Faculté des Mathématiques et Informatique — USTO MB
Département de Mathématiques — 2019/2020

Test n°2 d'algèbre 3
Durée : 1 h.

Exercice 1.

1. Déterminer une condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   soit diagonalisable.

2. Dans tous les cas donner le polynôme minimale.

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. l'endomorphisme f est-il diagonalisable ? En déduire le polynôme minimale.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

   et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

Corrigé :

Exercice 1. (4 **pts**).

1. $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b \\ 0 & 2-\lambda & c \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{(1-\lambda)(2-\lambda)^2}_{(\mathbf{1pt})}$. La matrice A admet les valeurs propres 1 et 2 avec multiplicité respective 1 et 2. Par conséquent, A est diagonalisable si et seulement si son sous-espace propre associé à la valeur propre 2, noté E_2 est de dimension 2. Or $(x, y, z) \in E_2$ si et seulement si

$$\begin{cases} -x + ay + bz = 0 \\ cz = 0 \end{cases} \qquad (2\mathbf{pts})$$

   Cet espace est donc de dimension 2 si et seulement si $c = 0$.

2. Si A est diagonalisable $\pi_A(X) = (1 - X)(2 - X)$, sinon $\pi_A(X) = P_A(X)$ (1 **pt**)

Exercice 2. (6 **pts**)

1. $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -6 & 5 \\ -4 & -1-\lambda & 10 \\ 7 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+56)+4(6\lambda+6)+7(5\lambda-55) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda - 25 = -(\lambda + 1)(\lambda_2 - 10\lambda + 25) = -(\lambda + 1)(\lambda - 5)^2$. (1 **pts**)
   La matrice A admet une valeur propre simple -1 et une double 5

2. $E_{-1} = \ker(A+I_3) = \text{Vect}\,\underbrace{(10, 15, 4)}_{v_1}$ (1 **pt**) et $E_5 = \ker(A-5I_3) = \text{Vect}\,\underbrace{(1, 1, 1)}_{v_2}$ (1 **pt**), $\dim(E_5) < 2$ donc l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable et $\pi_A(X) = -(1 + X)(X - 5)^2$ (1 **pt**).

3. On cherche v_3 tel que $Av_3 = 6v_2 + 5v_3$ c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+5x \\ 6+5y \\ 6+5z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - 6y + 5z = 6 \\ -4x - 6y + 10z = 6 \\ 7x - 6y - z = 6 \end{cases} \qquad (2\mathbf{pts})$$

Le vecteur $v_3 = (0, -1, 0)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$