

L2-Méthodes Numériques-(2019/2020)
Fiche de TD n=°2 Interpolation polynomiale
et TD n=°3 Intégration numérique

Exercice 01

Soit une fonction $f(x)$ dont on connaît sa valeur en certains points:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	2	36	252	1040

- (1) Obtenir le polynôme de Lagrange passant par le 3 premiers points.
- (2) Obtenir le polynôme de Lagrange passant par le 4 premiers points.
- (3) Est-ce que c'est possible d'utiliser les calculs fait en 1.
- (4) Donner l'expression analytique de l'erreur pour les deux polynômes.
- (5) Obtenir des approximations de $f(1.5)$ à l'aide des deux polynômes obtenus.

Exercice 02

Soit la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$, définie aux points:

x	4	6	8	10
$f(x)$	1.59	1.817	2	2.1544

- (1) Dresser la table des différences divisées puis déterminer le polynôme d'interpolation de Newton $P(x)$.
- (2) Calculer $P(9)$ et évaluer l'erreur commise au point $x = 9$.

Exercice 03

Si on veut interpoler la fonction $f(x) = e^{x-1}$ par un polynôme de degré 12 en utilisant 13 nœuds dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Donner une majoration de l'erreur $|f(x) - P(x)|$.

Exercice 04 Soit l'intégrale

$$I_1 = \int_{-1}^1 \sqrt{2+x} dx.$$

- (1) Calculer l'intégrale I_1 exacte.
- (2) Calculer I_1 par la méthode des trapèzes simple puis évaluer l'erreur.
- (3) Calculer I_1 à l'aide de la méthode des trapèzes généralisée " pour $n = 2$ " puis évaluer l'erreur.
- (4) Combien faut-il de subdivision de $[-1, 1]$ pour évaluer I_1 à 10^{-6} près.

Exercice 5: Soit l'intégrale

$$I_2 = \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

Sachant que la valeur exacte de cette intégrale est $I_{exacte} = 1$.

- (1) Calculer I_2 par la méthode de Simpson simple puis évaluer l'erreur.
- (2) Calculer I_2 à l'aide de la méthode de Simpson généralisée " pour $n = 4$ " puis évaluer l'erreur.
- (3) Combien faut-il de subdivision de $[0, 1]$ pour évaluer I_2 à 10^{-8} près.

Exercice 6: On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération γ

t (en s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
γ en m/s^2	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Calculer la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80s$, par la méthode des trapèzes puis par la méthode de Simpson.

Exercices Supplémentaires

Exercice 07: Soit la fonction $f(x) = e^x$ donnée par le tableau suivant:

x	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70
$f(x)$	33,115	34,813	36,598	38,475	40,447

- (1) Déterminer le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ par la formule Newton pour les différences divisées.
- (2) Calculer $P_2(3,58)$. Puis estimer le résultat obtenu. Que peut-on en déduire concernant la précision?

Exercice 08:

Soit l'intégrale: $I_3 = \int_{0.5}^1 \frac{\ln x}{x} dx$

- (1) Calculer la valeur exacte de I_3 .
- (2) En utilisant la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson:
 - a) Calculer I_3 .
 - b) Evaluer l'erreur.
 - c) Majorer l'erreur.
 - d) Combien faut-il de subdivisions de $[0.5, 1]$ pour évaluer I_3 à 10^{-6} près.