Exercices 02

Exercice 1:

Calculer l'intégrale de R-L $J_0^n f(x)$ pou $n > 0$ des fonctions suivantes:

1. $f(x) = sin(\omega x)$, $\omega > 0$.
2. $f(x) = cos(\omega x)$, $\omega > 0$.
3. $f(x) = (1 + x)^{-1}$.

Exercice 2:

Soit $n > 0$, $p > max\{1, \frac{1}{n}\}$ et $\phi \in L_p[a, b]$. Alors $J_a^n \phi(x) = o((x - a)^{n-\frac{1}{p}})$.

Exercice 3:

Soit f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $[a, b]$ telque $D_a^n f_1$ et $D_a^n f_2$ exists presque partout. Montrer que pour $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $D_a^n(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 D_a^n f_1 + c_2 D_a^n f_2$.

Exercice 4:

Calculer la dérivée de R-L $D_0^n f(x)$ pour $n > 0$ des fonctions suivantes:

1. $f(x) = sin(\omega x)$, $\omega > 0$.
2. $f(x) = cos(x)$.
3. $f(x) = (1 + x)^{-2}$.

Exercice 5:

Soit $f \in A^1[a, b]$, $0 < n < 1$. Alors $D_a^n f$ exists presque partout sur $[a, b]$.
De plus, $D_a^n f \in L_p[a, b]$ pour $1 \leq p < \frac{1}{n}$ et $D_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \left(\frac{f(a)}{(x-a)^n} + \frac{d}{dx} \int_a^x f'(t) \frac{(x-t)^{1-n}}{1-n} dt \right)$

Exercice 6

Déterminer le developpement de Taylor dans les cas suivants

1. $f(x) = x^3,\ a = 0,\ n = 2.8$.
2. $f(x) = sin(x),\ a = 0,\ n = 1.2$.

Exercice 7

Montrer la formule de Leibniz' pour les opérateurs de Riemann–Liouville.