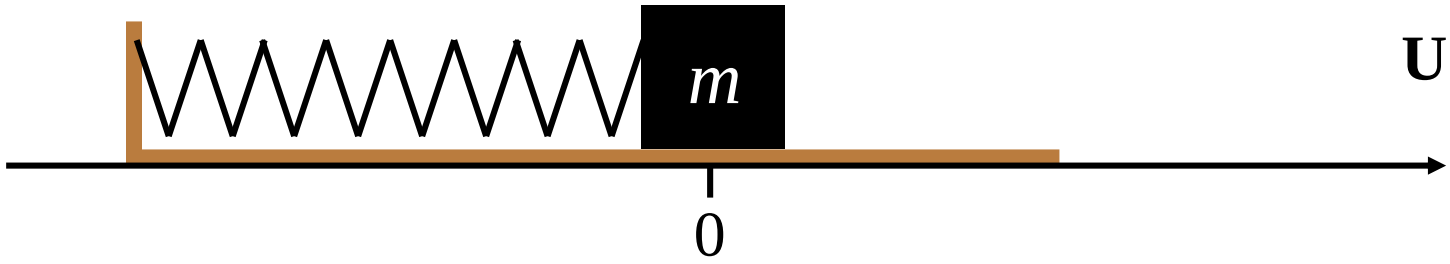
Si parmi ces forces, il y a des forces dissipatives, l'énergie mécanique diminue.

5. Exemples

A. Ressort horizontal



$\mathbf{U = \frac{1}{2}\, k\, x^2}$



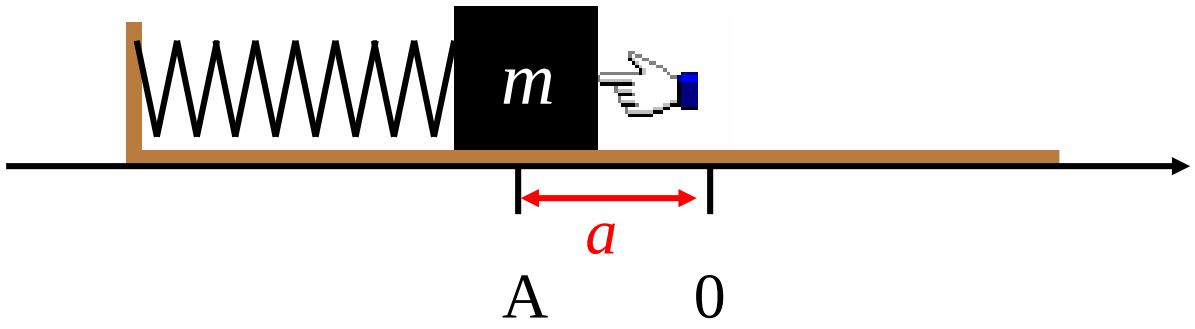
$\mathbf{U = 0}$

L'énergie potentielle $\mathbf{U = \frac{1}{2}\, k\, x^2}$

L'énergie cinétique $\mathbf{K = \frac{1}{2}\, m\, v^2}$

L'énergie mécanique $\mathbf{E = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{1}{2}\, k\, x^2}$

$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$



État initial

$E = \frac{1}{2} k a^2$

L'énergie mécanique est conservée, donc: $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k a^2$

$v_{max} = ?$

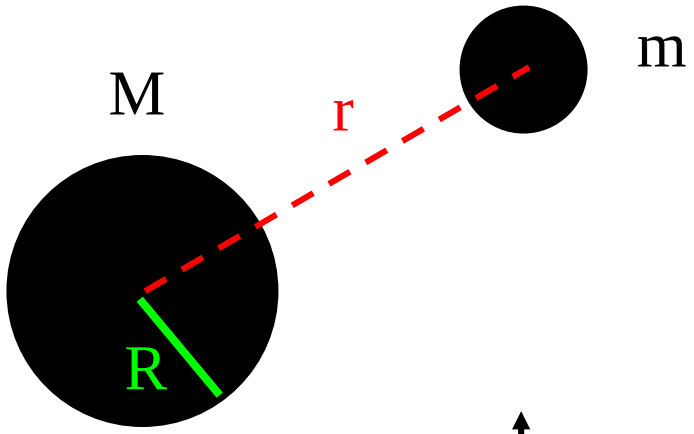
Equation du mouvement ?

B. Gravitation

* Satellite de masse *m* autour de la terre (de masse M)

$E = \frac{1}{2}\, m\, v^2 - G\, m\, M/r$

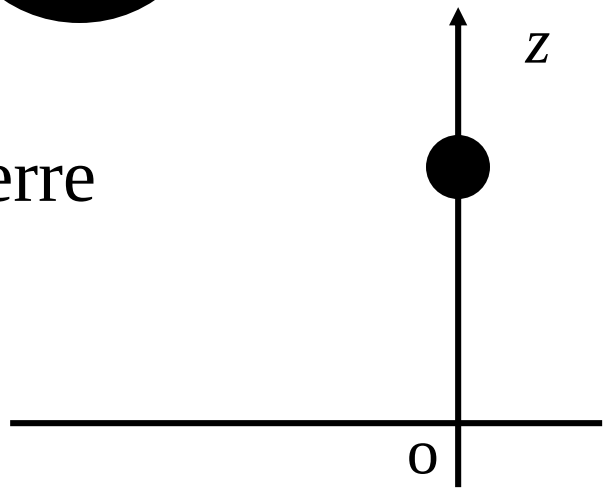
Avec **$r \geq R$**



* Objet proche de la surface de la terre

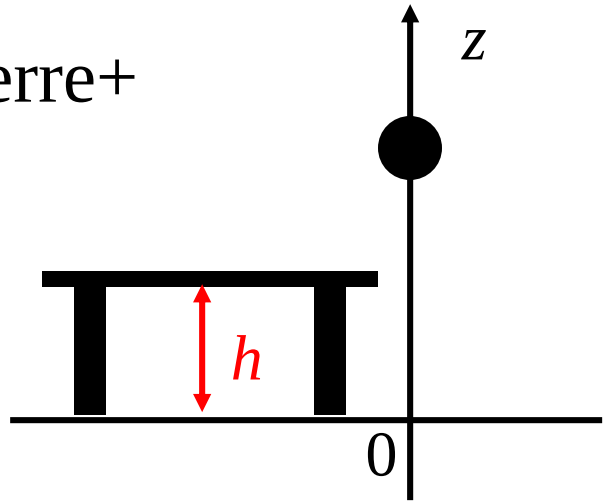
$E = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + m\, g\, z$

Surface de la Terre U=0 ⟹



* Objet proche de la surface de la terre+

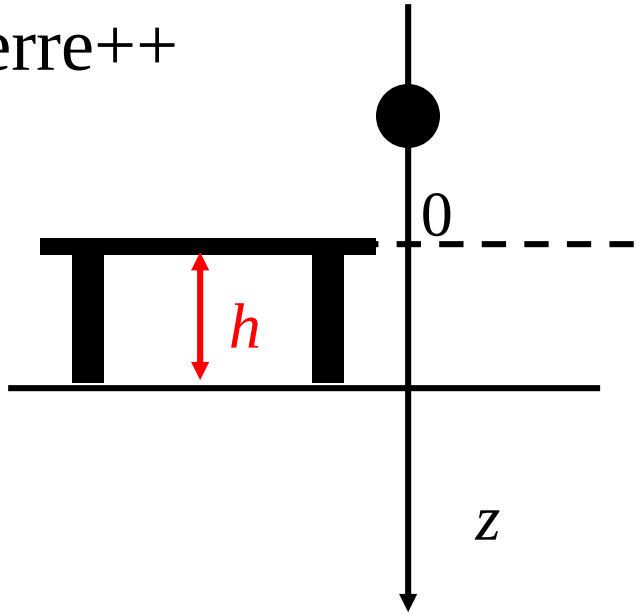
Surface de la Table U=0 ⟹



$E = \frac{1}{2} m v^2 + m g (z - h)$

* Objet proche de la surface de la terre++

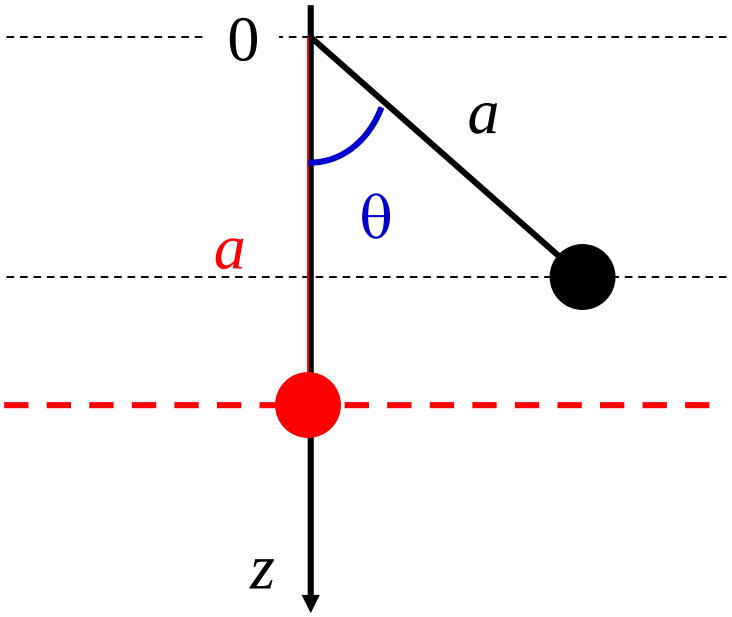
Surface de la Table U=0 ⟹



$E = \frac{1}{2} m v^2 - m g z$

* Pendule

$$E = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 - m\, g\, (z - a)$$



Position la plus basse U=0 ⟹

$$E = \tfrac{1}{2}\, m\, (a\, \dot{\theta})^2 + m\, g\, a\, (1 - \cos\theta)$$

$$E = \tfrac{1}{2}\, m\, (a\, \dot{\theta})^2 - m\, g\, a \cos\theta + m\, g\, a$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\theta} + g/l \ \sin\theta = 0$$

C. Ressort et Gravitation

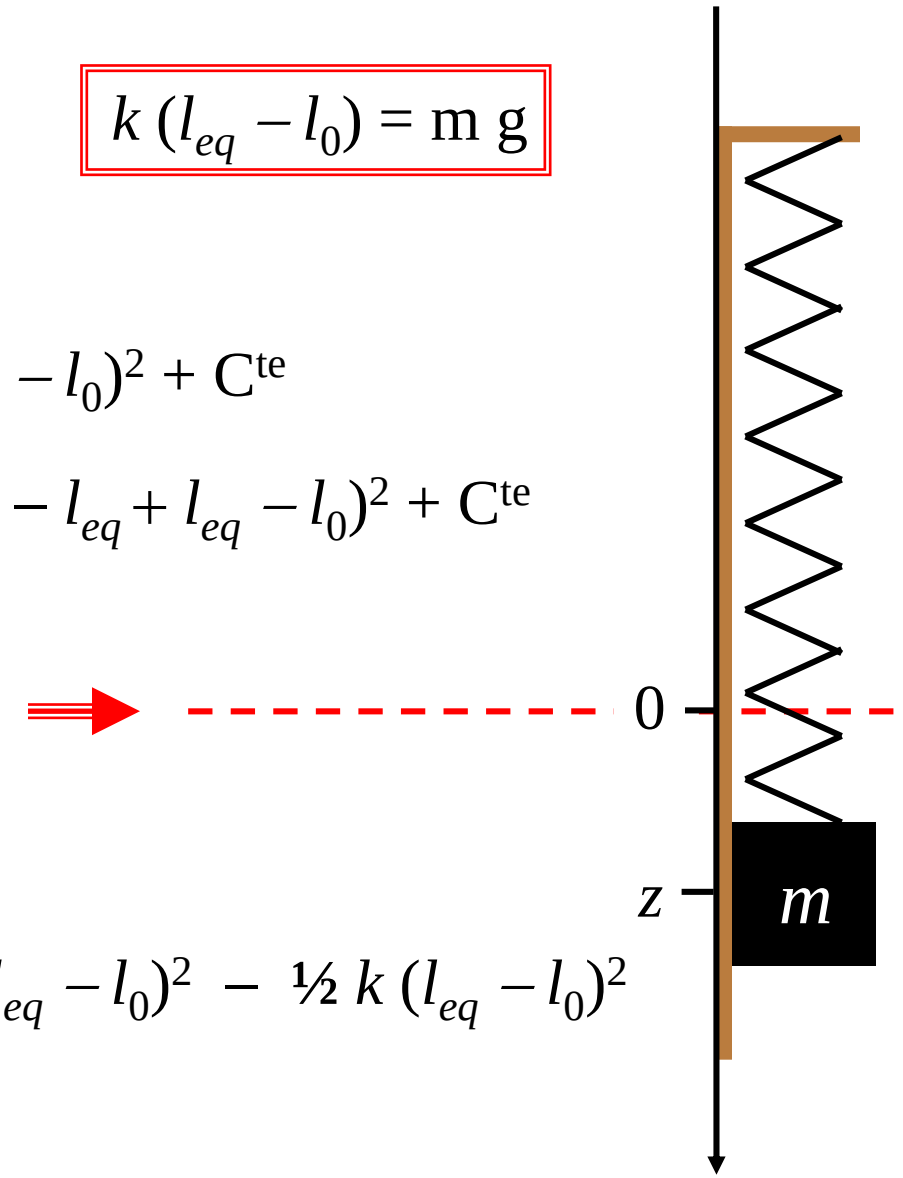
l : longueur du ressort
l_0: longueur à vide
l_{eq}: longueur à l'équilibre

$$k\,(l_{eq} - l_0) = m\,g$$

$$E = \tfrac{1}{2}\,m\,v^2 - m\,g\,z + \tfrac{1}{2}\,k\,(l - l_0)^2 + C^{te}$$

$$E = \tfrac{1}{2}\,m\,v^2 - m\,g\,z + \tfrac{1}{2}\,k\,(l - l_{eq} + l_{eq} - l_0)^2 + C^{te}$$

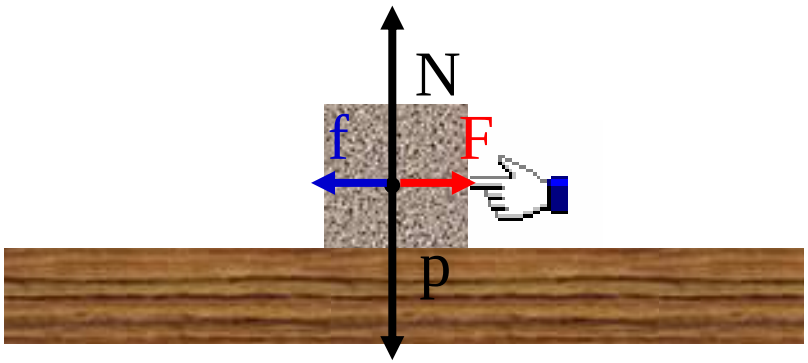
Position d'equilibre du ressort: $\Longrightarrow$
$U_{ressort}=0$ et $U_{gravitation} = 0$



$$E = \tfrac{1}{2}\,m\,v^2 - m\,g\,z + \tfrac{1}{2}\,k\,(z + l_{eq} - l_0)^2 - \tfrac{1}{2}\,k\,(l_{eq} - l_0)^2$$

Annexe: Les forces de frottements

Un objet poussé résiste.



- f : force de poussée
- F: force de résistance (frottement)
- p: poids de l'objet
- N: réaction normale du support

L'objet ne bouge que si l'on exerce une force f au delà d'un certain seuil

Plus l'objet est lourd, plus f est grande (de même pour F).

Dés que l'objet commence à se déplacer, la force f pour le maintenir en mouvement est généralement moindre.

Lois de coulomb:

$F_s \leq \mu_s N$ force de frottement statique (v = 0)

$F_d = \mu_d N$ force de frottement dynamique ($v \neq 0$)

En général: $\mu_d < \mu_s$

Dans l'exemple précédent, la force de frottement F (F_s) est égale et opposée à la poussée f tant que celle ci reste $\leq \mu_s N$ avec N = p = mg

Les forces de frottements sont des forces dissipatives.