Module Méthodes numériques

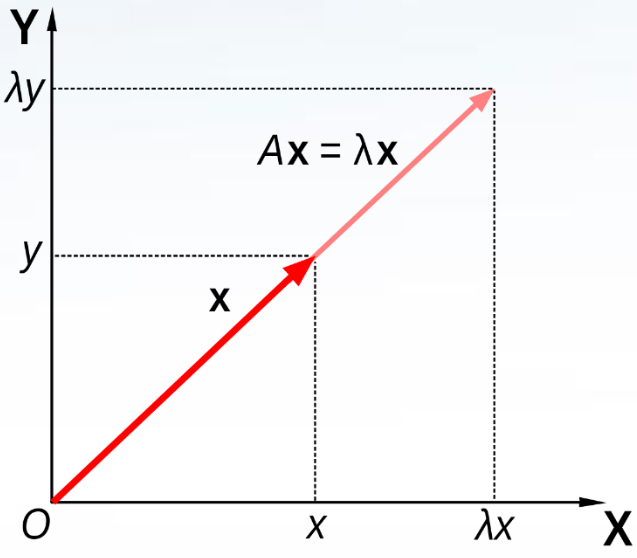
Valeurs et Vecteurs propres

DR. REDOUANE TLEMSANI

Faculté des Mathématiques et Informatique

introduction

- En mathématiques, et plus particulièrement en algèbre linéaire, le concept de **vecteur propre** est une notion algébrique s'appliquant à une application linéaire d'un espace dans lui-même.
- Il correspond à l'étude des axes privilégiés, selon lesquels l'application se comporte comme une dilatation, multipliant les vecteurs par une même constante. Ce rapport de dilatation est appelé **valeur propre**, les vecteurs auxquels il s'applique s'appellent vecteurs propres, réunis en un **espace propre**.
- Le graphique de la figure illustre ces notions.



Valeurs et Vecteurs propres

- Les premiers vecteurs et valeurs propres viennent des équations différentielles, la **théorie des perturbations séculaires des orbites des 6 planètes**, **et les axes principales d'inertie d'un corps solide**.

- Aujourd'hui, la théorie des valeurs et vecteurs propres, est indispensable dans toutes les branches de la science, en particulier pour la solution des **systèmes des équations différentielles linéaires**, la **diagonalisation des formes quadratiques et operateurs autoadjoints**, en **théorie de stabilité**, pour **les questions de convergence de processus itératifs**, et **en physique et chimie** (mécanique, circuits, cinétique chimique,…etc).

Problème :

Calcul des puissances d'une matrice

- Soit A = $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n avec $0 \leq n \leq 5$:

$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 46 & 19 \\ -38 & -11 \end{pmatrix}$ $A^4 = \begin{pmatrix} 146 & 65 \\ -130 & -49 \end{pmatrix}$ $A^5 = \begin{pmatrix} 454 & 211 \\ -422 & -179 \end{pmatrix}$

- Et combien vaut A^n ?

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2\,3^n & -2^n + 3^n \\ 2\,2^n - 2\,3^n & 2\,2^n - 3^n \end{pmatrix}$$

Solution:

- Ce qui est compliqué dans le calcul des puissances d'une matrice, c'est que tous les coefficients **se dispersent** au cours des multiplications :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + db \\ ac + dc & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} a^3 + 2bca + bcd & ba^2 + bda + bd^2 + b^2c \\ ca^2 + cda + bc^2 + cd^2 & d^3 + 2bcd + abc \end{pmatrix}$$

- Il y a un cas où c'est facile :

Théorème

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{pmatrix}$$

Si $\lambda_i \neq 0$ pour tout i , la formule vaut pour tout $n \in Z$.

Théorème

- Soit P une matrice inversible. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des matrices quelconques et :

$B_1 = PA_1P\text{-}1 \quad B_2 = PA_2P^{-1} \quad \ldots B_n = PA_nP^{-1}$

alors : $B_1 B_2 \ldots B_n = PA_1 A_2 \ldots A_nP^{-1}$

- En particulier : $B = PAP^{-1} \rightarrow B^n = PA^nP\text{-}1$
- Démonstration :

$B_1 B_2 B_3 \ldots B_n = PA_1 P^{-1} PA_2 P^{-1} PA_3 P\text{-}1 \ldots PA_n P^{-1}$
$= PA_1 (P^{-1} P) A_2 (P^{-1} P) A_3 (P^{-1} \ldots P)A_n P^{-1}$
$= PA_1 \mathbf{I} A_2 \mathbf{I} A_3 \ldots A_n P^{-1}$
$= PA_1 A_2 A_3 \ldots A_n P^{-1}$

Méthode

- pour calculer A^n connaissant une matrice inversible **P** et une matrice diagonale **D** telles que $A = PDP^{-1}$: on calcule D^n puis $A^n = PD^nP^{-1}$
- **Exemple :**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2\ 3^n & -2^n + 3^n \\ 2\ 2^n - 2\ 3^n & 2\ 2^n - 3^n \end{pmatrix}$$

Diagonalisation et transformations linéaires

Dans certains cas, on peut décomposer une matrice selon $A = PDP^{-1}$, D étant une matrice diagonale.

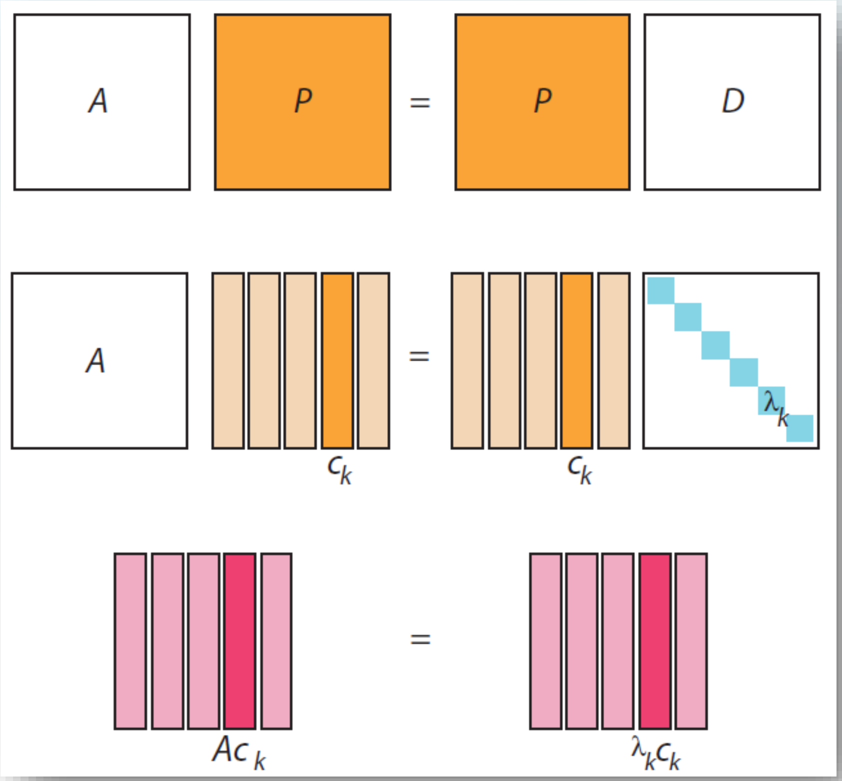
Cette décomposition contient de l'information à propos des valeurs propres et des vecteurs propres.

Théorème de diagonalisation

- Une matrice A de taille nxn est diagonalisable si et seulement si A, a des vecteurs propres linéairement indépendants.
- En fait, $A = PDP^{-1}$, avec D matrice diagonale, si et seulement si les colonnes de P sont n vecteurs propres linéairement indépendants de A.
- Dans ce cas, les entrées de la diagonale de D sont les valeurs propres de A rangées dans le même ordre que les vecteurs propres dans P.

Valeurs et Vecteurs propres

- Quand il existe P et D telles que $A = PDP^{-1}$ ont dit que A est diagonalisable.
- Une matrice A étant donnée, on cherche ce que pourrait être la matrice P si A était diagonalisable :
  - $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD$



Déduction

- Les colonnes de P doivent forcément vérifier une égalité du type :

$$\checkmark \quad Ac = \lambda\, c$$

avec λ un nombre et **c** un vecteur non nul.

Quand on a une telle égalité, on dit que est une λ valeur propre de A et que c est un vecteur propre pour la valeur propre .

Comment trouver des valeurs propres et des vecteurs propres ?

On suppose que A est une matrice carrée d'ordre p. On note $\alpha_{i,j}$ ses coefficients et X_i ceux de la colonne c.

L'égalité $Ac = \lambda c$ équivaut au système :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \ldots + \alpha_{1,p} X_p = \lambda X_1 \\ \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \ldots + \alpha_{2,p} X_p = \lambda X_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{p,1} X_1 + \alpha_{p,2} X_2 + \ldots + \alpha_{p,p} X_p = \lambda X_p \end{cases}$$

Parce que les inconnues sont $X_1, X_2, \ldots, X_p$ et λ, ce n'est pas un système linéaire !

Comment trouver des valeurs propres et des vecteurs propres ?

Si les inconnues étaient seulement $X_1, X_2, \ldots, X_p$, ce serait un système linéaire dont on trouverait les solutions par la méthode du pivot de gauss ou autre.

$$\begin{cases} (\alpha_{1,1} - \lambda)X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \ldots + \alpha_{1,p} X_p = 0 \\ \alpha_{2,1} X_1 + (\alpha_{2,2} - \lambda) X_2 + \ldots + \alpha_{2,p} X_p = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{p,1} X_1 + \alpha_{p,2} X_2 + \ldots + (\alpha_{p,p} - \lambda) X_p = 0 \end{cases}$$

C'est un système linéaire homogène dont on cherche les solutions non nulles.

Pour que ce système ait une solutions non nulle, il faut et il sut que le déterminant de **A =** λ **I**, sa matrice des coefficients, soit nul.

Comment trouver des valeurs propres et des vecteurs propres ?

λ est une valeur propre de A si et seulement si

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

Théorème :

$$\wp_A(z) = \det(A - z\, I) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} - z & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} - z & \dots & \alpha_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \dots & \alpha_{p,p} - z \end{vmatrix}$$

est un polynôme qu'on l'appelle le polynôme caractéristique de **A**.

$$\wp_A(z) = \det(A) + \cdots + (-1)^{p-1} \underbrace{(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \cdots + \alpha_{p,p})}_{\mathrm{tr}(A)} z^{p-1} + (-1)^p z^p$$

tr(A) est la trace de A. Les valeurs propres de A sont les nombres tels que $\wp_A() = 0$.

Méthode pour diagonaliser une matrice

1) Trouver les valeurs propres de A, $n \times n$.

2) Trouver les vecteurs propres de A. Il en faut n qui soient linéairement indépendants.

3) Construire P à partir des vecteurs propres.

4) Construire D à partir des valeurs propres.

Exemple 1

- A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Comment trouver des valeurs propres et des vecteurs propres ?

Polynôme caractéristique

$det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ $\lambda^2-3\lambda-4=0$

$\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-4)=0$

donc

Les valeurs propres sont

$\lambda_1=-1$ et $\lambda_2=4$

Exemple 1

X= $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A si **AX=λX**

λ_1=-1

AX=-X ⇔ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$⇔ $\begin{cases} x+3y=-x \\ 2x+2y=-y \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

⇔ $2x=-3y$⇔$x=-\frac{3}{2}y$ donc le vecteur propre

⇔ X=$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}y \\ y \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathbf{V_1}$= $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

λ_2=4

AX=4X ⇔ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix}$⇔ $\begin{cases} x+3y=4x \\ 2x+2y=4y \end{cases}$ ⇔

$\begin{cases} -3x+3y=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$⇔$x=y$ donc le vecteur propre

⇔ X=$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathbf{V_2}$= $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

P=$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ D=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exemple 2

- $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Comment trouver des valeurs propres et des vecteurs propres ?

Polynôme caractéristique

$$det(B - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda)^2=0$

donc

Les valeurs propres sont

$\lambda_1=4$ et $\lambda_2=1$

Exemple 2

X= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A si **AX=λX**

λ_2= 1

AX=X ⇔ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=x \\ x+2y+z=y \\ x+y+2z=z \end{cases} \Leftrightarrow$

$x+y+z=0 \Leftrightarrow z=-x-y$

donc les vecteurs propres

⇔ X= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\underline{\mathbf{V_1}}$= $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **et** $\underline{\mathbf{V_2}}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

λ_1=4

AX=4X ⇔ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=4x \\ x+2y+z=4y \\ x+y+2z=4z \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z$ donc le vecteur propre

⇔ X= $\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\underline{\mathbf{V_3}}$= $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemple 2

$\underline{V_1}= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{V_2}= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\underline{V_3}= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1=4$ et $\lambda_2=1$

$$D= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 3

Diagonalisons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1ère étape : recherche des valeurs propres

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

Polynôme caractéristique

valeurs propres de *A* sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$

2ème étape : recherche de vecteurs propres linéairement indépendants

En résolvant $(A - \lambda I)$ **x** = **0**, pour chaque valeur de , on obtient

une base pour $\lambda = 1$: $\underline{\mathbf{V_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

une base pour $\lambda = 2$: $\underline{\mathbf{V_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **et** $\underline{\mathbf{V_3}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3ième étape : construction de P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 3

4ième étape : Construction de *D* à partir des valeurs propres correspondante

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5ième étape : vérification

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$