Chapitre IV : Dynamique des fluides réels incompressibles

4.1. Ecoulement laminaire et turbulent

La science de la turbulence a commencé vers la fin du XIX^e siècle quand l'anglais Osborne Reynolds a pu observer la transition du régime laminaire au régime turbulent. Dans un tuyau, si l'eau passe lentement, on aura des filets bien réguliers c'est-à-dire un écoulement laminaire. Si cette eau va trop vite, il apparaît un très grand nombre de tourbillons et les pertes de charges dans le tuyau vont être très différentes.

4.1.1. Régimes d'écoulement

Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en a dimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit de la manière suivante :

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{V.D}{\upsilon} = \frac{V.D.\rho}{\mu}} \qquad (4.1)$$

Avec :
D : Diamètre intérieur de la conduite en (m)
V : Vitesse moyenne d'écoulement en (m/s)
ρ : Masse volumique du fluide en (kg/m^3)
μ : Viscosité dynamique en (Pa.s)
ν : Viscosité cinématique en (m^2/s)

En fonction des nombres de Reynolds croissants, on distingue quatre régimes principaux : régime de Stokes, régime laminaire, régime transitoire, régime turbulent.

L'écoulement de Stokes correspond aux très faibles valeurs du Reynolds (inférieures à 1). Dans ce cas les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables, les forces visqueuses et les forces de pression s'équilibrent. Cette notion correspond au domaine de la micro fluidique. Pour des valeurs plus élevées, les forces d'inertie entrent en jeu : c'est le domaine de la dynamique des fluides.

On observe d'abord un écoulement laminaire avec des lignes de courant bien identifiées. Dans ce type d'écoulement l'effet de la viscosité s'atténue au fur et à mesure que l'on s'éloigne des parois, les vitesses du fluide tendant à s'homogénéiser. Il est alors souvent commode de considérer que l'approximation du fluide parfait (non visqueux) est suffisante hors d'une zone proche d'une paroi, appelée couche limite.

À partir d'un certain Reynolds se produit une transition qui fait apparaître des instabilités dues à l'amplification des perturbations. La valeur du Reynolds de transition et la nature des instabilités dépendent essentiellement du type d'écoulement considéré.

Ensuite, les instabilités augmentent au point de donner naissance à un phénomène chaotique dans lequel il est difficile de voir une organisation : c'est la turbulence

Soit un courant d'eau qui circule dans une conduite à section circulaire. On introduit un filet de colorant dans l'axe de cette conduite. Suivant la vitesse d'écoulement de l'eau, on peut observer les phénomènes suivants :

a) **Régime laminaire :**le fluide s'écoule en couches cylindriques coaxiales ayant pour axe le centre de la conduite.

b) **Régime transitoire :** c'est une transition entre le régime laminaire et le régime turbulent.

c) **Régime turbulent :** Formation de mouvement tourbillonnant dans le fluide. Cette expérience est faite par Reynolds en faisant varier le diamètre de la conduite, la température, le débit, etc… pour divers fluides.

- Si$Re < 2000$, le régime est laminaire.
- Si $Re > 3000$, le régime est turbulent.
- Si$2000 < Re < 3000$, le régime est transitoire.

4.1.2. Signification physique du nombre de Reynolds

Le fluide est globalement soumis à 2 forces :

- Celle que subirait le fluide s'il était parfait :

$$F_{inertie} = m.a = \rho.V \frac{dv}{dt} \qquad (4.2)$$

- Celle qui résulte des frottements :

$$F_{frot} = \mu.S \frac{dv}{dx} \qquad (4.3)$$

Le rapport de ces deux forces $$\mathrm{Re} = \frac{F_{inertie}}{F_{frot}} = \frac{\rho V \frac{dv}{dt}}{\mu S \frac{dv}{dx}} = \frac{V.L}{\upsilon} \qquad (4.4)$$

L est une longueur caractéristique égale à D pour une conduite circulaire

Ainsi, si Re est très grand, il y a prédominance des forces d'inertie, par contre, aux faibles valeurs, c'est la force de frottement qui domaine

La distribution des vitesses est une « parabole aplatie » : $0.75 \leq V_{moy} \leq 0.85\ V_{max}$
Les particules circulent dans toutes les directions (=aléatoire).
La variation de quantité de mouvement est prépondérante.
Au voisinage de la paroi, l'écoulement est laminaire : couche limite.
Le régime turbulent est le plus fréquemment rencontré : il est permanent en moyenne.

4.1.3. Théorème de Bernoulli pour fluides réels

Lorsque le fluide est réel, la viscosité est non nulle, alors au cours du déplacement du fluide, les différentes couches frottent les unes contre les autres et contre la paroi qui n'est pas parfaitement lisse d'où il y a une perte sous forme de dégagement d'énergie ; cette perte appelée, **perte de charge**.

La relation de Bernoulli peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+\Delta H_{1-2} \qquad (4.5)$$

ΔH_{1-2} : C'est l'ensemble des pertes de charge entre (1) et (2) exprimée en hauteur.

Les pertes de charge peuvent être exprimées en pression :

$\Delta p_{1-2}= \rho.\, g.\Delta H_{1-2}$(4.6)

4.1.4. Ecoulement de Poiseuille

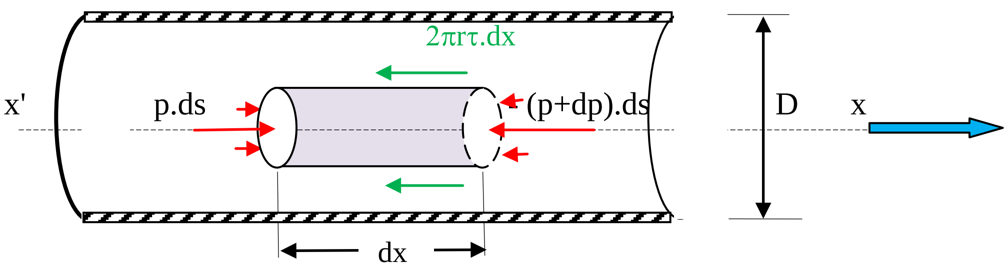
Nous adoptons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Fluide incompressible
- Ecoulement laminaire
- Symétrie de révolution autour de l'axe r = 0
- Ecoulement permanent
- Ecoulement induit par gradient de pression constant ΔP établi entre l'entrée et la sortie de la conduite de longueur L.

a) Répartition des vitesses à l'intérieur d'une conduite horizontale de section constante

Soit l'axe (O x) confondu avec l'axe d'une conduite de diamètre D=2.R, (O y) et (O z) sont quelconques perpendiculaire à (O x). Figure (4.5)

L'écoulement étant laminaire, les lignes de courant sont, par raison de symétrie parallèle à (Ox). Les composantes v et w de la vitesse sont nulles : v = w =0 ; ainsi l'écoulement étant aussi stationnaire.



A l'équilibre suivant l'axe x'x la somme des forces est nulle.
Les forces qui s'exercent sur cet élément de fluide sont les forces de pression à l'amont et à l'aval sur les surfaces latérales et les force de frottement dues à la viscosité du fluide.On a aussi supposé que l'effet de la pesanteur est négligeable devant la variation de pression dans la direction des x qui est horizontal.

$$p.\pi r^2-(p+dp).\pi r^2-\tau.2\pi\, r\, dx = 0 \Longrightarrow -dp\, \pi\, r^2-\tau\, 2\pi\, r\, dx = 0$$

$$-dp.\, r -\tau\, 2\, dx = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tau=-\frac{dp}{dx}.\frac{r}{2}} \qquad (4.7)$$

Evidemment t est égal à 0 au centre (r=0) et sur la paroi (r=R) $\tau=-\frac{dp}{dx}.\frac{R}{2}$

La contrainte de cisaillement τ (r) entre deux couches de fluide en mouvement est donnée par

l'équation de Newton : $\tau = \mu.\dfrac{du}{dy}$ puisque :dy= - dr (4.8)

L'égalité de (4.7) et (4.8) on obtient : $\tau = \mu.\dfrac{du}{dy} = -\mu.\dfrac{du}{dr} = -\dfrac{r}{2}.\dfrac{dp}{dx}$

D'où : $\dfrac{du}{dr} = \dfrac{r}{2\mu}.(\dfrac{dp}{dx})$ en intégrant cette équation par rapport à r, on obtient :

$$u(r) = \frac{r^2}{4\mu}.\frac{dp}{dx} + C \qquad (4.9)$$

Pour déterminer la constante C, on sait que pour r = R (adhérence du fluide à la paroi), la vitesse est nulle. $u(r) = 0 = \dfrac{R^2}{4\mu}.\dfrac{dp}{dx} + C$

$C = -\dfrac{R^2}{4\mu}.\dfrac{dp}{dx}$ on remplace la constante C dans l'équation (4.9)

$$u(r) = \frac{r^2}{4\mu}.\frac{dp}{dx} - \frac{R^2}{4\mu}.\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{4\mu}.\frac{dp}{dx}(R^2 - r^2)$$

Par suite la répartition de la vitesse à l'intérieur du cylindre est donnée par l'expression suivante :

On pose : $a = -\dfrac{dp}{dx}$

$$\boxed{u(r) = \frac{a}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right)}$$

En posant r = o (axe de la conduite) : on trouve : $\boxed{u(r) = \dfrac{aR^2}{4\mu} = u_{max}}$ (4.10)

$$u(r) = \underbrace{\frac{a}{4\mu}R^2}_{V_{max}}\left(1 - \frac{r^2}{R_2}\right) = u_{max}.R^2\left(1 - \frac{r^2}{R_2}\right)$$

Expression qui représente un paraboloïde de révolution ayant son sommet sur l'axe de la conduite. Figure (4.5).

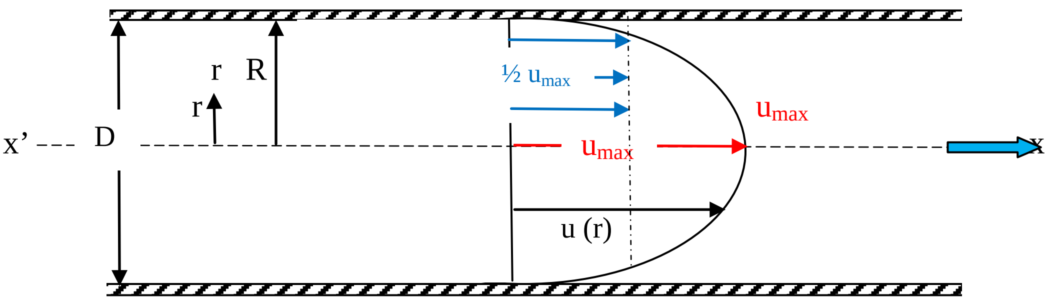


Figure (4.5) : Répartition des vitesses dans la conduite circulaire

De même on peut déterminer la répartition des pressions le long du tube :

On a $\frac{dPm}{dx} = -a$ (4.11)

Soit : $p^*(x) = -ax + p_0^*$

p_0^* : Étant une constante d'intégration.

La pression motrice décroît donc linéairement le long du tube, tout en restant constante dans une même section droite.

On peut écrire : $p_1^* - p_2^* = aL$

L : La distance entre les deux points 1et 2 sur lesquels s'exerce la pression

$\Delta p_m = p_{m1} - p_{m2}$ est la différence de pression motrice entre l'entrée et la sortie.

Ou encore : $a = \frac{\Delta P_m}{L}$ (4.12)

b) Calcul du débit volumique : formule de Poiseuille

Le débit du fluide est donné par l'intégrale (débit en volume) :

$$q_v = \int_0^R 2\pi r u(r)\,dr = \frac{2\pi a}{4\mu}\int_0^R r(R^2 - r^2)dr = \frac{\pi a R^4}{8\mu} = \frac{\pi a D^4}{128\mu}$$

En remplaçant **a** par sa valeur : $a = \frac{\Delta p_m}{L}$, il vient :

$$\boxed{q_v = \frac{\pi R^4}{8\mu L}\Delta P_m = \frac{\pi D^4}{128\mu L}\Delta P_m} \quad (4.13)$$

Cette dernière formule traduit la loi de Hagen Poiseuille : le débit est proportionnel à la différence des pressions motrices appliquées aux extrémités du tube, et à la puissance 4 de son diamètre.

c) Vitesse débitante (vitesse moyenne) :

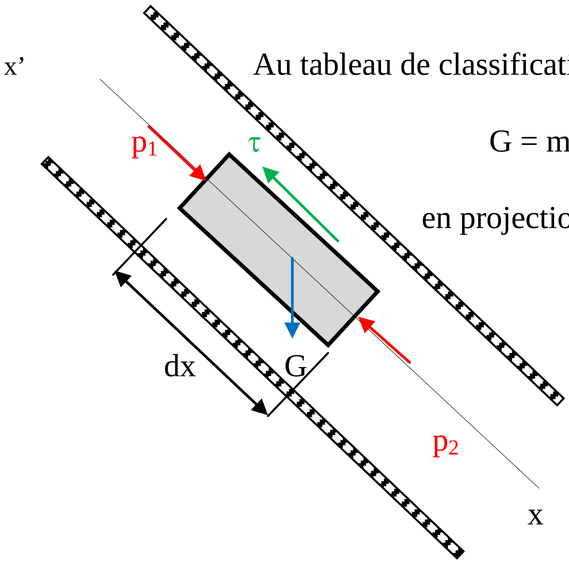
La vitesse débitante est par définition la vitesse moyenne calculée sur la section droite :

$$u_{moy} = \frac{q_v}{S} = \frac{1}{\pi R^2}\frac{\pi a R^4}{8\mu} \quad \boxed{u_{moy} = \frac{aR^2}{8\mu} = \frac{u_{\max}}{2} = -\frac{dp}{dx}.\frac{R^2}{8\mu}} \quad (4.14)$$

La vitesse maximale de l'écoulement laminaire dans un tube circulaire est exactement le double de la vitesse débitante.

d) Cas d'une conduite inclinée de section droite

Soit une canalisation inclinée, dans laquelle existe un écoulement. Etudions cet écoulement dans le cas d'un régime permanent. Pour cela, isolons une particule de fluide. Afin de respecter la géométrie du problème, la particule de fluide est cylindrique, de rayon « r » et de longueur « dx ». Cette particule de fluide est soumise : • aux forces pressantes • à son poids • à la résultante des forces de frottement



Au tableau de classification des forces, il faut ajouter le poids de l'élément

$$G = mg = \rho\, V\, g = \pi r^2 \varpi\, dx$$

en projection sur l'axe x : $\pi r^2 \varpi\, dx \sin\alpha = -\pi r^2 \varpi\, dz$

L'équation d'équilibre devient alors :

$p.\pi r^2 - (p+dp).\pi r^2 - \tau.2\pi\, r\, dx - \pi\, r^2 \varpi\, dz = 0$

$\pi\, r^2\, (dp + \varpi\, dz) = -2\pi\, r\, dx\, \tau \Longrightarrow r\, (dp + \varpi\, dz) = -2\, dx\, \tau$

$$\boxed{\tau = -\frac{r}{2}.\frac{(dp + \varpi dz)}{dx} = -\frac{r}{2}.\frac{dp_m}{dx}} \qquad (4.15)$$

P_m : pression motrice $p_m = p + \varpi z$

4.1.5. Coefficient de perte de charge

Dans le cas de l'écoulement permanent d'un fluide dans une conduite cylindrique la perte de pression motrice est proportionnelle à la longueur de la conduite considérée. Il est donc naturel d'introduire un coefficient de perte de pression linéique tel que λ.

Des considérations dimensionnelles amènent à écrire la différence de pression traduisant la perte de charge dans une conduite cylindrique sous la forme générale :

$$\boxed{\Delta P_L = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{V_m^2}{2}} \qquad (4.16)$$

λ : est un coefficient sans dimension, appelé coefficient de perte de charge linéaire.

4.1.6. Pertes de charge : Elles dépendent de :

- La viscosité du fluide.
- La nature de l'écoulement.
- La géométrie de la conduite.

Les pertes de charge sont à l'origine :

- ➢ Des frottements entre les différentes couches de liquide et des frottements entre le liquide et la paroi interne de la conduite le long de l'écoulement : ce sont les pertes de charge régulières (linéaires)
- ➢ De la résistance à l'écoulement provoqués par les accidents de parcours (vannes, coudes, etc…) ; ce sont les pertes de charge singulières ou locales.

a). Pertes de charge régulières : (linéaires)

Ce genre de perte est causé par le frottement intérieur qui se produit dans les liquides ; ils se rencontrent dans les tuyaux lisses aussi bien dans les tuyaux rugueux entre deux points séparés par une longueur L dans une conduite de diamètre D. La perte de charge entre ces deux points est de la forme :

$$\boxed{\Delta H_L = \lambda \frac{L}{D}.\frac{V^2}{2g}} \qquad \boxed{\Delta p = \lambda \frac{L}{D}.\frac{\rho}{2}.V^2} \qquad (4.17)$$

v : vitesse moyenne du fluide (m/s)

λ : coefficient de perte de charge régulière (linéaire), coefficient sans dimension

L : longueur totale de la conduite (m)

D : diamètre intérieur de la conduite (m)

ρ : masse volumique du liquide (kg/m^3)

Pour déterminer le coefficient de perte de charge régulièreλ, on fait souvent appel à des formules empiriques tel que :

- Si l'écoulement est laminaire, Re<2000, on utilise la loi de Poiseuille : $\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$ quel que soit l'état de la surface
- Si l'écoulement est turbulent, on a deux cas :

1. Turbulent lisse : 3000 <Re < 10^{5}on utilise la loi de Blasius : $\lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\text{Re}}}$ formule dans laquelle la rugosité n'intervient pas, on parle d'écoulement turbulent lisse.
2. Turbulent rugueux : Re > 10^5, on utilise la formule de Colebrook : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log(\frac{\varepsilon}{3.71D} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}}$ Quand ε tend vers zéro, on retrouve l'équation du régime turbulent lisse, alors que lorsque ε tend vers l'infini, on obtient le régime turbulent rugueux. Il est souvent commode d'utiliser une représentation graphique de λ en fonction de Re, paramétrée par la valeur du rapport ε/d, c'est le diagramme de Moody (Fig.4.8)

b. Pertes de charge singulières : (accidentelles)

Les pertes de charge singulières sont essentiellement dues aux accidents de canalisation (coude, élargissement, rétrécissement, té, vanne…) c'est à dire toute modification d'un trajet rectiligne. Dans tous les cas ci-après, il résulte du passage du liquide au point singulier une perte de charge donnée par la formule :

$$\boxed{\Delta H_S = \sum K_i \frac{V^2}{2g}} \qquad (4.18)$$

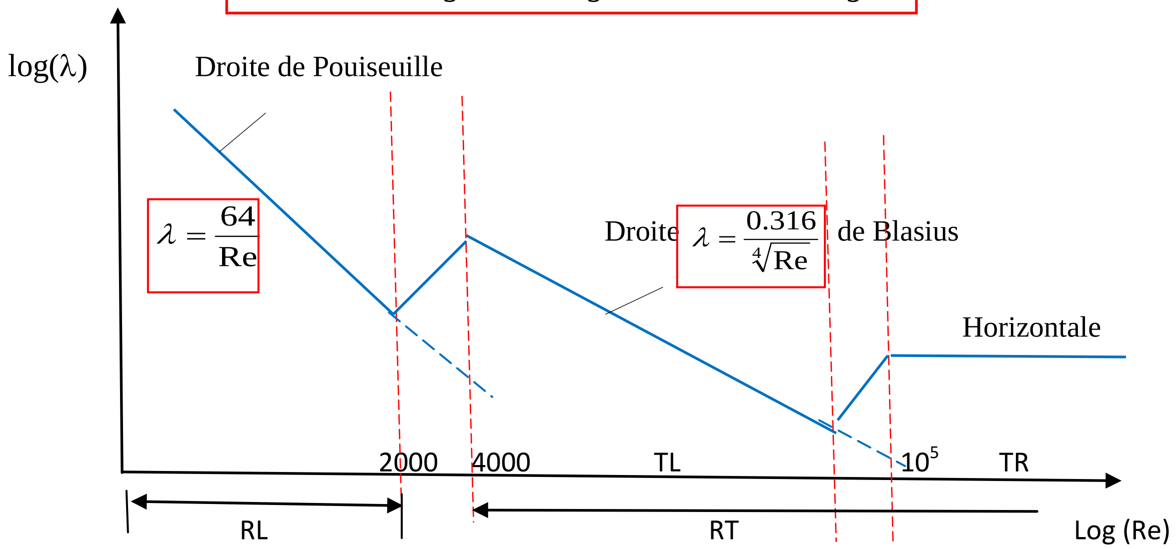
Σ K_i : Coefficients sans dimension dépendant de la nature du point singulier dont il s'agit.

A noter que (ρV^2/2) n'est autre que la pression dynamique du fluide

c. Pertes de charge totales :

Lorsque des éléments de conduites (tronçons rectilignes et singularités) sont placés en série, ils sont tous traversés par le même débit et la perte de charge totale apparaît comme la somme de toutes les pertes de charge (régulières, et singulières) : $\Delta H_t = \Delta H_L + \Delta H_S$

$$\boxed{\Delta H_T = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} + \sum k_i \cdot \frac{V^2}{2g} = (\lambda \frac{L}{D} + \sum K_i) \frac{V^2}{2g}} \quad (4.19)$$



RL : Régime Laminaire RT : Régime Turbulent (Turbulent Lisse- Turbulent Rugueux)

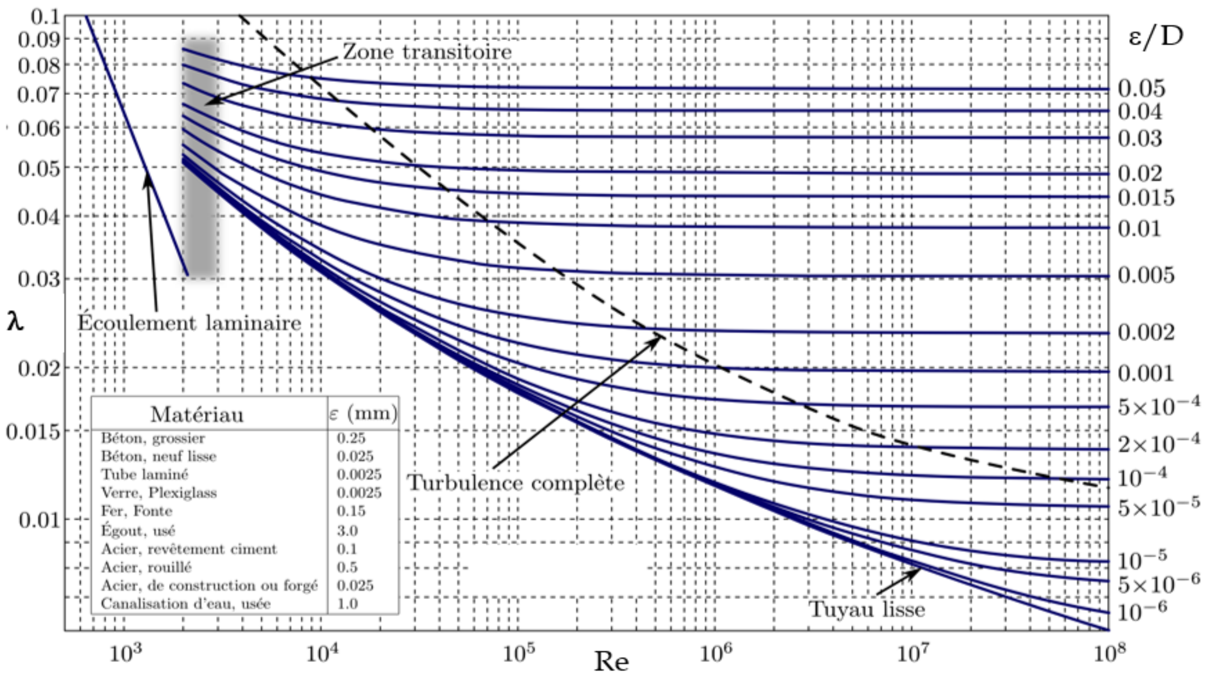


Figure (4.8) : Diagramme de *Moody*

Expériences de Nikuradse (1932)

En 1932, Nikuradsé publia ses travaux au cours desquels il étudia l'influence de la rugosité sur le profil des vitesses, dans des écoulements en conduite cylindrique. Il réalisait artificiellement les différentes rugosités en revêtant la paroi intérieure de ses conduites, de grains de sable calibrés par tamisage. Ces résultats sont résumés sur la courbe de la figure 4.7

Tableau 4.1 : Quelques exemples de rugosités absolues

Matière	**Etat**	**Rugosité absolue ε (mm)**
Tube étiré (verre, cuivre, laiton)		< 0.001
Tube industriel en laiton		0.025
Tube en acier laminé	neuf rouillé bitumé	0.05 $0.15 < \varepsilon < 0.25$ 0.015
Tuyau en acier soudé	neuf rouillé	$0.03 < \varepsilon < 0.1$ 0.4
Tuyau en fonte moulé	neuf rouillé bitumé	0.25 $1 < \varepsilon < 1.25$ 0.1
Tuyau en ciment	brut lissé	$1 < \varepsilon < 3$ $0.3 < \varepsilon < 0.8$

Remarque :

Pour diminuer l'ensemble des pertes de charge sans une canalisation et les couts de fonctionnement dus aux pompes il faut :

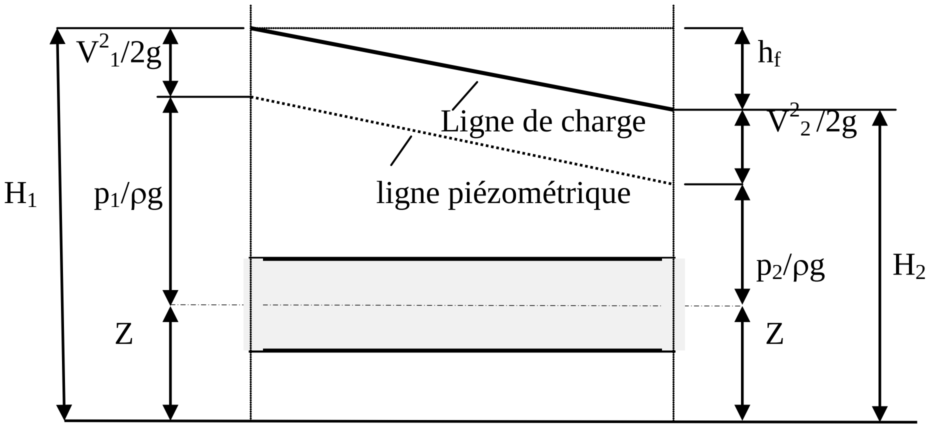
- Diminuer la longueur de la canalisation
- Diminuer le nombre d'accidents sur la canalisation
- Diminuer le débit de circulation
- Augmenter de diamètre de la canalisation
- Faire circuler des liquides le moins visqueux possible
- Utiliser des matériaux de faible rugosité

Pour réduire les pertes de charge singulières, on doit éviter les angles vifs et les changements brusques de section.

Théorème de Bernoulli généralisé

L'équation de Bernoulli exposée à la section précédente peut être appliquée pour un tronçon de conduite très court sur lequel on peut supposer que les pertes de charge par frottement sont faibles. D'une manière générale, les pertes de charge ne peuvent pas être négligées et il faut par conséquent généraliser l'équation (6). Désignons par h_f la perte de charge par frottement par unité de poids de liquide entre les points 1 et 2 (fig. 2.3). L'équation de Bernoulli corrigée se présente sous la forme suivante :

$$H_1 = H_2 + h_f \qquad (8)$$



Niveau de référence

Par ailleurs, dans tout système hydraulique, il existe un certain nombre de singularités qui produisent des pertes de charge locales par turbulence (coudes, vannes, changements de diamètre…). Afin de prendre en considération ces différentes pertes de charge hs, l'équation (8) se complète comme suit :

$$H_1 = H_2 + h_f + \sum h_S \qquad (9)$$

Finalement, la présence de pompes entre les points 1 et 2 fournit au système hydraulique une hauteur manométrique H_p alors que les turbines consomment une hauteur H_T, de telle sorte que l'équation 9 se généralise sous l'une des formes suivantes :

$$H_p + H_1 = H_2 + h_f + \Sigma hs \qquad \text{cas d'une pompe} \quad (9a)$$

$$H_1 = H_2 + h_f + \Sigma h_S + H_T \qquad \text{cas d'une turbine} \quad (9b)$$

H_1 est la charge initiale
H_p est la charge produite par une pompe,
H_2 est la charge finale
h_f est la charge perdue par frottement
Σhs est la charge perdue dans les singularités
H_T est la charge utile consommée par une turbine.

Soulignons encore que chacun des termes d'énergie dans les équations 9.a et 9.b est exprimé en hauteur par unité de poids du liquide. Pour trouver l'énergie fournie par la pompe Wp (joules) ou consommée par la turbine, il faut multiplier H_p ou H_T par le poids mg du liquide déplacé. Ainsi, pour la pompe :

$$W_p = mgH_p = \rho VgH_p$$

ρ est la masse volumique du liquide (kg/m^3)
V est le volume du liquide pompé (m^3)
g est l'accélération due à la gravité (m/s^2)

Comme V = t.Q on obtient :

Wp = ρg t QHp

Q est le débit de pompage (m^3/s),
t est la durée de pompage (s).

La puissance étant énergie/temps, la puissance de la pompe est donc :

$$P_P = \frac{W}{t} = \rho g Q H_P$$

Pour une turbine, on trouve d'une manière similaire :

$$P_T = \rho g Q H_T$$

4.1.7. Exercices corrigés

1. Du pétrole de viscosité μ=0.11 Pa.s et de densité 0.9 circule dans une conduite de longueur 1650m et de diamètre 25cm à un débit volumique 19.7 l/s.
Déterminer la viscosité cinématique du pétrole dans le système SI et le système CGS
Calculer la vitesse de l'écoulement et le débit massique
Calculer le nombre de Reynolds et en déduire la nature de l'écoulement
Déterminer le coefficient de perte de charge linéaire et calculer la perte de charge dans la conduite

Solution

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad \nu = \frac{0.11}{900} = 1{,}22.10^{-4} m^2/s = 1{,}22 St$$

$$V = \frac{4.19{,}7.10^{-3}}{\pi(0{,}25)^2} = 0{,}40 m/s$$

$Q_m = \rho.Qv = 0{,}9\ 10^3.19,\ 7.10^{-3} = 17{,}73$ kg/s

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{0{,}4.0{,}25}{1{,}22.10^{-4}} = 820$$

Puisque Re < Rec (2000) donc le régime est laminaire et λ se calcule par :

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{64}{820} = 0.078$$

$$\Delta H = \lambda \frac{LV^2}{2gD} = 0{,}078 \frac{1650.(0{,}40)^2}{2.9{,}81.0{,}25} = 4{,}2m$$

2. Déterminer la vitesse critique de l'écoulement de deux fluides dans une conduite de diamètre 15 cm (on suppose pour les deux cas que l'écoulement est laminaire Re =2000)

- Du pétrole de viscosité 1.42 cSt
- De l'eau de viscosité 1.16 cPo

Solution

$$\mathrm{Re}_c = \frac{V_c D}{\nu} \Longrightarrow V_c = \frac{\nu \, \mathrm{Re}_c}{D} \Longrightarrow V_c = \frac{1.42*10^{-6}*2000}{0.15} = 0.019 m/s$$

$$V_c = \frac{2000*1.16*10^{-3}}{0.15*1000} = 0.015 m/s$$