Chapter 1

Fonctions spéciales

Dans ce chapitre, nous allons étudier les propriétés de certaines fonctions spéciales qui ont des propriétés intéressantes et utiles en physique, en méchanique, en ingénierie et dans d'autres domaines scientifiques. Elles apparaissent fréquemment dans la résolution d'équations différentielles et d'autres problèmes mathématiques complexes. Plus précisément, nous allons nous concentrer sur les fonctions Gamma d'Euler, Beta et Mittag-Leffler.

1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1. On appelle fonction Gamma (la fonction factorielle), la fonction définie par l'intégrale suivant, oú la variable apparaît comme un paramétre:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt,\ \ \alpha > 0. \tag{1.1}$$

L'intégrale (1.1) est uniformément convergente pour tout $\alpha \in [a, b]$, avec $0 < a \leq b < \infty$. Donc, $\Gamma(\alpha)$ est une fonction continue pour tout $\alpha > 0$.

Une autre définition pour la fonction Gamma comme limite est donnée par:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{\alpha-1}}{(\alpha)_n},\ \forall \alpha > 0.$$

Oú

$$\begin{aligned}(\alpha)_n &= \frac{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)...(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)!}{(\alpha-1)!} \\ &= (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)...(\alpha+1)\alpha\end{aligned}$$

Propriétés de fonction Gamma

1. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

2. $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. $\Gamma(1) = 1$

4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt(\pi)$.

Preuve

1. En faisant une intégtration par parties de (1.1), on obtient

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha) &= [-e^{-t}t^{\alpha-1}]_0^\infty + (\alpha-1)\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-2}dt \\ &= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1),\ \forall \alpha > 1.\end{aligned}$$

2. En particulier, quand $\alpha = n$ un entier positive, on utilise la première propriété, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= (n-1)!.\end{aligned}$$

3. Remplaçons α par 1, on obtient $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}dt = 1$

4. Posons $t = u^2$ dans (1.1), pour obtenir

$$\Gamma(\alpha) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2\alpha-1}du,\ \alpha > 0,$$

pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve $\Gamma(\dfrac{1}{2}) = 2\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2}du = 2\dfrac{\sqrt(\pi)}{2} = \sqrt(\pi)$.

Utilisons la première propriété, on peut obtenir $\Gamma(\frac{3}{2}), \Gamma(\frac{5}{2}), \Gamma(\frac{7}{2}), ..., \Gamma(\frac{2n+1}{2})$.

Remarque 1. La fonction Gamma peut être aussi définie pour les valeurs négative de α comme suit:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha},\ \alpha \neq 0, -1, -2, ...$$

Propréités:

1. $\frac{d}{dx} ln(\Gamma(\alpha)) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$.

2. $\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{(\pi)}}{2^{2\alpha-1}}\Gamma(2\alpha)$.

3. $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{sin(\pi\alpha)}$.

Exemples.

$\displaystyle\int_0^\infty t^{10}e^{-t}dt = \Gamma(9)$.

$\displaystyle\int_0^\infty t^{10}e^{-\frac{t}{7}}dt = 7^{11}\Gamma(9)$.

1.2 Fonction Beta

Définition 2. On appelle fonction Beta, notée par $B(\alpha, \beta)$, la fonction définie par l'intégrale:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+. \tag{1.2}$$

La fonction Beta peut être aussi définie par $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Propréités:

1. $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$.

2. $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$.

3. $B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha-1, \beta)$.

Exemples.

$\displaystyle\int_0^1 t^3(1-t)^{\frac{3}{2}} dt = B(2, \frac{5}{2})$.

$\displaystyle\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{3}} dt = B(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

1.3 Fonction Mittag-Leffler

Définition 3. On appelle fonction de Mittag-Leffler de paramétre α, la fonction définie par la somme

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \ \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

La généralisation de Mittag-Leffler á deux paramétre est donnée par la formule suivante

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \ x, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

De la définition, on a:

- $E_{1,1} = e^x$,
- $E_{1,2} = \frac{1}{x}(e^x - 1)$,
- $E_{1,3} = \frac{1}{x^2}(e^x - x - 1)$,
- $E_{1,m} = \frac{1}{x^{m-1}} \left(e^x - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{x^k}{k!} \right)$.

Remarque 2. Sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique sont des cas particulier de la fonction Mittag-Leffler

$$E_{2,1}(x^2) = ch(x), \ E_{2,2}(x^2) = \frac{1}{x} sh(x).$$

Propriétés de fonction Mittag-Leffler

1. $E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x)$.

2. $\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\alpha x}\left\{E_{\alpha,\beta-1}(x) - (\beta-1)E_{\alpha,\beta}(x)\right\}$.

Preuve

1.

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta)} \\ &= x\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Posons $I = \beta E_{\alpha,\beta+1}(x) + \alpha x\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta+1}(x)$

$$\begin{aligned} I &= \beta E_{\alpha,\beta+1}(x) + \alpha x\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha k+\beta)x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \\ &= E_{\alpha,\beta}(x). \end{aligned} \tag{1.4}$$

D'ou $\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta+1}(x) = \frac{1}{\alpha x}\left\{E_{\alpha,\beta}(x) - (\beta)E_{\alpha,\beta+1}(x)\right\}$.

En eemplaçant β par $\beta - 1$, on obtient le résultat.

Généralisation de la fonction Mittag-Leffler. Une généralisation de Mittag-Lefller est donnée par

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \ (\gamma)_k = \frac{\Gamma(\gamma + k)}{\Gamma(\gamma)}.$$