Table des matières

Introduction

Ce document notes de cours d'analyse numérique avec exercices corrigés recouvre le programme d'analyse numérique I de la deuxième année universitaire L.M.D.
Le lecteur trouvera une partie cours et à la fin de chaque chapitre une partie exercices corrigés.
Il est destiné principalement aux étudiants de la 2 ème année L.M.D.
L'objectif de l'analyse numérique est de concevoir et d'étudier des méthodes de résolution de certains problèmes mathématiques (en général issus et de la modélisation de problèmes réels), a titre d'exemples : commande optimale, structure (pneus, carrosserie, ...), biologie mathématique : propagation d'épidémie ..., modèle mathématique en médecine : cardiologie, cancer ..., et bien d'autres applications.
En pratique, l'analyse numérique se propose d'étudier les propriétés mathématiques des algorithmes et leur mise en œuvre (programmation).
Ce polycopie se décompose en quatre chapitres :
Le premier chapitre : Notions d'erreurs.
Le deuxième chapitre : Interpolation polynomiale.
Le troisième chapitre : dérivation et intégration numérique.
Le dernier chapitre : résolution d'équations algébriques.

Chapitre 1

Notions d'erreurs

1.1 Introduction

L'analyse numérique se distingue des autres champs plus classiques des mathématiques. En effet, pour un problème donné, il est possible d'utiliser plusieurs techniques de résolution qui résultent en différents algorithmes. Ces algorithmes dépendent de certains paramètres qui influent sur la précision du résultat. De plus, on utilise en cours de calcul des approximations plus ou moins précises. Par exemple, on peut remplacer une dérivée par une différence finie de façon à transformer une équation différentielle en une équation algébrique. Le résultat final et son ordre de précision dépendent des choix que l'on fait. Une partie importante de l'analyse numérique consiste donc à étudier et évaluer les erreurs pour les réduire.

1.2 Erreurs absolue et relative

Les quantités 10, $\sqrt{2}$, e et $\frac{1}{3}$ sont exactes. Mais $\sqrt{2} = 1.414$, $e = 1.71$ et $\frac{1}{3} = 0.333$ sont des quantités approximatives. Puisqu'il y a toujours un ecart entre la valeur exacte et la valeur approchée donc il y a une erreur.

1.2.1 Erreur absolue

Définition 1.1 *Soit x une quantité à calculer et x^* la valeur calculée (la valeur approchée de x). L'erreur absolue de x^* (sur x), est définie par :*

$$E_a(x) = |x - x^*|. \tag{1.1}$$

Exemple 1.1 *On suppose que la valeur exacte est $x = 17,001$ et que les valeurs mesurées sont :*
$x_1^* = 16,01$, $x_2^* = 18,01$ et $x_3^* = 17$. Alors, on a

$$E_{a_1}(x) = |x - x_1^*| = 0.991$$

$$E_{a_2}(x) = |x - x_2^*| = 1.009$$
$$E_{a_3}(x) = |x - x_3^*| = 0,001.$$

Comme l'erreur absolue $E_{a_3}(x)$ est la plus petite alors $x_3^* = 17$ est la valeur la plus proche de x.
Ainsi la valeur approchée x^* est plus précise lorsque l'erreur absolue de x^* est plus petite.

1.2.2 Erreur relative

Définition 1.2 *Soit x une quantité à calculer et x^* la valeur calculée (la valeur approchée de x). L'erreur relative est définie par :*

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|}. \tag{1.2}$$

Généralement, on donne l'erreur relative sous la forme de pourcentage tel qu'on multiplie $E_r(x)$ par 100%.

Exemple 1.2 *On reprend l'exemple précédent $x^* = 17$ valeur approchée de x, alors*

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|} = \frac{0,001}{|17,001|} = \frac{10^{-3}}{17001 \times 10^{-3}} = \frac{1}{17001}.$$

Alors $E_r(x) \simeq 6 \times 10^{-3}\%$.

1.2.3 Majoration des erreurs absolue et relative

En pratique, il est difficile d'évaluer les erreurs absolue et relative, car on ne connaît généralement pas la valeur exacte de x et l'on n'a que x^*. Pour les apprécier on introduit la notion de majorant de l'erreur absolue et de l'erreur relative.

Définition 1.3 *On définit un majorant de l'erreur absolue Δx d'une valeur approchée x^* par :*

$$E_a(x) = |x - x^*| \leq \Delta x \Leftrightarrow x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$$

tel que Δx est un nombre réel positif.

Définition 1.4 *On définit un majorant de l'erreur relative δx d'une valeur approchée x^* par :*

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|} \leq \delta x \tag{1.3}$$

tel que δx est un nombre réel positif

Par suite le majorant de l'erreur relative à x^* est défini par

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x^*|}. \tag{1.4}$$

Dans le cas de quantités mesurées expérimentalement dont on ne connaît que la valeur approximative, on dispose souvent d'une borne supérieure pour l'erreur absolue qui dépend de la précision des instruments de mesure utilisés.

Remarque 1.1 *Soit x un nombre tel que $x_1 \leq x \leq x_2$ alors $x^* = \frac{x_1+x_2}{2}$ est une approximation de x avec une majoration de l'erreur absolue $\Delta x = \frac{x_2-x_1}{2}$.*

Exemple 1.3 *Une surface est donné par $x = 60m^2 \pm 2\%$. L'erreur relative à la valeur approchée $x^* = 60m^2$ est $\delta x = 0,02$. Alors l'erreur absolue est :*

$$\Delta x = x^* \delta x = 60 \times 0,02 = 1,2m^2.$$

D'où, la surface exacte est $x \in [x^* - \Delta x, \quad x^* + \Delta x] = [58.8, \quad 61.2]$.

1.3 Chiffres significatifs

Définition 1.5 *Un chiffre significatif d'un nombre approché est le seul chiffre qu'on doit garder, c'est à dire tout chiffre dans sa représentation décimale différent du zéro ; et un zéro qui se trouve entre deux chiffres, ou il constitue un chiffre conservé.*

Exemple 1.4 *Une approximation à 5 décimales de 0.02010 est*
$\underline{0.0}2010$ *les zéros soulignés ne sont pas significatifs car ils ne servent qu'à indiquer les ranges des autres chiffres.*
$0.02\underline{0}10$ *Le zéro souligné étant placé entre les chiffres significatifs 2 et 1, zéro est lui même un chiffre significatif.*
$0.0201\underline{0}$ *le zéro souligné traduit le fait que le nombre approché a conservé la décimale 10^{-5}, c'est un chiffre significatif.*

Définition 1.6 *Un chiffre significatif d'un nombre approché x^* est dit exact (c s e) si l'erreur absolue de x^* vérifie :*

$$\Delta x \leq 0,5 \times 10^m$$

avec m est le rang de ce chiffre significatif.
D'où

- *Si $\Delta x \leq 0,5 \times 10^{-n}$, alors le $n^{\text{ème}}$ chiffre significatif après la virgule est exact*

– *Si :* $\Delta x \leq 0,5 \times 10^{n-1}$*, alors le* $n^{ème}$ *chiffre significatif avant la virgule est exact.*

Propriétés :

1. *Si un chiffre significatif est exact, alors tous les chiffres à sa gauche sont exacts.*
2. *Si un chiffre n'est pas exact, alors tous ceux à sa droite ne le sont pas.*

Exemple 1.5 1. *On approche* $x = \pi$ *au* $x^* = 3,14$*. On a*

$$\Delta(x) = 0,001592 \leq 0,5 \times 10^{-2}.$$

Alors, les trois chiffres 3, 1 *et* 4 *sont des chiffres significatif exacts.*

2. *Soient* $x = 223,864$ *et* $x^* = 223,887$*, alors*

$$\Delta x = 0,023 \leq 0,5 \times 10^{-1}$$

D'où, les quatres chiffres significatif 2, 2, 3, 8 *sont exacts.*

Remarque 1.2 *Il y a une relation entre l'erreur relative et les chiffres significatifs, en effet,*

1. *Si un nombre approximatif possède n chiffres significatifs exacts, alors son erreur relative est* $< 5 \times 10^{-n}$ *(sauf si le nombre est 1 suivi de* $(n-1)$ *zéros).*
2. *Si l'erreur relative à* x^* *est* $< 0,5 \times 10^{-n}$ *alors* x^* *possède au moins n chiffres significatifs exacts.*

1.4 Arrondissement et représentation des nombres

L'arrondissement d'un nombre à n chiffres significatifs se fait par la régle suivante :

1. *Si le* $(n+1)^{ème}$ *chiffre significatif est* > 5*, on augmente le* $n^{ème}$ *chiffre de* 1.
2. *Si le* $(n+1)^{ème}$ *chiffre significatif est* < 5*, les chiffres retenus restent inchangés.*
3. *Si le* $(n+1)^{ème}$ *chiffre significatif est 5 alorson a deux cas :*
   – *Si tous les chiffres, situés après le* $(n+1)^{ème}$ *chiffre significatif, sont des zéros. On applique la régle du chiffre pair, c'est à dire si le* $n^{ème}$ *est impair on lui ajoute 1, par contre s'il est pair alors on le change pas.*

– *Parmi les chiffres rejetés, situés après le* $(n+1)^{\text{ème}}$ *chiffre significatif, il existe au moins un qui soit non nul. On ajoute 1 au* $n^{\text{ème}}$ *chiffre.*

Exemple 1.6

1. *Arrondir* $x = 0.254$ *à deux (02) chiffres significatifs. Comme* $4 < 5$ *alors* $x^* \simeq 0.25$.
2. *Arrondir* $x = 0.4368$ *à trois (03) chiffres significatifs. Comme* $8 > 5$ *alors* $x^* \simeq 0.437$
3. *Arrondir* $x = 1.534500$ *à quatre (04) chiffres significatifs. Tous les chiffres rejetés sont des zéros. Le* $4^{\text{ème}}$ *chiffre étant pair, on a alors* $x^* \simeq 1.534$.
4. *Arrondir* $x = 1.5347500$ *à cinq (05) chiffres significatifs. Tous les chiffres rejetés sont des zéros. Le* $5^{\text{ème}}$ *chiffre étant impair, on a alors* $x^* \simeq 1.5348$.
5. *Arrondir* $x = 23.6050420$ *à quatre (04) chiffres significatifs. Parmi les chiffres rejeté s'il existe au moins un qui soit non nul. Donc,* $x^* \simeq 23.61$.

Chapitre 2

Résolution d'équations algébriques

Ce chapitre est consacré à résoudre l'équation non linéaire du type :

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

où f est une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Le problème est de trouver les valeurs de x dans l'intervalle $[a, b]$ satisfaisant l'équation $f(x) = 0$.
En général, les méthodes de résolution de l'équation non linéaire $f(x) = 0$ sont des méthodes itératives. Elles consistent à construire une suite x_n convergente (plus rapidement possible) vers la solution.

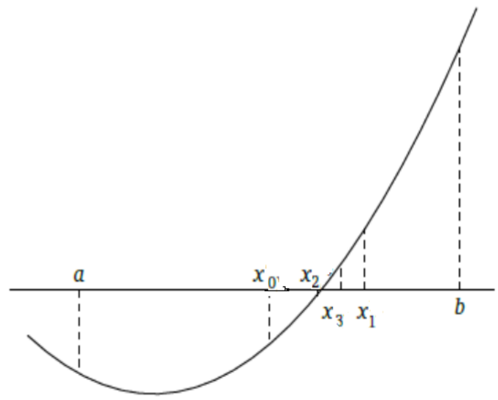
2.1 Méthode de Dichotomie (ou bissection)

Le principe de la méthode de Dichotomie repose sur la version suivante du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 2.1 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$.*

Pour déterminer la solution de l'équation $f(x) = 0$, avec f une fonction continue sur $[a, b]$, il faut d'abord localiser la racine $\overline{x}$ dans l'intervalle $[a, b]$, où $\overline{x}$ est une racine simple. On procède de la manière suivante :

1. *On divise l'intervalle $[a, b]$ en deux parties égales et on pose $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Alors*
$$\begin{cases} \overline{x} \in [a, x_0], & si\ f(a)f(x_0) < 0 \\ \overline{x} \in [x_0, b], & si\ f(b)f(x_0) < 0. \end{cases}$$
2. *On note le nouveau intervalle contenant $\overline{x}$ par $[a_1, b_1]$:*
$$\begin{cases} a_1 = a \quad et \quad b_1 = x_0 \quad si \quad \overline{x} \in [a, x_0] \\ a_1 = x_0 \quad et \quad b_1 = b \quad si \quad \overline{x} \in [x_0, b]. \end{cases} \tag{2.2}$$
3. *En itérant ce procédé, on obtient une suite de valeurs :*
$$x_0 = \frac{a+b}{2}, x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \ldots, x_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$



Construction des premiers itérés de la méthode de dichotomie.

Cela nous amène à l'algorithme suivant.
Algorithme de dichotomie (ou bissection)
Soit $f : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f(a_0) \times f(b_0) < 0$.
Pour $i = 0, 1, \ldots, n$, faire

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}.$$

Si $f(a_i) \times f(x_i) < 0$ alors $a_{i+1} = a_i$ et $b_{i+1} = x_i$.
Sinon $a_{i+1} = x_i$ et $b_{i+1} = b_i$.

2.1.1 Etude de convergence

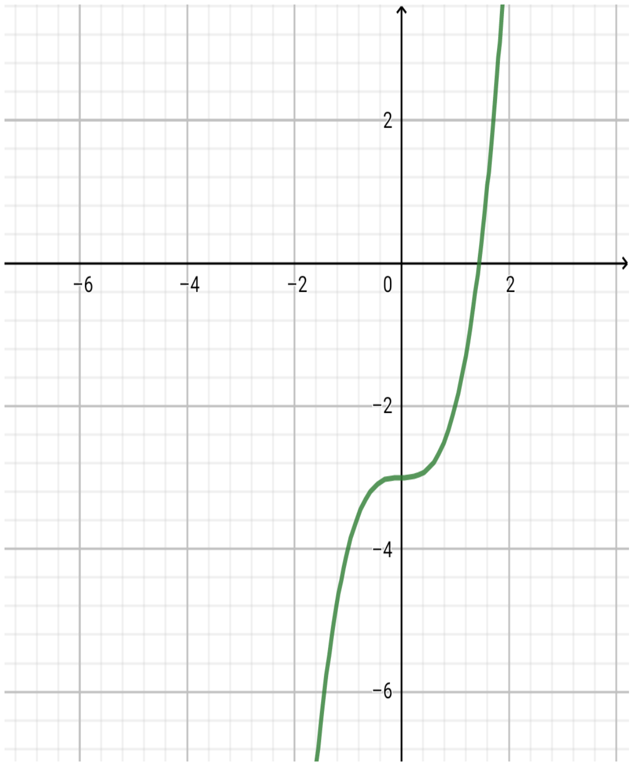
Théorème 2.2 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Nous supposons que $f(a) \times f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $c \in]a, b[$. Si l'algorithme de dichotomie arrive jusqu'à l'étape n (de sorte que $x_i \neq c$, pour $i = 0, \ldots, n$) alors*

$$|x_n - c| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}. \tag{2.3}$$

Remarque 2.1 *D'après le théorème 2.2 les itérations par la méthode de la dichotomie s'achèvent à la m-ème étape quand $|x_m - \overline{x}| \leq \frac{|b_m - a_m|}{2} = \frac{b-a}{2^{m+1}} < \varepsilon$, où ε est une tolérance fixée et $\overline{x}$ est la racine dans $[a, b]$. Donc pour avoir une* *erreur* $|x_m - \overline{x}| \leq \varepsilon$ *if suffit de prendre le plus petit entier positif* m *qui vérifie*

$$m \geq \frac{ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{ln2} - 1.$$

Exemple 2.1 *Soit* $f(x) = x^3 - 3$. f *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$. *L'unique solution de l'équation* $f(x) = 0$ *est* $\sqrt[3]{3}$. *On veut approcher la valeur de* $\sqrt[3]{3}$.



On prend l'intervalle $[1, 2]$. *Alors on a*
$f(1) = -2 < 0$
$f(2) = 5 > 0$
On note $I_0 = [1, 2]$ *et on calcule* $f(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{1+2}{2}) = \frac{3}{8} > 0$, *avec* $x_0 = \frac{3}{2}$
Donc $\sqrt[3]{3}$ *est dans l'intervalle* $[1, \frac{3}{2}]$.
$a_1 = a_0 = 1$ *et* $b_1 = \frac{3}{2}$, *et on calcule*
$f(\frac{a_1+b_1}{2}) = f(\frac{5}{4}) = -\frac{67}{64} < 0$, *et* $x_1 = \frac{5}{4}$.
Maintenant $\sqrt[3]{3}$ *est dans l'intervalle* $I_2 = [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$ *qui est plus petit que* I_1.
$f(\frac{a_2+b_2}{2}) = f(\frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{4}}{2}) = f(\frac{11}{8}) = -\frac{205}{512} < 0$ *et* $x_2 = [\frac{11}{8}$
Alors $I_3 = [\frac{11}{8}, \frac{3}{2}]$.
$f(\frac{a_3+b_3}{2}) = f(\frac{23}{16}) = -\frac{121}{4096} < 0$ *et* $x_3 = \frac{23}{16}$.
Ainsi $I_4 = [\frac{23}{16}, \frac{3}{2}]$.
Si on prend l'estimation de l'erreur d'arrondis $\varepsilon = 10^{-2}$, *alors d'après le théorème de convergence on obtient :*

$$n \geq \frac{ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{ln2} - 1 = 5,62$$

d'où $n = 6$.

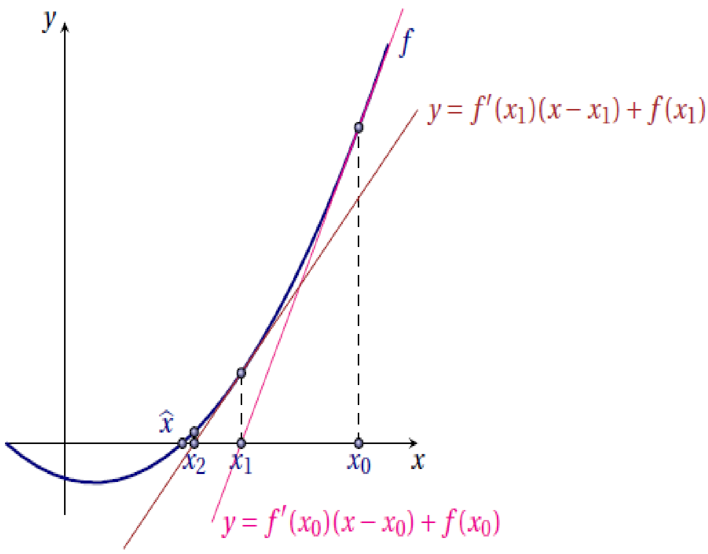
2.2 Méthode de Newton-Raphson

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$ et on suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans l'intervalle $[a,b]$. Le principe de la méthode de Newton-Raphson consiste à remplacer le problème non linéaire $f(x) = 0$ par un problème affine $g(x) = 0$, où g est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0 donné. On identifie la représentation de g à la tangente à la courbe de f au point d'abscisse au voisinage de x_0. En effet, par la formule de Taylor on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \tag{2.4}$$

On suppose que $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, et nous définisons x_1 tel que $g(x_1) = 0$. Notons que x_1 est bien définie lorsque $f'(x_0) \neq 0$ donné par :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$



Nous construisons ainsi par récurrence, sous réserve que $x_n \in [a,b]$, la suite comme suit :

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \quad \textit{donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2.1 Etude de convergence

Théorème 2.3 *(convergence globale de la méthode de Newton -Raphson) Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a,b]$ telle que*

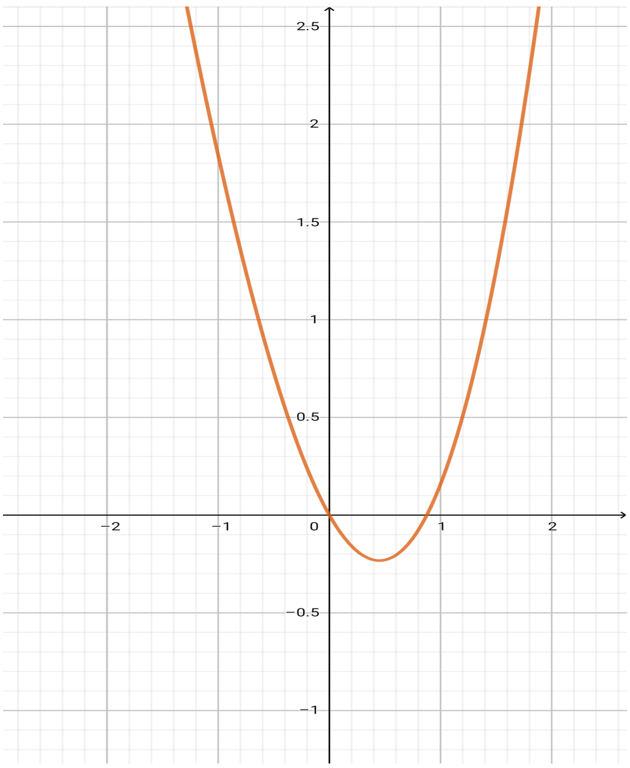
i) $f(a) \times f(b) < 0$;

ii) $f'(x)$ et $f''(x)$ sont non nulles et gardent des signes constants dans $[a,b]$. Alors la suite des itérés de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N},$$

avec $x_0 \in [a,b]$ converge vers l'unique zéro $x^* \in [a,b]$ de f. En partant de l'approximation x_0 dans $[a,b]$ vérifiant $f(x_0) \times f''(x_0) \geq 0$..

Exemple 2.2 *Soit $f(x) = x^2 - \sin x$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et soit $x_0 = \frac{\pi}{4}$.*



On a $f'(x) = 2x - \cos x > 0$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et $f''(x) = 2 + \sin x > 0$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$. En utilisant la suite de Newton pour trois itérations, on trouve :

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,52659376$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,26811032$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,06720375.$

2.3 Méthode de point fixe

La méthode de point fixe consiste à transformer l'équation non linéaire $f(x) = 0$ en un problème équivalent

$$g(x) = x \tag{2.6}$$

où la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a la propriétée suivante

$$\overline{x} = g(\overline{x}) \quad \text{si et seulement si} \quad f(\overline{x}) = 0.$$

Définition 2.1 *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $\overline{x} \in \mathbb{R}$ est tel que $g(\overline{x}) = \overline{x}$, on dit que $\overline{x}$ est un point fixe de g (l'image de $\overline{x}$ par g est lui-même).*

La méthode de point fixe consiste à la construction dune suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \quad \text{donnée} \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Le théoreme suivant nous donne les conditions de convergence de la suite de la méthode de point fixe.

Théorème 2.4 *Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On se donne $x_0 \in [a, b]$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$g(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$ (condition de stabilité)*
2. *Il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$ pour tout $x, y \in [a, b]$ (condition de contraction stricte) (ou bien $|g'(x)| \leq k < 1$, $\forall x \in [a, b]$.*

Alors

i) g est continue,

ii) g a un et un seul point fixe $\overline{x}$dans $[a, b]$,

iii) La suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers $\overline{x}$ pour tout choix de x_0 dans $[a, b]$. De plus, si x^* est la solution de léquation $g(x) = x$ alors

$$|x^* - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|, \quad n \geq 1. \tag{2.8}$$

Exemple 2.3 *Soit l'équation $e^x - 4x^2 = 0$. On pose $f(x) = e^x - 4x^2$, alors*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 4x^2$$

ou

$$x = \pm\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$$

Donc on note $g_1(x) = \ln 4x^2$, $g_2(x) = -\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$ *et* $g_3(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$.
D'autre part, Si on prend $I = [-1, 0]$ *alors, on a* $f(-1) \times f(0) < 0$.
Maintenant, on vérifie les conditions du théorème de point fixe. On ne peut pas choisir $g_1(x)$ *parce qu'elle n'est pas défiie sur* I *et aussi la fonction* $g_3(x)$ *qui est positive.*
Par contre la fonction $g_2([-1, 0]) \subset [-1, 0]$ *et* $|g_2'(x)| < k$ *où* $0 \leq k < 1$. *En effet,*
$g_2(-1) = -\frac{e^{\frac{-1}{2}}}{2}$ *et* $g_2(0) = -\frac{1}{2}$
et $g_2'(x) = -\frac{e^{\frac{x}{2}}}{4} < 0$ *alors* $g_2([-1, 0]) \subset [-1, 0]$.
D'autre part, $|g_2''(x)| = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{8} > 0$.
Donc $|g_2'(x)| \leq \frac{1}{4} < 1$. *D'où la méthode de point fixe converge.*
On choisit $x_0 = 0$, *on a*

$$x_1 = g_2(x_0) = \frac{-1}{2}$$

$$x_2 = g_2(x_1) = -\frac{e^{\frac{-1}{2}}}{2} = -0.303265$$

$$x_3 = g_2(x_2) = 0,429652.$$

Chapitre 3

Interpolation polynomiale

L'interpolation polynomiale est d'une grande importance dans l'analyse numérique : dérivation et intégration, résolution des équations différentielles, ... Ce chapitre ainsi que le chapitre suivant qui porte sur l'intégration numérique sont très étroitement reliés puisqu'ils tendent à répondre à même problème. Ce problème est le suivant : à partir d'une fonction $f(x)$ connue seulement en $(n+1)$ points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$, peut-on construire une approximation de $f(x)$?
Les x_i sont appelés abscisses ou noeuds d'interpolation tandis que les couples $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$ sont les points de collocation ou points d'interpolation et peuvent provenir de données expérimentales ou d'une table. En d'autres termes, si l'on ne connaît que les points de collocation $(x_i, f(x_i))$ d'une fonction, peut-on obtenir une bonne approximation de $f(x)$ pour une valeur différente des x_i ? Il s'agit d'un problème d'interpolation, dont la solution est relativement simple. Il suffit de construire un polynôme de degré suffisamment élevé dont la courbe passe par les points de collocation. On parle alors du polynôme de collocation ou polynôme d'interpolation. Pour obtenir une approximation des dérivées ou de l'intégrale, il suffit de dériver ou d'intégrer le polynôme de collocation.

3.1 Existence du polynôme d'interpolation

Théorème 3.1 *Soit (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$ avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, il existe un polynôme et un seul $P_n(x)$ de degré inferieur ou égal à n tel que :*

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

3.2 Interpolation de Lagrange

*L'interpolation de Lagrange est une façon simple de construire un polynôme de collation, sans passer par la résolution du système linéaire (**??**).*

Définition 3.1 *On appelle polynôme de Lagrange associés aux* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *deux à deux distincts les* $(n+1)$ *polynômes* $L_k(x)$ *définie par :*

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j\ =0\\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \tag{3.1}$$

Proposition 3.1 *Les polynômes de Lagrange* $L_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ *possèdent les propriétés suivante :*

1. *Pour tout* $i \geq 0$ *;* L_i *est un polynôme de degré* n *;*
2. $$L_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & si \ \ i \neq k; \\ 1, & sinon. \end{cases} \tag{3.2}$$
3. *Les polynômes de Lagrange associés à* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *constituent une base de* P_n*, où* P_n *est un ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à* n*.*

D'après cette proposition on en déduit le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Soit* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$*,* $(n+1)$ *points distincts et une fonction* f *dont les valeurs en ces points* $(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n))$*. Alors il existe un seul polynôme de degré inférieur ou égal à* n *tel que*

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Ce polynôme est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k). \tag{3.3}$$

Exemple 3.1 Pour $n = 1$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Donc

$$P_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

C'est l'équation de la droite qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$ *et* $(x_1, f(x_1))$*.*
Pour $n = 2$ *on a :* x_0*,* x_1 *et* x_2

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Ainsi

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

C'est l'équation de parabole qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ *et* $(x_2, f(x_2))$.

Remarque 3.1
- *En pratique, on utilise l'interpolation polynômiale avec des polynômes de degré n assez grand ou l'interpolation polynômiale par morceaux. Ainsi dans l'exemple précédent, il faut augmenter le nombre de points d'interpolations.*
- *Si les valeurs $f(x_i) = y_i$ sont des valeurs expérimentales. L'interpolation polynomiale est une technique peu appropriée pour de telles situations. Les polynômes de degré élevé sont sensibles à la perturbation des données.*
- *La méthode de Lagrange s'adapte mal au changement du nombre de points (x_i, y_i). On ne peut pas utiliser les coefficients de Lagrange si on passe de n à $(n+1)$ points.*

3.3 Interpolation de Newton

On suppose qu'on a $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$. Soit $P_n(x)$ le polynôme d'interpolation de la fonction de degré n tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$.

Définition 3.2 *La forme de Newton du polynôme d'interpolation est :*

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Définition 3.3 *Soit f une fonction dont on connaît les valeurs $f(x_0)$, $f(x_1), \ldots, f(x_n)$. On définit les différences divisées de f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ par les relations de récurrences suivantes :*

$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i), \\ f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} \quad \textit{premières différences divisées de f,} \\ f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i+1},x_{i+2}]}{x_i-x_{i+2}} \quad \textit{deuxième différences divisées de f,} \\ \vdots \\ f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p}] = \frac{f[x_i,x_{i+1},\ldots,xi+p-1]-f[x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_{i+p}]}{x_i-x_{i+p}} \quad p^{\text{ème}}\textit{différences divisées de f} \end{cases}$$

D'après cette définition on a $P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$,
$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f[x_0, x_1]$
$\vdots$
$a_n = f[x_0, \dots, x_n]$
On a le théorème suivant :

Théorème 3.3 *Le polynôme d'interpolation de Newton passant par* $(x_i, f(x_i))_{i=0,\dots,n}$ *peut s'écrire :*

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots +$$
$$+ f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Ce polynôme d'interpolation est appelé ***forme de Newton du polynôme d'interpolation par les différences divisées****.*

Exemple 3.2 *Calculons le polynôme d'interpolation de la fonction qui est définie comme suit*

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$	0	1	0

On construit le tableau des différences divisées de f *:*

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	0		
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}$
π	0	$-\frac{\pi}{2}$	

On a alors

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= \frac{2}{\pi}x - [\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}]x(x - \frac{\pi}{2}) \\ &= -\frac{\pi^2 + 8}{2\pi^2}x^2 - \frac{16 + \pi^2}{4\pi}x. \end{aligned}$$

Remarque 3.2 *La forme de Newton par les différences divisées de la fonction* f *est la forme la plus utilisée pour calculer le polynôme d'interpolation, parce qu'elle nécessite le moins de calculs pour obtenir numériquement ses coefficients.*

3.4 Erreur d'interpolation

Théorème 3.4 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $(n+1)$ fois dérivable sur $[a,b]$ si $P_n(x)$ est un polynôme de degré inferieur ou égale à n tel que*

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n; \quad x_i \in [a,b],$$

alors

$$\forall x \in [a,b], \exists \xi_x \in [a,b] / E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \quad (3.4)$$

avec $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Corollaire 3.1

$$\forall x \in [a,b] : \quad |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\prod_{i=0}^{n} |(x - x_i)|}{(n+1)!} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Ou encore

$$\forall x \in [a,b] : \quad |f(x) - P_n(x)| \leq |\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}| \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Chapitre 4

Intégration numérique

Nous avons vu antérieurement comment approcher une fonction $f(x)$ connue aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$ dans un intervalle $[a, b]$ tel que $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ par un polynôme d'interpolation $P_n(x)$. Nous allons faire pratiquement le même procédé pour l'intégration par exemple si nous connaissons les positions d'un mobile à des instants répétés et en connaissant la vitesse en des points et nous voulons connaître la distance parcourue en faisant l'intégration. Donc il s'agit de construire une approximation numérique de l'intégrale de la fonction f.
Dans cette partie nous essayons de développer quelques méthodes numériques de calcul l'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$.
Pour approcher numériquement cette intégrale on décompose l'intervalle $[a, b]$ en $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

Sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$, on applique une méthode d'intégration élémentaire en utilisant le polynôme d'interpolation de Newton de f

$$P_i(x) = f[x_{i,0}] + f[x_{i,0}, x_{i,1}](x - x_{i,0}) + \cdots + f[x_{i,0}, x_{i,1}, \dots, x_{i,l}](x - x_{i,0}) \dots (x - x_{i,l})$$

en des points $x_{i,0}, \dots, x_{i,k}$ de l'intervalle $[a, b]$ (qui peuvent être ou non dans $[x_i, x_{i+1}]$).

4.1 Méthode des trapèzes

On prend $l = 1$, sachant que l représente le nombre de subdivision de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, alors on remplace f par le polynôme d'interpolation de Newton aux points x_i, x_{i+1}. On obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f(x_{i,0})+f[x_i,x_{i+1}](x-x_i))dx\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)(f(x_{i+1})+f(x_i))\\ &\simeq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h_{i+1}+h_i}{2}f(x_i)+\frac{1}{2}(h_1f(x_0)+h_nf(x_n)). \qquad (4.1)\end{aligned}$$

En cas équidisant c'est-à-dire $h_i = h = x_{i+1} - x_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ on a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\simeq \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)]\\ &\simeq \frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)]. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

Exemple 4.1 *On calcule l'intégrale suivante*

$$I = \int_1^3 \ln(x)dx.$$

Donner une valeur approchée de l'intégrale I en utilisant la méthode des trapèzes composite avec 4 sous-intervalles. Cela revient à prendre $h = \frac{1}{2}$ et $x_0 = a = 1$ $x_4 = b = 3$, $x_1 = \frac{3}{2}$ $x_2 = 2$ et $x_3 = \frac{5}{2}$.
D'après la méthode des trapèzes , on a

$$I = \frac{h}{2}[f(1)+f(3)+2(f(\frac{3}{2})+f(2)+f(\frac{5}{2})]\simeq 1,821.$$

4.1.1 Erreur de la méthode des trapèzes

Pour $n = 1$ on trouve

$$|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))| \leq \frac{M_2}{2}|\int_a^b(x-a)(x-b)dx| = \frac{M_2}{12}(b-a)^3. \qquad (4.3)$$

Pour la formule composée de la méthode des trapèzes, on en déduit que l'erreur est majorée par

$$|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i))| \leq \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3.$$

$$E(f) \leq \frac{M_2}{12}h^2(b-a). \qquad (4.4)$$

Exemple 4.2 *Calculons l'intégrale* $\int_0^1 e^{-x^2}dx$. *Utilisons les méthodes élémentaires précédentes à l'aide des valeurs de* $f(x) = e^{-x^2}$ *aux points* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ *et* $x_2 = 1$. *Alors on a*

$$f(1) = e, \quad f(\frac{1}{2}) = 0,7880 \quad et \quad f(1) = 0,36788.$$

pour $n = 1$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{h}{2}(f(0) + f(1)) = 0,68394.$$

Avec une erreur :

$$E_{trapeze}(f) \leq \frac{M_2}{12}(b-a)^3 = \frac{M_2}{12} = 0.0613132.$$

4.2 Méthode de Simpson

On prend cette fois $l = 2$, *telle que* l *représente le nombre de subdivision de l'intervalle* $[x_i, x_{i+1}]$ *donc on interpole la fonction* f *aux points* x_i, $x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$, x_{i+1} *en utilisant le polynôme de Newton. Soit* $h_i = x_{i+1} - x_i$, *on trouve*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i)+f[x_i, x_{i+1}](x-x_i)+f[x_i, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}](x-x_i)(x-x_{i+1})]dx$$

$$= h_i f(x_i) + \frac{1}{2}h_i^2 f[x_i, x_{i+1}] + f[x_i, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}] \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})dx.$$

On écrit $x - x_{i+1} = x - x_i + x_i - x_{i+1}$ *on aura*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})dx = -\frac{h_i^3}{6},$$

et

$$h_i^2[f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}] = h_i(f(x_{i+1}) - f(x_i)),$$

$$h_i^3 f[x_i, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}] = 2h_i(f(x_{i+1}) - 2f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)).$$

D'où

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{6} \left[f(x_i) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})\right]. \tag{4.5}$$

Dans le cas équidisant cette formule composée devient

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1})\right] \tag{4.6}$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Exemple 4.3 On veut calculer l'intégrale $I = \int_0^6 x^3dx$*. Pour* $n = 2$ *on a* $h = 3$*, d'où*

$$I = \frac{h}{3}(f(0) + f(6) + 4f(3)) = 324.$$

Pour $n = 4$ *on a* $h = \frac{3}{2}$*, d'où*

$$I = \frac{h}{3}(f(0) + f(6) + 2f(3) + 4(f(\frac{3}{2}) + f(\frac{9}{2})) = 324$$

D'autre part, la valeur exacte de cette intégrale est

$$I = \int_0^6 x^3dx = \frac{x^4}{4}]_0^6 = 324.$$

On remarque que la méthode de Simpson est exacte pour le polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

4.2.1 Erreur de la méthode de Simpson

Cette fois $n = 2$ *alors on a*

$$|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}(f(a)+f(b)+4f(\frac{a+b}{2}))| \leq \frac{M_4}{24}|\int_a^b (x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})^2dx|$$

$$\leq \frac{M_4}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5. \tag{4.7}$$

La formule composée correspondante avec pas constant h *donnera une erreur majorée par :*

$$|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i})+4\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1})]| \leq \frac{M_4}{2880n^4}(b-a)^5. \tag{4.8}$$

Par ailleurs, la méthode de Simpson (bien que reposant sur une interpolation à trois points) est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Exemple 4.4 Calculons l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2}dx$*. Utilisons les méthodes élémentaires précédentes à l'aide des valeurs de* $f(x) = e^{-x^2}$ *aux points* $x_0 = 0$*,* $x_1 = \frac{1}{2}$ *et* $x_2 = 1$*. Alors on a*

$$f(1) = e, \quad f(\frac{1}{2}) = 0,7880 \quad et \quad f(1) = 0,36788.$$

Pour $n = 2$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{h}{6}(f(0) + f(1) + 4f(\frac{1}{2})) = 0,74718.$$

Avec une erreur

$$E_{Simpson}(f) \leq \frac{M_4}{2880}(b-a)^5 = \frac{M_4}{2880} = 0.000254764.$$