Examen de rattrapage d'Algèbre 3

Durée : 1h30

Exercice 1. (4 pts)
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si A ou B est inversible, et si λ est une valeur propre de AB, alors les sous-espaces propres de AB et BA associés à λ ont même dimension.
   (**Indication:** utiliser le fait que AB et BA ont même polynôme caractéristique.)

2. En déduire que si A ou B est inversible et si AB est diagonalisable, alors BA est aussi diagonalisable.

Exercice 2. (4 pts)
Soient $E = \mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme non nul de E vérifiant:

$$f^3 + f = 0 \text{ et } E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$$

1. Montrer que si $x \notin \ker(f)$, alors $(x, f(x))$ est libre.

2. En déduire qu'il existe une base (v_1, v_2, v_3) dans laquelle la matrice A de f est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. (12 pts)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A, par rapport à la base canonique est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Première partie :

1. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$.

2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A est diagonalisable.

3. Déterminer selon les valeurs de α le polynôme minimal m_A de A.

Seconde partie :

On suppose que $\alpha = 1$,

1. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice A est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

   et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$

2. Écrire la décomposition de Dunford de B (justifier).

3. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y'(t) = BY(t)$ et $X'(t) = AX(t)$.

بِالتّوفيق

Corrigé

Exercice 1. (4 pts)

1. Supposons, par exemple, que A est inversible. Soit λ une valeur propre de AB, puisque AB et BA ont même polynôme caractéristique, λ est aussi une valeur propre de BA. **(0.25 pt)** Soient E_λ et F_λ les sous-espaces propres de AB et BA associés à λ. Soit $X \in E_\lambda$ avec $X \neq 0$ alors on a $(AB)X = \lambda X$, **(0.25 pt)** donc $BX = \lambda(A^{-1}X)$, **(0.25 pt)** par suite, on a
$$(BA)(A^{-1}X) = BX = \lambda(A^{-1}X), \quad \textbf{(0.25 pt)}$$
il en résulte que $A^{-1}X \in F_\lambda$ donc $X \in A(F_\lambda)$ **(0.25 pt)** et ainsi on a $E_\lambda \subseteq A(F_\lambda)$. **(0.25 pt)** Réciproquement, soit $X \in F_\lambda$ avec $X \neq 0$ alors on a $(BA)X = \lambda X$, **(0.25 pt)** donc $(AB)(AX) = \lambda(AX)$, **(0.25 pt)** donc $AX \in E_\lambda$ **(0.25 pt)** par suite, on a $A(F_\lambda) \subseteq E_\lambda$. **(0.25 pt)** Nous avons donc établi que $A(F_\lambda) = E_\lambda$ **(0.25 pt)** et comme A est inversible, alors on a $\dim(E_\lambda) = \dim(F_\lambda)$. **(0.25 pt)**

2. Si A ou B est inversible, alors d'après 1, les sous-espaces propres de AB et BA ont même dimension **(0.25 pt)**. Donc si AB est diagonalisable, alors la dimension de chaque sous-espace propre de AB ou BA est égale à la multiplicité de la valeur propre associée **(0.5 pt)**, donc on en déduit que BA est diagonalisable. **(0.25 pt)**

Exercice 2. (4 pts)

1. On suppose que $x \notin \ker(f)$ **(0.25 pt)** et on suppose que $(x, f(x))$ est lié **(0.25 pt)**, alors il existe $\alpha \neq 0$ tel que $f(x) = \alpha x$, **(0.25 pt)** car $f(x) \neq 0$. **(0.25 pt)** Comme $f^3 + f = 0$ et $x \neq 0$ alors on a $\alpha^3 + \alpha = 0$ **(0.5 pt)** avec $\alpha \in \mathbb{R}$ donc $\alpha = 0$ **(0.25 pt)** ce qui est absurde, car $\alpha \neq 0$. **(0.25 pt)**

2. Soient $x \in \ker(f)$ avec $x \neq 0$ **(0.25 pt)** et soit $y \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, avec $y \neq 0$. **(0.25 pt)** D'après la question 1, $(y, f(y))$ est une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, **(0.25 pt)** donc $(x, y, f(y))$ est une base de E. **(0.25 pt)** On pose $v_1 = x$, $v_2 = y$ et $v_3 = f(y)$, **(0.25 pt)** alors on a $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = v_3$ et $f(v_3) = -v_3$ **(0.25 pt)** donc si A est la matrice de f par rapport à la base (v_1, v_2, v_3), alors on a:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Exercice 3. (12 pts)
Première partie :

1.

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & \lambda-\alpha \end{vmatrix} =_{C_1+C_2\to C_1} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & \alpha-2 & \lambda-\alpha \end{vmatrix} \\
&=_{L_2-L_1\to L_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & \lambda-\alpha \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ \alpha-2 & \lambda-\alpha \end{vmatrix} \qquad \textbf{(2 pts)} \\
&= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-\alpha).
\end{aligned}$$

2. - si $\alpha = 1$, la matrice A admet les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ avec multiplicité respective 2 et 1. **(0.25 pt)**
   - si $\alpha = 2$ la matrice A admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 2$ valeur propre double et $\lambda_2 = 1$ valeur propre simple. **(0.25 pt)**
   - si $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$, la matrice A admet les valeurs propres simples $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = \alpha$. **(0.25 pt)**

3. - Il est clair que dans le cas $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$, la matrice est diagonalisable. **(0.5 pt)**
   - Si $\alpha = 1$, $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$. f est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est égale à 2. Une base de $\ker(A - I)$ est donc donnée par le vecteur $(1, 1, 0)$. L'espace est de dimension $1 \neq 2$: la matrice n'est pas diagonalisable. **(1 pt)**
   - Si $\alpha = 2$. Une base de $\ker(A-2I)$ est donnée par la famille des deux vecteurs $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$. En particulier, $\ker(A - 2I)$ est de dimension 2 et A est diagonalisable. **(1 pt)**

4. - Si $\alpha = 1$, $m_A(X) = (X - 1)^2(X - 2)$. **(0.25 pt)**
   - Si $\alpha = 2$, $m_A(X) = (X - 1)(X - 2)$. **(0.25 pt)**
   - Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $m_A(X) = (X - 1)(X - 2)(X - \alpha)$. **(0.25 pt)**

Seconde partie :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

1. La matrice A admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 2$ valeur propre simple et $\lambda_2 = 1$ valeur propre double dont les sous-espaces propres associés sont respectivement $\ker(A - 2I_3) = \text{Vect}\Big((1, 0, 1)\Big)$ **(0.5 pt)** et $\ker(A - I_3) = \text{Vect}\Big((1, 1, 0)\Big)$. **(0.5 pt)**
   Cherchons un vecteur v_3 tel que $Av_3 = v_2 + v_3$. Ainsi, le vecteur $v_3 = (0, 0, 1)$ convient. **(1 pt)**
   On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$,
   $$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pt)}$$

2. $$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N \quad \textbf{(0.5 pt)}$$
   avec
   $$DN = ND \text{ et } N^2 = 0 \quad \textbf{(0.5 pt)}$$
   C'est donc la décomposition de Dunford.

3. $$\begin{aligned} \exp(tB) &= \exp(tD)\exp(tN) \\ &= \exp(tD)\Big(I + \frac{tN}{1!}\Big) \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, alors la solution de $Y'(t) = BY(t)$ est donnée par

$$Y(t) = \exp(tB)C = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^t + c_3 t e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

La solution de $X'(t) = AX(t)$ est donc

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^t + c_3 t e^t \\ c_2 e^t + c_3 t e^t \\ c_1 e^{2t} + c_3 e^t \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$