Chapter 2

Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires de Riemann-Liouville sont des généralisations des opérateurs d'intégration et de dérivation classiques à des ordres non entiers. Ces opérateurs ont des applications importantes dans divers domaines scientifiques. ils ont des propriétés intéressantes, telles que la linéarité, la règle de Leibniz et le théorème fondamental du calcul. Ils peuvent être utilisés pour résoudre des équations différentielles fractionnaires et pour modéliser des phénomènes physiques complexes.

2.1 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, notons par $J_a^1 f$ la primitive f qui s'annule en a,

$$\forall t \in [a, b],\ J_a^1 f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

L'itération de $J_a^1 f$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a. De plus, d'aprés le théorème de Fubinni

$$\begin{aligned}\left(J_a^1 f(t)\right)^2 = \left(J_a^1 f\right) \circ \left(J_a^1 f\right)(t) &= \int_a^t \int_a^u f(\tau) d\tau du \\ &= \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons $(J_a^1 f)^n$ la n-iéme itération de $J_a^1 f$, une récurrence directe montre que

$$\left(J_a^1 f\right)^n (t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Généralisons cette derniére par la fonction Gamma, quand n est réel, on obtient

$$J_a^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Définition 4. Soit $n \in \mathbb{R}_+$, l'opérateur J_a^n défini sur $L_1[a,b]$ par

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \ a \leq x \leq b$$

est appelé l'opérateur d'intégrale fractionnaire au sens de R-L d'ordre n.

Pour $n = 0$, on écrit $J_a^0 = I$ l'opérateur identité.

Il est évident que íntégrale au sens de R-L coïncide avec la définition classique de J_a^n dans le cas $n \in \mathbb{N}$ sauf qu'on a prolonger le domain de fonctions intégrables au sens de Riemann aux fonctions Lebesgue intégrable.

En plus, dans le cas $n \geq 1$, il est claire que l'intégrale $J_a^n f$ existe pour tout $x \in [a,b]$ car c'est le produit d'une fonction f intégrable et une fonction continue $(x - .)^{n-1}$. Pour le cas $0 < n < 1$, la situation est compliqué.

Théorème 1. Soit $f \in L_1[a,b]$ et $n > 0$, alors $J_a^n f(x)$ existe pour tout $x \in [a,b]$.

De plus, la fonction J_a^n elle même est un élément de $f \in L_1[a,b]$.

Remarque 3. La définition de l'intégrale de R-L à deux types basée sur les limites d'intégration:

- ${}_aJ_x^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau$l'intégrale à gauche.
- ${}_xJ_b^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_x^b (\tau-x)^{n-1} f(\tau) d\tau$l'intégrale à droite.

Théorème 2. Soit $n, m \geq 0$ et $\phi \in L_1[a,b]$ alors

$$J_a^m J_a^{sn} \phi = J_a^{m+n} \phi, \ p.p \ sur \ [a,b],$$

si, de plus $\phi \in C[a,b]$ or $m+n \geq 1$.

L'identité est satisfaite partout sur $[a,b]$.

Preuve

On a

$$J_a^m J_a^n \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{m-1} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} \phi(\tau) d\tau dt$$

Ce intégrale existe car $\phi \in L_1[a,b]$ donc $J_a^n \phi \in L_1[a,b]$, et alors $J_a^m \phi \in L_1[a,b]$ et par le théorème de Fubini, on peut interchanger les ordres de l'intégration

$$\begin{aligned} J_a^m J_a^n \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \int_\tau^x (x-t)^{m-1} (t-\tau)^{n-1} \phi(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau) \left(\int_\tau^x (x-t)^{m-1} (t-\tau)^{n-1} dt \right) d\tau. \end{aligned}$$

Faisant le changment de variable $t = \tau + s(x-\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned} J_a^m J_a^n \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau) \int_0^1 (x-\tau)^{m-1} (1-s)^{m-1} s^{n-1} (x-\tau)^{n-1} (x-\tau) ds d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau) (x-\tau)^{n+m-1} \int_0^1 (1-s)^{m-1} s^{n-1} ds d\tau \\ &= \frac{B(n,m)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau)(x-\tau)^{n+m-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+m)} \int_a^x \phi(\tau)(x-\tau)^{n+m-1} d\tau \\ &= J_a^{m+n} \phi(x) \end{aligned}$$

presque partout sur $[a,b]$.

Théorème 3. Les opérateurs $\{J_a^n : L_1[a,b] \to L_1[a,b],\ n \geq 0\}$ forment une semi groupe commutative avec élément neutre J_a^0.

Théorème 4. Soit $n > 0$, on assume que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions uniformément convergente sur $[a,b]$ alors on peut interchanger entre l'intégrale fractionnaire et la limite, i.e.,

$$\left(J_a^n lim_{k\to\infty}(f_k)\right)(x) = lim_{k\to\infty}(J_a^n f_k)(x).$$

En particulier, la suite $(J_a^n f_k)_{k=1}^{\infty}$ est uniformément convergente.

Preuve

On note la limite de $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ par f, il est claire que f est continue, on a

$$\begin{aligned}
|J_a^n f_k(x) - J_a^n f(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x |f_k(t)-f(t)|(x-t)^{n-1}dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n)} \parallel f_k - f \parallel_\infty \int_a^x (x-t)^{n-1}dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n+1)} \parallel f_k - f \parallel_\infty (x-a)^n \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n+1)} \parallel f_k - f \parallel_\infty (b-a)^n
\end{aligned}$$

qui converges vers zero quand k tend vers ∞ pour tout $x \in [a,b]$.

Corollaire 5. Soit f une fonction analytique sur $(a-h, a+h)$ pour quelque valeurs de $h > 0$, et $n > 0$ alors

$$J_a^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{k+n}}{k!(n+k)\Gamma(n)}.D^k f(x),$$

pour $a \leq x \leq a + \frac{h}{2}$ et

$$J_a^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{k+n}}{\Gamma(n+k+1)}.D^k f(a),$$

pour $a \leq x \leq a+h$.

En particulier, $J_a^n f$ est analytique en $(a, a+h)$.

Applications

1. Soit $f(x) = (x-a)^\beta$, $\beta > -1$ et $n > 0$ alors

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1}(t-a)^\beta dt,$$

Posons $t = a + s(x-a)$ on obtient

$$\begin{aligned} J_a^n f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{n+\beta} \int_0^1 s^\beta (1-s)^{n-1} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}(x-a)^{n+\beta}. \end{aligned}$$

2. Soit $f(x) = c$, avec c une constante arbitraire

$$\begin{aligned} J_a^n f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} c dt \\ &= \frac{c}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} dt \\ &= \frac{c}{\Gamma(n)}(x-a)^n. \end{aligned}$$

3. Calculer l'intégrale de R-L ${}_{-\infty}J_x^n f(x)$ pour $n > 0$ de la fonction e^{bx}

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}J_x^n f(x) &= {}_{-\infty}J_x^n e^{bx} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{n-1} e^{bt} dt. \end{aligned}$$

Posons $t = x - s$, alors

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}J_x^n e^{bx} &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty s^{n-1} e^{b(x-s)} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} e^{bx} \int_0^\infty s^{n-1} e^{-bs} dt. \end{aligned}$$

Set $u = bs$, donc

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}J_x^n f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} e^{bx} \int_0^\infty (\frac{u}{b})^{n-1} e^{-u} \frac{1}{b} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{e^{bx}}{b_n} \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du \\ &= b^{-n} e^{bx}. \end{aligned}$$

2.2 La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Il existe plusieurs définition de dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette partie les définitions de Riemann-Liouville, Grunwall-Letnikov et Caputo qui sont les plus utilisées.

Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Si $n > 0$, on note $[n]$ la partie entiére de n oú $[n]$ est le seul entier qui vérifier $[n] \leq n < [n] + 1$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, en s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ J_a^1$, on peut dséfinir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq n < 1$ par

$$\frac{d^n}{dt^n} = \frac{d}{dt} \circ J_a^{1-n},$$

Plus généralment, si $n > 0$ et $m = [n] + 1$, on peut poser

$$\frac{d^n}{dt^n} = \frac{d^m}{dt^m} \circ J_a^{m-n}.$$

On obtient la dérivée de R-L définie par

Définition 5. Soit $n > 0$, $m = [n] + 1$, la dérivée fractionnaire au sens de R-L á gauche de la fonction f d'ordre n est donné par $\forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} D_a^n f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \circ J_a^{m-n} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^x (x-\tau)^{m-n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

De plus, la définition d'intégrale á droite était associée á $-\frac{d}{dt}$. Ce raisonment conduit á la définition suivante $\forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} D_b^n f(x) &= \left(\frac{-d}{dx}\right)^m \circ J_b^{m-n} f(x) \\ &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dt^m} \int_x^b (\tau - x)^{m-n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Si maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville,

Définition 6. Soit $n > 0$, $m = [n] + 1$, la dérivée fractionnaire au sens de R-L á gauche de la fonction f d'ordre n est donné par $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D_+^n f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \circ J_a^{m-n} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dt^m} \int_{-\infty}^x (x - \tau)^{m-n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

De plus, la définition d'intégrale á droite était associée á $-\frac{d}{dt}$. Ce raisonment conduit á la définition suivante $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D_-^n f(x) &= \left(\frac{-d}{dx}\right)^m \circ J_b^{m-n} f(x) \\ &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dt^m} \int_x^{=\infty} (\tau - x)^{m-n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Remarque 4. 1. Pour $n = 0$, $m = 1$, on a $D_a^n f(x) = \frac{d}{dx}\left(J_a^1\right) = f(x)$

2. Toutes ces dérivée coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers.

Théorème 6. On assume que $n_1, n_2 \geq 0$, de plus soit $\phi \in L_1[a, b]$ et $f = J_a^{n_1+n_2}\phi$. Alors

$$D_a^{n_1} D_a^{n_2} f = D_a^{n_1+n_2} f.$$

Il n'est pas necessaire de savoir la forme explicite de la fonction, c'est suffisant de savoir quelle exists.

Preuve

Utilisons l'hypothése de f et la définition de la dérivée au sens de R-L, et pour $m_1 = [n_1] + 1$, $m_2 = [n_2] + 1$ on obtient

$$\begin{aligned} D_a^{n_1} D_a^{n_2} f &= D_a^{n_1} D_a^{n_2} J_a^{n_1+n_2} \phi \\ &= D^{m_1} J_a^{m_1-n_1} D^{m_2} J_a^{m_2-n_2} J_a^{n_1+n_2} \phi. \end{aligned}$$

En utilisant, la propriété de semi groupe de J_a^n, on trouve

$$\begin{aligned} D_a^{n_1} D_a^{n_2} f &= D^{m_1} J_a^{m_1} J_a^{-n_1} D^{m_2} J_a^{m_2} J_a^{-n_2} J_a^{n_1+n_2} \phi \\ &= J_a^{-n_1} J_a^{-n_2} J_a^{n_1+n_2} \phi \\ &= \phi. \end{aligned}$$

D'autre part, $D_a^{n_1+n_2} f = \phi$.

Théorème 7. Soit $n \geq 0$, alors pour tout $f \in L_1[a, b]$

$$D_a^n J_a^n f = f.$$

Preuve

Pour $n = 0$, c'est évident car D_a^n, J_a^n sont les opérateurs identité.

Pour $n > 0$, soit $m = [n] + 1$. Alors par la définition de D_a^n et la propriété de semi groupe de J_a^n et que pour m entier naturel $D^m J^m f = f$, on obtient

$$\begin{aligned} D_a^n J_a^n f &= D^m J_a^{m-n} J_a^n f \\ &= D^m J_a^m J_a^{-n} J_a^n f \\ &= D^m J_a^m f \\ &= f. \end{aligned}$$

Théorème 8. Soit $n > 0$, on assume que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions uniformément convergente sur $[a, b]$ et que $D_a^n f_k$ exist pour tout k. De plus, assume que $(D_a^n f_k)_{k=1}^{\infty}$ converges uniformément sur $[a + \varepsilon, b]$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$lim_{k\to\infty}(D_a^n f_k)(x) = (D_a^n lim_{k\to\infty}(f_k))\,(x).$$

En particulier, la suite $(J_a^n f_k)_{k=1}^{\infty}$ est uniformément convergente.

Preuve

Rappelons que $D_a^n f = D^m J_a^{m-n} f$, et on $(J_a^{m-n} f_k)_{k\geq 1}$ est uniformément convergente sur $[a, b]$, et on peut interchanger l'intégrale fractionnaire et la limite et par hypothése D^m de cette série converges uniformément sur chaque compact semi-itervalle de $[a, b]$. D'oú par un théorème standard de l'analyse, on peut interchanger entre la limite et l'opérateur dérivé pour $a < x \leq b$.

Corollaire 9. Soit f une fonction analytique dans $(a - h, a + h)$ pour quelque $h > 0$, et soit $n > 0$ alors $D_a^n f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} D^k f(x)$, pour $a < x < a + \frac{h}{2}$.
$D_a^n f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} D^k f(a)$, pour $a < x < a + h$.
En particulier, $D_a^n f$ est analytique sur $(a, a + h)$.

Remarque 5. Les coefficients binomials $\binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ sont définies par

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Applications

1. Soit $f(x) = (x - a)^{\beta}$, $\beta > -1$ et $n > 0$ alors

$$D_a^n f(x) = D^m J_a^{m-n} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-n+\beta+1)} D^m (x-a)^{m-n+\beta},$$

On calcule $D^m(x-a)^{m-n+\beta}$ par réccurence, on obtient

$$D_a^n f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} D^m (x-a)^{\beta-n}.$$

2. Soit $f(x) = e^{\lambda x}$, avec $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
D_a^n f(x) =& D^m J_a^{m-n} f(x) \\
&= D^m J_a^{m-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!} \\
&= D^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} J_a^{m-n} x^k \\
&= D^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{m-n+k}}{\Gamma m - n + k + 1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{k-n}}{\Gamma k - n + 1}.
\end{aligned}$$

2.3 Relations entre l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'étude des dérivées et intégration de Riemann-Liouville séparément, c'est claire que D_a^n est l'inverse á gauche de J_a^n et le théorème suivant preuve que dans certain conditions, D_a^n est aussi l'inverse á droite.

Théorème 10. Soit $n > 0$, s'il existe $\phi \in L^1[a,b]/\ f = J_a^n \phi$, alors

$$J_a^n D_a^n f = f.$$

Preuve

Par définition de f et l'effet que D_a^n est l'inverse á gauche de J_a^n, on a

$$\begin{aligned} J_a^n D_a^n f &= J_a^n (D_a^n J_a^n \phi) \\ &= J_a^n \phi \\ &= f. \end{aligned}$$

Si f ne satisfait pas les conditions du théorème, alors on obtient une présentation différente pour $J_a^n D_a^n f$.

Théorème 11. Soit $n > 0$ et $m = [n] + 1$, on assume que f est une fonction qui vérifie que $J_a^{m-n} f \in A^m[a, b]$, alors

$$J_a^n D_a^n f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{n-k-1}}{\Gamma(n-k)} \lim_{z \to a^+} D^{m-k-1} J^{m-n} f(z).$$

Développement de Taylor

Le théorème de Taylor joue un role trés important dans l'analyse mathématique, ce théorème est généraliser dans le calcul fractionnaire.

Théorème 12. (Cas classique) Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

1. $f \in A^m[a, b]$

2. Pour tout $x, y \in [a, b]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-y)^k}{k!} D^k f(y) + J^m D^m f(x).$$

Théorème 13. (Cas fractionnaire) Sous les hypothéses du théorème précédent, on a

$$f(x) = \frac{(x-a)^{n-m}}{\Gamma(n-m+1)} lim_{z \to a^+} J_a^{m-n} f(z) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^{k+n-m}}{\Gamma(k+n-m+1)} lim_{z \to a^+} D^{k+n-m} f(z) + J_a^n D_a^n f(x).$$

Examples 14. Soit $f(x) = x^3$, $a = 0$, $n = 2.8$, $m = 3$.

$$J_0^{3-2.8}(z^3) = J_0^{0.2}(z^3) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4.2)} z^{3.2}$$

D'ou $J_0^{3-2.8}(z^3) \to 0$ quand $z \to 0^+$.

$$D^{k-0.2}(z^3) = \frac{3!}{\Gamma(3-k+0.2+1)} z^{3-k+0.2} = \frac{3!}{\Gamma(3.2-k)} z^{3.2-k}$$

D'ou $D^{k-0.2}(z^3) \to 0$ quand $z \to 0^+$(car $3.2 - k > 0$).

Alors $f(x) = J_0^{2.8} D_0^{2.8}(x^3) = x^3$.

Théorème 15. La formule de Liebniez pour les opérateurs R-L, soit $n > 0$, et soit f, g des foncions analytiques sur $(a-h, a+h)$ pour quelque $h > 0$. Alors

$$D_a^n(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} \binom{n}{k} (D^k f)(D_a^{n-k} g)(x) + \sum_{k=0}^{\lceil n \rceil} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x),$$

pour $a < x < a + \frac{h}{2}$.

Preuve

Utilisons la formule dans corollaire (9), on obtient

$$\begin{aligned}
D_a^n(fg)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} D^k(fg)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j f(x) D^{k-j} g(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} \binom{k}{j} D^j f(x) D^{k-j} g(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} D^j f(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n}{l+j} \frac{(x-a)^{j+l-n}}{\Gamma(j+l-n+1)} \binom{l+j}{j} D^{k-j} g(x)
\end{aligned}$$

Utilisant la relation suivante $\binom{n}{j}\binom{n-j}{l} = \binom{l+j}{j}\binom{n}{l+j}$, on obtient

$$D_a^n(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} \binom{n}{k} (D^k f)(D_a^{n-k} g)(x) + \sum_{k=0}^{\lceil n \rceil} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x).$$

2.4 La dérivée fractionnaire de Grünwald–Letnikov

Dans le calcul différentiel, il est bien connu que la dérivée peut être éxprimer comme quotient différentille. La dérivée d'ordre 1 d'une fonction f est définie par

$$Df(x) = f'(x) = lim_{h\to 0}\frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Appliquons cette définitions deux fois donne la dérivée seconde

$$D^2f(x) = f''(x) = lim_{h\to 0}\frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2},$$

et par induction, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$D^nf(x) = f^{(n)}(x) = lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n} -1)^k \binom{n}{k} f(x-kh).$$

Notation.

$$\triangle_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} -1)^k \binom{n}{k} f(x-kh).$$

On conclure le résultat suivant.

Théorème 16. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n[a,b]$ et $a < x \leq b$, alors

$$D^nf(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\triangle_h^n f(x).$$

La dérivée de Grünwald–Letnikov est une généralisation de la dérivée donnée dans le théorème précédent. L'idée derriére ça, que $h \to 0$ quand $n \to +\infty$.

$$\begin{aligned} D_a^n f(x) &= \lim_{h\to 0} h^{-n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}f(x-kh) \\ &= \lim_{h\to 0} h^{-n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\Gamma(n)}{k!\Gamma(n-k+1)}f(x-kh). \end{aligned}$$

Tanque $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$, $n \in \mathbb{N}$, supposons que h prend les valeurs $h_N = \frac{x-a}{N}$, $N = 1, 2, ...$ Alors

$$D_a^n f(x) = \lim_{h \to 0} h_N^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\Gamma(n)}{k!\Gamma(n-k+1)} f(x - kh_N).$$

Tanque $N \to \infty$ quand $h_N \to 0$, la définition suivante est justifier.

Définition 7. Soit $n > 0$, $f \in C^{\lceil n \rceil}[a, b]$ et $a < x \leq b$, alors

$$\tilde{D}_a^n f(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{h_N^n} \triangle_{h_N}^n f(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{h_N^n} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh_N)$$

est appelée la dérivée de Grünwald–Letnikov d'ordre n de la fonction f.

Théorème 17. Soit $n > 0$, $f \in C^{\lceil n \rceil}[a, b]$ et $a < x \leq b$, alors

$$\tilde{D}_a^n f(x) = D_a^n f(x).$$

Théorème 18. Soit $n > 0$, $f \in C[a, b]$ et $a < x \leq b$ avec $h_N = \frac{x-a}{N}$, on a

$$\tilde{J}_a^n f(x) = \lim_{N \to \infty} h_N^n \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{-n}{k} f(x - kh_N).$$