Domaine MI – L1 – S2 **Année Universitaire 2020/2021**

Module : Phys2 (Electricité)

Fiche de TD N°2

Exercice 1 :

On considère un fil de longueur infini portant une densité de charge linéique uniforme λ**>0**. Calculer à l'aide du théorème de Gauss, le champ électrique $\overrightarrow{E}$ en un point M situé à une distance **a** du fil.

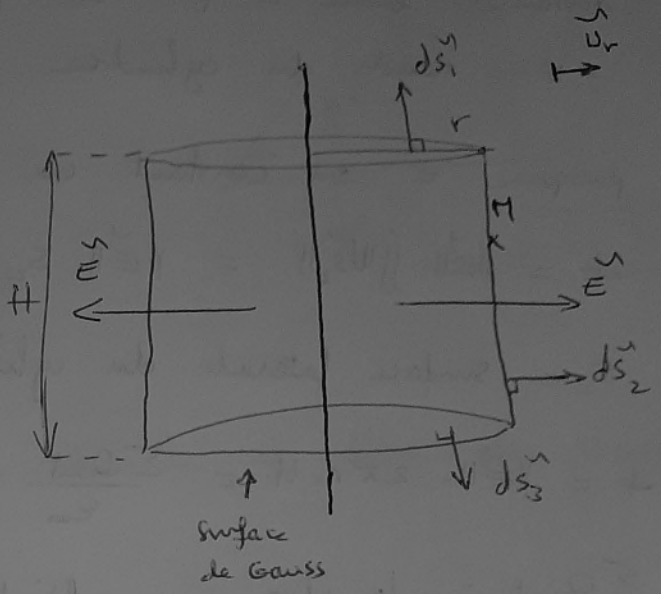
Exercice 2 :
En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrique créés par un plan infini portant une densité de charge $\sigma>0$

Exercice 3 : Un cylindres de rayons **R** contient une charge de densité ρ**>0** constante. En appliquant le théorème de Gauss, calculer le champ électrique en un point M situé à une distance **R/2** de l'axe du cylindre.

Exercice 4 : Soit une sphère de centre **O** et de rayon **R** portant une densité volumique de charge $\rho<0$ uniformément répartie à l'intérieur de cette sphère.
En appliquant le théorème de Gauss, calculer le champ électrique en un point M situé à une distance **2R**.

Solution Fiche TD N°2

Exo 1 :



le fil est chargé ⊕ donc $\vec{E}$ sortant

pour un fil le choix de la surface de Gauss est un cylindre

Théorème de Gauss

Φ = flux du champ électrique

$$= \iint \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- la surface de Gauss doit être une surface fermée
- $\sum Q_{int}$ = c'est la charge à l'intérieur de la surface de Gauss
- $d\vec{s}$: élément de surface toujours perpendiculaire à la surface dirigé vers l'extérieure

pour un cylindre la surface totale = surface des deux bases + la surface latérale

$$d\vec{s} = d\vec{s}_1 + d\vec{s}_2 + d\vec{s}_3$$

$$\Phi = \iint \vec{E}\, d\vec{s} = \iint \vec{E}\, d\vec{s}_1 + \iint \vec{E}\, d\vec{s}_2 + \iint \vec{E}\, d\vec{s}_3$$

$\vec{E} \perp d\vec{s}_1$ et $\vec{E} \perp d\vec{s}_3 \Rightarrow \vec{E}.d\vec{s}_1 = \vec{E}\, d\vec{s}_3 = 0$ (produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaire)

$\vec{E} \parallel d\vec{s}_2 \Rightarrow \vec{E}.d\vec{s}_2 = \|\vec{E}\|.\|d\vec{s}_2\|$

$$\Phi = \iint \|\vec{E}\| \, \|d\vec{s}_2\|$$

Sur la surface latérale du cylindre $\vec{E}$ est constant puisque la

distance entre le fil et n'importe quelle point sur la surface est fixe
$= r$ = rayon du cylindre

puisque $\vec{E}$ est constant sur la surface latérale

$\Phi = \|\vec{E}\| \iint \|d\vec{s}_2\| = \|\vec{E}\| \cdot S_2$ $\quad \left(\iint \|d\vec{s}_2\| = S_2 \right.$

S_2 = surface latérale du cylindre $= 2\pi r \cdot H$.

$$\Phi = \|\vec{E}\| \cdot 2\pi r \cdot H = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

ΣQ_{int} = la charge à l'intérieur de la surface de Gauss
= la charge à l'intérieur du cylindre
= la charge sur le fil de longueur H (limité par la hauteur H du cylindre)

$\Sigma Q_{int} = \lambda \cdot H$. = densité linéique de charge . la hauteur

λ = densité linéique de charge = le nombre de charge dans un cm.

$$\Phi = \|\vec{E}\| \cdot 2\pi r \cdot H = \frac{\lambda \cdot H}{\varepsilon_0} \Rightarrow \|\vec{E}\| = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

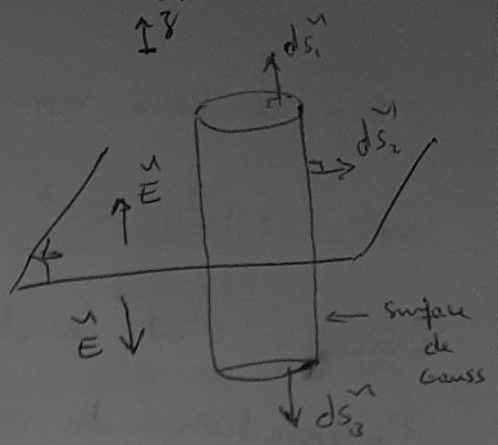
$\vec{E}$ est selon le vecteur unitaire $\vec{u}_r$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \vec{u}_r}$$

Exo2

pour un plan chargé on a une densité surfacique de charge $\sigma > 0$

σ : le nombre de charge dans un cm^2



- le champ dans un plan chargé est perpendiculaire à la surface

- le choix de la surface de Gauss dans le cas d'un plan chargé est un cylindre

$d\vec{s}$ = élément de surface toujour perpendiculaire a la surface dirigé vers l'extérieure

dans le cas d'un cylindre $d\vec{s} = d\vec{s}_1 + d\vec{s}_2 + d\vec{s}_3$

(deux bases et une surface latérale)

$$\Phi = \iint \vec{E}\, d\vec{s} = \iint \vec{E}\, d\vec{s}_1 + \iint \vec{E}\, d\vec{s}_2 + \iint \vec{E}\, d\vec{s}_3$$

$\vec{E} \perp d\vec{s}_2 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s}_2 = 0$ (produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaire)

$\vec{E} \parallel d\vec{s}_1$ et $\vec{E} \parallel d\vec{s}_3$ avec $\|d\vec{s}_1\| = \|d\vec{s}_3\|$

$$\Phi = 2 \iint \|\vec{E}\| \|d\vec{s}_1\|$$

pour n'importe quelle point sur la surface S_1 (la base 1) ou (la base 3) le champ $\vec{E}$ est constant (tout les points se situe a la même distance par rapport au plan chargé)

$$\Rightarrow \Phi = 2\|\vec{E}\| \iint \|d\vec{s}_1\| = 2\|\vec{E}\| \cdot S_1$$

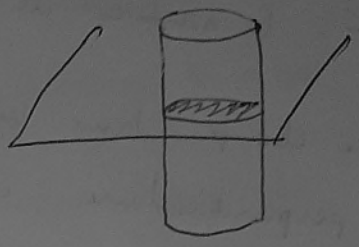
S_1 = la base supérieure du cylindre = πr^2 (surface d'un disque)

$$\Phi = 2\|\vec{E}\| \cdot \pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\sum Q_{int}$ = c'est la charge résultante entre l'intersection du cylindre et du plan

$= \sigma . S$ (c'est une charge surfacique)

$= \sigma . \pi . r^2$

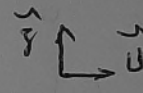


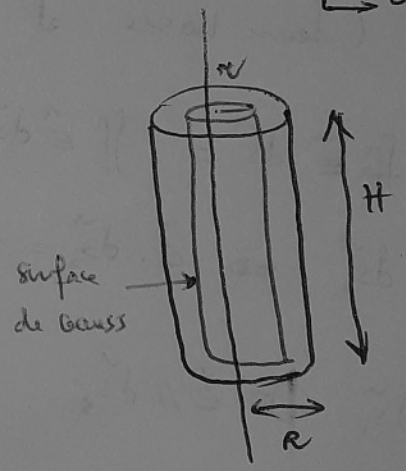
donc $\Phi = 2\|\vec{E}\| . \pi r^2 = \frac{\pi r^2 . \sigma}{\varepsilon_0}$

$$\|\vec{E}\| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$\vec{E}$ est selon le vecteur unitaire $\vec{u}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}}$$





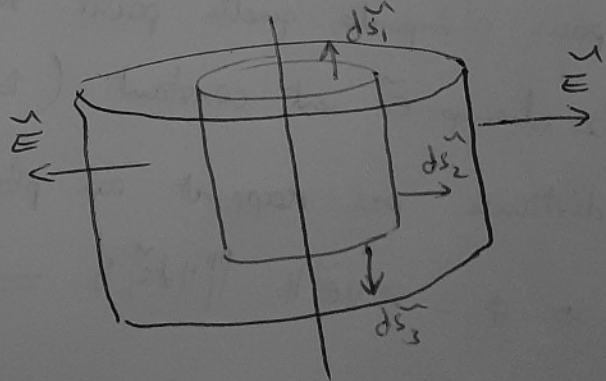
Ex03 :

pour un cylindre chargé le chemin de la surface de Gauss c'est un cylindre de rayon r de hauteur H.

on a un cylindrique chargé avec une densité volumique de charge $\rho > 0$

ρ : densité volumique de charge = nombre de charge par cm^3

le champ électrique est latérale



$$\Phi = \iint \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$d\vec{s} = d\vec{s_1} + d\vec{s_2} + d\vec{s_3}$

$\vec{E} \perp d\vec{s_1}$ et $\vec{E} \perp d\vec{s_3}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}\, d\vec{s_1} = \vec{E}\, d\vec{s_3} = 0$ (produit scalaire de deux vecteurs)

$\vec{E} \parallel d\vec{s_2}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}\, d\vec{s_2} = \|\vec{E}\| \cdot \|d\vec{s_2}\|$

$$\Phi = \iint \|\vec{E}\| \|d\vec{s_2}\| = \|\vec{E}\| \iint \|d\vec{s_2}\|$$ (pour la même distance on a la même valeur du champ)

$= \|\vec{E}\| \cdot S_2 = \|\vec{E}\| \cdot 2\pi r H$ ($S_2 = 2\pi r H$: surface latérale du cylindre)

$\sum Q_{int}$ = c'est la charge à l'intérieur de la surface de Gauss

Remarque : on ne prend pas la totalité de la charge mais juste la charge à l'intérieur de la surface de Gauss (cylindre de rayon r)

pour une distribution volumique de charge : $\sum Q_{int} = \rho \cdot V$

V : Volume chargé $= \pi r^2 H$

$\sum Q_{int} = \rho \cdot \pi r^2 H$

$$\Phi = \|\vec{E}\| \cdot 2\pi r H = \frac{\rho \cdot \pi r^2 H}{\varepsilon_0}$$

$$\|\vec{E}\| = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

pour un point situé à une distance $R/2$

$$\|\vec{E}\| = \frac{\rho R/2}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}$$

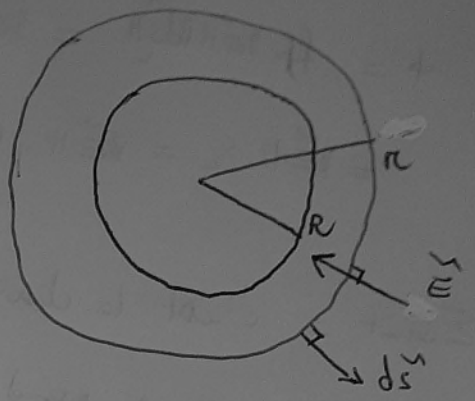
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0} \vec{u_r}}$$

Ex 4 :

On a une sphère chargée volumiquement avec une densité $\rho < 0$

pour une sphère chargée le choix de la surface de Gauss c'est une sphère (c'est le seul cas où on choisie une sphère)

pour une sphère chargée le champ est radiale (dirigé vers le centre de la sphère et puisque on a une densité de charge $\rho < 0$ donc c'est charges sont negatives, le champ sera centripète



l'élement de surface $d\vec{s}$ est toujour perpendiculaire a la surface de même pour le champ électrique $\Rightarrow \vec{E} \parallel d\vec{s}$

$$\Phi = \iint \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \vec{E}.d\vec{s} = \|\vec{E}\|.\|d\vec{s}\|$$

sur la surface de Gauss de rayon r, le champ est constant (on est a la même distance par rapport au centre de la sphère)

$$\Phi = \|\vec{E}\|. \iint \|d\vec{s}\| = \|\vec{E}\|.S = \|\vec{E}\|.4\pi r^2 \qquad (4\pi r^2 = \text{surface d'une sphère})$$

$$= \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\sum q_{int} = \rho . V$ puisqu'on a une densité volumique de charges.

V = volume de la sphère chargé (on ne prend que la charge à l'intérieur de la sphère de Gauss, mais $R < r$ donc on a la sphère chargée et totalement inclus dans la sphère de Gauss)

Remarque : y'a pas de charge à l'intérieur de la sphère de rayon R

$\Sigma_{int} = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$ ($\frac{4}{3}\pi R^3$: volume d'une sphère)

$\Phi = \|\vec{E}\| \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$

$\|\vec{E}\| = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

pour un point situé à une distance $r = 2R$

$\|\vec{E}\| = \frac{\rho R^3}{12\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho R}{12\varepsilon_0}$

$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho R}{12\varepsilon_0}\vec{u}_r}$