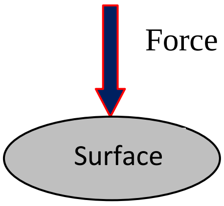
Chapitre II : Statique des fluides

2.1. Introduction

La statique des fluides est la branche de la mécanique des fluides qui traite principalement les fluides au repos. L'étude des propriétés des fluides au repos constitue la statique des fluides.

2.2. Notions de pression

Quand une force de module F, à répartition normale et uniforme, agit sur une surface d'aire S, on nomme pression une grandeur p dont la mesure est le quotient de la force pressante par la force pressée



(N/m^2) (N) (m^2)

$$\boxed{P = \frac{F}{S}} \qquad (2.1)$$

L'unité légale (SI) de pression est le newton par mètre carré ou Pascal. $1\text{Pa} = 1\frac{N}{m^2}$

On utilise également l'hectopascal (hPa) 1hPa = 100 Pa

Autres unités :

- le bar $1\text{bar} = 10^5\ \text{Pa} = 10^5\frac{N}{m^2}$
- l'atmosphère 1atm = 101325 Pa = 1013 hPa appelée pression atmosphérique
-

Le newton par mètre carré (N/m^2) ou pascal (Pa) est la pression exercée par une force de un newton répartie uniformément sur une surface de un mètre carré.

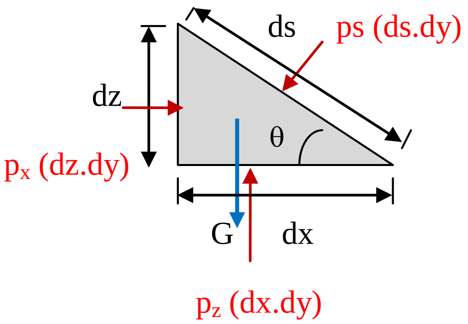
Unités	Pascal (Pa)	Bar	Atmosphère (atm)
Pascal	1	10^{-5}	$9.869\ 10^{-6}$
Bar	10^5	1	0.987167
Kgf/cm^2	98039	0.9803	0.968
Atmosphère	101325	1.0133	1
cm d'eau	98.04	$980\ 10^{-6}$	$968\ 10^{-6}$
mm de Hg	133	$1.333\ 10_{-3}$	$1.316\ 10^{-3}$
mbar	10^2	10^{-3}	$987\ 10^{-6}$

Remarque :

Le kilogramme-force par centimètre carré (kgf/cm^2), est la pression exercée par une force de 1 kilogramme-force répartie uniformément sur une surface de 1 centimètre carré. Par suite :

$$\boxed{1\ \text{kgf/cm}^2 = 9.81\text{x}10^4 \approx 10^5\ \text{N/m}^2 \approx 10^5\ \text{Pa} = 1\text{bar}}$$

2.3. Pression en un point d'un fluide au repos (théorème de Pascal)



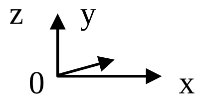


Figure (2.1) : Pression en un point d'un liquide au repos

Supposons que le liquide exerce une pression p_x sur la surface (dz dy), une pression p_z sur la surface (dx dy) et une certaine pression p_s sur la surface (ds dy) de l'élément.

Donc l'intensité des forces de pression (s'appliquant de façon normale aux surfaces) est :

$F_x = p_x\,(dzdy)$; $F_z = p_z\,(dxdy)$; $F_s = p_s\,(dsdy)$ (2.2)

La force de gravité agissant sur cet élément de fluide est : $G = \varpi \dfrac{(dxdz)}{2} dy$ (2.3)

Dans la direction horizontale des x :

$\sum \vec{F}_{ox} = 0 \longrightarrow F_x - F_s \sin\theta = 0 \longrightarrow p_x\,(dzdy) - p_s\,(dsdy)\sin\theta = 0$

D'où : $p_x\,dz - p_s\,ds \sin\theta = 0$, en sachant que $ds \sin\theta = dz$, on obtient : $p_x = p_s$ (2.4)

$\sum \vec{F}_{oz} = 0 \longrightarrow F_z - F_z \cos\theta - G = 0 \longrightarrow p_z\,(dxdy) - p_s\,(dsdy)\cos\theta - \varpi \dfrac{(dxdz)}{2} dy = 0$

d'où : $p_z dx - p_s ds \cos\theta - \varpi \dfrac{(dxdz)}{2} = 0$ et en sachant que $ds.\cos\theta = dx$, on obtient : $p_z - p_s - \dfrac{dz}{2} = 0$

Et si l'on réduit l'élément de volume à un point,

c'est-à-dire $dz = 0$, on obtient $p_z = p_s$ (2.5)

des équations (2.4) et (2.5), on obtient : $p_x = p_z = p_s$ (2.6)

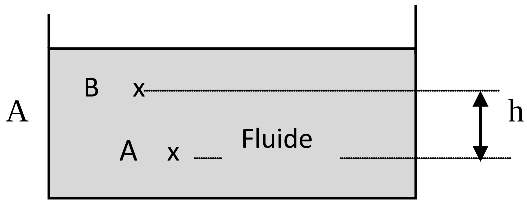
Par conséquent, la pression hydrostatique en un point donné d'un fluide au repos est la même (agit de façon égale) dans toutes les directions

On peut vérifier que la pression exercée au sein d'un liquide en équilibre,

- est constante en tous points d'un même plan horizontal.
- est indépendante de la direction considérée.
- croît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de sa surface libre.

2.4. Principe fondamental de l'hydrostatique

Principe fondamental de l'hydrostatique



La différence de pression entre deux points A et B d'un liquide en équilibre est numériquement égale au poids d'une colonne de ce liquide ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la distance des deux plans horizontaux contenant A et B.

$$\boxed{p_A - p_B = \rho g h = \varpi . h}$$

h : dénivellation entre les deux points A et B en (m)
g : accélération de la pesanteur (9,81 N/kg)
ρ : masse volumique du fluide en (kg/m^3)
$\Delta P = P_A - P_B$ est la différence de pression en (Pa)

Exemple de calcul numérique : Une éprouvette contenant du mercure sur une hauteur de 10cm. Quelle est la différence des pressions entre les niveaux inférieur et supérieur. Quelle serai la différence d'altitude de deux points d'un récipient rempli d'alcool entre lesquels on aurait la même différence de pression. (masse volumique du mercure : 13600 kg/m^{3}et celle de l'alcool : 800 kg/m^3)

Solution :

1. Deux points, B à la base, A au sommet de la colonne de mercure, ont une différence de pression :$p_A - p_B = \rho g h = \varpi . h = 13600 \times 9.81 \times 0.1 = 13\,342$ N/m^2
2. Dans l'alcool, la dénivellation serait telle que :
   $13\,342 = 800 \times 9.81 \times h' \Longrightarrow h' = 1.70$m

2.5. Transmission des pressions dans les liquides

2.5.1. Théorème de Pascal

Toute variation de pression en un point d'un liquide au repos est transmise intégralement à tous les autres points du liquide.

2.5.2. Application : Principe de la presse hydraulique

Soit le schéma de principe d'une presse hydraulique (Fig.2.3). On y produit une force considérable à partir d'une force relativement peu importante, en considérant la surface d'un piston à la sortie 2 plus large que celui à l'entrée 1.

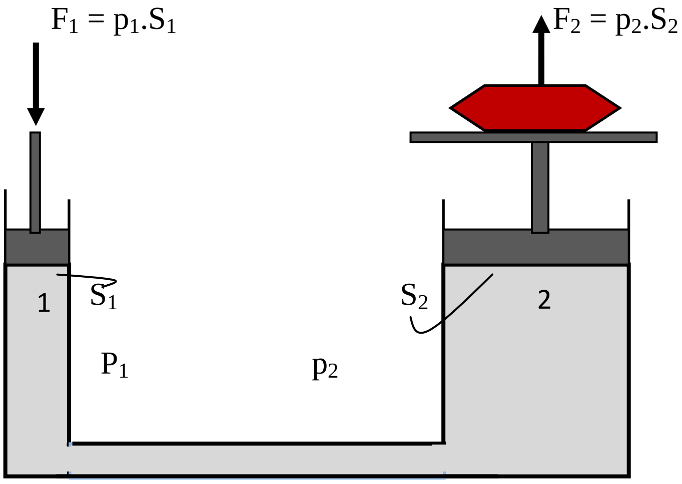


Figure.2.3 : Principe d'une presse hydraulique

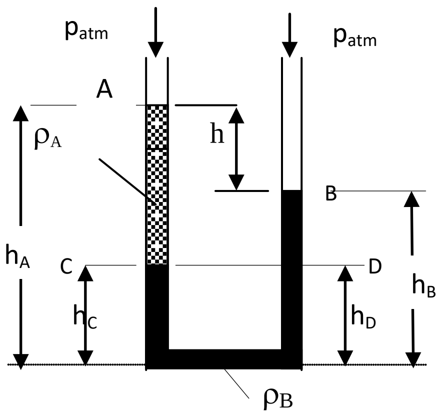
Lorsque les deux pistons 1 et 2 sont sur le même niveau, on a : $p_1=p_2$

Soit : $F_1=p_1.S_1$ et $F_2=p_2.S_2$ donc : $P_1=\frac{F_1}{S_1}$ $P_2=\frac{F_2}{S_2}$

$p_1=p_2$ donc : $\frac{F_1}{S_1}=\frac{F_2}{S_2}$ d'où : $\frac{F_2}{F_1}=\frac{S_2}{S_1}$ Si $S_2 \gg S_1$ $F_2 \gg F_1$

2.5.3. Equilibre de deux fluides non miscibles

Un tube en U rempli d'un liquide de masse volumique (ρ_B), si dans l'une des branches un autre liquide non miscible au premier et de masse volumique (ρ_A) est versé, il est observé une dénivellation $h=(h_A-h_B)$ entre les deux liquides. Les deux surfaces libres étant à la pression atmosphérique. D'après le principe de Pascal, il est possible d'écrire les équations suivantes :



$$\left.\begin{array}{l} p_D = p_{atm} + \rho_B\, g\, (h_B-h_D) \\ p_C = p_{atm} + \rho_A\, g\, (h_A-h_C) \end{array}\right\} \Longrightarrow p_{atm} + \rho_B\, g\, (h_B-h_D) = p_{atm} + \rho_A\, g\, (h_A-h_C)$$

et puisque $h_D = h_C$ (même plan horizontal d'un même fluide) $\Longrightarrow \rho_B\, g\, (h_B-h_C) = \rho_A\, g\, (h_A-h_C)$

$$\boxed{\rho_A = \rho_B \frac{(h_B - h_C)}{(h_A - h_C)}} \tag{2.7}$$

La simple mesure des hauteurs des deux fluides permet de déterminer la masse volumique d'un fluide. De même ce concept est utilisé pour la masure des pressions avec les manomètres à colonne de liquide ou manomètre différentiel.

2.6. Principe d'Archimède

Si l'on examine le comportement d'un cylindre de longueur L et de section S, immergé dans un fluide de masse volumique ρ dans le champ de pesanteur terrestre, ce cylindre est soumis à plusieurs forces :

- des forces radiales de pression qui s'exercent sur la paroi verticale et qui sont diamétralement opposées et s'annulent deux à deux (f et f')
- sur la surface inférieure s'exerce une force verticale normale à S, dirigée vers le haut et d'intensité $F_2 = p_2.S$.
- sur la surface supérieure s'exerce une force verticale normale à S dirigée vers le bas et d'intensité $F_1 = p_1.S$

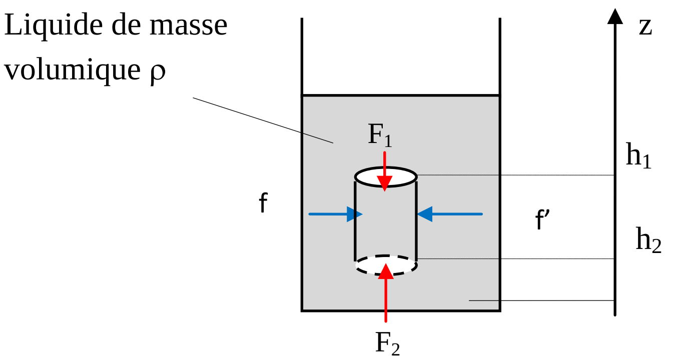


Figure 2.4 :Poussée d'Archimède cylindre immergé

La poussée d'Archimède est la résultante de toutes ces forces. Si ces forces sont projetées sur l'axe Oz, la résultante suivante est obtenue :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_1} = (p_2-p_1).S = (h_2 - h_1)\ \rho\ g\ S = \rho V\ g$$

Puisque (h_2-h_1) n'est autre que la hauteur du cylindre donc : $\boxed{\sum \overrightarrow{F} = \rho.V.g}$ (2.8)

La poussée d'Archimède est dirigée dans le sens inverse du champ de pesanteur et s'annonce de la façon suivante : « Tout corps totalement immergé dans un liquide est soumis à une poussée dirigée du bas vers le haut et égale au poids du liquide déplacé, c'est-à-dire correspondant au volume du corps immergé »

Le comportement d'un corps immergé dans un fluide au repos ; soumis seulement aux forces de pression et de pesanteur, est donné par le sens du vecteur poids apparent, défini par la relation, en projetons sur l'axe Oh ; on obtient : $F_{app} = -m\ g + F_A$ dans laquelle F_{app}, mg et F_A représentent respectivement le poids apparent, le poids réel et la poussée d'Archimède. Dans la pratique, trois cas peuvent se présenter, si :

$F_A > 0$, le corps s'élève dans le fluide et cette ascension aboutit à une flottaison du solide.

$F_A = 0$, le corps est immobile dans le fluide, puisque la poussée d'Archimède équilibre le poids du solide.

$F_A < 0$, le corps s'enfonce dans le fluide, c'est le type de chute qui est rencontrée dans la décantation des solides.

2.7. Equations de l'hydrostatique

Considérons un réservoir plein de liquide accéléré en bloc dans une direction quelconque dont la surface libre est exposée à la pression atmosphérique, et prenons un élément de fluide de volume (dxdydz). L'élément de fluide est en équilibre statique sous l'influence de trois forces de volume et de six forces de pression hydrostatique. Les forces qui agissent sur cet élément de volume (dxdydz) dans la direction z sont :

1. Les forces de volume : ρZ (dxdydz)
2. Les forces de surface (de pression) : $(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2})$ dxdy et $(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2})$ dxdy

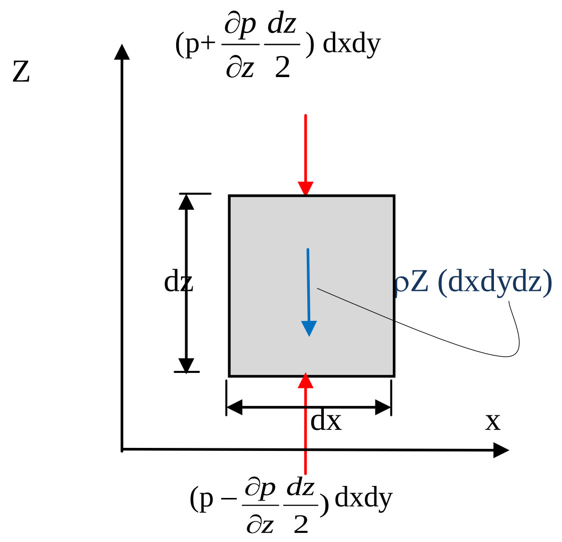


Figure (2.5) : Forces agissant sur un élément de fluide, de volume (dxdydz) dans la direction z

La condition d'équilibre des forces selon z est :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2})\,dxdy - (p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2})\,dxdy + \rho Z(dxdydz) = 0 \qquad \text{d'où : } -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z = 0 \qquad (2.9)$$

De la même façon, on obtient les équations d'équilibre dans les autres directions x et y :

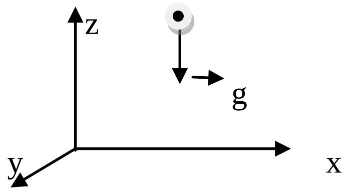
$$\begin{cases} \rho X - \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \rho Y - \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \rho Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\underbrace{\rho\vec{F}}_{1} - \underbrace{grad\vec{p}}_{2} = 0} \qquad (2.10)$$

1. Force de volume par volume unitaire 2. Force de pression par volume unitaire

Les équations (2.6) sont appelées équations fondamentales de l'hydrostatique (équations d'Euler). Ces équations montrent que la pression hydrostatique en un point donné d'un fluide au repos dépend des coordonnées du point dans le volume du liquide et de la masse volumique, c'est-à-dire p = f(x, y, z, ρ).

2.8. Hydrostatique d'un liquide incompressible dans le champ de pesanteur

Dans le cas où la force massique est seulement la force de pesanteur, les composantes de la force massique unitaire sont :



$X=0 \quad Y=0 \quad Z=-g$

$$\rho g - \frac{dp}{dz} = 0 \; ; \quad dp = -\rho g\, dz$$

d'où $$\boxed{p(z) = -\rho g z + C} \tag{2.11}$$

2.9. Hydrostatique dans d'autres champs de force

Dans certains cas particuliers, d'autres champs sont à prendre en considération. Les équations fondamentales générales de l'hydrodynamique sont valables s'il n'y a pas de mouvement relatif entre les particules de fluide, elles sont aussi valables si le fluide est accéléré en bloc comme un corps solide.
On s'intéresse aux deux cas suivants :

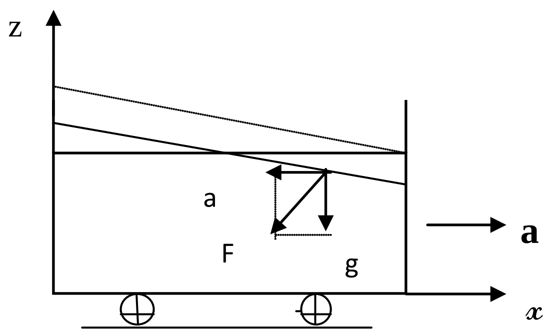
1. Cas d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur avec accélération constante
2. Cas d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur avec rotation uniforme

2.9.1. Champ de pesanteur avec accélération horizontale constante

Soit un liquide homogène soumis à une accélération horizontale constante **a**, donc :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$ ainsi les équations (2.6) deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\rho a \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \tag{2.8}$$



La pression est fonction uniquement de x et de z

La variation totale de la pression est définie comme suit : $p(x, y) = -\rho a\, x + f(z)$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = f'(z) \qquad f(z) = -\rho g z + C$$

D'où la pression est :

$$\boxed{p(x, z) = -\rho a\, x - \rho g z + C} \tag{2.12}$$

On divise les deux termes de l'équation (2.9) par ($\varpi = \rho g$), on obtient :

$$\frac{p}{\varpi} + z + \frac{a}{g} x = C \tag{2.13}$$

C'est l'équation fondamentale de l'hydrostatique dans le champ de pesanteur avec accélération horizontale constante.

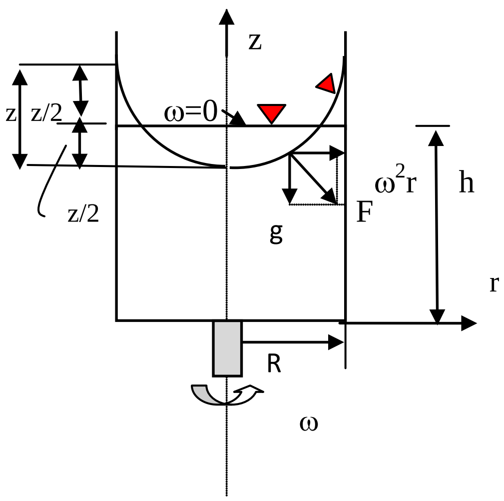
Les lignes isobares (lignes d'égale pression) sont des lignes dont tous les points sont soumis à la même pression, p= Cte et dp = 0. Donc l'équation (2.10) peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{z = -\frac{a}{g} x + C} \tag{2.14}$$

C'est l'équation générale des lignes d'égales pression qui sont des droites de (-a/g) orthogonales au vecteur $\vec{F}$

2.9.2. Champ de pesanteur avec rotation uniforme

Considérons un réservoir cylindrique qui tourne à une vitesse angulaire ω constante.



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 r \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho\omega^2 r && \text{(a)} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 && \text{(b)} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g && \text{(c)} \end{aligned}\right\} \quad (2.15)$$

$$p(r, z) = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} + f(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad = \quad f'(z) \quad \text{d'où} \quad f(z) = -\rho g z + C$$

$$\boxed{p(r,z) = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} - \rho g z + C} \tag{2.16}$$

On divise les deux termes de l'équation (2.13) par ($\overline{\omega} = \rho g$), on obtient :

$$\frac{p}{\varpi} + z - \frac{\omega^2}{2g} r^2 = C \tag{2.17}$$

C'est l'équation fondamentale de l'hydrostatique dans le champ de pesanteur avec rotation uniforme

Les lignes isobares (lignes d'égale pression) sont des lignes dont tous les points sont soumis à la même pression, p= Cte et dp = 0. Donc l'équation (2.14) peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C} \tag{2.18}$$

C'est l'équation générale des lignes d'égale pression qui sont des paraboles de révolution symétriques par rapport à l'axe de rotation, orthogonales au vecteur $\vec{F}$.

2.10. Forces hydrostatiques s'exerçant sur les surfaces

Force exercée par un liquide sur une surface plane

La force F exercée par un liquide sur une surface plane S est égale au produit du poids spécifique (ρg) du liquide, par la profondeur h_g du centre de gravité de la surface et par la surface. L'équation est :

$$\boxed{F = (\rho g) h_g \, S} \tag{2.19}$$

Force exprimée en N = (N/m^3). (m). (m^2)

On notera que le produit du poids spécifique (ρg) par la profondeur du centre de gravité de la surface donne l'intensité de la pression au centre de gravité de cette surface.

La ligne d'action de la force passe par le centre de pression qu'on peut localiser en appliquant la formule :

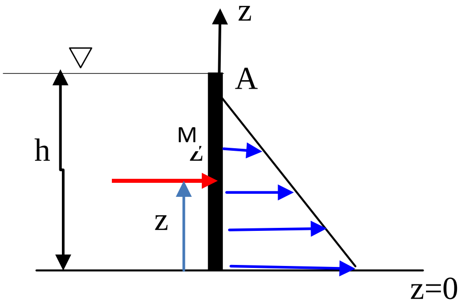
$$y_{cp} = \frac{I_{cg}}{y_{cg} S} + y_{cg} \tag{2.20}$$

Où I_{cg} est le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe du centre de gravité

La pression exercée par une force F agissant perpendiculairement sur une surface S est :

$$P = \frac{F}{S} = \frac{Force}{Surface} \Rightarrow F = p.S$$

a) Surface plane verticale



La force de pression d'un fluide au repos sur l'élément de surface dS est

La résultante sur la surface S est : $F = \int_s p_{eff}\, dS$

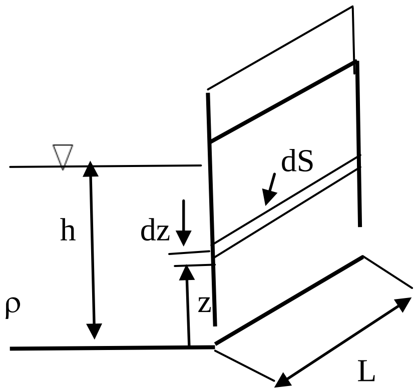
La pression effective en un point quelconque M de la surface est : peff = ρ g (h-z)

en z=0 $p_{eff} = \rho\, g\, h$ en z = h $p_{eff} = 0$ $F = \int_s \rho\, g\, (h\text{-}z)\, dS$

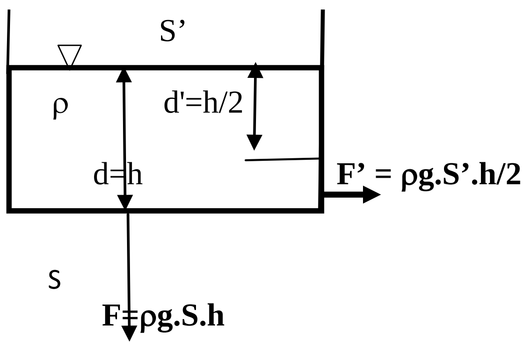
dS = L.dz (la pression varie seulement suivant z)

$$F = \rho g L \int_0^h (h - z)dz = \rho g L \left[hz - \frac{z^2}{2} \right]_0^h = \rho g \frac{h^2}{2} \qquad \text{et} \quad S = hL \ \text{d'où}$$

$$\boxed{F = \rho g S \frac{h}{2}} \tag{2.21}$$



b)Cas général (formule pratique)



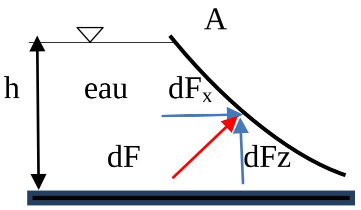
F =ρg.S'.h/2

En général la résultante des forces de pression sur une surface plane s'écrit : $F = \rho g S d$

S: surface mouillée considérée (en contact avec le liquide)

d : distance verticale entre le centre de gravité de S et la surface libre
Pour une paroi horizontale : d = h
Pour une paroi verticale : d = h/2

c) Surface courbe



$F_x = F_H$ ⟹ composante horizontale

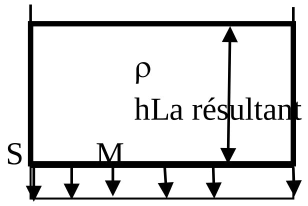
$F_Z = F_V$ ⟹ composante verticale

dFx = dF. Sin θ = p. dS sin θ dFz = dF cos θ = p.dS cos θ

dFx = ρ g hc .S sin θ dF_Z = ρ g hc. S cos θ

$$\boxed{F = \sqrt{F_X^2 + F_Z^2}}$$

d) Force de pression sur une surface horizontale (fond d'un réservoir)



La pression en un point quelconque M de la surface de base du réservoir est : p_{eff} = ρ g h

La résultant des forces de pression sur la surface S est :

F = ∫ p_{eff}.dS = ∫ρ g h dS = ρ g h ∫dS= **ρ g h S**

e) Point d'application de la résultante des forces de pression

On calcule le moment des forces élémentaires de pression par rapport à un point ou une droite. Prenons le cas de la surface verticale, et calculons le moment des forces élémentaires de pression par rapport à la droite Δ.

Δ étant l'intersection de la surface S et la surface libre du liquide.

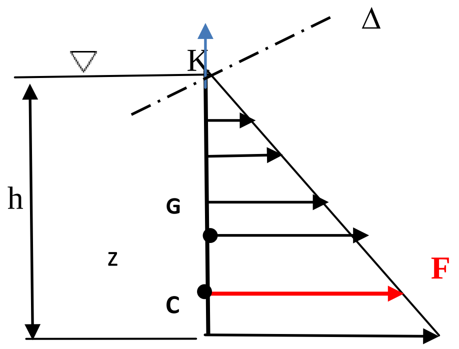
dF= p_{eff}.ds ; avec p_{eff} = ρg (h-z) et ds = L.dz

dF =ρg L (h-z) dz et F = ½ ρ g L h^2

$dm/_\Delta$ = dF. (h-z) = ρ g L (h-z). (h-z) dz

$m/_\Delta = \int dm/_\Delta = \rho\, g\, L \,.\int (h-z)^2\, dz = -\,1/3\, \rho\, g\, L\, (h-z)^3]_0^h = 1/3\, \rho\, g\, L\, h^3$

D'autre part : $m/_\Delta$ = KC. F = KC ½ ρ g L h^2 = 1/3 ρ g L h^3 **KC= 2/3 h**



2.10. Exercices corrigés :

1. Une brique de dimension (20x10x5) cm pèse 2.5 kg. Quelle pression exerce-t-elle sur le sol suivant la face sur laquelle on la pose ?

Solution

Face 1 : $p_1 = \frac{F}{S_1} = \frac{mg}{S_1} = \frac{2.5*9.81}{0.2*0.1} = 1226.25\ \frac{N}{m^2}$

Face 2 : $p_2 = \frac{F}{S_2} = \frac{mg}{S_2} = \frac{2.5*9.81}{0.2*0.05} = 2425.50\ \frac{N}{m^2}$

Face 3 : $p_3 = \frac{F}{S_3} = \frac{mg}{S_3} = \frac{2.5*9.81}{0.1*0.05} = 4905.00\ \frac{N}{m^2}$

2. On enfonce une punaise métallique dans une planche en exerçant sur sa tête une force de 3 kgf avec le pouce ; la tête a 1cm de diamètre et la pointe 0.5mm
Quelles sont les pressions exercées sur le pouce ensuite sur la planche ?

Solution
Pression sur le pouce :

$$P= \frac{F}{S} = \frac{3*9.81}{\pi \frac{(10^{-2})^2}{4}} = 3.8.10^{5}\ Pa$$

Pression sur la planche :

$$P= \frac{F}{S} = \frac{3*9.81}{\pi \frac{(0.5^{-3})^2}{4}} = 1530.10^{5}\ Pa$$

La pression augmente lorsque la surface pressée est petite