0.1 Equation différentielle du premier Ordre

1. $y' = e^{-y} \Rightarrow e^y dy = dx \Rightarrow e^y = x + c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \ln|x + c|$.

2. $(x^2+1)dy = 2x(y^2+1)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{2x}{x^2+1}dx$

$$\Rightarrow y = \tan(\ln(x^2+1) + c), c \in \mathbb{R}.$$

3. $y' - y = e^x ...(E)$ on commence par résoudre l'équation homogène $(E_h) : y' - y = 0$ on a :

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x dx \Rightarrow \ln|y| = x + c, c \in \mathbb{R},$$

$\Rightarrow y = Ke^x, K = \pm e^c$. On cherche ensuite une solution particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose $y(x) = k(x)e^x \Rightarrow k'(x)e^x + k(x)e^x$.
En remplaçant dans (E) on aura :

$$k'(x)e^x + k(x)e^x - k(x)e^x = e^x \Rightarrow K'(x) = 1 \Rightarrow k(x) = x,$$

alors la solution particulière est donc donnée par $y_p(x) = xe^x$.
Enfin, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par $y(x) = ke^x + xe^x$.

0.2 Equation différentielle du second ordre

Example 0.2.1. *1.* $y'' + y' - 6y = 6x ...(E)$ *sachant que la solution de*

$$(E_h) : y'' + y' - 6y = 0$$

est donnée comme suit $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *la solution générale de* $(E), y_g = y_h + y_p$.
Nous allons utiliser le tableau précédent dans la partie cours, c'est à dire suivant y_p *dépend du second membre de* (E), $f(x) = 6x$, *ainsi* $y_p = P_1(x)$,
0 ***est-elle une solution de*** $(E_r) : r^2 + r - 6 = 0$? *la réponse est* ***non****, alors* y_p *est un polynôme du même degré que* $f(x)$, *de la forme suivante*

$$y_p = ax + b$$

pour trouver y_p *en fait il faut trouver* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* y_p *vérifie* (E). *En remplaçant dans* (E) *on aura :*

$$a = -1, b = -1/6, y_p = -x - 1/6$$

ainsi la solution de (E) *est :*

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} - x - \frac{1}{6}$$

2. $y'' + y' - 6y = e^{2x} ...(E)$ *sachant que la solutionde* $(E_h) : y'' + y' - 6y = 0$ *est donnée comme suit* $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *comme le second membre de* (E) *est* $f(x) = e^{2x}$ *et* 2 ***est-elle une solution de*** $(E_r) : r^2 + r - 6 = 0$? *la réponse est* ***oui****, alors* y_p *est sous la forme* $x^1P_0(x)e^{2x}$, *de la forme suivante*

$$y_p = axe^{2x}$$

pour trouver y_p *en fait il faut trouver* $a \in \mathbb{R}$ *tels que* y_p *vérifie* (E)

$$y' = ae^{2x} + 2xae^{2x}, y'' = e^{2x}[2a + 2a + 4ax]$$
$$e^{2x}[4a + 4ax] + ae^{2x} + 2xae^{2x} - 6axe^{2x} = e^{2x}$$

ainsi $a = \frac{1}{5}$ *la solution*

$$y = y_h + y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} + \frac{x}{5}e^{2x}.$$

3. $y'' + y = e^x$, *la solution est* $y_h = c_1\cos(x) + c_2\sin(x), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Suivant le tableau* y_p *est sous la forme* ae^x *car* 1 *n'est pas une solution de* (E_r).
Pour trouver a *en remplace dans* (E), $a = 1/2$ *ainsi*

$$y_p = \frac{1}{2}e^x, y_g = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \frac{1}{2}e^x.$$

4. $y'' + y = \sin(x)$, *la solution est* $y_h = c_1\cos(x) + c_2\sin(x), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Suivant le tableau* y_p *est sous la forme* $y_p = x(a\sin(x) + b\cos(x))$, *car* i *est une solution simple de* (E_r), *pour trouver* a, b *on remplace dans* (E), $a = -1/2, b = 0$,

$$y_p = -\frac{x}{2}\cos(x), y_g = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) - \frac{x}{2}\cos(x).$$

0.3 Matrices

Soit

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\-1&0&-2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-1&-2&0\\0&1&4\end{pmatrix},$$

$D^2=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1\\-1&2\end{pmatrix}$. $|D|=\begin{vmatrix}-2&1\\1&1\end{vmatrix}=-3$

$|E|=\begin{vmatrix}-2&1&0\\-1&-2&0\\0&1&4\end{vmatrix}=+0.\begin{vmatrix}-1&-2\\0&1\end{vmatrix}-0.\begin{vmatrix}-2&1\\0&1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-2&1\\-1&-2\end{vmatrix}=20$. $|E|=20\neq 0$ alors E est inversible. Calculons son inverse. Sachant que :

$$E^{-1}=\frac{1}{det(E)}C^t.$$

Où C^t est la comatrice de E.

$E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-1&-2&0\\0&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{pmatrix}$. Calculons les coffacteurs de E

$$c_{11}=\begin{vmatrix}-2&0\\1&4\end{vmatrix}=-8.\ c_{12}=-\begin{vmatrix}-1&0\\0&4\end{vmatrix}=4.\ c_{13}=-1.$$

$$c_{21}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&4\end{vmatrix}=-4.\ c_{22}=+\begin{vmatrix}-2&0\\0&4\end{vmatrix}=-8.\ c_{23}=2.$$

$$c_{31}=+\begin{vmatrix}1&0\\-2&0\end{vmatrix}=0.\ c_{32}=-\begin{vmatrix}-2&0\\-1&0\end{vmatrix}=0.\ c_{33}=5.$$

donc la matrice des cofacteurs est donnée par :

$$\begin{pmatrix}-8&4&-1\\-4&-8&2\\0&0&5\end{pmatrix}$$ et la transposée de la comatrice :$C^t=\begin{pmatrix}-8&-4&0\\4&-8&0\\-1&2&5\end{pmatrix}$

$$E^{-1}=\frac{1}{20}C^t=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}-8&-4&0\\4&-8&0\\-1&2&5\end{pmatrix}$$

On remarque :

$$A^3+A^2+A=-2I_3\Leftrightarrow A(A^2+A+I_3)=-2I_3\Leftrightarrow A(\frac{-1}{2}A^2-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}I_3)=I_3$$

ce qui montre que A est inversible et que $A^{-1}=\frac{-1}{2}A^2-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}I_3$.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-4&-2\\1&-1&1\\0&2&0\end{pmatrix}$$

Exercice 02

1.$I_1=\dfrac{1}{x^2-x-2}=\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)(x-2)}$, $\Delta\geq 0$. On décompose la fraction en éléments simples, c'est à dire on cherche a et b tels que :

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}.$$

Pour calculer **a**, on multiplie les deux membres par $(x+1)$, on obtient

$$\frac{1}{(x-2)}=a+\frac{b(x+1)}{x-2}$$

on tend $x\to -1$ alors

$$\frac{-1}{3}=a.$$

Pour calculer **b**,on multiplie les deux membres par $(x-2)$, on obtient

$$\frac{1}{(x+1)} = \frac{a(x-2)}{x+1} + b$$

on tend $x \to 2$ alors

$$\frac{1}{3} = b.$$

(On peut utiliser l'indentification)

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{x(a+b)+b-2a}{(x+1)(x-2)}.$$

$$\begin{cases} a+b=0, \\ b-2a=1 \end{cases} \Rightarrow 3a=-1, a=-1/3, b=1/3$$

$$I_1 = \frac{-1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{3}\frac{b}{x-2},$$

$$I_1 = \frac{-1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + c, c \in \mathbb{R}.$$

2.$I_2 = \dfrac{1}{(x+1)^2(x-1)}$, On décompose la fraction en éléments simples,

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x-1)}$$

même principe

$$c = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)^2}, b = \lim_{x\to -1}\frac{1}{1-x},$$

mais pour a on peut pendre $x=0$ car c'est bien définie en 0 , on remplaçe dans les membres.

$$a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}.$$

Ainsi

$$I_2 = -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2(1+x)} + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}dx$ on remarque $(x^2+2x+2)' = 2x+2$

Ainsi $I_3 = \frac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + I'$,

$I' = \displaystyle\int \frac{2}{x^2+2x+2}dx$ sachant que $\Delta < 0$ on écrit le dénominateur sous la forme u^2+1,

$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ Ainsi on pose $u = (x+1) \Rightarrow du = dx$.

$I' = 2\displaystyle\int \frac{1}{1+u^2}du = 2arctg(u) + c; c \in \mathbb{R}$

$$I_3 = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + 2arctg(1+x) + c.$$

4. $I_4 = \displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3+x}dx$. On fait une division euclidienne $x^4+1 = x(x^3+x) - x^2 + 1$, ainsi $I_4 = \displaystyle\int xdx - \int \frac{-x^2+1}{x^3+x}dx =$ $x^2/2 - \underbrace{\displaystyle\int \frac{1-x^2}{x(x^2+1)}dx}_{J}$. sachant que $\Delta < 0, x^2+1$ On décompose :

$$\frac{1-x^2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$a = \lim_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)} = 1$. Pour b, c deux inconnus on remplaçe par deux valeurs $x=1, x=-1$ on retrouve un système à deux équations $0 = 1 + \frac{b+c}{2} \wedge 0 = -1 + \frac{-b+c}{2}, b = -2, c = 0$

$$J = \ln|x| - \ln(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$I_3 = x^2/2 - \ln|x| + \ln(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Solution Exercice 03 :

1. $I_1 = \int \sin(2x)\cos(x)dx$, On utilise les formules trigonométriques : $I_1 = \frac{1}{2}\int(\sin(3x)+\sin(x))dx = \frac{1}{2}[-\cos(x) - \cos(3x)/3)] + c, c \in \mathbb{R}$.

1. $I_2 = \int_0^{\pi} \sin(x)^3 dx$. On a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, ainsi

$$I_2 = \int_0^{\pi}(1-\cos^2(x))\sin(x)dx =$$

$$= \int_0^{\pi}\sin(x)dx + \int_0^{\pi}\cos^2(x)(-\sin(x))dx$$

$$= [-\cos(x)]_0^{\pi} + [\cos^3(x)/3]_0^{\pi} = \frac{4}{3}.$$

2. $I_3 = \int \cos^2(x)dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}dx$ $I_3 = x/2 + \frac{\sin(2x)}{4} + c, c \in \mathbb{R}$.

3. $I_4 = \int \frac{1}{1+\cos(x)+\sin(x)}dx$. On pose $t = \tan\frac{x}{2}$, alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

$$I_4 = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + c = \ln|1+\tan\frac{x}{2}| + c, c \in \mathbb{R}.$$

Dr. I.Medjadj