Dynamique du point & Travail et énergie

Exercice 01 :

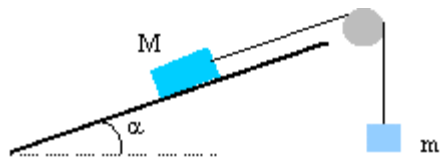
Considérant un point m à la surface de la terre est soumis à la force d'attraction universelle **F** produite par la masse **M** de la terre a la distance **d** qui est égale au rayon de la terre.

1. Supposant que la masse **M** est concentrée en son centre et que **R = 6 400 km**, l'accélération de la pesanteur au niveau du sol $\mathbf{g_0 = 9,8\ m/s^2}$ et la constante gravitationnelle $\mathbf{G = 6,67\ 10^{-11}\ SI}$, calculer **M** ?
2. Exprimer en fonction de $\mathbf{g_0}$, **R** et **z**, l'accélération **g** de la pesanteur à une altitude **z** quelconque ?

Exercice 02 :

Un mobile **M** de masse **10 kg** est soumis à l'action d'une force horizontale à un trajet rectiligne de valeur **F= (120 t + 40) N**. A l'instant **t=0**, le mobile se trouve à $\mathbf{x_0=5\ m}$ avec une vitesse initiale $\mathbf{v_0=6\ m/s}$. Déterminer l'expression de l'abscisse **x(t)** et de la vitesse **v(t)** ?

Exercice 03 :



L'objet de masse **m** se déplace sans frottement sur le plan incliné. La poulie a une masse faible et en conséquence la tension du fil est la même de chaque côté.

1. Pour quelle masse **m**, le système est-il en équilibre ?
2. Si **m=3M**, quel est le sens du mouvement ? Quelle est la tension du fil ? **α=30°** et **m=1kg**.

Exercice 04 :

Un corps de masse m se déplace sur un plan non lisse, incliné de **30°** par rapport à l'horizontal avec accélération $\mathbf{a = 2\ m/s^2}$.

1. Déterminer les coefficients de frottement statique μ_s et cinématique μ_c.
2. Comparer μ_s et μ_c. $\mathbf{g = 9,8\ m/\ s^2}$

Exercice 05 :

On considère dans le plan (O,x,y,z), un corps de masse m soumis à une force F donnée par :

$$\vec{F}=\frac{25}{6}\,y\,\vec{i}+(z-x)\,\vec{j}+(2z^2-x)\,\vec{k}$$

Suivant la trajectoire définie par : $\mathbf{x = 3t}$, $\mathbf{y = 2t^2}$, $\mathbf{z = t - 2}$

1. Calculer la **Puissance P** acquise par le corps à l'instant **t**.
2. Quelle est la position du corps quand la **Puissance** est **minimale** ?
3. Déterminer le **Travail w** de la force $\vec{F}$ entre $\mathbf{t_1 = 0\ s}$ et $\mathbf{t_2 = 2\ s}$.
4. Quel est le **Travail w** de la force $\vec{F}$ si le corps se déplace suivant une ligne droite entre $\mathbf{t_1}$ et $\mathbf{t_2}$. Que peut-on conclure ?

Solution TD N°2

Ex1 :

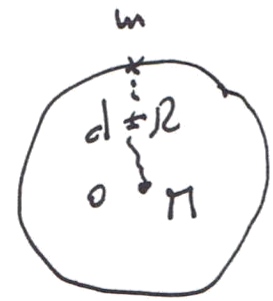
$\vec{F}$: force d'attraction.

g_0 : l'accélération de la pesanteur au niveau du pol.

m : masse du Point.

M : masse de la terre.

R : rayon de la terre.



Données :

$R = 6400\ Km = 6,4.10^6\ m$

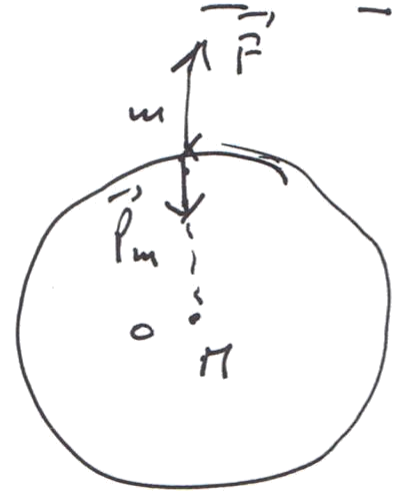
$g_0 = 9,8\ m/s^2$

$G = 6,67.10^{-11}\ SI.$

1/° M = ?

la Force d'attraction entre m et M :

$$F = G\frac{Mm}{d^2} = G\frac{Mm}{R^2}$$



le Poids m :

$$P_m = m\,g_0$$

A l'équilibre : $F = P_m$

$$\Rightarrow G \frac{M \cancel{m}}{R^2} = \cancel{m} g_0$$

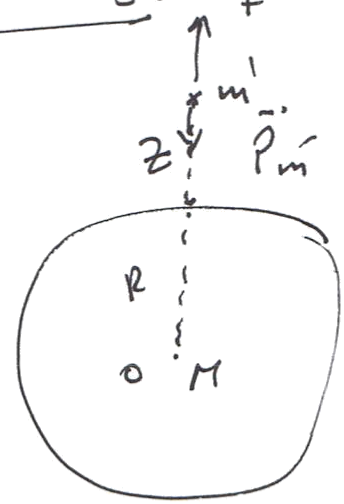
$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{g_0}{G} \cdot R^2}$$

A.N :

$$\Rightarrow M = \frac{9,8}{6,67.10^{-11}} \cdot (6,4.10^6)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 6.10^{24} \text{ Kg}}$$

2/° $g = ?$



la force d'attraction entre m' et M :

$$F' = G \frac{M m'}{(R+z)^2}$$

le Poids m' :

$$P_{m'} = m' g.$$

A l'equilibre : $F' = P_{m'}$

$$\Rightarrow G \frac{M \cancel{m'}}{(R+z)^2} = \cancel{m'} g$$

$$\Rightarrow G\frac{M}{(R+z)^2} = g$$

<u>or</u> : $M = \frac{g_0}{G} R^2$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{G}}{(R+z)^2} \cdot \frac{g_0}{\cancel{G}} \cdot R^2 = g$$

$$\Rightarrow \boxed{g = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}}$$

<u>A.N</u> :

$z = 36.000\,Km = 36.10^6\,m$ (orbit géostationnaire)

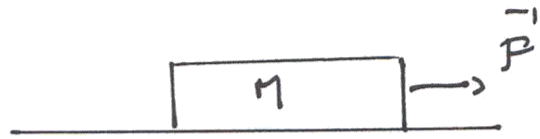
$\omega_{Terre} = \omega_m$

$$\Rightarrow g = 9,8 \cdot \frac{(6,4.10^6)^2}{(6,4.10^6 + 36.10^6)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{g = 0,22\ m/s^2}$$

Ex 2 :

$M = 10\,kg$



$F = (120t + 40)\,N$

à $t = 0$; $x_0 = 5\,m$, $v_0 = 6\,m/s^2$

$x(t) = ?$, $v(t) = ?$

M se déplace donc on a un mouvement suivant une force de déplacement donc ou une accélération a. ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$)

$\Rightarrow$ on a un mouvement Rectiligne uniformément varié : (M.R.U.V)

$\Rightarrow$ les équations horaires du MVT

$$\begin{cases} a = c^{te} \\ v(t) = at + v_0 \\ x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} v_0 = v(t=0) \\ x_0 = x(t=0) \end{cases}$$

* $x(t) = ?$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow dx(t) = v(t)\,dt$$

$$\Rightarrow x(t) = \int v(t)\,dt = \int (6t^2 + 4t + 6)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 2t^3 + 2t^2 + 6t + C'} \quad \text{avec } C' = C_x$$

$C' = ?$

à $t = 0$, $x(0) = 2\cdot(0)^3 + 2\cdot(0)^2 + 6(0) + C' = 5$

$$\Rightarrow \boxed{C' = 5\ m}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = (2t^3 + 2t^2 + 6t + 5)\ m}$$

* $a = ?$

$$F = m\,a \Rightarrow \boxed{a = \frac{F}{m}}$$

A.N :

$$a = \frac{120t + 40}{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = (12t + 4)\ m/s^2}$$

* $v(t) = ?$

$$a = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow dv(t) = a\,dt$$

$$\Rightarrow v(t) = \int dv(t) = \int a\,dt = \int (12t + 4)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = 6t^2 + 4t + c} \quad \text{avec } c = c^{te}$$

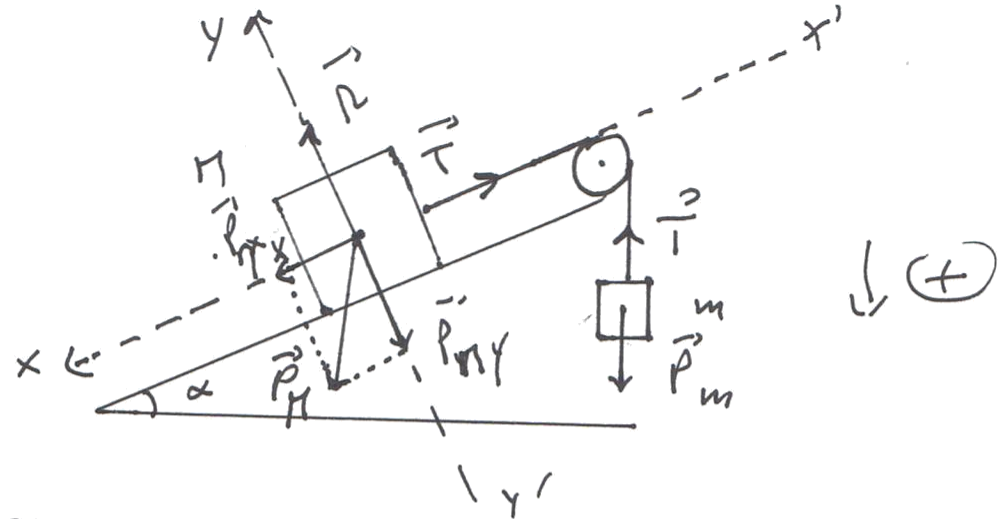
$c = ?$

à $t = 0$ on a $v(0) = 6.(0)^2 + 4.(0) + c = 6$

$$\Rightarrow \boxed{c = 6\ m/s}$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = (6t^2 + 4t + 6)\ m/s}$$

Ex 3



1/ $m = ?$ ⇒ pour avoir l'équilibre

* la masse m : $\sum \vec{F}_{m\,ext} = \vec{0}$

le système est en équilibre ⇒ $\sum \vec{F}_{m\,ext} = \vec{0}$

⇒ $\vec{T} + \vec{P}_m = \vec{0}$ ⇒ $T = P_m = mg$ .... (1)

* la masse M : $\sum \vec{F}_{M\,ext} = \vec{0}$

le système est en équilibre ⇒ $\sum \vec{F}_{M\,ext} = \vec{0}$

⇒ $\vec{T} + \vec{R} + \vec{P}_M = \vec{0}$ ⇒ $\begin{cases} (xx') : T = P_{Mx} \\ (yy') : R = P_{My} \end{cases}$

⇒ $\begin{cases} (xx') : T = Mg \sin\alpha \quad \ldots\ldots (2) \\ (yy') \quad R = Mg \cos\alpha \quad \ldots\ldots (3) \end{cases}$

On a : (1) = (2) (la poulie à une masse faible)

⇒ $mg = Mg \sin\alpha$ ⇒ $\boxed{m = M \sin\alpha}$

2/ $m = 3M$ ⇒ le sens du mouvement ?

Déplacement ⇒ on a une accélération a ⇒

* la masse m : $\sum \vec{F}_{m\,ext} = m\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{T} + \vec{P}_m = m\vec{a} \Rightarrow P_m - T = ma$

$\Rightarrow mg - T = ma \Rightarrow T = m(g-a)$ ..... (1)

* la masse M : $\sum \vec{F}_{M\,ext} = M\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{T} + \vec{P}_M + \vec{R} = M\vec{a}$

$\Rightarrow \begin{cases} (Xx') : T - Mg\sin\alpha = Ma \\ (Yy') : R = Mg\cos\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow T = M(a + g\sin\alpha)$ ..... (2)

On a : (1) = (2)

$\Rightarrow m(g-a) = M(a + g\sin\alpha)$

or : $m = 3M$

$\Rightarrow 3M(g-a) = M(a + g\sin\alpha)$

$\Rightarrow 3(g-a) = a + g\sin\alpha$

$\Rightarrow 4a = g(3 - \sin\alpha)$

$\Rightarrow \boxed{a = 0{,}25\, g(3 - \sin\alpha)} > 0$

3- $\sin\alpha > 0$ car $(-1 \leq \sin\alpha \leq 1)$

$\Rightarrow a > 0$ donc le sens choisi est juste.

$\Rightarrow$ le sens du mouvement du système est le sens du Poids de la masse m $(\vec{P}_m)$.

* $T = ?$ A.N: $\alpha = 30°$, $m = 1\,kg$, $g = 9{,}80\,m/s^2$

$a = 0{,}25\,g\,(3 - \sin\alpha)$

$= 0{,}25 \cdot 9{,}80\,(3 - \sin 30°)$

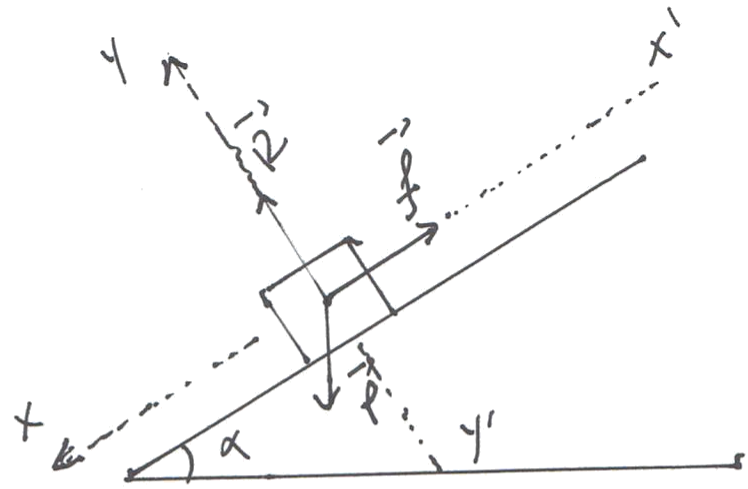
$\Rightarrow \boxed{a = 6{,}125\ m/s^2}$

(1) $\Rightarrow T = m(g - a)$

$= 1\,(9{,}80 - 6{,}125)$

$\Rightarrow \boxed{T = 3{,}675\ N}$

Ex4



Plan non lisse $\Rightarrow$ il y a les frottements (الاحتكاك)

$a = 2\ m/s^2$

1/ $\mu_s = ?$, $\mu_c = ?$

1/ $\mu_s = ?$ au repos (في حالة سكون)

($\vec{f} = \vec{f}_s$)

$\Rightarrow \sum \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} + \vec{P} + \vec{f}_s = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (xx'): P\sin\alpha - f_s = 0 \\ (yy'): R - P\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (xx') = f_s = P\sin\alpha \quad \ldots\ldots (1) \\ (yy'): R = P\cos\alpha \quad \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

On : $f_s = \mu_s R$

alors :

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{P \sin\alpha}{P \cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{f_s}{R} = \frac{\mu_s R}{R} = \mu_s$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_s = \tan\alpha}$$

A.N : $\mu_s = \tan 30° \Rightarrow \boxed{\mu_s = 0,577}$

b/. $\mu_c = ?$ en mouvement : $(\vec{f} = \vec{f}_c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{R} + \vec{P} + \vec{f}_c = m\vec{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x x') : P \sin\alpha - f_c = ma \\ (y y') : R - P\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x x') : f_c = P\sin\alpha - ma \quad \cdots\cdots (1) \\ (y y') : R = P\cos\alpha \quad \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

On : $f_c = \mu_c R$

alors :

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{f_c}{R} = \frac{P\sin\alpha - ma}{P\cos\alpha} = tg\alpha - \frac{ma}{P\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_c \cdot R}{R} = tg\alpha - \frac{\mu a}{\mu g\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_c = \mu_s - \frac{a}{g\cos\alpha}}$$

A.N :

$$\mu_c = 0,577 - \frac{2}{9,8 - 0,86}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_c = 0,341}$$

2) $\boxed{\mu_s >>> \mu_c}$

Ex 1 :

$$\vec{P} = \frac{25}{6} y \vec{i} + (z - x)\vec{j} + (2z^2 - x)\vec{k}$$

suivant $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t^2 \\ z = t - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 3\,dt \\ dy = 4t\,dt \\ dz = dt \end{cases}$

1/° la Puissance P = ?

$P = \frac{dw}{dt}$: $\frac{\text{Travail}}{\text{Temps}}$

$\vec{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow dw = \vec{F} \cdot d\vec{r}$: Force x déplacement

$\vec{F} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$, $d\vec{r} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$

$$dw = F_x \cdot \vec{i} \cdot dx \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} \cdot dy \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} \cdot dz \cdot \vec{k}$$

(or : $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$)

$$\Rightarrow dw = \frac{25}{6} y\,dx + (z - x)\,dy + (2z^2 - x)\,dz$$

$$\Rightarrow dw = \frac{25}{6}(2t^2)(3\,dt) + (t - 2 - 3t)(4t\,dt)$$

$$+ (2(t-2)^2 - 3t)\,dt$$

$$= 25t^2 + 4t^2 - 8t - 12t^2 + 2t + 8 - 8t - 3t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{dw = (19t^2 - 19t + 8)\,dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 19t^2 - 19t + 8}$$

2/ Puissance minimale :

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = 38t - 19 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 0,5\,A} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t = 1,5 \\ y = 2t^2 = 0,5 \\ 3 = t - 2 = -1,5 \end{cases}$$

3/ Travail W_F à $[0,2]$

$$dW_F = (19t^2 - 19t + 8)\,dt$$

$$\Rightarrow W_F = \int dW_F = \int_0^2 (19t^2 - 19t + 8)\,dt$$

$$= \left[\frac{19}{3}t^3 - \frac{19}{2}t^2 + 8t\right]_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{W_F = 28,66\,J}$$

4/° Travail $W_{\vec{F}}$ si le corps se déplace entre t_1 et t_2

$t_1 = 0s$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$t_2 = 2s$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ z = 0 \end{cases}$$