METIS LyonTech MATHÉMATIQUES

Stéphane BALAC
Frédéric STURM

ALGÈBRE et analyse

Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés

2e édition revue et augmentée

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

Algèbre et analyse

METIS LyonTech

Algèbre et analyse

Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés

2^{e} édition revue et augmentée

Stéphane BALAC
Frédéric STURM

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

Cet ouvrage paraît dans la collection METIS LyonTech qui est publiée sous la direction d'un comité d'édition placé sous la responsabilité de Sophie Vareilles (maître de conférences) et Jean-Yves Cavaillé (professeur).

Egalement disponible chez le même éditeur

Analyse et algèbre
Cours de mathématiques de deuxième année avec exercices corrigés et illustrations avec Maple
Stéphane Balac, Laurent Chupin

Introduction à la statistique
Stephan Morgenthaler

Initiation aux probabilités
Sheldon M. Ross

Algèbre linéaire
Aide-mémoire, exercices et applications
Robert C. Dalang, Amel Chaabouni

Analyse
Recueil d'exercices et aide-mémoire (vol. 1 et 2)
Jacques Douchet

Aide-mémoire d'analyse
Heinrich Matzinger

Cours de géométrie
Marc Troyanov

Introduction à la théorie des probabilités
Robert Dalang, Daniel Conus

Bien commencer ses études scientifiques – Savoir-faire en maths
Yves Biollay, Amel Chaabouni, Joachim Stubbe

Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne et de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, ainsi que d'autres universités et écoles d'ingénieurs francophones.
Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes, EPFL – Centre Midi, CH-1015 Lausanne, par E-Mail à ppur@epfl.ch, par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

http://www.ppur.org

2e edition revue et augmentée
ISBN 978-2-88074-828-9

Imprimé en Italie

Préface

L'accueil d'étudiants étrangers à l'INSA de Lyon dès la première année du cycle de formation d'ingénieur est un enrichissement pour tous. De manière originale, ce cours en est une parfaite illustration.

Ce livre est le fruit d'une longue réflexion et d'innombrables échanges d'idées entre enseignants. Il reflète également une large expérience de pratique pédagogique avec les étudiants.

Dans le cadre de la filière ASINSA qui accueille pour moitié des étudiants asiatiques (Chine, Vietnam, Inde, Malaisie, Thaïlande, Corée du Sud) et pour moitié des étudiants français, les équipes pédagogiques doivent sans cesse adapter leurs méthodes en restant dans le cadre des programmes institutionnels. Ces adaptations sont réalisées en concertation avec les différentes disciplines et ont pour objectif d'intégrer une pédagogie différentiée pour mieux répondre à l'étudiant français ou étranger. Ce cours est une parfaite illustration de cette démarche et s'adapte donc également à tout étudiant de Premier Cycle Universitaire.

Confrontés à d'autres cultures, y compris d'autres cultures scientifiques, Stéphane Balac et Frédéric Sturm ont réalisé un ouvrage adapté au plus grand nombre d'étudiants sans rien céder sur la rigueur du raisonnement. Nous avons tous à y gagner.

Denis FRIBOULET
Directeur de la filière ASINSA de 2003 à 2007
INSA de Lyon

Didier VRAY
Directeur Adjoint du Premier Cycle
chargé des filières internationales
INSA de Lyon

Avant-propos

Ce *Cours de mathématiques de première année* est issu de l'enseignement dispensé par les auteurs en première année du cycle préparatoire de l'INSA de Lyon dans la filière internationale ASINSA. Le présent ouvrage est une réédition, revue et augmentée, de l'ouvrage paru en 2003.

La filière ASINSA est l'une des trois filières internationales du premier cycle de l'INSA de Lyon. Elle regroupe étudiants français et étudiants originaires de différents pays d'Asie (Chine, Corée du Sud, Inde, Malaisie, Thaïlande, Vietnam). Compte tenu de la grande diversité du niveau de maîtrise de la langue française et de la variété des acquis mathématiques des étudiants arrivant en première année, la nécessité de disposer d'un support de cours écrit pour l'enseignement des mathématiques nous est apparue plus qu'ailleurs indispensable. Ce document a vu le jour dans un premier temps sous forme de polycopiés. Encouragés par le Professeur Bernard Balland, nous avons souhaité le rendre accessible au plus grand nombre.

Ce *Cours de mathématiques* dépasse par certains développements le cadre strict du programme habituellement couvert en première année de premier cycle de l'enseignement supérieur. Nous avons souhaité en effet en faire un document de référence que l'élève ingénieur pourra utiliser dans la suite de ses études pour approfondir ou revoir les notions d'algèbre ou d'analyse utilisées dans les enseignements de mathématiques appliquées pour l'ingénieur.

Nous nous sommes attachés dans cet ouvrage à donner des définitions précises et à présenter des raisonnements rigoureux sans toutefois chercher l'exhaustivité. Ainsi, les démonstrations « techniques » sont omises au profit de démonstrations pouvant améliorer la compréhension du résultat énoncé, illustrant l'utilisation de notions déjà introduites ou mettant en avant des idées ou méthodes susceptibles d'être réutilisées par la suite. Celles-ci sont soigneusement détaillées et commentées et une attention toute particulière a été apportée à leur rédaction. Nous ne saurions que trop insister sur l'importance d'une bonne compréhension de ces démonstrations(1), élément fondamental pour l'assimilation des notions mathématiques introduites. Par ailleurs, nous avons dans la mesure du possible cherché à motiver les notions introduites et à les illustrer par des exemples, des remarques et des mises en garde afin de rendre l'apprentissage plus dynamique. Nous avons également cherché à illustrer certaines notions mathématiques introduites dans cet ouvrage en ayant recours au logiciel de calcul formel MAPLE (2). Chaque chapitre contient de courts exercices

---

(1) Ce qui nécessite une appropriation de la démonstration passant le plus souvent par une reformulation de celle-ci. On peut considérer qu'il s'agit du meilleur moyen de s'assurer de l'assimilation des éléments antérieurs du cours.

(2) MAPLE est un produit de Maplesoft, `www.maplesoft.com`.

visant à tester la bonne compréhension des notions abordées. Il se termine par des exercices de synthèse qui font appel à la fois aux résultats présentés dans le chapitre concerné et aux notions acquises dans les chapitres antérieurs. Ces exercices, souvent issus de devoirs et d'interrogations écrites, doivent permettre d'assimiler des méthodes de raisonnement et des techniques de calcul. Tous les exercices sont intégralement corrigés en fin de chaque chapitre. Nous avons tenu à apporter le plus grand soin à la rédaction de ces corrigés en y incluant tous les détails utiles à une bonne assimilation. Enfin, nous avons essayé de fournir quelques éléments biographiques sur les mathématiciens cités dans cet ouvrage à travers formules et théorèmes afin de mieux situer les résultats présentés dans leur contexte historique.

L'enseignement des mathématiques durant les deux années du cycle préparatoire formant un tout cohérent, ce *Cours de mathématiques de première année* pourra être utilement complété par le *Cours de mathématiques de deuxième année* publié dans la même collection aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes[3].

La première édition de ce livre a fait l'objet d'une relecture attentive et a bénéficié des commentaires de Pascale STÉPHAN et d'Aimé LACHAL, Professeurs Agrégés à l'INSA de Lyon, d'Éric RANNOU, Maître de Conférences au Département de Mathématiques de l'Université de Bretagne Occidentale et de Jean-Marie BARBAROUX, Maître de Conférences au Département de Mathématiques de l'Université de Toulon et du Var. Nous tenons à leur exprimer toute notre gratitude pour cet important travail. Il nous est également particulièrement agréable de remercier Didier VRAY, Directeur Adjoint du Premier Cycle chargé des filières internationales et Denis FRIBOULET, Directeur de la filière ASINSA de 2003 à 2007, pour leur soutien et leurs encouragements à la rédaction de cet ouvrage. Pour l'accueil compréhensif et la confiance qui nous a été accordée, nous souhaitons enfin remercier Bernard BALLAND, Directeur de la Collection des Sciences Appliquées de l'INSA de Lyon, et Olivier BABEL, Directeur des Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

Les auteurs recueilleront avec intérêt toute remarque ou suggestion concernant cet ouvrage.

à Caroline, Pierre et Alexandre

Stéphane BALAC
ENSSAT
Université de Rennes 1
F-22305 Lannion

Frédéric STURM
Pôle de Mathématiques
INSA de Lyon
F-69621 Villeurbanne

[3] *Analyse et algèbre, cours de mathématiques de deuxième année*, S. BALAC, L. CHUPIN. Collection INSA de Lyon, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2008.

Table des matières

Première partie

Préliminaires

CHAPITRE 1

Introduction à la logique mathématique

Au départ de toute théorie mathématique se trouve un petit nombre d'énoncés que l'on pose comme vrais *a priori* (on les appelle des *axiomes*), à partir desquels se déduisent d'autres résultats mathématiques, ce qui permet d'enrichir les énoncés considérés comme vrais de la théorie en question. Un résultat mathématique qui mérite d'être retenu est en général qualifié de *proposition*. D'ailleurs, suivant son importance dans le cadre d'une théorie donnée, il pourra aussi être qualifié de

- *lemme* : résultat d'une importance mineure, apparaissant en général en préambule de résultats plus importants,
- *théorème* : résultat d'une importance majeure.

Notons qu'un résultat est qualifié de *corollaire* à un autre résultat si sa démonstration découle directement du résultat mathématique dont il est le corollaire. Un énoncé qui définit un nouvel objet mathématique s'appelle une *définition*.

Un résultat mathématique est donc un enoncé vrai que l'on peut déduire d'axiomes ou d'autres résultats mathématiques en s'appuyant sur des règles strictes de logique.

Le but de ce premier chapitre est de préciser certaines règles de logique sur lesquelles nous nous appuierons pour justifier les raisonnements utilisés dans nos démonstrations.

1.1 Assertion et prédicat

DÉFINITION 1.1 *Une assertion est un énoncé auquel on peut attribuer la valeur de vérité vrai* (V) *ou faux* (F), *mais jamais les deux à la fois. C'est le principe du tiers-exclu.*

Il est d'usage de noter une assertion en utilisant une lettre majuscule (par exemple P, Q, R).

Exemples

1. « Paris est la capitale de la France » est une assertion vraie.

2. L'assertion « 24 est un multiple de 2 » est vraie et « 19 est un multiple de 2 » est une assertion fausse.

3. « Alice Cooper pratique le golf » est une assertion vraie.[1]

Les énoncés que nous rencontrons le plus souvent sont d'une nature plus générale. Par exemple, considérons un entier naturel n. On ne peut pas dire si l'énoncé « n est un multiple de 2 » est vrai ou faux puisque sa valeur de vérité dépend de l'entier n. Par conséquent, l'énoncé « n est un multiple de 2 » n'est pas une assertion. On dit que c'est un prédicat.

DÉFINITION 1.2 *Soit E un ensemble. On appelle prédicat sur E un énoncé contenant des lettres appelées variables tel que quand on remplace chacune de ces variables par un élément de E, on obtienne une assertion.*

Un prédicat contenant la variable x sera noté $P(x)$ pour marquer la dépendance de sa valeur de vérité par rapport à la variable x considérée. Il est clair qu'une assertion peut s'interprèter comme un prédicat sans variable, c'est-à-dire comme un prédicat toujours vrai ou toujours faux, ce qui nous autorise à ne faire référence par la suite qu'à la notion de prédicat, englobant ainsi celle d'assertion.

Exemples

1. Comme nous l'avons mentionné, l'énoncé $P(n)$ défini par « n est un multiple de 2 » est un prédicat sur $\mathbb{N}$. Il devient une assertion quand on donne une valeur entière à n. Par exemple,

- l'assertion $P(10)$ définie par « 10 est un multiple de 2 » obtenue en remplaçant n par 10 est vraie ;
- l'assertion $P(11)$ définie par « 11 est un multiple de 2 » obtenue en remplaçant n par 11 est fausse.

2. L'énoncé $P(x, A)$ défini par « $x \in A$ » est un prédicat à deux variables. On obtient par exemple les assertions $P(1, \mathbb{N})$ et $P(1/2, \mathbb{Z})$ à partir du prédicat $P(x, A)$. Il est clair que $P(1, \mathbb{N})$ est une assertion vraie et que $P(1/2, \mathbb{Z})$ est une assertion fausse.

1.2 Les connecteurs logiques

Les connecteurs logiques permettent à partir de prédicats P, Q, R, ... de créer de nouveaux prédicats dits *prédicats composés* dont on peut déterminer la valeur de vérité à partir des valeurs de vérité de P, Q, R, ... Les cinq *connecteurs* logiques usuels sont « non », « et », « ou », « $\Longrightarrow$ » et « $\Longleftrightarrow$ ».

---

[1] Plus connu pour ses frasques scéniques, son maquillage ou son boa, Alice Cooper est aussi un joueur de Golf, de niveau tout à fait respectable. Surprenant, non ?

1.2.1 Négation, conjonction, disjonction

DÉFINITION 1.3 *La négation du prédicat P est le prédicat noté* non(P) *(ou parfois $\neg P$) qui est vrai lorsque P est faux, et est faux lorsque P est vrai.*

Il est d'usage de présenter les valeurs de vérité de non(P) en fonction des valeurs de vérité de P dans un tableau appelé *table de vérité*. Pour le connecteur logique « non », on obtient la table de vérité suivante :

P	non(P)
V	F
F	V

Exemples

1. Considérons le prédicat P défini par « 24 est un multiple de 2 ». Il s'agit d'une assertion vraie. Sa négation est « 24 n'est pas un multiple de 2 ». Il s'agit donc d'une assertion fausse.

2. À partir du prédicat « $x \in A$ », on définit le prédicat « non$(x \in A)$ » qui s'écrit « $x \notin A$ ». Par exemple, l'assertion « $1/2 \notin \mathbb{Z}$ » est vraie car l'assertion « $1/2 \in \mathbb{Z}$ » est fausse.

3. De même, à partir du prédicat $P(E)$ défini par

« E est un ensemble ayant un nombre infini d'éléments »,

on définit le prédicat non$\big(P(E)\big)$. Il est donné par

« E est un ensemble ayant un nombre fini d'éléments ».

DÉFINITION 1.4 *Soient P et Q deux prédicats.*

✗ *Le prédicat « P* et *Q », appelé conjonction de P et Q, est un prédicat qui est vrai lorsque P et Q sont vrais simultanément, et faux dans tous les autres cas. On le note aussi « $P \wedge Q$ ».*

✗ *Le prédicat « P* ou *Q », appelé disjonction de P et Q, est un prédicat qui est vrai lorsque l'un au moins des deux prédicats P et Q est vrai, et faux lorsque les deux sont faux. On le note aussi « $P \vee Q$ ».*

Les tables de vérité des deux connecteurs logiques « et » et « ou » ainsi définis sont donc :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Il est à noter que le « ou » du langage courant a un sens exclusif[2] traduisant l'alternative entre P et Q : ou bien P est vraie (et Q est fausse), ou bien Q est vraie (et P fausse), mais P et Q ne peuvent être vrais simultanément. En revanche, le « ou » logique n'est pas exclusif.

Exemples

1. Le prédicat P défini par « 10 est divisible par 2 » (c'est une assertion) est vrai. Le prédicat Q défini par « 10 est divisible par 3 » (c'est aussi une assertion) est faux. Ainsi, « P et Q » (c'est encore une assertion) est faux. En revanche, « P ou Q » est vrai.

2. On considère le prédicat $P(x)$ défini par « $x \leqslant 1$ » et le prédicat $Q(x)$ défini par « $x \geqslant 2$ » où x désigne un nombre réel. Alors, le prédicat « $P(x)$ ou $Q(x)$ » est défini par « $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 2$ ». Il est vrai si $x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$ et faux si $x \in]1, 2[$. En revanche, le prédicat « $P(x)$ et $Q(x)$ » défini par « $x \leqslant 1$ et $x \geqslant 2$ » est faux pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.2.2 Implication, équivalence

Définition 1.5 *Soient P et Q deux prédicats.*

✗ *Le prédicat « $P \Longrightarrow Q$ », appelé implication de P vers Q et on lit « P implique Q » ou encore « P entraîne Q », est un prédicat qui est faux lorsque P est vrai et Q faux, et vrai dans tous les autres cas.*

✗ *Le prédicat « $P \Longleftrightarrow Q$ », appelé équivalence de P et de Q et on lit « P équivaut à Q », est un prédicat qui est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou faux, et faux dans tous les autres cas.*

Les tables de vérités des deux connecteurs logiques « $\Longrightarrow$ » et « $\Longleftrightarrow$ » ainsi définis sont donc :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La définition de ces deux connecteurs appellent quelques commentaires.

Observons que l'implication de P vers Q, telle qu'elle est définie ci-dessus, englobe la notion d'implication du langage courant : « Si P alors Q ». En effet, si $P \Longrightarrow Q$ est vrai, et si P vrai, alors Q est vrai (ce qui correspond à la première ligne de la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$).

(2) Par exemple, la mention « fromage ou dessert » à la fin des menus dans les restaurants signifie que l'on a le choix entre prendre un fromage ou prendre un dessert, mais pas les deux à la fois !

Remarquons qu'au sens du langage courant, une implication exprime une relation de cause à effet. Ici, la cause est P et l'effet est Q. Elle signifie que pour avoir l'effet, il suffit d'avoir la cause, et en ce sens, on dit parfois que P est une *condition suffisante* pour Q. Elle signifie aussi que la situation où il y a la cause mais pas l'effet est impossible (ce qui correspond à la deuxième ligne de la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$). Bien entendu, s'il n'y a pas la cause, il peut tout de même y avoir l'effet (on retrouve ici la troisième ligne de la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$). Enfin, il se peut qu'il n'y ait ni la cause, ni l'effet (ce qui correspond cette fois-ci à la quatrième ligne de la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$).

Observons aussi que l'équivalence de P et de Q, telle qu'elle est définie ci-dessus, correspond à la notion d'équivalence du langage courant.

Remarques

1. En pratique, si P, Q et R désignent trois prédicats, alors le prédicat composé $\big((P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow R)\big)$ se note :

$$P \Longrightarrow Q \Longrightarrow R.$$

De même, le prédicat composé $\big((P \iff Q)$ et $(Q \iff R)\big)$ se note :

$$P \iff Q \iff R.$$

2. L'implication $Q \Longrightarrow P$ s'appelle l'*implication réciproque* de $P \Longrightarrow Q$.

1.2.3 Propriétés

Définition 1.6 *Soient R_1 et R_2 deux prédicats (composés ou non).*

✗ *Si R_1 est vrai lorsque R_2 est vrai et si R_1 est faux lorsque R_2 est faux alors on dit que R_1 et R_2 ont la même table de vérité ou qu'ils sont logiquement équivalents, et on note $R_1 \equiv R_2$.*

✗ *Dans le cas contraire, on note $R_1 \not\equiv R_2$.*

Exemples

1. Soit P un prédicat. Alors le prédicat P et le prédicat $\text{non}\big(\text{non}(P)\big)$ sont logiquement équivalents. En effet, grâce à la table de vérité

P	non (P)	non$\big($non $(P)\big)$
V	F	V
F	V	F

et en comparant la première colonne à la dernière colonne, on se rend compte que ces deux colonnes sont effectivement identiques. Ceci peut se résumer en disant que la double négation annule la négation. On note alors :

$$\text{non}\big(\text{non}(P)\big) \equiv P.$$

Bien évidemment, $\text{non}(P) \not\equiv P$.

2. Soit P un prédicat. On a : $(P \text{ et } P) \equiv P$. De même, $(P \text{ ou } P) \equiv P$.

3. Soient P et Q deux prédicats. On vérifie les deux équivalences logiques :

$$(P \text{ et } Q) \equiv (Q \text{ et } P), \qquad (P \text{ ou } Q) \equiv (Q \text{ ou } P).$$

Elles expriment que les deux connecteurs logiques « et » et « ou » sont commutatifs.

4. Soient P, Q, R trois prédicats. On vérifie :

$$\big((P \text{ et } Q) \text{ et } R\big) \equiv \big(P \text{ et } (Q \text{ et } R)\big), \quad \big((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R\big) \equiv \big(P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)\big).$$

Ces deux équivalences logiques expriment que les deux connecteurs logiques « et » et « ou » sont associatifs.

5. Soient P, Q deux prédicats. On a l'équivalence logique :

$$\big(P \text{ et } (P \text{ ou } Q)\big) \equiv P$$

que l'on peut vérifier en comparant la première colonne et la dernière colonne de la table de vérité suivante :

P	Q	P ou Q	P et (P ou Q)
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

6. Soient P et Q deux prédicats. On a l'équivalence logique :

$$(P \iff Q) \equiv (Q \iff P).$$

7. Soient P et Q deux prédicats. On a alors l'équivalence logique :

$$\Big[\big(\text{non}(P) \implies Q\big) \text{ et } \big(\text{non}(P) \implies \text{non}(Q)\big)\Big] \equiv P.$$

Vérifions cette équivalence logique. Par commodité, désignons par R le prédicat composé « $\big(\text{non}(P) \implies Q\big)$ et $\big(\text{non}(P) \implies \text{non}(Q)\big)$ ». On doit donc vérifier que « $P \equiv R$ ». C'est immédiat en écrivant la table de vérité :

P	Q	non(P)	non(Q)	non(P) $\implies Q$	non(P) $\implies$ non(Q)	R
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F

Il suffit alors de comparer la première colonne (celle de P) et la dernière colonne (celle de R) entre elles. Elles sont identiques, ce qui signifie que P et R

sont logiquement équivalents. C'est sur cette équivalence logique que nous nous appuierons pour justifier un raisonnement par l'absurde (voir page 17).

DÉFINITION 1.7 *Un prédicat composé R qui est vrai quelles que soient les valeurs de vérité des prédicats qui le composent, est appelé une tautologie.*

Exemples

1. Le prédicat composé « P ou non (P) », construit par disjonction d'un prédicat P et de sa négation, est vrai quelle que soit la valeur de vérité du prédicat P. C'est donc une tautologie. Cela se vérifie en écrivant sa table de vérité :

P	non (P)	P ou non (P)
V	F	V
F	V	V

et en ne constatant que la présence de la valeur de vérité V dans la colonne de « P ou non (P) ».

2. Soient P, Q, R trois prédicats. Vérifions que le prédicat composé

$$\big((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow R)\big) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$$

est vrai quelles que soient les valeurs de vérité de P, Q et R. Par commodité, désignons par A le prédicat « $P \Longrightarrow Q$ », par B le prédicat « $Q \Longrightarrow R$ » et par C le prédicat « $P \Longrightarrow R$ ». On doit donc montrer que « $(A \text{ et } B) \Longrightarrow C$ » est toujours vrai. Écrivons la table de vérité :

P	Q	R	A	B	A et B	C	$(A \text{ et } B) \Longrightarrow C$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Puisque la dernière colonne ne comporte que la valeur de vérité V, le prédicat $\big((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow R)\big) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ est donc une tautologie. Elle exprime que l'implication est transitive.

3. Si P, Q et R désignent trois prédicats, on montre de la même manière que le prédicat composé

$$\big((P \iff Q) \text{ et } (Q \iff R)\big) \Longrightarrow (P \iff R)$$

est vrai quelles que soient les valeurs de vérité des prédicats P, Q et R. On dit alors que l'équivalence est transitive.

4. Soient P et Q deux prédicats. Alors on peut vérifier (le faire) que le prédicat composé $\big(P \text{ et } (P \Longrightarrow Q)\big) \Longrightarrow Q$ est vrai quelles que soient les valeurs de vérité de P et Q.

Définition 1.8 *Deux prédicats composés sont dits incompatibles si leur conjonction est fausse quelles que soient les valeurs de vérité des prédicats qui les composent.*

Exemples

1. Le prédicat P et le prédicat non(P) sont incompatibles car

P	non (P)	P et non(P)
V	F	F
F	V	F

Ce résultat est bien connu. Il exprime qu'on ne peut avoir à la fois quelque chose et son contraire.

2. Les deux prédicats « $x \leqslant 1$ » et « $x \geqslant 2$ » sont incompatibles.

Proposition 1.1 *Soient P, Q, R trois prédicats.*

✗ *On a alors les équivalences logiques suivantes, appelées lois de Morgan pour les prédicats :*

$$\text{non}\,(P \text{ ou } Q) \equiv \big(\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)\big),$$

$$\text{non}\,(P \text{ et } Q) \equiv \big(\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)\big).$$

✗ *On a aussi les équivalences logiques suivantes :*

$$\big(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)\big) \equiv \big((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)\big),$$

$$\big(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big) \equiv \big((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)\big).$$

Elles expriment la distributivité du « ou » *(respectivement du* « et »*) par rapport au* « et » *(resp. au* « ou »*).*

Démonstration La démonstration pour chacune des quatre équivalences logiques consiste en la comparaison des tables de vérité des prédicats à gauche et à droite du symbole d'équivalence logique. Montrons à titre d'exemple la première loi de Morgan. On a :

P	Q	P ou Q	non $(P$ ou $Q)$	non (P)	non (Q)	non (P) et non (Q)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

En comparant la quatrième colonne et la dernière colonne, on se rend compte qu'elles sont identiques, d'où non$(P$ ou $Q) \equiv \big(\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)\big)$. □

Proposition 1.2 *Soient P et Q deux prédicats. On a alors les équivalences logiques suivantes :*

✗ $(P \implies Q) \equiv (\text{non}(P) \text{ ou } Q)$;

✗ $\text{non}(P \implies Q) \equiv (P \text{ et non}(Q))$;

✗ $(P \implies Q) \equiv (\text{non}(Q) \implies \text{non}(P))$;

✗ $(P \iff Q) \equiv ((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P))$.

Démonstration Montrons les quatre équivalences logique.

⊵ Commençons par montrer que « $P \implies Q$ » et « non(P) ou Q » sont logiquement équivalents. Écrivons la table de vérité de « non(P) ou Q » :

P	Q	non(P)	non(P) ou Q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

L'équivalence logique s'en déduit en comparant la dernière colonne de la table de vérité donnée ci-dessus avec la dernière colonnne de la table de vérité de « $P \implies Q$ » donnée en page 6.

⊵ Utilisons la propriété démontrée ci-dessus :

$$\text{non}(P \implies Q) \equiv \text{non}(\text{non}(P) \text{ ou } Q).$$

Or, non(non(P) ou Q) $\equiv$ (non(non(P)) et non(Q)) d'après la première loi de Morgan. On a donc :

$$\text{non}(P \implies Q) \equiv (\text{non}(\text{non}(P)) \text{ et non}(Q)) \equiv (P \text{ et non}(Q))$$

car non(non(P)) $\equiv P$.

⊵ Utilisant à nouveau la première propriété, on a :

$$(\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)) \equiv (\text{non}(\text{non}(Q)) \text{ ou non}(P)).$$

Or, non(non(Q)) $\equiv Q$. Utilisant la commutativité du « ou », on obtient :

$$(\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)) \equiv (\text{non}(P) \text{ ou } Q).$$

D'où, en remarquant que (non(P) ou Q) $\equiv (P \implies Q)$,

$$(\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)) \equiv (P \implies Q).$$

$\trianglerighteq$ Écrivons la table de vérité de « $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$ ». On a :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La dernière colonne de la table de vérité donnée ci-dessus est identique à la dernière colonnne de la table de vérité de « $P \iff Q$ » donnée en page 6, ce qui établit la quatrième propriété. $\square$

Exemples

1. Soient A et B deux ensembles finis. On a :

$$\big(A \subset B \Longrightarrow \operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(B)\big) \equiv \big(\operatorname{card}(A) > \operatorname{card}(B) \Longrightarrow A \not\subset B\big).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\big(n^2 \text{ pair} \Longrightarrow n \text{ pair}\big) \equiv \big(n \text{ impair} \Longrightarrow n^2 \text{ impair}\big)$.

Soient P et Q deux prédicats. L'implication « non$(Q) \Longrightarrow$ non(P) » s'appelle la *contraposée* de l'implication « $P \Longrightarrow Q$ ». On dit aussi que l'implication « non$(Q) \Longrightarrow$ non(P) » s'obtient par contraposition de « $P \Longrightarrow Q$ ».

Si on interprète l'implication de P vers Q comme une relation de cause (ici P) à effet (ici Q), alors sa contraposée traduit le fait que de l'absence de l'effet on peut déduire l'absence de la cause. En ce sens, on dit parfois que Q est une *condition nécessaire* pour P. D'après la proposition 1.2, une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes. En revanche, il est clair, en comparant la troisième colonne et la quatrième colonne dans la table de vérité donnée à la fin de la démonstration de la proposition 1.2, que les deux implications « $P \Longrightarrow Q$ » et « $Q \Longrightarrow P$ » ne sont pas logiquement équivalentes. On écrit alors :

$$P \Longrightarrow Q \not\equiv Q \Longrightarrow P.$$

L'équivalence de P et Q s'appelle *double-implication*. Elle se lit aussi « Pour que P, il faut et il suffit que Q » et on dit que P (respectivement Q) est une *condition nécessaire et suffisante* pour Q (resp. pour P).

Remarque Il est immédiat, d'après la proposition 1.2, que les deux prédicats composés « $P \Longrightarrow P$ » et « $P \iff P$ » sont vrais quelle que soit la valeur de vérité de P. Ce sont donc deux tautologies.

1.3 Les quantificateurs mathématiques

1.3.1 Quantificateurs simples

À partir d'un prédicat $P(x)$ défini sur un ensemble E, on peut construire de nouvelles assertions dites *assertions quantifiées* en utilisant les *quantificateurs* « il existe » et « quel que soit ».

DÉFINITION 1.9 *Soit $P(x)$ un prédicat défini sur un ensemble E.*

✗ *Le quantificateur « quel que soit » (appelé aussi « pour tout ») noté $\forall$, permet de définir l'assertion quantifiée « $\forall x \in E \;\; P(x)$ » qui est vraie lorsque tous les éléments x de E vérifient $P(x)$.*

✗ *Le quantificateur « il existe », noté $\exists$, permet de définir l'assertion quantifiée « $\exists\, x \in E \;\; P(x)$ » qui est vraie lorsqu'on peut trouver (au moins) un élément x appartenant à E vérifiant l'énoncé $P(x)$.*

Le quantificateur « quel que soit » est qualifié d'*universel* et le quantificateur « il existe » d'*existentiel.*

Exemples

1. L'énoncé « $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ » est un prédicat. Il peut être vrai ou faux selon la valeur de x. L'énoncé « $\forall x \in [-3, 1] \;\; x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ » est une assertion (quantifiée). Elle est vraie puisque la quantité $x^2 + 2x - 3$ est négative ou nulle pour tout x appartenant à l'intervalle fermé $[-3, 1]$ où -3 et 1 sont précisément les deux solutions de l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$.

2. L'assertion quantifiée « $\forall n \in \mathbb{N} \;\; (n-3)n > 0$ » est fausse puisque qu'il existe un élément n de $\mathbb{N}$ (prendre $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ ou $n = 3$) pour lequel l'énoncé « $(n-3)n > 0$ » est faux.

3. L'énoncé « Si le carré d'un entier naturel est pair alors cet entier est pair » s'écrit : « $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \big(n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}\big)$ ». Il est vrai. Nous le montrerons au paragraphe 1.4.2.

4. L'assertion quantifiée « $\exists\, x \in \mathbb{R} \;\; x^2 = 4$ » est vraie car il existe (au moins) un élément de $\mathbb{R}$ qui vérifie $x^2 = 4$. C'est le cas des deux réels -2 et 2.

Observons que dans une assertion quantifiée, par exemple dans « $\forall x \in E \;\; P(x)$ », la lettre x pourrait être remplacée par n'importe quelle autre lettre ; cela ne changerait ni le sens, ni la valeur de vérité de l'assertion quantifiée. En ce sens, on dit que x est une *variable muette.* On pourrait par exemple écrire « $\forall x \in E \;\; P(x)$ » sous l'une des formes suivantes :

$$\forall y \in E \;\; P(y), \quad \forall \alpha \in E \;\; P(\alpha), \quad \forall \ell \in E \;\; P(\ell),$$

Remarques

1. Suivant l'expression « Qui peut le plus, peut le moins », il est clair que l'assertion quantifiée « $\exists\, x \in E \;\; P(x)$ » est automatiquement vérifiée dès lors que l'assertion quantifiée « $\forall x \in E \;\; P(x)$ » l'est. Par exemple, l'assertion quantifiée « $\exists\, x \in [-3, 1] \;\; x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ » est vraie puisque l'assertion quantifiée « $\forall x \in [-3, 1] \;\; x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ » est vraie.

2. Lorsqu'il existe un élément de E vérifiant $P(x)$, cela n'exclut en aucun cas la possibilité qu'il en existe plusieurs. S'il en existe un et un seul, on pourra écrire :

$$\exists\,!\, x \in E \quad P(x)$$

et on dira qu'il existe un unique élément x de E vérifiant $P(x)$.

Règles de négation d'une assertion quantifiée

La négation de « pour tout élément x de E l'énoncé $P(x)$ est vrai » est « il existe un élément x de E pour lequel l'énoncé $P(x)$ est faux » et la négation de « il existe un élément x de E pour lequel l'énoncé $P(x)$ est vrai » est « pour tout élément x de E l'énoncé $P(x)$ est faux ». Autrement dit,

$$\text{non}\big(\forall x \in E \;\, P(x)\big) \equiv \exists\, x \in E \;\, \text{non}\big(P(x)\big),$$
$$\text{non}\big(\exists\, x \in E \;\, P(x)\big) \equiv \forall x \in E \;\, \text{non}\big(P(x)\big).$$

Par exemple, si $P(x)$ et $Q(x)$ désignent deux prédicats définis sur E alors

$$\begin{aligned}\text{non}\Big[\forall x \in E \;\, \Big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\Big)\Big] \quad &\equiv \quad \exists\, x \in E \;\, \text{non}\Big[P(x) \Longrightarrow Q(x)\Big] \\ &\equiv \quad \exists\, x \in E \;\, \Big(P(x) \text{ et non}\big(Q(x)\big)\Big)\end{aligned}$$

car « $\text{non}\big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)$ » est équivalent logiquement à « $P(x)$ et $\text{non}\big(Q(x)\big)$ » (voir la proposition 1.2, page 11). On en déduit :

$$\begin{aligned}&\text{non}\Big[\forall x \in E \;\, \big(P(x) \iff Q(x)\big)\Big] \\ &\equiv \; \exists\, x \in E \;\, \Big[\Big(P(x) \text{ et non}\big(Q(x)\big)\Big) \text{ ou } \Big(\text{non}\big(P(x)\big) \text{ et } Q(x)\Big)\Big].\end{aligned}$$

Remarque En pratique, il arrive parfois de manipuler des assertions quantifiées dont le sens est correct mais dont l'écriture ne l'est pas. Considérons par exemple l'énoncé « tout nombre réel x positif ou nul et inférieur ou égal à 1 vérifie l'inégalité $x^2 \leqslant x$ ». Son écriture à l'aide des quantificateurs est :

$$\forall x \in \{u \in \mathbb{R}_+ \,|\, u \leqslant 1\} \quad x^2 \leqslant x. \tag{1}$$

On rencontre parfois cet énoncé écrit de manière abusive sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x \leqslant 1 \quad x^2 \leqslant x. \tag{2}$$

Cette dernière écriture est incorrecte car elle gène la compréhension de l'énoncé mathématique. Pour bien se rendre compte que l'assertion (2) est ambiguë du point de vue de la logique, il suffit d'essayer d'en écrire la négation. Il est clair que la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}_+$» s'écrit « $\exists x \in \mathbb{R}_+$». Par contre, on ne sait pas quoi prendre pour la négation de « $x \leqslant 1 \;\; x^2 \leqslant x$ ». Faut-il prendre « $x > 1$ et $x^2 > x$ » ou bien « $x > 1$ ou $x^2 > x$ » ? Pour répondre à cette question, établissons la négation de l'assertion (1) écrite en respectant les règles de logique. On a :

$$\text{non}\Big(\forall x \in \{u \in \mathbb{R}_+ \mid u \leqslant 1\} \; x^2 \leqslant x\Big) \;\equiv\; \exists x \in \{u \in \mathbb{R}_+ \mid u \leqslant 1\} \; x^2 > x.$$

On se rend compte que la négation ne correspond à aucune des deux formes proposées puisqu'en écrivant la négation de l'assertion (1) sous une forme analogue à l'assertion (2), on a :

$$\exists x \in \mathbb{R}_+ \quad x \leqslant 1 \quad x^2 > x.$$

1.3.2 Quantificateurs multiples

Considérons maintenant un prédicat $P(x,y)$ à deux variables où x et y représentent respectivement un élément d'un ensemble E et un élément d'un l'ensemble F. L'énoncé « $\forall y \in F \;\; P(x,y)$ » est encore un prédicat puisque sa valeur de vérité dépend de la variable x appartenant à E. En revanche, l'énoncé « $\forall x \in E \; \forall y \in F \;\; P(x,y)$ » est une assertion. Elle est définie comme suit.

DÉFINITION 1.10 *Soit $P(x,y)$ un prédicat défini sur les ensembles E et F.*

✗ *L'assertion quantifiée « $\forall x \in E \; \forall y \in F \;\; P(x,y)$ » est vraie lorsque tous les éléments x de E et tous les éléments y de F vérifient $P(x,y)$.*

✗ *L'assertion quantifiée « $\exists\, x \in E \; \exists\, y \in F \;\; P(x,y)$ » est vraie lorsqu'il existe (au moins) un élément x appartenant à E et lorsqu'il existe (au moins) un élément y appartenant à F vérifiant $P(x,y)$.*

Exemples

1. L'assertion quantifiée « $\forall x \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; (1+x)^n \geqslant 1$ » est vraie.

2. L'assertion quantifiée « $\exists\, x \in \mathbb{R} \; \exists\, y \in \mathbb{R} \;\; x+y=5$ » est vraie. Il suffit de considérer par exemple $x=2$ et $y=3$ (ou encore $x=-2$ et $y=7$).

3. On se convainc facilement de l'équivalence logique suivante :

$$\big(\exists\,!\, x \in E \;\; P(x)\big) \equiv \big(R_1 \text{ et } R_2\big)$$

où l'assertion R_1 est définie par « $\exists x \in E \;\; P(x)$ » et où R_2 est définie par :

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad \Big(\big(P(x) \text{ et } P(x')\big) \implies x = x'\Big).$$

L'assertion R_1 traduit l'existence d'un élément x vérifiant $P(x)$ et l'assertion R_2 traduit l'unicité de cet élément.

Règles d'utilisation des quantificateurs multiples

La plupart des énoncés mathématiques demandent, pour être correctement formalisés, l'usage successif de quantificateurs différents. On peut ainsi construire de nouvelles assertions quantifiées en combinant à souhait les deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$ définis précédemment. Par exemple, l'assertion « tout nombre réel positif ou nul possède une racine carrée positive ou nulle » s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \exists\, u \in \mathbb{R}_+ \quad u^2 = x.$$

L'utilisation de quantificateurs multiples doit cependant s'effectuer dans le respect de certaines règles.

– RÈGLE 1 : on peut permuter deux quantificateurs identiques.

$$\Big(\forall x \in E \; \forall y \in F \;\; P(x,y)\Big) \equiv \Big(\forall y \in F \; \forall x \in E \;\; P(x,y)\Big),$$

$$\Big(\exists\, x \in E \; \exists\, y \in F \;\; P(x,y)\Big) \equiv \Big(\exists\, y \in F \; \exists\, x \in E \;\; P(x,y)\Big).$$

– RÈGLE 2 : on ne peut pas permuter deux quantificateurs différents.

$$\Big(\exists y \in F\ \forall x \in E\ \ P(x,y)\Big) \not\equiv \Big(\forall x \in E\ \exists y \in F\ \ P(x,y)\Big).$$

Par exemple, « $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x \leqslant y$ » est une assertion vraie puisque si x désigne un réel quelconque, alors, en prenant $y = x + 1$ on a : $x \leqslant y$. En revanche l'assertion « $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ x \leqslant y$ » est fausse puisque l'ensemble des nombres réels n'est pas borné.

1.4 Les différents modes de démonstration en mathématique

1.4.1 Raisonnement par hypothèse auxiliaire

Un raisonnement par hypothèse auxiliaire s'appuie sur la tautologie suivante :

$$\Big(P \text{ et } (P \implies Q)\Big) \implies Q.$$

Ainsi, si l'énoncé P est vrai et si l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie alors l'énoncé Q est nécessairement vrai. C'est la méthode de démonstration la plus courante.

Exemple Soient $A = \{2, -3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\}$. Pour montrer que $A = B$ on utilise l'implication

$$\Big(A \subset B \text{ et } \operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)\Big) \implies A = B. \tag{3}$$

Elle sera démontrée au chapitre suivant (voir le corollaire 2.1, page 30). Ici, P est « $A \subset B$ et $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$ » et Q est « $A = B$ ». Commençons par montrer que l'énoncé P est vrai. D'une part, $A \subset B$ car 2 et -3 sont des solutions de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$, et d'autre part, $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$ car le trinôme $x^2 + x - 6$, de discriminant strictement positif, possède deux racines réelles distinctes. Puisque l'implication (3) est vraie, on obtient finalement que l'énoncé Q est vrai, autrement dit que l'égalité ensembliste $A = B$ est vraie.

1.4.2 Raisonnement par contraposée

Il sert à démontrer qu'une implication « $P \Longrightarrow Q$ » est vraie. Il s'appuie sur l'équivalence logique suivante (voir la proposition 1.2) :

$$\big(P \implies Q\big) \equiv \big(\operatorname{non}(Q) \implies \operatorname{non}(P)\big).$$

Au lieu de montrer que l'implication « $P \Longrightarrow Q$ » est vraie, le raisonnement par contraposée consiste à montrer que l'implication « $\operatorname{non}(Q) \Longrightarrow \operatorname{non}(P)$ » est vraie. On fait donc l'hypothèse que l'énoncé $\operatorname{non}(Q)$ est vrai et on montre que ceci implique que l'énoncé $\operatorname{non}(P)$ est vrai.

Exemples

1. Montrons en utilisant un raisonnement par contraposée l'assertion suivante : « $\forall n \in \mathbb{N} \ \big(n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}\big)$ ». Pour cela, montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(\text{non}(n \text{ pair}) \implies \text{non}(n^2 \text{ pair})\big),$$

autrement dit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \text{ impair} \implies n^2 \text{ impair}\big).$$

Soit n un entier naturel. Supposons n impair. Cela signifie qu'il existe p appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. On a alors :

$$n^2 = (2p+1)^2 = 2(2p^2 + 2p) + 1.$$

On a ainsi écrit n^2 sous la forme $n^2 = 2q + 1$ avec $q = 2p^2 + 2p$ dans $\mathbb{N}$. Le nombre n^2 est donc impair et le résultat est démontré.

2. Montrons que « $\forall x \in \mathbb{R} \ \big((\forall \varepsilon > 0 \ |x| < \varepsilon) \implies x = 0\big)$ ». Utilisons pour cela un raisonnement par contraposée. On doit donc montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(\text{non}(x = 0) \implies \text{non}\big(\forall \varepsilon > 0 \ |x| < \varepsilon\big)\Big),$$

autrement dit que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(x \neq 0 \implies \big(\exists \varepsilon > 0 \ |x| \geqslant \varepsilon\big)\Big)$$

puisque

$$\text{non}\big(\forall \varepsilon > 0 \ |x| < \varepsilon\big) \equiv \Big(\exists \varepsilon > 0 \ \text{non}\left(|x| < \varepsilon\right)\Big) \equiv \Big(\exists \varepsilon > 0 \ |x| \geqslant \varepsilon\Big).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $x \neq 0$ et montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x| \geqslant \varepsilon$. C'est immédiat. Il suffit en effet de prendre $\varepsilon = |x|/2$ puisque $|x|/2$ est strictement positif et $|x| \geqslant |x|/2$. D'une manière plus générale, $\varepsilon = |x|/\alpha$ avec $\alpha \geqslant 1$ convient aussi puisque, pour tout réel $\alpha \geqslant 1$, $|x|/\alpha > 0$ et $|x| \geqslant |x|/\alpha$.

> Pour montrer qu'une assertion quantifiée de la forme « $\forall x \in E \ P(x)$ » est vraie (avec E un ensemble infini), vérifier que l'énoncé $P(x)$ est vrai pour un élément particulier de E ne constitue en aucun cas une démonstration. Il faut le vérifier pour tous les éléments de E. La bonne démarche consiste à se donner un élément quelconque x appartenant à l'ensemble E et à démontrer que l'énoncé $P(x)$ est vrai pour cet élément x.

1.4.3 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'un énoncé P est vrai, un raisonnement par l'absurde consiste à montrer que sa négation, l'énoncé non(P), entraîne un énoncé Q et son contraire non(Q). Il s'appuie sur l'équivalence logique :

$$\Big(\big(\text{non}(P) \implies Q\big) \text{ et } \big(\text{non}(P) \implies \text{non}(Q)\big)\Big) \equiv P.$$

En pratique, on suppose l'énoncé non(P) comme étant vrai et on cherche alors un énoncé (noté Q ci-dessus) qui, sous cette hypothèse, serait à la fois vrai et faux. On dit que l'on a obtenu une contradiction ou que l'hypothèse est contradictoire.

Exemple Montrons en utilisant un raisonnement par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Rappelons que $\sqrt{2}$ est, par définition, le nombre réel positif dont le carré vaut 2. Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ avec p et q premiers entre eux (c'est-à-dire sans diviseur commun autre que 1) tel que $\sqrt{2} = p/q$. Élevons au carré l'égalité $\sqrt{2} = p/q$. On obtient :

$$2 = p^2/q^2$$

ou encore $2q^2 = p^2$, d'où p^2 est pair. D'après l'exemple précédent, on en déduit que p est pair. Il existe donc m appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $p = 2m$. En remplaçant alors p par $2m$ dans $p^2 = 2q^2$, on obtient :

$$(2m)^2 = 2q^2$$

ou encore $2m^2 = q^2$, ce qui signifie que q^2 est pair. On en déduit alors que q est pair (voir l'exemple précédent), ce qui signifie qu'il existe m' appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $q = 2m'$. On a donc fait apparaître un diviseur commun à p et q (à savoir le nombre 2), ce qui est contraire à notre hypothèse « p et q sont premiers entre eux ». La démonstration par l'absurde de « $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ » est terminée.

Remarque Ce mode de raisonnement est souvent utilisé pour montrer qu'une implication « $A \Longrightarrow B$ » est vraie. Rappelons l'équivalence logique suivante :

$$\text{non}\big(A \implies B\big) \equiv \big(A \text{ et non}(B)\big).$$

Pour montrer par l'absurde que l'implication « $A \Longrightarrow B$ » est vraie, on suppose l'énoncé A et l'énoncé non (B) comme étant vrais et on montre que cela conduit à une contradiction.

Exemple Soient x et y deux nombres rationnels. Montrons l'équivalence :

$$x + y\sqrt{2} = 1 \iff \big(x = 1 \;\text{ et }\; y = 0\big).$$

Montrons dans un premier temps que « $x + y\sqrt{2} = 1 \Longrightarrow \big(x = 1 \;\text{ et }\; y = 0\big)$ » en utilisant un raisonnement par l'absurde. Supposons d'une part que

$$x + y\sqrt{2} = 1, \tag{4}$$

et d'autre part que $x \neq 1$ ou $y \neq 0$. Supposons d'abord $y \neq 0$. Alors, de (4) il vient :

$$\sqrt{2} = (1 - x)/y. \tag{5}$$

Puisque x et y appartiennent à $\mathbb{Q}$, il est clair que $(1-x)/y$ appartient aussi à $\mathbb{Q}$. L'égalité (5) signifie ainsi que $\sqrt{2}$ est égal à un nombre rationnel, ce qui est absurde puisqu'il a été démontré plus haut que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. L'hypothèse $y \neq 0$ est donc fausse, ce qui signifie que y est nul. Supposer $x \neq 1$ (avec $y = 0$) est bien évidemment en contradiction avec (4), ce qui termine la démonstration de l'implication « $x + y\sqrt{2} = 1 \Longrightarrow \big(x = 1 \text{ et } y = 0\big)$ ». Sa réciproque, l'implication « $\big(x = 1 \text{ et } y = 0\big) \Longrightarrow x + y\sqrt{2} = 1$ » est immédiate. L'équivalence est donc démontrée.

1.4.4 Raisonnement par contre-exemple

Un raisonnement par contre-exemple sert à démontrer qu'une assertion quantifiée de la forme « $\forall x \in E \;\; P(x)$ » est fausse. Pour cela, on démontre que sa négation est vraie. On a vu que

$$\operatorname{non}\big(\forall x \in E \;\; P(x)\big) \equiv \Big(\exists\, x \in E \;\; \operatorname{non}\big(P(x)\big)\Big).$$

Ainsi, pour montrer que « $\forall x \in E \;\; P(x)$ » est une assertion fausse, la méthode consiste à exhiber un élément x de E ne vérifiant pas $P(x)$.

Exemples

1. « toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est soit paire soit impaire » est une assertion fausse puisqu'on peut trouver une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est ni paire, ni impaire. C'est par exemple le cas de l'application $x \longmapsto \exp(x)$.

2. Considérons l'assertion quantifiée « $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \big(|x| < \varepsilon \implies x = 0\big)$ ». Il s'agit d'une assertion fausse puisqu'on peut trouver un réel x et un réel $\varepsilon > 0$ pour lesquels l'implication « $|x| < \varepsilon \Longrightarrow x = 0$ » est fausse, autrement dit vérifiant « $|x| < \varepsilon$ et $x \neq 0$ ». Il suffit par exemple de prendre $x = 1$ et $\varepsilon = 2$.

> Il ne faut pas confondre l'assertion quantifiée
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \big(|x| < \varepsilon \implies x = 0\big) \tag{6}$$
>
> avec l'assertion quantifiée
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(\big(\forall \varepsilon > 0 \quad |x| < \varepsilon\big) \Longrightarrow x = 0\Big). \tag{7}$$
>
> Les différences entre ces deux assertions apparaissent seulement au niveau des parenthèses. L'assertion (6) est fausse (nous venons d'en exhiber un contre-exemple) tandis que l'assertion (7) est vraie (nous l'avons démontrée en utilisant un raisonnement par contraposée, voir § 1.4.2). D'où l'importance des parenthèses dans les écritures !

1.4.5 Raisonnement par récurrence

De nombreux résultats s'expriment sous la forme « $\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n)$ ». Une démonstration par récurrence permet de montrer qu'une telle assertion quantifiée est vraie. Son principe exprime le fait que si la propriété $P(0)$ est vraie et si l'implication « $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ » est vraie (on dit alors que $P(n)$ est une propriété héréditaire), alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

La méthodologie consiste à :
- vérifier que la propriété $P(0)$ est vraie ;
- puis démontrer que si la propriété $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie. La propriété $P(n)$ supposée vraie est appelée *hypothèse de récurrence.*

Comme l'illustre l'exemple suivant, un raisonnement par récurrence peut être utilisé si la propriété $P(n)$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n_0 où n_0 désigne un entier naturel non nécessairement égal à 0. Dans ce cas précis, la première étape consistera à montrer que la propriété $P(n_0)$ est vraie.

Exemple Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1+2+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3.$$

Soit $P(n)$ la propriété : $(1+2+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$. La propriété $P(1)$ est vraie car $1^2 = 1^3$. Soit n un entier naturel non nul. Montrons que l'implication « $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ » est vraie. Supposons la propriété vraie au rang n (c'est l'hypothèse de récurrence) et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire montrons que

$$(1+2+\ldots+n+1)^2 = 1^3+2^3+\ldots+(n+1)^3.$$

Partons du terme de gauche pour arriver au terme de droite (c'est ici plus simple). Posons $S = 1+2+\ldots+n$. On a :

$$(1+2+\ldots+n+1)^2 = (S+(n+1))^2 = S^2+2(n+1)S+(n+1)^2.$$

Or, S, qui est la somme des n premiers entiers, vaut aussi $n(n+1)/2$ et, par ailleurs, d'après l'hypothèse de récurrence, $S^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$. On a donc :

$$\begin{aligned}(1+2+\ldots+n+1)^2 &= 1^3+2^3+\ldots+n^3+n(n+1)^2+(n+1)^2\\ &= 1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3.\end{aligned}$$

Nous avons ainsi montré que pour tout entier naturel n non nul, l'implication « $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ » était vraie. Le principe de récurrence permet alors d'affirmer que l'égalité $(1+2+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Récurrence multiple

Soient q un entier naturel non nul et $P(n)$ une propriété définie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$. Si les propriétés $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n_0+q-1)$ sont vraies et si l'implication $\big(P(n) \text{ et } P(n+1) \text{ et } \ldots \text{ et } P(n+q-1)\big) \Longrightarrow P(n+q)$ est vraie, alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$. On parle alors de *récurrence multiple.* En particulier, on parle de *récurrence double* si $q = 2$ et de *récurrence triple* si $q = 3$.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \tag{8}$$

Cherchons l'expression de u_n en fonction de n. Pour cela, commençons par calculer les premières valeurs prises par u_n. Nous les avons regroupées pour n variant de 0 à 7 dans le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	2	3	5	9	17	33	65	129

On se rend compte que $u_n = 2^n + 1$ pour $n \in \{0, 1, \ldots, 7\}$. Montrons que ce résultat est en fait vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n + 1.$$

Utilisons un raisonnement par récurrence (ici une récurrence double s'impose). Soit $P(n)$ la propriété : $u_n = 2^n + 1$. Les propriétés $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies car $u_0 = 2 = 2^0 + 1$ et $u_1 = 3 = 2^1 + 1$. Soit n un entier naturel. Montrons que l'implication « $\big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \Longrightarrow P(n+2)$ » est vraie. Supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ (c'est notre hypothèse de récurrence), c'est-à-dire supposons que $u_n = 2^n + 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 1$, et montrons qu'elle est vraie au rang $n+2$, c'est-à-dire montrons que

$$u_{n+2} = 2^{n+2} + 1.$$

En remplaçant u_n par $2^n + 1$ et u_{n+1} par $2^{n+1} + 1$ dans la relation de récurrence (8), on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1) \;=\; 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n + 1 \\ &= 2 \times 2^{n+1} + 1 \;=\; 2^{n+2} + 1. \end{aligned}$$

Nous avons montré que l'implication « $\big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \Longrightarrow P(n+2)$ » était vraie pour tout entier naturel n. Le principe de récurrence multiple permet alors d'affirmer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, autrement dit que $u_n = 2^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

CHAPITRE 2

Structures fondamentales

2.1 Ensemble et sous-ensemble

2.1.1 Généralités sur les ensembles

On peut définir de manière intuitive un *ensemble* comme la réunion dans une même entité de certains objets bien déterminés. On appelle ces objets les *éléments* de l'ensemble. Ce ne sont pas nécessairement des nombres.

Il est d'usage de noter un ensemble en utilisant une lettre majuscule et un élément en utilisant une lettre minuscule. Ainsi, pour signifier que x est un élément de l'ensemble E on écrit $x \in E$ et on lit « *x appartient à E* ». Si x n'est pas un élément de E on écrit $x \notin E$ et on dit que « *x n'appartient pas à E* ». Si x et y sont deux éléments de E, on notera $x = y$ si ces éléments sont égaux et $x \neq y$ s'ils sont différents.

Exemples usuels d'ensembles de nombres :

$\mathbb{N}$	ensemble des nombres entiers naturels,
$\mathbb{Z}$	ensemble des nombres entiers relatifs,
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels,
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels,
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes.

Signalons que nous devons la notation $\mathbb{Z}$ au mathématicien allemand Richard Dedekind (du mot allemand *zahl* qui signifie « nombre ») et les notations $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ au mathématicien italien Giuseppe Peano (des mots italiens *naturale* et *quoziente* qui signifient respectivement « naturel » et « quotient »). Le terme « réel » (*real* en allemand et en anglais) pour désigner un nombre rationnel ou irrationnel, fut utilisé par Georg Cantor.

Un ensemble peut se définir de deux manières :

– soit *en extension* : on dresse la liste de tous les éléments. L'ordre, ainsi qu'une éventuelle répétition des éléments sont sans influence. Ainsi,

$$\{a, b, c, d\} = \{b, c, a, d\} = \{a, b, a, c, d, d\}.$$

– soit *en compréhension* : on énonce une propriété caractéristique des éléments de l'ensemble.

On peut représenter graphiquement un ensemble à l'aide d'un *diagramme de Venn.* Considérons par exemple l'ensemble A défini en extension par $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Il peut aussi être défini en compréhension par $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 9\}$. Le diagramme de Venn de l'ensemble A est donné à la figure 1.

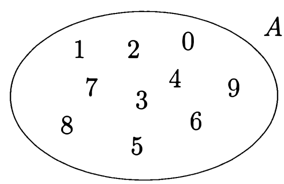


Fig. 1 Représentation à l'aide d'un diagramme de Venn de l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 9\}$.

DÉFINITION 2.1 ✗ *Un ensemble E est dit fini lorsque le nombre d'éléments qui le composent est un entier naturel. Dans ce cas, le nombre d'éléments est appelé le cardinal de l'ensemble. On le note* $\mathrm{card}(E)$.

✗ *Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.*

Exemple $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 9\}$ est fini de cardinal $\mathrm{card}(A) = 10$.

DÉFINITION 2.2 ✗ *Un ensemble est dit vide lorsqu'il ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$. Par convention,* $\mathrm{card}(\emptyset) = 0$.

✗ *On appelle singleton un ensemble qui ne contient qu'un seul élément. Son cardinal est* 1.

2.1.2 Partie, sous-ensemble

DÉFINITION 2.3 *Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B (ou que « A est contenu dans B » ou que « B contient A »), et on note $A \subset B$, si tout élément de A est un élément de B. L'ensemble A est alors qualifié de partie ou de sous-ensemble de B.*

En d'autres termes, A et B désignant deux parties d'un ensemble E, A est inclus dans B si

$$\forall x \in E \quad \Big(x \in A \Longrightarrow x \in B\Big).$$

Par exemple, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. En utilisant les règles de négation d'une assertion quantifiée, on vérifie les équivalences logiques suivantes :

$$\begin{aligned} A \not\subset B &\equiv \operatorname{non}\big(A \subset B\big) \\ &\equiv \operatorname{non}\big(\forall x \in E \ (x \in A \Longrightarrow x \in B)\big) \\ &\equiv \exists x \in E \ \operatorname{non}\big(x \in A \Longrightarrow x \in B\big) \\ &\equiv \exists x \in E \ \big(x \in A \text{ et } \operatorname{non}(x \in B)\big) \\ &\equiv \exists x \in E \ \big(x \in A \text{ et } x \notin B\big). \end{aligned}$$

Ainsi, A n'est pas inclus dans B s'il existe (au moins) un élément de A qui n'est pas un élément de B. Par exemple, $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$ car $2/3 \in \mathbb{Q}$ et $2/3 \notin \mathbb{Z}$, et $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R}^*$ car $0 \in \mathbb{N}$ et $0 \notin \mathbb{R}^*$.

Remarques

1. Par convention, l'ensemble $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble.

2. L'inclusion est à prendre au sens large puisqu'un ensemble peut être inclus dans lui-même.

3. Si A et B sont deux ensembles finis et si $A \subset B$ alors $\operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(B)$.

4. Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

Définition 2.4 *On dit que deux ensembles E et F sont égaux (ou identiques), et on note $E = F$, si tout élément de E est élément de F et si tout élément de F est élément de E. Autrement dit,*

$$E = F \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(E \subset F \ \text{ et } \ F \subset E\Big).$$

Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont distincts et on note $E \neq F$.

Lorsque E est inclus dans F et que $E \neq F$, on dit que E est strictement inclus dans F et on note $E \subsetneq F$.

Exemple On considère les trois sous-ensembles finis de $\mathbb{R}$ suivants :

$$\begin{cases} A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} & \text{(défini en compréhension)} \\ B = \{1, 2\} & \text{(défini en extension)} \\ C = \{1, 2, \sqrt{2}\} & \text{(défini en extension)} \end{cases}$$

On a $A = B$ et $B \subset C$ avec $B \neq C$, ce que l'on note : $B \subsetneq C$.

2.1.3 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 2.5 *Soit E un ensemble. Les sous-ensembles de E forment un ensemble appelé ensemble des parties de E et noté $\mathcal{P}(E)$. Autrement dit, $A \in \mathcal{P}(E)$ signifie que $A \subset E$.*

Remarquons que les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des sous-ensembles de E et non pas des éléments de E. De plus, contrairement à l'ensemble E qui peut être vide, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ n'est, lui, jamais vide puisqu'il contient au moins les ensembles $\emptyset$ et E. Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$ alors

$$\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\Big\}.$$

En comptant les éléments de $\mathcal{P}(E)$, on remarque que $\operatorname{card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^3 = 8$. Ce résultat se généralise.

Proposition 2.1 *Si E est un ensemble fini de cardinal n alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini et* $\operatorname{card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$.

Démonstration Soit n un entier naturel non nul. Il suffit de dénombrer, pour p variant de 0 à n, le nombre de manières de choisir (sans ordre, ni remise d'après la définition d'un ensemble, voir page 23) p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E. Rappelons que le nombre de combinaisons de p éléments pris dans un ensemble à n éléments est donné par le coefficient binomial, noté $\binom{n}{p}$, défini par

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Il est à noter que le coefficient binomial est parfois noté $\mathcal{C}_n^p$. Cette notation fait apparaître explicitement la lettre « c » (en écriture calligraphiée) rappelant la première lettre du mot « combinaison ». Ainsi, on dénombre $\binom{n}{0} = 1$ ensemble à 0 élément (c'est l'ensemble $\emptyset$), $\binom{n}{1} = n$ ensembles à 1 élément (ce sont les singletons), $\binom{n}{2}$ ensembles à 2 éléments, $\binom{n}{3}$ ensembles à 3 éléments, ..., $\binom{n}{n-1} = n$ ensembles à $n-1$ éléments et enfin $\binom{n}{n} = 1$ ensemble à n éléments. On en déduit :

$$\operatorname{card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.$$

Il reste à vérifier que $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$. Utilisons pour cela la formule du binôme de Newton : pour tout réel a, pour tout réel b et pour tout entier naturel n,

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

Cette formule est donnée et démontrée dans le cas général en page 77. En prenant $a = b = 1$, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n,$$

ce qui termine la démonstration. □

2.1.4 Opérations sur les ensembles

DÉFINITION 2.6 *Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. L'union des deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble constitué par les éléments de E appartenant à A ou B. Autrement dit,*

$$A \cup B \overset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

À l'évidence, A et B sont des sous-ensembles de $A \cup B$, c'est-à-dire :

$$A \subset (A \cup B) \quad \text{et} \quad B \subset (A \cup B).$$

De plus, il est clair que si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$. Montrons que $A \cup B = B$ implique $A \subset B$. Supposons $A \cup B = B$ et montrons que tout élément de A est dans B. Soit $x \in A$. Puisque $A \subset A \cup B$, x appartient aussi à $A \cup B$. Or, $A \cup B = B$. L'élément x appartient donc aussi à B, ce qui termine la démonstration. On a donc l'équivalence :

$$A \cup B = B \iff A \subset B.$$

On vérifie aussi que

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cup A = A \quad \text{et} \quad A \cup E = E$$

puisque $A \subset E$. L'union possède les propriétés de commutativité (c'est-à-dire : $A \cup B = B \cup A$ pour tous sous-ensembles A, B d'un ensemble E) et d'associativité (c'est-à-dire : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ pour tous sous-ensembles A, B, C d'un ensemble E).

DÉFINITION 2.7 *Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. L'intersection des deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble constitué par les éléments de E appartenant à A et B. Autrement dit,*

$$A \cap B \overset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Si $A \cap B = \emptyset$ alors les deux ensembles A et B sont dits disjoints.

L'intersection de A et B est à la fois un sous-ensemble de A et un sous-ensemble de B, c'est-à-dire :

$$(A \cap B) \subset A \quad \text{et} \quad (A \cap B) \subset B.$$

De plus, si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$. C'est immédiat. La réciproque est vraie aussi. Vérifions-la. Supposons $A \cap B = A$ et montrons que tout élément de A est dans B. Soit $x \in A$. Puisque $A = A \cap B$, x appartient à $A \cap B$. L'élément x appartient ainsi à la fois à A et B. On a ainsi vérifié que x est dans B, ce qui termine la démonstration. On a donc l'équivalence :

$$A \cap B = A \iff A \subset B.$$

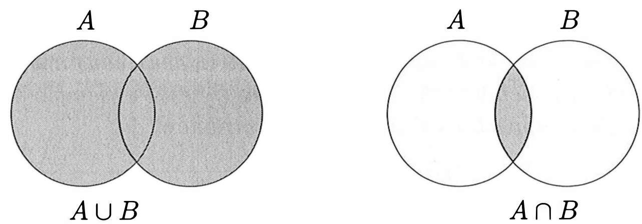


Fig. 2 Représentation, en grisé, de l'ensemble $A \cup B$ (à gauche) et de l'ensemble $A \cap B$ (à droite).

On vérifie également que

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap A = A \quad \text{et} \quad A \cap E = A$$

puisque $A \subset E$. Comme l'union, l'intersection possède aussi les propriétés de commutativité (c'est-à-dire : $A \cap B = B \cap A$ pour tous sous-ensembles A, B d'un ensemble E) et d'associativité (c'est-à-dire : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ pour tous sous-ensembles A, B, C d'un ensemble E).

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Si $A \cap B = \emptyset$ et $C \subset B$ alors $A \cap C = \emptyset$.

À l'instar des connecteurs logiques « et », « ou », l'intersection et l'union vérifie les deux propriétés suivantes :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,,$$

ce que l'on visualise aisément en représentant les diagrammes de Venn. On dit que l'intersection (respectivement l'union) est distributive par rapport à l'union (respectivement l'intersection). D'où l'importance des parenthèses.

DÉFINITION 2.8 *Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. La différence des ensembles A et B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble constitué par les éléments de A qui n'appartiennent pas à B. Autrement dit,*

$$A \setminus B \overset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

L'ensemble $A \setminus B$ est donc, par définition, un sous-ensemble de A. L'ensemble $B \setminus A$ est, quant à lui, un sous-ensemble de B (voir fig. 3).

De plus, si $A \subset B$ alors $A \setminus B = \emptyset$. En effet, l'ensemble $A \setminus B$ est composé des éléments de E qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B. Or, par hypothèse, $A \subset B$. Cela signifie que tout élément de A appartient nécessairement à B. L'ensemble $A \setminus B$ est par conséquent vide. Réciproquement, supposons $A \setminus B = \emptyset$. Cela signifie qu'il n'y a pas d'élément de E qui appartient

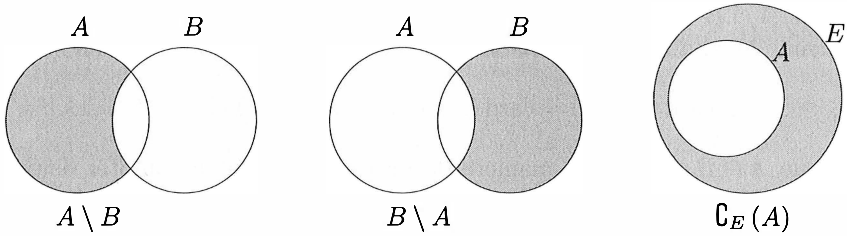


Fig. 3 Représentation, en grisé, des ensembles $A\backslash B$ (à gauche), $B \setminus A$ (au centre) et $\complement_E(A)$ (à droite).

à A et qui n'appartient pas à B, autrement dit que tout élément de A est nécessairement dans B, soit $A \subset B$. On a ainsi vérifié l'équivalence :

$$A \setminus B = \emptyset \iff A \subset B.$$

On a également :

$$A \setminus \emptyset = A, \quad A \setminus A = \emptyset \quad \text{et} \quad A \setminus E = \emptyset$$

puisque $A \subset E$.

DÉFINITION 2.9 *Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle complémentaire de A dans E le sous-ensemble de E, noté $\complement_E(A)$, constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Autrement dit,*

$$\complement_E(A) \overset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid x \notin A\} = E \setminus A.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, le complémentaire de A dans E est noté A^c. On trouve parfois dans certains ouvrages la notation $\overline{A}$. Nous préférons réserver cette notation pour désigner l'adhérence d'un ensemble A (voir la définition 3.13, page 119).

Il est évident que $\complement_E(\emptyset) = E$ et $\complement_E(E) = \emptyset$. De plus, pour tout $A \subset E$,

$$\complement_E\big(\complement_E(A)\big) = A, \quad A \cap \complement_E(A) = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup \complement_E(A) = E.$$

Étant données A et B deux parties d'un ensemble E, on a :

$$A \subset B \implies \complement_E(B) \subset \complement_E(A).$$

Remarquons que l'on a aussi : $A \setminus B = A \cap \complement_E(B)$.

Exemple Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 9\}$. On a : $\complement_{\mathbb{N}}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 9\}$. L'ensemble A est aussi un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$. On a :

$$\complement_{\mathbb{Z}}(A) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 9 \text{ ou } x < 0\} \neq \complement_{\mathbb{N}}(A).$$

Rappelons que lorsque deux ensembles finis A et B sont disjoints (c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \emptyset$), compter les éléments de l'union revient à compter les éléments de A, à compter ceux de B et à en faire la somme, ce qu'on écrit

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) \quad \text{si} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Lorsque $A \cap B \neq \emptyset$, cette manière de procéder conduit à compter deux fois les éléments appartenant à l'intersection de ces deux ensembles. Ainsi, pour connaître le cardinal de l'union, il ne faut pas oublier de retrancher à la somme des cardinaux le cardinal de l'intersection. On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION 2.2 *Soient A, B deux parties finies d'un ensemble E. On a :*

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B).$$

On en déduit le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.1 *Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E. Si $A \subset B$ et $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$ alors $A = B$.*

Démonstration D'après la proposition 2.2, A et $B \setminus A$ constituant deux parties finies de E, on a l'égalité :

$$\operatorname{card}(A \cup (B \setminus A)) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B \setminus A) - \operatorname{card}(A \cap (B \setminus A)). \qquad (1)$$

Or, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Donc $\operatorname{card}(A \cap (B \setminus A)) = 0$. De plus, par hypothèse, $A \subset B$. On a donc : $B \setminus A = \complement_B(A)$, d'où $A \cup (B \setminus A) = A \cup \complement_B(A) = B$. Ainsi, la relation (1) se réécrit :

$$\operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B \setminus A).$$

Or, par hypothèse, $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$. On a donc : $\operatorname{card}(B \setminus A) = 0$, c'est-à-dire : $B \setminus A = \emptyset$, ce qui signifie que $B \subset A$. Or, $A \subset B$ par hypothèse. La double inclusion permet alors d'écrire que $A = B$. □

Si E est un ensemble fini alors, pour toute partie A de E,

$$\operatorname{card}\left(\complement_E(A)\right) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A).$$

On se convainc des résultats suivants à l'aide des diagrammes de Venn.

PROPOSITION 2.3 (Lois de Morgan pour les ensembles)
Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On a les relations suivantes appelées lois de Morgan :

$$\complement_E(A \cup B) = \complement_E(A) \cap \complement_E(B), \quad \complement_E(A \cap B) = \complement_E(A) \cup \complement_E(B).$$

EXERCICE 1 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Donner une écriture simplifiée des sous-ensembles suivants :

1. $\left[A \cup (A \cap B)\right] \cap B$.
2. $(A \cap B) \cup \left(A \cap \complement_E (B)\right)$.
3. $\complement_E(A \cup B) \cap \left(C \cup \complement_E (A)\right)$.
4. $\left[(A \cup B) \cap (B \cap C)\right] \cup (A \cup C)$.
5. $(A \cup B) \cap \left[(B \cap C) \cup (A \cup C)\right]$.

2.1.5 Produit cartésien

DÉFINITION 2.10 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles non vides.*

✗ *On appelle produit cartésien des ensembles E_1, E_2, ..., E_n l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, constitué des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. En d'autres termes,*

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \overset{\text{déf.}}{=} \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\right\}.$$

En particulier, un 2-uplet est appelé un couple et un 3-uplet un triplet.

✗ *Deux n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sont égaux (ou identiques) si $x_i = x'_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On écrit alors $(x_1, \ldots, x_n) = (x'_1, \ldots, x'_n)$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On convient de la notation suivante :

$$\prod_{i=1}^{n} E_i \overset{\text{not.}}{=} E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$E^n \overset{\text{not.}}{=} \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}.$$

Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\right\}$.

Il ne faut pas confondre un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, qui est une liste (ordonnée) d'éléments non nécessairement distincts, avec l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Ce sont deux objets mathématiques de natures différentes puisque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ appartient au produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ et $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ appartient à l'ensemble des parties de $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i \qquad \text{et} \qquad \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big).$$

Les notations utilisées aident d'ailleurs à différencier un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. En effet, on remarquera qu'un n-uplet se note avec des parenthèses et un ensemble avec des accolades. Par exemple, si x désigne un élément d'un ensemble E et y un élément d'un ensemble F, alors $(x, y) \in E \times F$ et $\{x, y\} \in \mathcal{P}(E \cup F)$. Il est important de noter que lorsqu'on écrit (x, y), l'ordre des éléments est pris en compte, alors que l'ordre n'a aucune importance pour l'ensemble $\{x, y\}$. Par exemple, $\{x, y\} = \{y, x\}$. En revanche, les deux couples (x, y) et (y, x) ne sont en général pas égaux. D'ailleurs, si $E \neq F$, ils n'appartiennent pas au même ensemble produit puisque $(x, y) \in E \times F$ et $(y, x) \in F \times E$. Enfin, dans un couple, deux éléments peuvent être égaux si les deux ensembles E et F ont des éléments en commun. Ainsi, si $z \in E \cap F$ alors on peut considérer le couple $(z, z) \in E \times F$. Par contre, $\{z, z\} = \{z\}$.

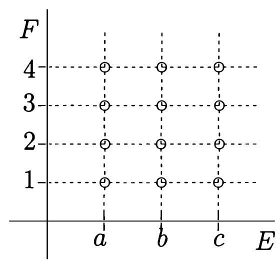


Fig. 4 Diagramme cartésien représentant l'ensemble produit $E \times F$ pour $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Les éléments de $E \times F$ sont représentés par des disques « ∘ ».

Exemple Si $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$ alors

$$E \times F = \Big\{(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (c,1), (c,2), (c,3), (c,4)\Big\}.$$

Le produit cartésien $E \times F$ est représenté sur la figure 4 sous une forme appelée *diagramme cartésien.* Il contient 3×4 couples, autrement dit $\text{card}(E \times F) = 12$. Le diagramme cartésien permet de compter tous les couples de $E \times F$ selon un balayage horizontal ou un balayage vertical. Utiliser un balayage horizontal revient à écrire :

$$E \times F = \big(E \times \{1\}\big) \cup \big(E \times \{2\}\big) \cup \big(E \times \{3\}\big) \cup \big(E \times \{4\}\big)$$

avec $E \times \{j\} = \big\{(a, j), (b, j), (c, j)\big\}$ et $\text{card}\big(E \times \{j\}\big) = 3$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Utiliser un balayage vertical revient à écrire :

$$E \times F = \big(\{a\} \times F\big) \cup \big(\{b\} \times F\big) \cup \big(\{c\} \times F\big)$$

avec $\{\ell\} \times F = \big\{(\ell, 1), (\ell, 2), (\ell, 3), (\ell, 4)\big\}$ et $\text{card}\big(\{\ell\} \times F\big) = 4$ pour tout $\ell \in \{a, b, c\}$.

C'est exactement cette manière de procéder que nous généralisons dans la démonstration suivante pour dénombrer les éléments d'un produit cartésien.

Proposition 2.4 *Soient E, F deux ensembles finis non vides. On a :*

$$\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F).$$

Démonstration Soient n le cardinal de E et m celui de F. Partitionnons l'ensemble produit $E \times F$ de la façon suivante : $E \times F = \bigcup_{f \in F} (E \times \{f\})$ avec $(E \times \{f\}) \cap (E \times \{f'\}) = \emptyset$ si $f \neq f'$ et, pour tout $f \in F$,

$$\operatorname{card}(E \times \{f\}) = \operatorname{card}(\{(e, f) \mid e \in E\}) = \operatorname{card}(E) = n.$$

On dit que l'on a utilisé un balayage horizontal. En utilisant la proposition 2.2,

$$\operatorname{card}(E \times F) = \sum_{f \in F} \operatorname{card}(E \times \{f\}) = \underbrace{n + n + \ldots + n}_{m \text{ fois}} = m \times n.$$

On a donc obtenu que $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$ car $n = \operatorname{card}(E)$ et $m = \operatorname{card}(F)$, ce qui termine la démonstration. □

La propriété de la proposition 2.4 se résume ainsi : le cardinal du produit est égal au produit des cardinaux. C'est là l'origine du mot « produit » dans produit cartésien.

2.2 Relation, fonction, application

2.2.1 Relation

Définition 2.11 *Soient E et F deux ensembles non vides.*

✗ *On appelle relation (on dit aussi* correspondance*) $\mathcal{R}$ de E vers F tout triplet (E, Γ, F) où Γ est une partie du produit cartésien $E \times F$. L'ensemble E s'appelle l'ensemble de* départ *de $\mathcal{R}$, l'ensemble F s'appelle l'ensemble* d'arrivée *de $\mathcal{R}$ et le sous-ensemble Γ de $E \times F$ s'appelle le* graphe *de $\mathcal{R}$.*

✗ *Si $(x, y) \in \Gamma$, on dit que x est en relation avec y par la relation $\mathcal{R}$, ce que l'on note $x\mathcal{R}y$. L'élément y est alors appelé* image *de x par $\mathcal{R}$ et l'élément x est appelé* antécédent *de y par $\mathcal{R}$.*

Exemple Considérons les ensembles $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$ et Γ le sous-ensemble de $E \times F$ défini par

$$\Gamma = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 1), (c, 3)\}.$$

Le triplet (E, Γ, F) définit alors une relation $\mathcal{R}$ de E vers F et on a :

$$a\mathcal{R}1, \quad a\mathcal{R}2, \quad a\mathcal{R}3, \quad b\mathcal{R}3, \quad c\mathcal{R}1, \quad c\mathcal{R}3.$$

On peut représenter cette relation (voir fig. 5) soit à l'aide d'un *diagramme sagittal* dans lequel une flèche va de $x \in E$ vers $y \in F$ si $x\mathcal{R}y$, soit à l'aide d'un *diagramme cartésien.*

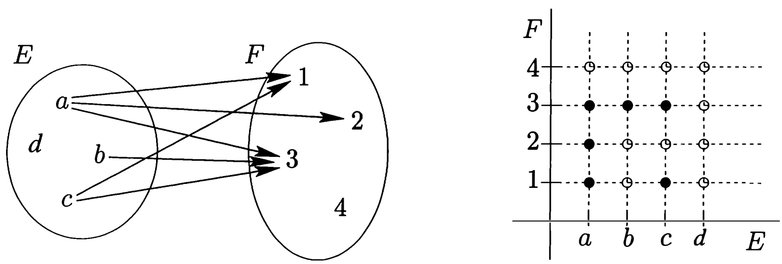


Fig. 5 Diagramme sagittal (dessin de gauche) et diagramme cartésien (dessin de droite) représentant la même relation $\mathcal{R} = (E, \Gamma, F)$ avec $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\Gamma = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,3), (c,1), (c,3)\}$. Dans le diagramme cartésien, parmi les éléments de $E \times F$, ceux appartenant au graphe Γ sont représentés par des disques noirs « • ».

Remarque Comme l'illustre l'exemple précédent, dans une relation, un élément de l'ensemble de départ peut être en relation

- soit avec plusieurs éléments de l'ensemble d'arrivée (par exemple l'élément a est lié à 1, à 2 et à 3),
- soit avec un seul élément de l'ensemble d'arrivée (par exemple l'élément b n'est lié qu'à 3),
- soit avec aucun élément de l'ensemble d'arrivée (par exemple l'élément d n'est lié à aucun élément de F).

2.2.2 Fonction

DÉFINITION 2.12 *Soient E et F deux ensembles non vides.*

✗ *Une relation f d'ensemble de départ E, d'ensemble d'arrivée F et de graphe Γ est appelée une fonction de E vers F si tout élément de E est en relation avec au plus un élément de F (c'est-à-dire avec un élément ou avec aucun élément). On note alors :*

$$f : E \longrightarrow F \quad ou \quad E \xrightarrow{f} F.$$

✗ *Soit $(x, y) \in \Gamma$. Pour signifier que y est en relation avec x par la fonction f, on écrit $y = f(x)$.*

Remarques

1. Pour une fonction, nous abandonnons donc la notation xfy au profit de la notation $y = f(x)$.

2. Si y est en relation avec x par la fonction f alors y n'est plus *une* image de x mais *l*'image puisque, si elle existe, l'image est forcément unique.

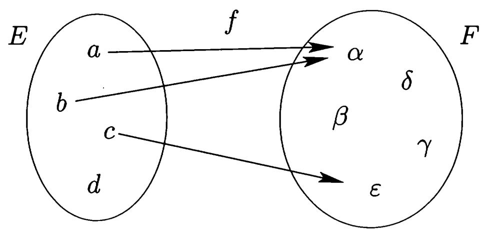


Fig. 6 Diagramme sagittal de la relation $f = (E, \Gamma, F)$ avec $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ et $\Gamma = \{(a, \alpha), (b, \alpha), (c, \varepsilon)\}$.

Exemples

1. La relation $f = \big(\{a, b, c, d\}, \{(a, \alpha), (b, \alpha), (c, \varepsilon)\}, \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}\big)$ (voir la figure 6) est une fonction puisque de tout élément appartenant à l'ensemble de départ E, il ne part au plus qu'une seule flèche. On peut donc écrire :

$$f(a) = \alpha = f(b) \quad \text{et} \quad f(c) = \varepsilon.$$

Remarquons que d n'a pas d'image par f, α possède deux antécédents par f, ε en possède un seul et γ n'en possède aucun.

2. La relation $f = (\mathbb{R}, \Gamma, \mathbb{R})$ où $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1/(x-2)\}$ est une fonction que l'on note $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1/(x-2) \in \mathbb{R}$ ou

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x-2} \end{aligned}.$$

On peut montrer que 0 n'a pas d'antécédent par f et que tout autre élément de l'ensemble d'arrivée possède un unique antécédent par f. Remarquons que le réel 2 n'a pas d'image par f.

Remarque Soit f une fonction de E vers F. Si l'image d'un élément x de E par f existe, celle-ci est forcément unique. En revanche, si l'antécédent d'un élément y de F existe, alors il n'est pas forcément unique. Considérons par exemple la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$. L'antécédent de -1 par f n'existe pas et l'antécédent de 4 par f n'est pas unique puisque $f(-2) = f(2) = 4$. Les réels 2 et -2 sont deux antécédents de 4 par f.

DÉFINITION 2.13 *Soient E, F deux ensembles non vides et f une fonction de E vers F. On appelle* ensemble de définition *(ou* domaine de définition*) de f, et on note $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des éléments de E ayant une image par f.*

En d'autres termes,

$$\mathcal{D}_f \overset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid \exists y \in F \ y = f(x)\}.$$

Le domaine de définition est donc un sous-ensemble de l'ensemble de départ.

Exemples

1. Reprenons l'exemple de la fonction $f : \{a, b, c, d\} \longrightarrow \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ définie par $f(a) = \alpha = f(b)$ et $f(c) = \varepsilon$ (voir fig. 6). On a : $\mathcal{D}_f = \{a, b, c\}$.
2. Soient les fonctions $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1/(x-2) \in \mathbb{R}$ et $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$. On a : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

2.2.3 Application

DÉFINITION 2.14 *Soient E et F deux ensembles non vides. Une fonction f de E vers F est appelée une* application *si $\mathcal{D}_f = E$. L'ensemble des applications de E vers F est noté F^E ou $\mathcal{A}(E, F)$.*[1]

Exemple Considérons les deux applications de la figure 7.

- La fonction f n'est pas une application car son ensemble de départ est strictement inclus dans E. En effet, d n'ayant pas d'image par f, on a : $\mathcal{D}_f = \{a, b, c\} \neq E$.
- En revanche, la fonction g définit une application puisque tout élément de son ensemble de départ possède une image par g ($\mathcal{D}_g = E$).

DÉFINITION 2.15 *Soit f une application de E vers F.*

✗ *Soit A une partie de l'ensemble de départ E. On appelle* image (directe) *de A par f le sous-ensemble de F, noté $f(A)$, défini par*

$$f(A) \overset{\text{déf.}}{=} \{f(x) \mid x \in A\}.$$

En particulier, on appelle image de f*, et on note $f(E)$, l'image de E par f.*

✗ *Soit B une partie de l'ensemble d'arrivée F. On appelle* image réciproque *de B par f le sous-ensemble de E, noté $f^{-1}(B)$, défini par*

$$f^{-1}(B) \overset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

[1] Dans la notation F^E, l'exposant correspond à l'ensemble de départ.

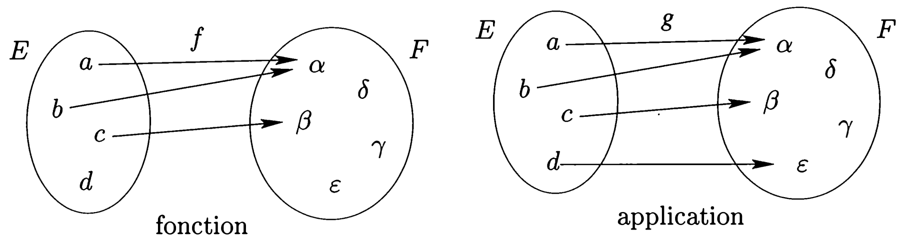


Fig. 7 Diagrammes sagittaux représentant une fonction $f : E \longrightarrow F$ (dessin de gauche) et une application $g : E \longrightarrow F$ (dessin de droite) avec $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$.

Étant donnés une application f de E vers F et un sous-ensemble A de E, on vérifie facilement que l'image directe de A par f est un sous-ensemble de $f(E)$, qui est lui-même un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée F. En d'autres termes (voir la fig. 8), si $A \subset E$ alors $f(A) \subset f(E) \subset F$.

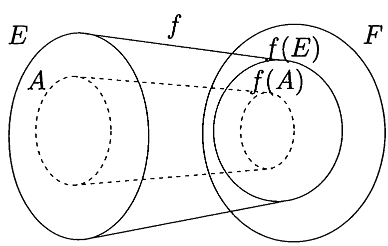


Fig. 8 Illustration de la propriété : étant donnée une application f de E vers F, si $A \subset E$ alors $f(A) \subset f(E) \subset F$.

Exemples

1. Considérons à nouveau l'application g de l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$ dans l'ensemble $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ qui à a et b associe α, à c associe β et à d associe ε (voir le dessin de droite de la figure 7). Alors,

$$g(\{a, b, c\}) = \{\alpha, \beta\}, \quad g(\{a\}) = \{\alpha\}, \quad g(E) = \{\alpha, \beta, \varepsilon\} \subsetneq F.$$

On vérifie aussi que l'on a :

$$g^{-1}(\{\alpha, \beta, \delta\}) = \{a, b, c\}, \quad g^{-1}(\{\alpha\}) = \{a, b\}, \quad g^{-1}(\{\gamma, \delta\}) = \emptyset,$$

$$g^{-1}(\{\gamma, \varepsilon\}) = \{d\}, \quad g^{-1}(\{\alpha, \beta, \varepsilon\}) = E, \quad g^{-1}(F) = E.$$

2. Soit l'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(\{-2,2\}) = \{4\}, \quad f(]-2,2[) = [0,4[, \quad f(\mathbb{R}_+) = f(\mathbb{R}_-) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+.$$

$$f^{-1}(\{-1,4\}) = \{-2,2\}, \quad f^{-1}(\{0\}) = \{0\}, \quad f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = \emptyset, \quad f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}.$$

Propriétés

Étant donnée une application f de E vers F, on a les propriétés suivantes :

- Pour toutes parties A et A' de E,
  - Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$;
  - $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$;
  - $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$;
- Pour toutes parties B et B' de F,
  - $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$;
  - $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
- Pour toute partie A de E et toute partie B de F,

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

La notation $f^{-1}(B)$, où B désigne un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée de f, ne suppose pas que l'application f soit bijective (voir page 44 pour la définition d'une application bijective).

DÉFINITION 2.16 *Soient f, g deux applications de E vers F. On dit que f et g sont égales, et on note $f = g$, si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.*

DÉFINITION 2.17 *Soit E un ensemble non vide. L'application de E vers E qui à x associe x se note id_E et s'appelle l'identité de E. Ainsi,*

$$\mathrm{id}_E : x \in E \longrightarrow x \in E.$$

Résolution d'une équation : généralités

On désigne par E et F deux ensembles non vides. On considère l'équation

$$\text{(E)} \quad f(x) = b$$

où f est une application de E vers F, x un élément de l'ensemble de départ E et b un élément de l'ensemble d'arrivée F. Résoudre (E), c'est trouver tous les éléments x appartenant à E qui vérifient cette équation et on dit que les *données* du problème sont l'application $f : E \longrightarrow F$ et le second membre $b \in F$; l'*inconnue* du problème est $x \in E$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E). Cet ensemble est constitué des éléments de E qui ont pour image l'élément $b \in F$ par f. Autrement dit,

$$\mathcal{S} \stackrel{déf.}{=} \{x \in E \mid f(x) = b\}.$$

D'après la définition 2.15, on peut donc écrire que $\mathcal{S} = f^{-1}(\{b\})$. Etant donnés l'application f et le second membre b, la résolution d'une telle équation peut conduire aux cas suivants. Il peut arriver que (E) n'admette pas de solution. On a alors $\mathcal{S} = \emptyset$ et on dit que l'équation (E) est *impossible*. Cela arrive lorsque b n'appartient pas à l'image de f. Autrement dit,

$$\mathcal{S} = \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad b \notin f(E).$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque b appartient à $f(E)$, l'équation (E) est dite *possible*. En effet, $b \in f(E)$ signifie qu'il existe au moins un élément $\tilde{x}$ de E tel que $f(\tilde{x}) = b$. Deux cas peuvent alors se produire :

- il se peut que $\tilde{x}$ soit l'unique solution. Trouver $\tilde{x}$, c'est alors résoudre complètement (E) ;
- il se peut qu'il en existe d'autres. Trouver une solution $\tilde{x}$, c'est résoudre partiellement (E).

Exemple Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2. On vérifie que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$. L'image de f est donc le sous-ensemble $\mathbb{R}_+$. Il est distinct de l'ensemble d'arrivée.

- Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = -4$ n'a pas de solution car -4 n'appartient pas à l'image de f. On a donc : $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = 0$ possède (au moins) une solution puisque 0 appartient à l'image de f. On a alors : $\mathcal{S} \neq \emptyset$. L'unique antécédent de 0 par f est 0. On a alors : $\mathcal{S} = \{0\}$.
- Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = 4$ possède (au moins) une solution puisque 4 appartient à l'image de f. On a alors : $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Les antécédents de 4 par f sont les deux réels 2 et -2. D'où : $\mathcal{S} = \{-2, 2\}$.

Remarque Une mauvaise rédaction due à une erreur de raisonnement peut conduire à écrire des absurdités, comme en témoigne l'énoncé suivant. Lisez-le attentivement. À première vue, le raisonnement suivi semble correct et apparemment sans faille. Ce n'est bien sûr qu'une illusion car, tel un couperet, le résultat final « $1 = -2$ » est là pour indiquer qu'une erreur a de toute évidence été commise. Sauriez-vous indiquer à quel endroit se trouve l'erreur dans le raisonnement ? (la réponse est donnée en fin d'énoncé)
Considérons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$x^2 = x - 1. \tag{2}$$

Puisque 0 *ne vérifie pas cette équation, divisons par x membre à membre. Après réarrangement des termes, nous obtenons :*

$$-\frac{1}{x} = x - 1. \tag{3}$$

En regroupant les deux égalités (2) et (3), nous en déduisons la troisième égalité :

$$x^2 = -\frac{1}{x}. \tag{4}$$

Finalement, puisque x est non nul, nous multiplions par x l'égalité (4) pour obtenir l'équation suivante :

$$x^3 = -1 \tag{5}$$

dont -1 est de toute évidence une solution. Injectons cette solution dans l'égalité (2). Nous obtenons finalement :

$$1 = -2.$$

Solution Notons $\mathcal{S}_1$ (respectivement $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$) l'ensemble des solutions de (2) (resp. de (3), (4) et (5)). Toute solution de (2) est solution de (3), et inversement (il n'y a pas d'erreur dans l'énoncé à ce niveau-là). On a ainsi l'équivalence :

$$« \; x \in \mathcal{S}_1 \iff x \in \mathcal{S}_2 \; ».$$

De même, toute solution de (4) est solution de (5), et inversement (il n'y a là non plus pas d'erreur dans l'énoncé). On a l'équivalence :

$$« \; x \in \mathcal{S}_3 \iff x \in \mathcal{S}_4 \; ».$$

Intéressons-nous maintenant au passage de (3) à (4). Si x est solution de (3) alors x vérifie les équations $-1/x = x - 1$ et $x^2 = x - 1$. D'où $x^2 = -1/x$ et donc $x \in \mathcal{S}_3$. On a l'implication :

$$« \; x \in \mathcal{S}_2 \implies x \in \mathcal{S}_3 \; ».$$

Par contre, la réciproque est fausse : $\mathcal{S}_3$ n'est pas inclus dans $\mathcal{S}_2$ puisqu'il est clair que $-1 \in \mathcal{S}_3$ mais $-1 \notin \mathcal{S}_2$. Autrement dit, toute solution de (4) n'est pas solution de (3). L'erreur s'est donc produite à ce niveau-là de l'énoncé. Elle vient du fait que cette implication a été traitée comme une équivalence. Moralité, une rédaction rigoureuse est nécessaire.

Application composée

Définition 2.18 *Soient E, F, G trois ensembles non vides, f une application de E vers F et g une application de F vers G. On appelle* application composée *de f et g l'application de E vers G, notée $g \circ f$, définie par*

$$\forall x \in E \quad (g \circ f)(x) \overset{\text{déf.}}{=} g(f(x)).$$

Étant données $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, on a les inclusions :

$$(g \circ f)\,(E) \subset g(F) \subset G.$$

Elles sont illustrées sur la fig. 9.

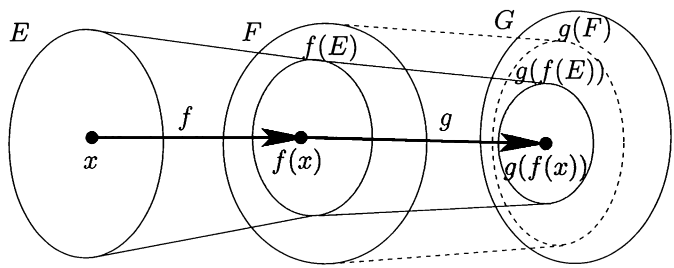


Fig. 9 Illustration de la propriété : $(g \circ f)(E) \subset g(F) \subset G$.

Remarques

1. Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont deux applications alors l'application composée $g \circ f$ a bien un sens. C'est une application de E vers G et on note de façon symbolique :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \quad \text{ou} \quad E \xrightarrow{g \circ f} G.$$

En revanche, l'application composée $f \circ g$ n'est pas définie sauf si $g(F) \subset E$. On dit que la composition n'est pas commutative.

2. Soient E, F, G, H des ensembles non vides. On vérifie que pour toutes applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$, on a :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)\,.$$

On dit que la composition est associative.

3. Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. L'application composée $f \circ f$ est elle-même une application de E dans E. On la note f^2. Plus généralement, l'application obtenue en composant k fois ($k \in \mathbb{N}^*$) l'application f avec elle-même est encore une application de E dans lui-même. On la note :

$$f^k \overset{not.}{=} \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$$

et, par convention, on pose : $f^0 = \mathrm{id}_E$.

2.2.4 Injection, surjection, bijection

DÉFINITION 2.19 *Soient E et F deux ensembles. Une application f de E vers F est une injection (ou est injective) si tout élément de F admet au plus un antécédent par f (c'est-à-dire un ou aucun).*

Autrement dit, une application $f : E \longrightarrow F$ est injective si

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad \Big(f(x) = f(x') \implies x = x'\Big)$$

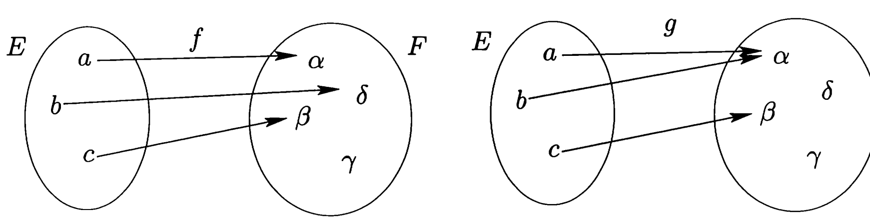
ou, par contraposition, si

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad \Big(x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')\Big).$$

D'après les règles de négation, une application $f : E \longrightarrow F$ n'est pas injective si

$$\exists\, (x, x') \in E^2 \quad \Big(x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')\Big).$$

Autrement dit, une application f de E vers F n'est pas injective s'il existe deux éléments (de E) distincts qui ont même image par f.



injective non injective

Fig. 10 Diagrammes sagittaux représentant une application injective $f : E \longrightarrow F$ (dessin de gauche) et une application non injective $g : E \longrightarrow F$ (dessin de droite) avec $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Exemple Considérons les deux applications de la figure 10.

- L'application f est injective car tout élément de F possède au plus un antécédent par f.
- En revanche, l'application g n'est pas injective puisqu'il existe deux éléments disctincts de l'ensemble de départ (à savoir les éléments a et b) qui ont même image par g. En effet, $g(a) = g(b) = \alpha$.

Définition 2.20 *Soient E et F deux ensembles. Une application f de E vers F est une surjection (ou est surjective) si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent par f (c'est-à-dire un ou plusieurs).*

Autrement dit, une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

Utilisant les règles de négation, une application $f : E \longrightarrow F$ n'est pas surjective si

$$\exists y \in F \quad \forall x \in E \quad y \neq f(x).$$

En d'autres termes, une application f de E vers F n'est pas surjective s'il existe un élément de l'ensemble d'arrivée qui ne possède pas d'antécédent par f.

Dire qu'une application f de E vers F est surjective signifie donc que $F \subset f(E)$. Remarquons que l'inclusion $f(E) \subset F$ est toujours vérifiée puisque l'image de d'une application est un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée (ici F). Par conséquent, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f de E dans F soit surjective est que

$$f(E) = F.$$

Bien sûr, pour montrer qu'une application f de E vers F est surjective, on se contentera de montrer que $F \subset f(E)$.

On en déduit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application $f : E \longrightarrow F$ ne soit pas surjective est que $f(E)$ soit strictement inclus dans F.

Exemple Considérons les deux applications de la figure 11.

- L'application f est surjective car $f(E) = f(\{a,b,c,d\}) = \{\alpha,\beta,\gamma\} = F$.
- En revanche, l'application g n'est pas surjective puisqu'il existe un élément de l'ensemble d'arrivée (à savoir γ) qui ne possède pas d'antécédent par g. Autrement dit, l'application g n'est pas surjective car

$$g(E) = g(\{a,b,c,d\}) = \{\alpha,\beta\} \neq \{\alpha,\beta,\gamma\} = F.$$

Remarque Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G. On a les propriétés suivantes.

- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective. En effet, considérons x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. Appliquons g à cette égalité :

$$g(f(x)) = g(f(x')).$$

  On en déduit $x = x'$ puisque $g \circ f$ est injective.

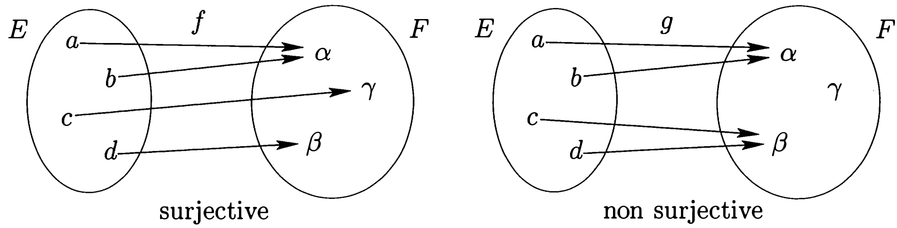


Fig. 11 Diagrammes sagittaux représentant une application surjective $f : E \longrightarrow F$ (dessin de gauche) et une application non surjective $g : E \longrightarrow F$ (dessin de droite) avec $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. Montrons-le. Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe (au moins) un élément x de E tel que
$$g(f(x)) = z.$$
Il existe donc (au moins) un élément y appartenant à F tel que $g(y) = z$. Il suffit de prendre $y = f(x)$.

DÉFINITION 2.21 *Soient E et F deux ensembles.*

✗ *Une application f de E vers F est une bijection (ou est* bijective[(2)]*) si elle est à la fois surjective et injective.*

✗ *S'il existe une bijection entre E et F, alors on dit que les deux ensembles E et F sont* équipotents *(ou qu'ils ont la* même puissance*).*

En d'autres termes, une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si tout élément de F admet un unique antécédent par f, ce qui s'écrit :
$$\forall y \in F \quad \exists ! x \in E \quad y = f(x).$$
Ainsi, pour qu'une application ne soit pas bijective, il suffit qu'elle ne soit pas injective ou qu'elle ne soit pas surjective.

La propriété de bijectivité d'une application f de E vers F signifie en particulier qu'à tout élément y de F on peut associer un unique élément x de E. Ceci nous amène à la définition suivante.

DÉFINITION 2.22 *Soient E, F deux ensembles et f une application bijective de E vers F. L'application notée f^{-1} de F vers E qui à y appartenant à F lui associe l'unique élément x appartenant à E tel que $y = f(x)$ est appelée* application réciproque de f *(ou* bijection réciproque de f*).*

---

(2) On parle aussi de *correspondance biunivoque* entre les éléments de E et ceux de F.

Autrement dit, l'application $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est définie, pour tout $y \in F$, par :

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{si} \quad y = f(x).$$

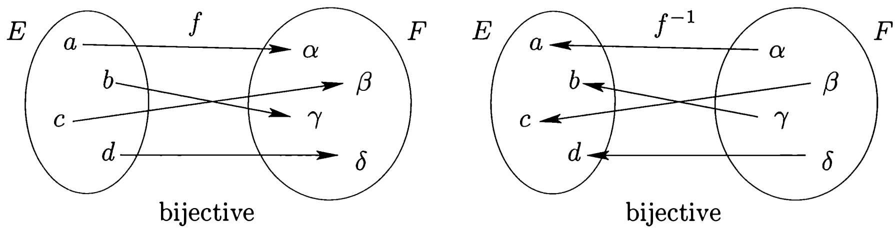


Fig. 12 Diagrammes sagittaux représentant une application bijective $f : E \longrightarrow F$ (dessin de gauche) et son application réciproque (aussi bijective) $f^{-1} : F \longrightarrow E$ (dessin de droite) avec $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Exemples

1. L'application représentée sur le dessin de gauche de la figure 12 est bijective. Son application réciproque est représentée sur le dessin de droite de cette même figure. C'est aussi une application bijective.

2. L'application $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Sa bijection réciproque est l'application $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$. L'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x) \in \mathbb{R}_+^*$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa bijection réciproque est l'application $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$.

> Ne pas confondre la notation utilisée ici avec celle utilisée pour désigner l'image réciproque d'un ensemble. En effet, ici, f^{-1} désigne la réciproque de l'application f de E vers F, ce qui suppose que f soit bijective. C'est une application de F vers E. Lorsqu'on écrit « $f^{-1}(B)$ » avec $B \subset F$, l'écriture de « f^{-1} » ne peut pas être dissociée de celle de B et ne suppose en aucun cas que f soit bijective.

On a les propriétés suivantes.

Proposition 2.5 *Soit f une application de E vers F.*

✗ *Si f est bijective alors son application réciproque f^{-1} (c'est une application de F vers E) est elle-même bijective et vérifie :*

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f, \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F.$$

✗ *S'il existe une application g de F vers E telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$ alors f est bijective et $f^{-1} = g$.*

Démonstration $\trianglerighteq$ La propriété de bijectivité de l'application f^{-1} et la propriété $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ sont immédiates. Montrons que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$. Soient x un élément de E et y son image par f. On a :

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x.$$

On a ainsi vérifié que $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in E$, donc que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$. Enfin, montrons que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$. Soient y un élément de F et x son image par f^{-1}. On a :

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

On a ainsi vérifié que $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in F$, donc que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

$\trianglerighteq$ Supposons qu'il existe une application g de F vers E telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Rappelons que l'application identité est bijective. Elle est donc à la fois surjective et injective.

- De $g \circ f = \mathrm{id}_E$ on déduit que $g \circ f$ est injective (car id_E est injective) et donc que f est injective (voir page 43).
- De $f \circ g = \mathrm{id}_E$ on déduit que $f \circ g$ est surjective (car id_E est surjective) et donc que f est surjective (voir page 44).

L'application f est donc à la fois injective et surjective. Elle est donc bijective et g est nécessairement son application réciproque. □

Remarque Supposons que l'on ait déjà montré qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective. Si on trouve une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ (respectivement telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$) alors g est forcément la réciproque de f. Vérifions-le. Supposons f bijective. On a donc $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$. Supposons de plus que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. En composant à droite l'égalité $g \circ f = \mathrm{id}_E$ par f^{-1}, qui existe car f est bijective, on obtient :

$$(g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E \circ f^{-1}.$$

Or, la composition étant associative,

$$(g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) = g \circ \mathrm{id}_F$$

car $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$. Utilisant alors que $g \circ \mathrm{id}_F = g$ et $\mathrm{id}_E \circ f^{-1} = f^{-1}$, on obtient :

$$g = f^{-1}.$$

La démonstration dans le cas où $f \circ g = \mathrm{id}_F$ s'effectue en composant cette fois-ci à gauche par f^{-1}. Elle est laissée en exercice.

EXERCICE 2 Pour chacune des fonctions proposées dans la colonne de gauche, indiquer dans les colonnes correspondantes le domaine de définition, s'il s'agit d'une application, son image si c'est une application, et, le cas échéant, si l'application est injective, surjective, bijective.

Fonction $f : E \longrightarrow F$	$\mathcal{D}_f$	Appl.	$f(E)$	Inj., surj., bij.
$x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}$				
$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \longmapsto \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}$				
$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \longmapsto \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}^*$				
$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 2 \\ 1/(x-2) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$				
$x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$				
$x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$				
$x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$				
$x \in \mathbb{R} \longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$				
$x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$				
$x \in]1, +\infty[\longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}_+^*$				
$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$				
$\begin{array}{ccl} [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$				

PROPOSITION 2.6 *Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G. On a les propriétés suivantes.*

- *Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.*
- *Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.*
- *Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Démonstration $\trianglerighteq$ Supposons les deux applications f et g injectives, et montrons que l'application composée $g \circ f$ de E vers G est, elle-aussi, injective. Autrement dit, montrons que, pour tout $(x, x') \in E^2$,

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \implies x = x'.$$

Considérons x et x' deux éléments de E tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, c'est-à-dire tels que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Puisque g est injective, il vient $f(x) = f(x')$. De même, puisque f est injective, on en déduit $x = x'$.

$\trianglerighteq$ Supposons maintenant les deux applications f et g surjectives, et montrons que l'application composée $g \circ f$ est, elle-aussi, surjective. En d'autres termes, montrons que

$$\forall z \in G \quad \exists x \in E \quad (g \circ f)(x) = z.$$

Soit z un élément de G. La propriété de surjectivité de g nous assure l'existence d'(au moins) un élément y appartenant à F tel que $g(y) = z$. De même, la propriété de surjectivité de f nous assure l'existence d'(au moins) un élément x appartenant à E tel que $f(x) = y$. Par conséquent, il existe (au moins) un élément x de E tel que $g(f(x)) = z$, c'est-à-dire tel que $(g \circ f)(x) = z$, ce qui termine la démonstration.

$\trianglerighteq$ On déduit de ce qui précède que si les deux applications f et g sont à la fois injectives et surjectives alors l'application composée $g \circ f$ est, elle-aussi, à la fois injective et surjective. On est donc assuré de l'existence des applications f^{-1}, g^{-1} et $(g \circ f)^{-1}$. De plus, utilisant dans un premier temps l'associativité de $\circ$, puis que $g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_F$ et enfin que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$, on a :

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E.$$

On en déduit directement que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ et il est inutile de vérifier l'égalité $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_G$ (voir la remarque précédant la proposition 2.6). □

EXERCICE 3 Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G.
1 - Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.
2 - Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.

Remarque Si E, F sont deux ensembles finis et f est une application de E vers F, on a alors les implications suivantes :

- si f est surjective alors $\mathrm{card}\,(E) \geqslant \mathrm{card}\,(F)$;
- si f est injective alors $\mathrm{card}\,(E) \leqslant \mathrm{card}\,(F)$;
- si f est bijective alors $\mathrm{card}\,(E) = \mathrm{card}\,(F)$.

Il est à noter que ce n'est pas tant ces implications qui nous intéressent le plus, mais plutôt leurs contraposées. Par exemple, si E et F sont deux ensembles finis tels que $\mathrm{card}\,(E) < \mathrm{card}\,(F)$, alors on peut en déduire, en utilisant la contraposée de la première implication, qu'il n'existe pas d'application de E vers F qui soit surjective.

Permutation, transposition

DÉFINITION 2.23 *Soit n un entier naturel non nul.*

✗ *On appelle permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ toute application bijective de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ dans lui-même. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.*

✗ *Soient $n \geqslant 2$ et i, j deux éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$. La permutation $\tau_{i,j}$ définie par*

$$\begin{cases} \tau_{i,j}(i) = j, \quad \tau_{i,j}(j) = i, \\ \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j\} \quad \tau_{i,j}(k) = k \end{cases}$$

est appelée transposition. On dit qu'elle échange i et j et laisse invariants les éléments de $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ qui laisse invariant chacun des éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ est l'application identité de $\{1, 2, \dots, n\}$. On l'appelle *permutation identique* de $\{1, 2, \dots, n\}$. Par commodité, une permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ est notée :

$$\sigma \overset{not.}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

où les éléments de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ sont disposés en ligne et où l'image d'un élément de $\{1, 2, \dots, n\}$ est placée juste au-dessous de cet élément. Par exemple, la permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ qui à 1 associe 4, à 2 associe 3, à 3 associe 1 et à 4 associe 2, est notée :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

D'après la proposition 2.6, la composition de deux applications bijectives est encore une application bijective. La composition de deux permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ est donc encore une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, résultat qui se généralise bien évidemment à N permutations où $N \in \mathbb{N}^*$ (par récurrence sur l'entier N). Lorsqu'une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ s'écrit comme la composée (on dit aussi le produit) de N permutations $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, $\dots$, $\sigma^{(N)}$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, on peut aussi la représenter sur $N + 1$ lignes superposées. Sur la première ligne sont disposés les éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, sur la deuxième ligne les images par $\sigma^{(1)}$, sur la troisième ligne les images par $\sigma^{(2)}$, $\dots$, sur la $(N + 1)$-ième ligne les images par $\sigma^{(N)}$. Par exemple, considérons les deux permutations $\sigma^{(1)}$ et $\sigma^{(2)}$ de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ suivantes :

$$\sigma^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Autrement dit, $\sigma^{(1)}$ est la permutation de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ qui à 1 associe 2, à 2 associe 4, à 3 associe 1, à 4 associe 3 et à 5 associe 5, et $\sigma^{(2)}$ est la permutation de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ qui à 1 associe 2, à 2 associe 3, à 3 associe 4, à 4 associe 5 et à 5 associe 1. Alors, la permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, définie par $\sigma = \sigma^{(2)} \circ \sigma^{(1)}$, est notée :

$$\sigma = \sigma^{(2)} \circ \sigma^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cette notation a l'avantage de faire apparaître explicitement les deux permutations qui composent σ. La permutation σ est ainsi la permutation de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ qui à 1 associe 3, à 2 associe 5, à 3 associe 2, à 4 associe 4 et à 5 associe 1. On peut bien sûr supprimer dans la notation précédente les lignes intermédiaires (ici uniquement la deuxième) et noter σ comme suit :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soient i, j appartenant à $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$ et $n \geqslant 2$. Alors,

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad \Big(\tau_{i,j}(k) = \tau_{j,i}(k) \qquad \text{et} \qquad \big(\tau_{i,j} \circ \tau_{i,j}\big)(k) = k\Big),$$

c'est-à-dire $\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$, ce qui signifie qu'échanger i et j revient à échanger j et i, et $\tau_{i,j}^{-1} = \tau_{i,j}$, ce qui signifie qu'échanger deux fois revient à ne rien faire.

Écrivons par exemple toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 2\}$:

$$\sigma_1 = \mathrm{id}_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \sigma_2 = \tau_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il y en a deux. Ainsi, $\mathfrak{S}_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$. On remarque que σ_1 est la permutation identique de $\{1, 2\}$ et σ_2 est la transposition qui échange 1 et 2. Écrivons à présent toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$:

$$\sigma_1 = \mathrm{id}_{\{1,2,3\}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \tau_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_3 = \tau_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_4 = \tau_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_5 = \tau_{2,3} \circ \tau_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_6 = \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il y en a six. Ainsi, $\mathfrak{S}_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$. Remarquons que σ_1 est la permutation identique de $\{1, 2, 3\}$. Toute autre permutation de $\{1, 2, 3\}$ s'écrit comme une transposition (c'est le cas de σ_2, σ_3 et σ_4) ou la composée de deux transpositions (c'est le cas de σ_5 et σ_6).

Plus généralement, il y a $n!$ permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{card}\,(\mathfrak{S}_n) = n!.$$

Montrons ce résultat. Effectuons une récurrence sur n. Clairement, il y a $1 = 1!$ manière de permuter 1 élément. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il y a $(n-1)!$ manières de permuter $n-1$ éléments (c'est notre hypothèse de récurrence) et déduisons-en qu'il y a $n!$ manières de permuter n éléments. Choisissons un élément parmi les n éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, ce qui donne n possibilités et il reste $n-1$ éléments à ordonner, soit $(n-1)!$ possibilités d'après notre hypothèse de récurrence. Au total, il y a donc $n \times (n-1)!$, c'est-à-dire $n!$ possibilités d'ordonner les n éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, ce qui termine la démonstration.

De plus, si $n \geqslant 2$, on peut montrer que toute permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ peut s'écrire comme la composée de transpositions. Ce dernier point fait l'objet de l'exercice 8 donné en fin de chapitre. Par convention, la permutation identique de $\{1, 2, \dots, n\}$ est considérée comme la composée de 0 transposition. Une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ est dite *paire* (respectivement *impaire*) si elle s'écrit comme la composée d'un nombre pair (resp. impair) de transpositions. Par exemple, toute transposition de $\{1, 2, \dots, n\}$ est impaire.

La *signature* d'une permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$, notée $\varepsilon(\sigma)$, vaut 1 (respectivement -1) si σ est paire (resp. impaire). Par exemple, la signature d'une transposition de $\{1, 2, \dots, n\}$ est égale à -1. Par convention, la permutation identique de $\{1, 2, \dots, n\}$ est paire. Sa signature vaut donc 1.

Résolution d'une équation : compléments

Reprenons la discussion sur la résolution d'une équation abordée au paragraphe 2.2.3. Étant donnés deux ensembles non vides E et F, on désire résoudre l'équation suivante :

$$\text{(E)} \quad f(x) = b$$

où l'application f de E vers F et l'élément b de F sont les données du problème. Que se passe-t-il si l'application f est injective, surjective ou bijective ?

- Si l'application f est surjective alors tout élément b de F appartient à $f(E)$. L'équation (E) admet alors (au moins) une solution pour n'importe quel élément b appartenant à F. Autrement dit, $\mathcal{S} \neq \emptyset$ pour tout $b \in F$. Cette solution n'est d'ailleurs peut-être pas unique.
- Si f est injective alors l'équation (E) admet une solution unique à la condition que b appartienne à $f(E)$, c'est-à-dire : $\text{card}(\mathcal{S}) = 1$ si $b \in f(E)$.
- Si maintenant f est bijective alors l'équation (E) admet une solution pour n'importe quel b appartenant à F (puisque f et surjective) et cette solution est unique (puisque f est injective), autrement dit,

  $$\forall b \in F \quad \exists\, ! \, x \in E \quad f(x) = b,$$

  ou encore, $\text{card}(\mathcal{S}) = 1$ pour tout $b \in F$.

En résumé,

- la propriété de surjectivité de f nous assure l'existence d'une solution mais pas son unicité ;
- la propriété d'injectivité de f nous assure que si une solution existe alors elle est unique ;

– enfin, la propriété de bijectivité de f nous assure à la fois l'existence d'une solution et son unicité.

2.2.5 Puissance du dénombrable, puissance du continu

Revenons un instant sur la définition de cardinal d'un ensemble. D'après la définition 2.1, un ensemble E est fini lorsque le nombre d'éléments qui le composent est un entier naturel.[3] Dans ce cas, ce nombre est appelé cardinal de l'ensemble, et il est noté $\mathrm{card}(E)$. Sa détermination suppose que l'on sache compter les éléments de E. L'opération de comptage des éléments d'un ensemble fini est assez intuitive. En pratique, elle revient à établir une correspondance biunivoque[4] entre tous les éléments de E et ceux d'un ensemble fini d'entiers naturels. Autrement dit, elle revient à exhiber un entier n non nul et une bijection de $\{1, 2, \ldots, n\}$ vers E, et à conclure que $\mathrm{card}(E) = n$. Il est alors clair que tout ensemble F équipotent à E est fini et de même cardinal que E : ils ont le même nombre d'éléments. Dans le langage courant, on dit que E et F sont de « même taille ». On peut alors reformuler la définition d'un ensemble infini. C'est un ensemble qui ne peut pas être mis en bijection avec un ensemble fini d'entiers naturels.

La notion de bijection est un outil rigoureux pour l'étude des ensembles infinis.

Définition 2.24 *On dit qu'un ensemble infini E est dénombrable (ou qu'il possède la puissance du dénombrable) lorsqu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et E (ou entre E et $\mathbb{N}$).*

Exemples

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs est dénombrable puisqu'on peut expliciter (au moins) une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. C'est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$n \in \mathbb{N} \longmapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

On a par exemple les correspondances suivantes :

$$\begin{array}{rcr} 0 & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & -1 \\ 2 & \longmapsto & 1 \\ 3 & \longmapsto & -2 \\ 4 & \longmapsto & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 5 & \longmapsto & -3 \\ 6 & \longmapsto & 3 \\ 7 & \longmapsto & -4 \\ 8 & \longmapsto & 4 \end{array}$$

---

[3] Rappelons qu'un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

[4] ce qui permet de ne pas confondre deux éléments distincts et de n'en oublier aucun lors du comptage.

2. Le produit cartésien $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. En effet, il suffit de considérer l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \frac{(p+q) \times (p+q+1)}{2} + q \in \mathbb{N}.$$

C'est une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$. Par exemple, on a les correspondances :

$$\begin{array}{lcl} (0,0) & \longmapsto & 0 \\ (1,0) & \longmapsto & 1 \\ (0,1) & \longmapsto & 2 \\ (2,0) & \longmapsto & 3 \\ (1,1) & \longmapsto & 4 \\ (0,2) & \longmapsto & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{lcr} (3,0) & \longmapsto & 6 \\ (2,1) & \longmapsto & 7 \\ (1,2) & \longmapsto & 8 \\ (0,3) & \longmapsto & 9 \\ (4,0) & \longmapsto & 10 \end{array}$$

On peut montrer que toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable, que l'union de deux ensembles dénombrables est dénombrable et que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une conséquence de ces propriétés est que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est lui-aussi dénombrable. Les trois ensembles fondamentaux $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont donc des ensembles infinis de « même taille ».

Vers l'infini et au-delà ![(5)] La notion de bijection permet de distinguer d'autres types d'infinis, dont le plus classique est la puissance du continu.

> **Définition 2.25** *On dit qu'un ensemble infini E possède la puissance du continu lorsqu'il existe une bijection entre $\mathbb{R}$ et E (ou entre E et $\mathbb{R}$).*

On peut montrer que $\mathbb{R}$ est équipotent à l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$. On peut aussi montrer qu'un ensemble ne peut pas être équipotent à l'ensemble de ses parties (théorème fondamental de Cantor). Ces deux résultats sont admis. Cela met en évidence une hiérarchie des infinis, et en ce sens, on dit que la puissance du continu est strictement supérieure à celle du dénombrable, ce que l'on résume en écrivant :

$$\aleph_0 < \aleph_1$$

où le symbole $\aleph_0$ désigne la puissance du dénombrable et $\aleph_1$ celle du continu.[(6)] En utilisant le langage courant, on peut dire que l'ensemble infini $\mathbb{R}$ est « de taille strictement supérieure » à celle des ensembles infinis $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

[(5)] N'est-ce pas Buzz l'éclair ?

[(6)] Le symbole $\aleph$ (on dit aleph) est la première lettre de l'alphabet hébreu. Rappelons que pour tout ensemble fini E ayant n éléments, le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est égal à 2^n. Par analogie avec le cas fini, le symbole $\aleph_1$ désignant la puissance du continu est parfois noté $2^{\aleph_0}$ puisque $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

CANTOR, Georg Ferdinand (1845, Saint-Pétersbourg - 1918, Halle, Allemagne).

Professeur de mathématiques à l'Université de Halle, il fut un des principaux fondateurs de la théorie des ensembles. C'est en constatant (avec son ami mathématicien Richard Dedekind) qu'il existait une hiérarchie dans les ensembles infinis, que Cantor fut amené à introduire de nouveaux nombres, les ordinaux *transfinis*, et à définir une arithmétique sur ces nombres. Ses résultats, révolutionnaires pour l'époque, bouleversèrent les fondements des mathématiques, jusqu'à s'attirer les inimitiés d'autres grands savants comme le mathématicien allemand Leopold Kronecker qui l'empêcha de publier. Souffrant de dépression et de schizophrénie, il se désintéressa progressivement des mathématiques pour se consacrer, sur la fin de sa vie, à l'histoire et à la littérature anglaise.

Exemples

1. Tout intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un élément et non vide, est équipotent à $\mathbb{R}$. C'est le cas, par exemple, de l'intervalle $]-1,7[$ puisque l'application

$$x \in]-1,7[\longmapsto \tan\left(\frac{\pi(x-3)}{8}\right) \in \mathbb{R}$$

définit une bijection entre $]-1,7[$ et $\mathbb{R}$.

2. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels n'est pas dénombrable. Utilisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que l'ensemble infini $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ soit dénombrable. Alors, l'union de deux ensembles dénombrables étant dénombrable, l'ensemble $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ serait aussi dénombrable, ce qui est absurde puisque $\mathbb{R}$ possède la puissance du continu.

3. On peut montrer que le produit cartésien de deux ensembles équipotents à $\mathbb{R}$ possède la puissance du continu. Ainsi, l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes possède la puissance du continu. Les deux ensembles infinis $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont donc « de même taille ».

Remarque Il existe une bijection entre l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et le sous-ensemble constitué des entiers naturels pairs. De même, il existe une bijection entre l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ et l'intervalle $]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. Plus généralement, on peut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit infini est qu'il existe une bijection entre E et une de ses parties, non vide et distincte de E.

2.2.6 Restriction et prolongement d'une application

Rappelons qu'une application est un triplet constitué d'un ensemble de départ, d'un ensemble d'arrivée, et d'un graphe, ce dernier nous indiquant le mode opératoire de l'application. Changer l'ensemble de départ et/ou l'ensemble d'arrivée revient à définir une nouvelle application. Intéressons-nous dans un premier temps à l'espace de départ.

DÉFINITION 2.26 *Soit f une application de E vers F.*

✗ *Soit A un sous-ensemble de l'ensemble de départ E. On appelle restriction de f à A, et on note $f\big|_A$, l'application de A vers F définie par*

$$\forall x \in A \quad f\big|_A(x) \overset{déf.}{=} f(x).$$

✗ *Soit E' un ensemble tel que $E \subset E'$. On appelle prolongement de f à E' toute application g de E' vers F telle que*

$$\forall x \in E \quad g(x) \overset{déf.}{=} f(x).$$

Ainsi, l'application $g : E' \longrightarrow F$ est un prolongement à E' de l'application $f : E \longrightarrow F$ si la restriction de g à E est f, c'est-à-dire si $g\big|_E = f$.

Remarque Étant donnés f une application de E vers F et E' un ensemble tel que $E \subset E'$, on n'a pas en général l'unicité du prolongement de f à E'. Par exemple, l'application

$$f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$$

admet une infinité de prolongements à $\mathbb{R}$ (ici, $E = \mathbb{R}^*$ et $E' = \mathbb{R}$). Ce sont les applications g_α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, telles que

$$\begin{cases} g_\alpha(0) = \alpha \\ \forall x \in \mathbb{R}^* \quad g_\alpha(x) = \dfrac{\sin x}{x} \end{cases}$$

En particulier, le prolongement correspondant à la valeur $\alpha = 1$ est qualifié de prolongement par continuité en 0 de f car $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ (voir la définition 13.6 donnée en page 622). On le note parfois abusivement encore f.

Intéressons-nous à présent à l'espace d'arrivée.

DÉFINITION 2.27 *Soit f une application de E vers F. Soit B un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée F tel que $f(E) \subset B$. On appelle application à valeurs dans B induite par f, et on note $f\big|^B$, l'application de E vers B définie par*

$$\forall x \in E \quad f\big|^B(x) \overset{déf.}{=} f(x).$$

Exemple L'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x) \in \mathbb{R}$ est injective mais elle n'est pas surjective puisque son image, l'ensemble $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$, est strictement incluse dans l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. Elle n'est donc pas bijective. En revanche, l'application à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ induite par f :

$$f\big|^{\mathbb{R}_+^*} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x) \in \mathbb{R}_+^*$$

est bijective. Son application réciproque est $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

Remarque Soit f une application de E vers F *a priori* ni injective, ni surjective. Intéressons-nous en particulier à l'application $f\big|^{f(E)}$. C'est une application de E vers $f(E)$. Nous l'avons appelée « application à valeurs dans $f(E)$ induite par f ».

- Par construction, $f\big|^{f(E)}$ est surjective. Cela signifie qu'il est toujours possible, à partir d'une application f quelconque, de construire une application surjective. Il suffit de restreindre l'ensemble d'arrivée à l'image de f.
- Si de plus f est injective alors $f\big|^{f(E)}$ est bijective.

Exemple Considérons les applications f, g, h et ϕ suivantes :

$$x \in \mathbb{R} \overset{f}{\longmapsto} \sin x \in \mathbb{R}, \qquad x \in [-\pi/2, \pi/2] \overset{g}{\longmapsto} \sin x \in \mathbb{R},$$
$$x \in \mathbb{R} \overset{h}{\longmapsto} \sin x \in [-1,1], \quad x \in [-\pi/2, \pi/2] \overset{\phi}{\longmapsto} \sin x \in [-1,1].$$

Ces quatre applications sont différentes (bien que leur mode opératoire soit le même) puisque leurs ensembles de départ et/ou d'arrivée sont différents. Remarquons que l'application f n'est ni injective, ni surjective. On peut dire que g est la restriction de f à $[-\pi/2, \pi/2]$ ou que f est un prolongement de g à $\mathbb{R}$. On peut donc écrire :

$$g = f\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}.$$

L'application g est injective mais non surjective. Puisque $f(\mathbb{R}) \subset [-1,1]$, on peut dire que h est l'application à valeurs dans $[-1,1]$ induite par f, ce qu'on écrit :

$$h = f\big|^{[-1,1]}.$$

Il est à noter que l'application h est surjective. Elle n'est en revanche pas injective. Enfin, on peut écrire :

$$\phi = h\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}, \quad \phi = g\big|^{[-1,1]} \quad \text{et} \quad \phi = f\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}^{[-1,1]}.$$

Remarquons que l'application ϕ est à la fois injective et surjective. Elle est donc bijective.

2.2.7 Relation d'équivalence sur un ensemble

Définition 2.28 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble E dans lui-même.*

✗ *La relation $\mathcal{R}$ est dite réflexive si $x\mathcal{R}x$ pour tout $x \in E$.*

✗ *La relation $\mathcal{R}$ est dite symétrique si, pour tout $(x,y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$.*

✗ *La relation $\mathcal{R}$ est dite transitive si, pour tout $(x,y,z) \in E^3$,*

$$\big(x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z\big) \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

✗ *La relation $\mathcal{R}$ est appelée une relation d'équivalence sur E si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.*

Autrement dit, le fait qu'une relation $\mathcal{R}$ soit une relation d'équivalence sur E, signifie que :

- tout élément x de E est en relation avec lui-même par $\mathcal{R}$;
- pour tous x, y appartenant à E, si x est en relation avec y par $\mathcal{R}$ alors y est en relation avec x par $\mathcal{R}$;
- pour tous x, y, z appartenant à E, si x est en relation avec y par $\mathcal{R}$ et si y est en relation avec z par $\mathcal{R}$ alors x est en relation avec z par $\mathcal{R}$.

Définition 2.29 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.*

✗ *Pour tout $x \in E$, on appelle classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$ l'ensemble noté $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$ défini par*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \overset{\text{déf.}}{=} \big\{y \in E \mid x\mathcal{R}y\big\}.$$

L'élément x est appelé représentant de l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$.

✗ *On appelle ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, et on note $E/\mathcal{R}$, l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$. Autrement dit,*

$$E/\mathcal{R} \overset{\text{déf.}}{=} \big\{\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \mid x \in E\big\}.$$

Un ensemble quotient est donc un ensemble d'ensembles. On a : $E/\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(E)$.

Remarque Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. En utilisant les propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité de $\mathcal{R}$, on montre que, pour tous x, y appartenant à E, on a l'équivalence :

$$x\mathcal{R}y \iff \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y).$$

Ainsi, tout élément de $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$ peut être pris comme représentant de $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$.

Exemples

1. Dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des droites d'un plan affine, la relation de parallélisme est une relation d'équivalence. Pour toute droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$, la classe d'équivalence modulo la relation de parallélisme est appelée la direction de $\mathcal{D}$.

2. Soient n un entier non nul et p, q deux éléments de $\mathbb{Z}$. On dit que p est congru à q modulo n, et on note $p \equiv q\ [n]$, si n divise $q - p$, c'est-à-dire si

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad q - p = k \times n.$$

Par exemple, 22 est congru à 1 modulo 7, ce que l'on note $22 \equiv 1\ [7]$, car $22 - 1 = 21$ est divisible par 7 (ou encore car le reste dans la division euclidienne de 22 par 7 vaut 1). L'entier 15 est aussi congru à 1 modulo 7 (ce que l'on note : $15 \equiv 1\ [7]$) car $15 - 1 = 14$ est divisible par 7. De même, $-6 \equiv 1\ [7]$ car $-6 - 1 = -7$ est divisible par 7. On vérifie facilement que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. On note $\widehat{p}$ la classe d'équivalence de $p \in \mathbb{Z}$. Par exemple, $22 \in \widehat{1}$, $15 \in \widehat{1}$ et $-6 \in \widehat{1}$. On vérifie que

$$\widehat{p} = \{\ldots, p - 2n, p - n, p, p + n, p + 2n, \ldots\} = \{p + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

L'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo n, noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, est donné par

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}.$$

C'est un sous-ensemble fini de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Il contient n éléments.

2.3 Structures algébriques élémentaires

2.3.1 Loi de composition interne

DÉFINITION 2.30 *Soit E un ensemble non vide.*

✗ *On appelle loi de composition interne sur E une application de $E \times E$ dans E. Si $\top$ désigne cette application, alors l'image du couple $(x, y) \in E \times E$ par $\top$ s'écrit $x \top y$.*

✗ *On appelle ensemble structuré*(7) *tout couple $(E, \top)$ où E est un ensemble non vide et $\top$ une loi de composition interne sur E.*

Exemples

1. $(\mathbb{N}, +)$ et $(\mathbb{N}, \times)$ sont des ensembles structurés.

2. Soit E un ensemble. $(\mathcal{P}(E), \cup)$ et $(\mathcal{P}(E), \cap)$ sont des ensembles structurés.

3. Soit $\top$ la loi de composition interne sur $\mathbb{Q}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \quad x \top y = \frac{x + y}{2}.$$

(7) On dit aussi un *magma*, bien que ce terme soit un peu tombé en désuétude de nos jours !

Le couple $(\mathbb{Q}, \top)$ est un ensemble structuré. En revanche, $\top$ ne définit pas une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$ puisque $1 \top 2 = 3/2 \notin \mathbb{N}$.

4. Soit E un ensemble non vide. La composition d'applications $\circ$ définit une loi de composition interne sur $\mathcal{A}(E, E)$ puisque la composition de deux applications de E dans E est encore une application de E dans E.

Extension à $\mathcal{A}(X, E)$ d'une loi définie sur E

Soient X un ensemble non vide et $(E, \top)$ un ensemble structuré. On peut munir l'ensemble $\mathcal{A}(X, E)$ d'une loi de composition interne notée $\dot{\top}$. Cette dernière associe aux applications f et g de X vers E l'application de X vers E, notée $f \dot{\top} g$, définie par

$$\forall x \in X \quad (f \dot{\top} g)(x) \overset{déf.}{=} f(x) \top g(x).$$

Le couple $(\mathcal{A}(X, E), \dot{\top})$ est un ensemble structuré. On dit que la loi $\dot{\top}$ ainsi définie sur $\mathcal{A}(X, E)$ est une *extension* à $\mathcal{A}(X, E)$ de la loi $\top$ définie sur E.

> Il ne faut pas confondre les deux lois $\dot{\top}$ et $\top$. La loi $\dot{\top}$ opère sur les applications de X dans E alors que la loi $\top$ opère sur les éléments de E. En pratique, on omet souvent d'écrire le point au dessus de la loi $\top$.

Par exemple, en notant $+$ et $\times$ l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$, à partir des applications $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit les applications $f \dot{+} g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f \dot{\times} g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in X \quad \begin{cases} (f \dot{+} g)(x) = f(x) + g(x) \\ (f \dot{\times} g)(x) = f(x) \times g(x) \end{cases}$$

Les couples $(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), \dot{+})$ et $(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), \dot{\times})$ sont des ensembles structurés.

Définition 2.31 *Soit $(E, \top)$ un ensemble structuré.*

✗ *La loi $\top$ est dite associative sur E si $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$ pour tous x, y, z appartenant à E.*

✗ *La loi $\top$ est dite commutative sur E si $x \top y = y \top x$ pour tous x, y appartenant à E.*

Exemples

1. L'addition et la multiplication sont associatives et commutatives sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

2. La loi $\top$ définie sur $\mathbb{Q}$ par $x \top y = (x + y)/2$ n'est pas associative sur $\mathbb{Q}$ car $\big((-1) \top 0\big) \top 1 = 1/4$ et $(-1) \top \big(0 \top 1\big) = -1/4$. Elle est en revanche commutative sur $\mathbb{Q}$.

3. Soit E un ensemble non vide. La loi $\circ$ est associative sur $\mathcal{A}(E, E)$. Par contre, elle n'est pas commutative sur $\mathcal{A}(E, E)$, sauf si E est réduit à un seul élément.

4. Soit X un ensemble non vide. Les deux lois $+$ et $\times$ définies sur $\mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ sont associatives et commutatives sur $\mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ car l'addition et la multiplication le sont dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.32 *Soit* $(E,\top)$ *un ensemble structuré.*

✗ *Un élément* e *de* E *est dit neutre pour la loi* $\top$ *si, pour tout* $x \in E$,

$$e \top x = x \quad \text{et} \quad x \top e = x.$$

✗ *Si* $(E,\top)$ *possède un élément neutre* e *alors un élément* x *de* E *est dit symétrisable pour la loi* $\top$ *s'il existe un élément* x' *de* E *tel que*

$$x \top x' = e \quad \text{et} \quad x' \top x = e.$$

L'élément x' *est alors appelé élément symétrique de* x *pour la loi* $\top$.

Exemples

1. Considérons un ensemble E.

- L'ensemble structuré $(\mathcal{P}(E),\cup)$ admet l'ensemble $\emptyset$ pour élément neutre puisque $\emptyset \cup A = A \cup \emptyset = A$ pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$.
- L'ensemble structuré $(\mathcal{P}(E),\cap)$ admet l'ensemble E pour élément neutre puisque $E \cap A = A \cap E = A$ pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$.

2. Soit E un ensemble non vide. L'ensemble structuré $(\mathcal{A}(E,E),\circ)$ admet l'application identité pour élément neutre puisque $\mathrm{id}_E \circ f = f \circ \mathrm{id}_E = f$ pour tout $f \in \mathcal{A}(E,E)$. Pour qu'une application $f : E \longrightarrow E$ soit symétrisable pour la loi $\circ$ il faut qu'il existe une application $f' : E \longrightarrow E$ vérifiant :

$$f' \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f' = \mathrm{id}_E,$$

et si cette application f' existe, f est alors bijective et f' est l'application réciproque de f. Supposons l'ensemble E non réduit à un seul élément. Il existe au moins une application de E dans E qui n'est pas bijective, par exemple l'application constante $x \in E \longmapsto e \in E$ où e est un élément de E. Cette application n'est pas symétrisable pour la loi $\circ$.

3. Soit X un ensemble non vide. L'élément neutre de $\mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ pour l'addition est l'application constante $x \in X \longmapsto 0 \in \mathbb{R}$ et celui de $\mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ pour la multiplication est l'application constante $x \in X \longmapsto 1 \in \mathbb{R}$. Toute application f de X dans $\mathbb{R}$ possède un symétrique pour l'addition. C'est l'application $x \in X \longmapsto -f(x) \in \mathbb{R}$, notée $-f$, puisque

$$(-f)(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0$$

pour tout $x \in X$. En revanche, une application f de X dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x_0) = 0$ pour un certain $x_0 \in X$ ne possède pas de symétrique pour la multiplication.

PROPOSITION 2.7 *Soit $(E, \top)$ un ensemble structuré. Si l'élément neutre de E pour la loi $\top$ existe, alors il est unique.*

Démonstration La méthode consiste à supposer qu'il existe deux éléments neutres e et e' pour la loi $\top$, et à montrer que ces deux éléments sont nécessairement égaux. Puisque e est élément neutre pour $\top$, on a à la fois $e\top x = x$ et $x\top e = x$ pour tout $x \in E$. En particulier, on peut prendre $x = e'$. On obtient :

$$e\top e' = e' \quad \text{et} \quad e'\top e = e'.$$

Écrivons maintenant que e' est élément neutre pour $\top$. Pour tout $x \in E$, $e'\top x = x$ et $x\top e' = x$. En prenant cette fois-ci $x = e$, on obtient :

$$e'\top e = e \quad \text{et} \quad e\top e' = e.$$

En regroupant les résultats, on en déduit, par transitivité, que $e = e'$. L'unicité de l'élément neutre est démontrée. □

PROPOSITION 2.8 *Soit $(E, \top)$ un ensemble structuré pour lequel la loi $\top$ est associative et admet un élément neutre.*

✗ *Si $x \in E$ est symétrisable, alors son symétrique est unique.*

✗ *Si $x \in E$ et $y \in E$ sont symétrisables alors $x\top y$ est symétrisable et son symétrique $(x\top y)'$ est donné par*

$$(x\top y)' = y'\top x'$$

où x' désigne le symétrique de x et y' celui de y.

Démonstration Notons e l'élément neutre de E pour la loi $\top$.

⊵ Montrons l'unicité du symétrique pour un élément x symétrisable. Soit $x \in E$. Supposons x symétrisable pour la loi $\top$. Supposons que x possède deux symétriques x' et x'' pour la loi $\top$. On a donc $x'\top x = x\top x' = e$ puisque x admet x' pour symétrique, et $x''\top x = x\top x'' = e$ puisque x admet aussi x'' pour symétrique. La loi $\top$ étant associative, nous pouvons calculer $x''\top x\top x'$ de deux manières : $(x''\top x)\top x'$ et $x''\top(x\top x')$ (remarquer la position des parenthèses). Utilisant que $x''\top x = e$, puis que $e\top x' = x'$, on a :

$$(x''\top x)\top x' = e\top x' = x',$$

De même, utilisant que $x\top x' = e$, puis que $x''\top e = x''$, on obtient :

$$x''\top(x\top x') = x''\top e = x''.$$

L'associativité de la loi $\top$ nous assure l'égalité de $(x''\top x)\top x'$ et $x''\top(x\top x')$, et par conséquent celle des deux éléments x' et x''. L'unicité du symétrique est démontrée.

⊵ Montrons à présent que si x et y, deux éléments de E, sont symétrisables pour la loi $\top$, alors l'élément $x \top y$ est aussi symétrisable pour la loi $\top$. Soient x' le symétrique de x et y' celui de y pour la loi $\top$. Puisque $\top$ est associative,

$$(y' \top x') \top (x \top y) = y' \top (x' \top x) \top y.$$

Or, $x' \top x = e$ puisque x' est le symétrique de x pour la loi $\top$. On a donc :

$$(y' \top x') \top (x \top y) = y' \top e \top y = y' \top y$$

car e est l'élément neutre pour la loi $\top$. De même, $y' \top y = e$ puisque y' est le symétrique de y pour la loi $\top$. On a donc : $(y' \top x') \top (x \top y) = e$ et on vérifie de la même manière que $(x \top y) \top (y' \top x') = e$, ce qui montre que l'élément $x \top y$ est symétrisable pour la loi $\top$ et que son symétrique est l'élément $y' \top x'$. □

DÉFINITION 2.33 *Soient $(E, \top)$ et $(F, \perp)$ deux ensembles structurés.*

✗ *On appelle morphisme ou homomorphisme d'ensembles structurés de $(E, \top)$ dans $(F, \perp)$ toute application f de E vers F telle que*

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad f(x \top x') = f(x) \perp f(x').$$

Si f est bijective alors on dit que f est un isomorphisme de $(E, \top)$ dans $(F, \perp)$.

✗ *On appelle endomorphisme d'ensemble structuré $(E, \top)$ un morphisme de $(E, \top)$ dans lui-même.*

✗ *Un endomorphisme de $(E, \top)$ bijectif est qualifié d'automorphisme de $(E, \top)$.*

Exemples

1. L'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est un morphisme de $(\mathbb{N}, +)$ dans $(\mathbb{N}, \times)$ car $2^{n+m} = 2^n \times 2^m$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

2. Pour tout ensemble structuré $(E, \top)$, l'application identité $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$ qui à tout élément x de E lui associe lui-même est un automorphisme de $(E, \top)$.

Remarque On peut vérifier que la bijection réciproque d'un isomorphisme f de $(E, \top)$ dans $(F, \perp)$ est un morphisme de $(F, \perp)$ dans $(E, \top)$. Considérons par exemple l'application logarithme néperien $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. C'est un morphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ car

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \ln(x \times x') = \ln(x) + \ln(x').$$

De plus, ce morphisme est bijectif. C'est donc un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. Sa bijection réciproque est l'application exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. On a en effet :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \exp(x + x') = \exp(x) \times \exp(x').$$

2.3.2 Structure de groupe

Les trois structures algébriques que nous présentons maintenant (à savoir les structures de groupe, d'anneau et de corps) sont fondamentales. Commençons par la définition d'un groupe.

DÉFINITION 2.34 *Soit $(G, \top)$ un ensemble structuré.*

✗ *On dit que $(G, \top)$ est un groupe si*
- *la loi $\top$ est associative sur G ;*
- *il existe un élément neutre pour la loi $\top$ dans G ;*
- *tout élément de G est symétrisable pour la loi $\top$.*

On dit aussi que l'ensemble G possède une structure de groupe pour la loi $\top$.

✗ *On dit que le groupe $(G, \top)$ est commutatif (ou abélien) si la loi $\top$ est commutative sur G.*

Par abus de langage, on dit souvent « le groupe G » au lieu de « le groupe $(G, \top)$ » lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la loi $\top$.

Dans de nombreux exemples de groupes commutatifs, la loi est notée additivement $(+)$. Nous utilisons aussi souvent la notation multiplicative $(\times)$ sans pour autant la réserver pour des groupes obligatoirement commutatifs. On particularise alors les notations introduites comme suit.

Notation additive

Dire que « $(G, +)$ est un groupe » signifie que
- la loi $+$ est associative sur G : $(x+y)+z = x+(y+z)$ pour tout $(x, y, z) \in G^3$;
- existence d'un élément neutre dans G pour la loi $+$, appelé *élément zéro* et noté 0_G, vérifiant $0_G + x = x + 0_G = x$ pour tout $x \in G$;
- tout élément x de G possède un symétrique dans G pour la loi $+$, appelé *opposé* et noté $-x$, vérifiant $x + (-x) = (-x) + x = 0_G$.

Le groupe $(G, +)$ est commutatif si $x+y = y+x$ pour tout $(x, y) \in G^2$. Lorsque la loi est additive, on note souvent $x - y$ au lieu de $x + (-y)$.

Notation multiplicative

Dire que « $(G, \times)$ est un groupe » signifie que
- la loi $\times$ est associative sur G : $(x\times y)\times z = x\times(y\times z)$ pour tout $(x, y, z) \in G^3$;
- existence d'un élément neutre dans G pour la loi $\times$, appelé *élément unité* et noté 1_G, vérifiant $1_G \times x = x \times 1_G = x$ pour tout $x \in G$;
- tout élément x de G possède un symétrique dans G pour la loi $\times$, appelé *inverse* et noté x^{-1}, vérifiant $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1_G$.

Le groupe $(G, \times)$ est commutatif si $x\times y = y\times x$ pour tout $(x, y) \in G^2$. Lorsque la loi est multiplicative, on note souvent xy au lieu de $x \times y$.

Exemples

1. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ muni de l'addition $+$ n'est pas un groupe car, excepté l'élément 0, un élément de $\mathbb{N}$ ne possède pas d'opposé dans $\mathbb{N}$. En revanche, les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ munis de l'addition usuelle $+$ sont des groupes commutatifs.

2. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ muni de la multiplication $\times$ n'est pas un groupe car 1 et -1 sont les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}$. Par contre, les ensembles $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ munis de la multiplication usuelle $\times$ sont des groupes. Les ensembles $\mathbb{Q}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ munis de la multiplication usuelle $\times$ sont aussi des groupes.

3. Soit E un ensemble. Supposons-le non vide.

- Rappelons que $\emptyset$ est l'élément neutre de $\mathcal{P}(E)$ pour l'union. Muni de la loi $\cup$, $\mathcal{P}(E)$ n'est pas un groupe car si A est une partie non vide de E alors il n'existe pas de partie A' de E telle que $A \cup A' = \emptyset$.
- Rappelons que E est l'élément neutre de $\mathcal{P}(E)$ pour l'intersection. Ainsi, $\mathcal{P}(E)$ muni de la loi $\cap$ n'est pas un groupe car si $A \subset E$ et $A \neq E$ alors il n'existe pas de partie A' de E telle que $A \cap A' = E$.

4. Nous verrons au chapitre 6 que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif) muni de la loi $+$, possède une structure de groupe commutatif (voir en page 223).

5. Nous établirons au chapitre 10 que l'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices rectangulaires de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni de l'addition, possède une structure de groupe commutatif (voir en page 419). En particulier, l'ensemble $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni de l'addition, possède une structure de groupe commutatif.

6. De même, nous établirons au chapitre 10 que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni de la multiplication, possède une structure de groupe (voir en page 453). Ce groupe n'est pas commutatif lorsque $n \geqslant 2$.

7. Soit E un ensemble non vide non réduit à un seul élément. La loi $\circ$ est associative dans $\mathcal{A}(E,E)$ et possède pour élément neutre l'application id_E. En revanche, une application de E dans E n'est pas nécessairement bijective. On n'est donc pas assuré de l'existence d'un symétrique pour la loi $\circ$ pour toute application de E dans E. En conclusion, l'ensemble structuré $(\mathcal{A}(E,E),\circ)$ n'est pas un groupe.

8. Soient X un ensemble non vide et $(E,\top)$ un groupe. L'ensemble $\mathcal{A}(X,E)$ muni de la loi interne $\dot{\top}$ définie pour toutes applications $f, g : X \longrightarrow E$ par

$$\forall x \in X \quad (f \dot{\top} g)(x) = f(x) \top g(x)$$

possède une structure de groupe. Cette dernière se déduit de la structure de groupe définie sur E. Si, de plus, la loi $\top$ est commutative dans E alors le groupe $(\mathcal{A}(X,E),\dot{\top})$ est aussi commutatif. Par exemple, $(\mathcal{A}(X,\mathbb{R}),+)$ est un groupe commutatif. En revanche, $(\mathcal{A}(X,\mathbb{R}),\times)$ n'est pas un groupe car il y a absence d'inverse pour les applications qui s'annulent en au moins un élément de X.

Exercice 4 Soit $\star$ la loi définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \star y \overset{déf.}{=} x \times y + (x^2 - 1) \times (y^2 - 1)$$

où $x^2 = x \times x$ et $y^2 = y \times y$ avec $+$ et $\times$ les opérations usuelles sur $\mathbb{R}$.
1 - La loi $\star$ est-elle associative sur $\mathbb{R}$? Commutative sur $\mathbb{R}$? Vérifier que $\mathbb{R}$ possède un élément neutre pour la loi $\star$. Cette loi confère-t-elle à $\mathbb{R}$ une structure de groupe ?
2 - Calculer le(s) symétrique(s) du réel 2 pour la loi $\star$.
3 - Résoudre les équations suivantes : $2 \star x = 2, \quad 2 \star x = 5$.

2.3.3 Structure d'anneau

Il est possible de munir un groupe $(E, \top)$ d'une seconde loi de composition interne. Si cette seconde loi possède de « bonnes » propriétés calculatoires, on obtient une structure algébrique appelée anneau. Notons $*$ cette seconde loi de composition interne. Le triplet $(E, \top, *)$ est encore appelé ensemble structuré.

Définition 2.35 *Soit $(E, \top, *)$ un ensemble structuré.*

✗ *On dit que la loi $*$ est distributive à gauche par rapport à la loi $\top$ si*

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z).$$

✗ *On dit que la loi $*$ est distributive à droite par rapport à la loi $\top$ si*

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (y \top z) * x = (y * x) \top (z * x).$$

✗ *La loi $*$ est dite distributive par rapport à $\top$ si elle est distributive à la fois à gauche et à droite par rapport à $\top$.*

Exemples

1. Dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ la multiplication $\times$ est distributive par rapport à l'addition $+$.

2. Soit E un ensemble. Dans $\mathcal{P}(E)$ chacune des lois $\cup$ et $\cap$ est distributive par rapport à l'autre.

3. Soit X un ensemble non vide. Munissons l'ensemble $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ des deux lois $+$ et $\times$ définies au paragraphe 2.3.1, page 59. La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$ puisque, pour toutes applications $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\forall x \in X \quad \begin{cases} f(x) \times \big(g(x) + h(x)\big) = \big(f(x) \times g(x)\big) + \big(f(x) \times h(x)\big) \\ \big(g(x) + h(x)\big) \times f(x) = \big(g(x) \times f(x)\big) + \big(h(x) \times f(x)\big) \end{cases}$$

On est maintenant en mesure d'énoncer la définition d'un anneau.

DÉFINITION 2.36 *Soit $(A, \top, *)$ un ensemble structuré.*

✗ *On dit que $(A, \top, *)$ est un anneau si*
- *l'ensemble structuré $(A, \top)$ est un groupe commutatif ;*
- *la loi $*$ est associative sur A ;*
- *la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\top$;*
- *l'ensemble A admet un élément neutre pour la loi $*$.*

On dit aussi que A possède une structure d'anneau pour les lois $\top$ et $*$.

✗ *Si, de plus, la loi $*$ est commutative sur A alors on dit que l'anneau $(A, \top, *)$ est commutatif.*

Il est à noter que dans certains manuels de mathématiques, l'existence d'un élément neutre pour la seconde loi $*$ n'est pas imposée dans la définition, un anneau possédant un élément neutre pour $*$ étant alors qualifié d'*unifère*.

Notation additive et notation multiplicative

Par souci de simplification, nous laissons de côté (provisoirement) les notations $\top$ et $*$ des deux lois internes définies sur A au profit des notations additive $(+)$ et multiplicative $(\times)$. On particularise alors les notations. Ainsi, dire que « $(A, +, \times)$ est un anneau » signifie que
- l'ensemble structuré $(A, +)$ est un groupe commutatif (voir page 63) ;
- la loi $\times$ est associative sur A : $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ pour tout $(x, y, z) \in A^3$;
- la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$:

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z) \qquad \text{et} \qquad (y + z) \times x = (y \times x) + (z \times x)$$

  pour tout $(x, y, z) \in A^3$;
- existence d'un élément neutre dans A pour la loi $\times$, appelé *élément unité* et noté 1_A, vérifiant $1_A \times x = x \times 1_A = x$ pour tout $x \in A$.

L'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif si $x \times y = y \times x$ pour tout $(x, y) \in A^2$.

Un anneau $(A, +, \times)$, qu'il soit commutatif ou non, possède ainsi deux éléments neutres.
- Le premier, noté 0_A, correspond à la loi $+$. On l'appelle *zéro de l'anneau*.
- Le second, noté 1_A, correspond à la loi $\times$. On l'appelle *unité de l'anneau*.

Exemples

1. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ muni des lois $+$ et $\times$ possède une structure d'anneau commutatif. De même, les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis des lois $+$ et $\times$ sont des anneaux commutatifs.

2. Soit E un ensemble non vide. $\big(\mathcal{P}(E), \cup, \cap\big)$ n'est pas un anneau.

3. Soit X un ensemble non vide. L'ensemble $\mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ muni des deux lois $+$ et $\times$ définies au paragraphe 2.3.1, page 59, possède une structure d'anneau commutatif. L'élément zéro (respectivement l'élément unité) de $\mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ est l'application $x \in X \longmapsto 0 \in \mathbb{R}$ (resp. l'application $x \in X \longmapsto 1 \in \mathbb{R}$).

4. Nous verrons au chapitre 6 que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif) muni des lois $+$ et $\times$, possède une structure d'anneau commutatif (voir en page 226).

5. Nous verrons au chapitre 10 que l'ensemble $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni de l'addition et de la multiplication, possède une structure d'anneau, non commutatif lorsque $n \geqslant 2$ (voir en page 425).

6. Soit n un entier naturel non nul. Considérons l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo n (voir en page 58) :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\right\}.$$

On note $+$ et $\times$ l'addition et la multiplication usuelles sur $\mathbb{Z}$. On vérifie facilement que, pour tous p, p', q, q' appartenant à $\mathbb{Z}$,

$$p \equiv p' \;[n] \quad \text{et} \quad q \equiv q' \;[n] \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} p+q \equiv p'+q' \;[n] \\ p \times q \equiv p' \times q' \;[n] \end{array} \right. .$$

Cela signifie que si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$ alors les classes d'équivalence $\widehat{p+q}$ et $\widehat{p \times q}$ ne dépendent que des classes d'équivalence $\widehat{p}$ et $\widehat{q}$ et non du choix de p dans la classe d'équivalence $\widehat{p}$ et de q dans la classe d'équivalence $\widehat{q}$, ce qu'on exprime aussi en disant que les opérations $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{Z}$ sont compatibles avec la relation de congruence modulo n. Cela nous permet de définir deux lois de composition interne, notées $\widehat{+}$ et $\widehat{\times}$ et appelées respectivement addition et multiplication sur l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, en posant pour tous $\widehat{p}, \widehat{q}$ appartenant à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

$$\widehat{p} \,\widehat{+}\, \widehat{q} \overset{déf.}{=} \widehat{p+q} \qquad \text{et} \qquad \widehat{p} \,\widehat{\times}\, \widehat{q} \overset{déf.}{=} \widehat{p \times q}.$$

Écrivons par d'exemple les tables d'addition et de multiplication dans les trois ensembles quotients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

– Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \left\{\widehat{0}, \widehat{1}\right\}$, elles s'écrivent :

$\widehat{+}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{0}$

$\widehat{\times}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$

– Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \left\{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\right\}$, elles s'écrivent :

$\widehat{+}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$
$\widehat{2}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$

$\widehat{\times}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{1}$

– Dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}\}$, elles s'écrivent :

$\widehat{+}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$
$\widehat{2}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{3}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$

$\widehat{\times}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$
$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{3}$	$\widehat{2}$	$\widehat{1}$

On peut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni des deux lois $\widehat{+}$ et $\widehat{\times}$ possède une structure d'anneau commutatif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le zéro (respectivement l'unité) de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ est la classe d'équivalence $\widehat{0}$ (resp. la classe d'équivalence $\widehat{1}$) car

$$\widehat{0} \mathbin{\widehat{+}} \widehat{p} = \widehat{p} \qquad \text{et} \qquad \widehat{1} \mathbin{\widehat{\times}} \widehat{p} = \widehat{p}$$

pour tout $\widehat{p} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Remarquons que les classes d'équivalence $\widehat{0}$ et $\widehat{1}$ sont distinctes dès lors que $n \geqslant 2$.

Règles de calcul dans un anneau

PROPOSITION 2.9 *Soit* $(A, +, \times)$ *un anneau non nécessairement commutatif d'élément zéro* 0_A *et d'élément unité* 1_A*.*

✗ $\forall x \in A \quad 0_A \times x = 0_A$ *et* $x \times 0_A = 0_A$*. L'élément* 0_A *est alors dit* absorbant *pour la loi* $\times$*.*

✗ $\forall (x, y) \in A^2 \quad (-x) \times y = -(x \times y) = x \times (-y)$.

✗ $\forall x \in A \quad (-1_A) \times x = -x$.

✗ $\forall (x, y) \in A^2 \quad (-x) \times (-y) = x \times y$.

✗ $\forall (x, y, z) \in A^3 \; x \times (y - z) = x \times y - x \times z$ *et* $(y - z) \times x = y \times x - z \times x$.

Démonstration Montrons uniquement les deux premières propriétés, les trois dernières se déduisant directement des deux premières.

⊵ Soit $x \in A$. Montrons que $0_A = 0_A \times x$. Considérons un élément y de A. Puisque 0_A est le zéro de l'anneau, on peut écrire : $y = 0_A + y$, d'où $y \times x = (0_A + y) \times x$. Or, $(0_A + y) \times x = (0_A \times x) + (y \times x)$ puisque la loi $\times$ est distributive à droite par rapport à la loi $+$. Ainsi,

$$y \times x = (0_A \times x) + (y \times x).$$

Additionnons alors l'élément $-(y \times x)$ (c'est le symétrique de l'élément $y \times x$ pour la loi $+$) à droite et à gauche de l'égalité :

$$(y \times x) + (-(y \times x)) = \big[(0_A \times x) + (y \times x)\big] + (-(y \times x))$$

ou encore, puisque la loi $+$ est associative sur A,

$$(y \times x) + (-(y \times x)) = (0_A \times x) + \big[(y \times x) + (-(y \times x))\big].$$

On obtient alors en utilisant que $(y \times x) + (-(y \times x)) = 0_A$,

$$0_A = (0_A \times x) + 0_A$$

c'est à-dire : $0_A = 0_A \times x$ car 0_A est le zéro de l'anneau. On démontrerait de la même manière que $0_A = x \times 0_A$.

$\trianglerighteq$ Soient x et y deux éléments de A. Montrons que $(-x) \times y = -(x \times y)$. En factorisant (à droite) par y, on a :

$$(x \times y) + ((-x) \times y) = \big[x + (-x)\big] \times y.$$

Or, $x + (-x) = 0_A$. Ainsi, $(x \times y) + ((-x) \times y) = 0_A \times y$. Or, 0_A est absorbant pour la loi $\times$. On a donc : $0_A \times y = 0_A$. D'où :

$$(x \times y) + ((-x) \times y) = 0_A. \tag{6}$$

L'élément $x \times y$ admettant l'élément $-(x \times y)$ pour symétrique dans A par rapport à la loi $+$, on a aussi :

$$(x \times y) + (-(x \times y)) = 0_A. \tag{7}$$

Par unicité du symétrique, on déduit de (6) et (7) que $(-x) \times y = -(x \times y)$. La démonstration de l'égalité $x \times (-y) = -(x \times y)$ s'effectue suivant le même modèle. Sa rédaction est laissée en exercice. $\square$

Remarque Soit $(A, +, \times)$ un anneau non nécessairement commutatif. Il est à noter que si l'ensemble A n'est pas réduit à 0_A alors les éléments 0_A et 1_A sont nécessairement distincts. Cela se montre facilement en utilisant un raisonnement par contraposition. Supposons 0_A et 1_A égaux et montrons que $A = \{0_A\}$. Soit x un élément de A. Puisque 1_A est l'élément neutre pour la loi $\times$, on peut écrire : $x = 1_A \times x$. Or, par hypothèse, $1_A = 0_A$. Ainsi,

$$x = 1_A \times x = 0_A \times x = 0_A$$

car 0_A est absorbant pour la loi $\times$ (voir la proposition 2.9).

Notations et conventions

Afin d'apprécier pleinement la portée des notations qui suivent, nous reprenons (provisoirement) les notations $\top$ et $*$. Considérons donc un anneau non nécessairement commutatif $(A, \top, *)$.

Soient n un entier naturel non nul et x un élément de A. On note nx l'élément de A qui est égal à la composition par la première loi $\top$ de n termes égaux à x. Autrement dit, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in A$,

$$nx \overset{not.}{=} \underbrace{x \top x \top \ldots \top x}_{n \text{ termes}}.$$

En particulier, en prenant $n = 1$, on a : $1x = x$ pour tout $x \in A$. Par exemple, dans $(A, +, \times)$, $3x = x + x + x$. De même, on note x^n l'élément de A qui est égal à la composition par la seconde loi $*$ de n termes égaux à x. Autrement dit, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in A$,

$$x^n \overset{not.}{=} \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ termes}}.$$

En particulier, en prenant $n = 1$, on a : $x^1 = x$ pour tout $x \in A$. Par exemple, dans $(A, +, \times)$, $x^4 = x \times x \times x \times x$.

Et pour $n = 0$? Désignons par 0_A l'élément zéro et par 1_A l'élément unité de $(A, \top, *)$ (cette notation est ici un peu malheureuse car elle rappelle la notation additive et la notation multiplicative que nous essayons justement d'éviter, mais bon !). Alors, par convention, pour tout $x \in A$,

$$0x = 0_A \quad \text{et} \quad x^0 = 1_A.$$

Et pour n strictement négatif ? Il suffit de remarquer que si n est strictement négatif alors son opposé, $-n$, est strictement positif. Ainsi, puisque tout élément d'un anneau admet un symétrique pour la première loi $\top$, si $x \in A$ et si n est un entier strictement négatif alors on note nx l'élément de A qui est égal à la composition par $\top$ de $-n$ termes égaux au symétrique de x pour la loi $\top$, c'est-à-dire :

$$nx \overset{not.}{=} (-n)x' = \underbrace{x' \top x' \top \ldots \top x'}_{-n \text{ termes}}$$

où x' désigne le symétrique de x pour la loi $\top$. Par exemple, dans $(A, +, \times)$, $-3x = 3(-x) = (-x) + (-x) + (-x)$.

D'après la définition d'un anneau, un élément de A n'admet pas nécessairement de symétrique pour la seconde loi $*$. Toutefois, si un élément x de A est symétrisable pour $*$ alors, pour tout entier n négatif, on note x^n l'élément de A qui est égal à la composition par $*$ de $-n$ termes égaux au symétrique de x pour la loi $*$, c'est-à-dire :

$$x^n \overset{not.}{=} (x'')^{-n} = \underbrace{x'' * x'' * \ldots * x''}_{-n \text{ termes}}$$

où x'' désigne le symétrique de x pour la loi $*$. Par exemple, dans $(A, +, \times)$, si x est inversible alors $x^{-4} = (x^{-1})^4 = x^{-1} \times x^{-1} \times x^{-1} \times x^{-1}$.

Propriétés

Soit $(A, +, \times)$ un anneau non nécessairement commutatif. Il est aisé de montrer les propriétés suivantes :

- $\forall x \in A \quad \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \quad (n + m)x = nx + mx$,
- $\forall x \in A \quad \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \quad (nm)x = n(mx)$,
- $\forall x \in A \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad x^n \times x^m = x^{n+m}$,

- $\forall x \in A \quad \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \quad (x^n)^m = x^{n\times m}$.

En particulier, si l'élément x est symétrisable pour la seconde loi $\times$ alors les deux dernières propriétés sont vraies pour tout $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$.

De même, on montre les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in A \quad n(-x) = (-n)x = -(nx)$,
- $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall (x,y) \in A^2 \quad n(x+y) = nx + ny$ et $n(x-y) = nx - ny$,
- $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall (x,y) \in A^2 \quad n(x \times y) = (nx) \times y = x \times (ny)$,
- $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in A \quad nx = (n1_A) \times x = x \times (n1_A)$.

Si x et y désignent deux éléments quelconques d'un anneau $(A, +, \times)$ non commutatif, alors, *a priori*, les deux éléments $(x \times y)^2$ et $x^2 \times y^2$ ne sont pas égaux. En effet,

$$(x \times y)^2 = (x \times y) \times (x \times y).$$

La multiplication n'étant pas commutative, $(x \times y) \times (x \times y)$ n'est pas obligatoirement égal à $x^2 \times y^2$, et plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'élément $(x\times y)^n$ n'est pas obligatoirement égal à $x^n \times y^n$. Bien évidemment, si $x \times y = y \times x$, alors $(x \times y)^n = x^n \times y^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notations $\sum$ et $\prod$

Soit $(A, +, \times)$ un anneau (non nécessairement commutatif). Soient p et n deux entiers (relatifs) tels que $p \leqslant n$. Considérons les $(n-p+1)$ éléments x_p, x_{p+1}, $\ldots$, x_n de A. Rappelons que les deux lois $+$ et $\times$ sont associatives sur A. On note alors :

$$\sum_{k=p}^{n} x_k \overset{not.}{=} x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n, \qquad \prod_{k=p}^{n} x_k \overset{not.}{=} x_p \times x_{p+1} \times \ldots \times x_n.$$

Par exemple, $\sum_{k=3}^{6} x_k = x_3 + x_4 + x_5 + x_6$. Si $K \in \{p, p+1, \ldots, n\}$ alors $\sum_{k=K}^{K} x_k = x_K = \prod_{k=K}^{K} x_k$. On note aussi :

$$\sum_{k=n}^{p} x_k \overset{not.}{=} x_n + x_{n-1} + \ldots + x_p, \qquad \prod_{k=n}^{p} x_k \overset{not.}{=} x_n \times x_{n-1} \times \ldots \times x_p.$$

Par exemple, $\prod_{k=5}^{2} x_k = x_5 \times x_4 \times x_3 \times x_2$. Dans un anneau, la première loi, ici $+$, est commutative sur A. On a alors les propriétés suivantes :

- Pour tous $(x_k, x'_k) \in A^2$, $k \in \{p, p+1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{k=n}^{p} x_k = \sum_{k=p}^{n} x_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} (x_k + x'_k) = \sum_{k=p}^{n} x_k + \sum_{k=p}^{n} x'_k.$$

– Pour tous $x_{kk'} \in A$, $k \in \{p, p+1, \ldots, n\}$ et $k' \in \{p', p'+1, \ldots, n'\}$,

$$\sum_{k=p}^{n}\Big[\sum_{k'=p'}^{n'} x_{kk'}\Big] = \sum_{k'=p'}^{n'}\Big[\sum_{k=p}^{n} x_{kk'}\Big].$$

On dit alors que l'ordre de deux sommes peut être inversé.

– Pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $x_k \in A$, $k \in \{p, p+1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{k=p}^{n}(mx_k) = m\sum_{k=p}^{n} x.$$

– Pour tout $a \in A$, $\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a$.

Dans un anneau, la seconde loi, ici $\times$, n'est pas nécessairement commutative sur A. Lorsqu'elle l'est, on a les propriétés suivantes :

– Pour tous $(x_k, x'_k) \in A^2$, $k \in \{p, p+1, \ldots, n\}$,

$$\prod_{k=n}^{p} x_k = \prod_{k=p}^{n} x_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{n}(x_k \times x'_k) = \Big(\prod_{k=p}^{n} x_k\Big) \times \Big(\prod_{k=p}^{n} x'_k\Big).$$

– Pour tous $x_{kk'} \in A$, $k \in \{p, p+1, \ldots, n\}$ et $k' \in \{p', p'+1, \ldots, n'\}$,

$$\prod_{k=p}^{n}\Big[\prod_{k'=p'}^{n'} x_{kk'}\Big] = \prod_{k'=p'}^{n'}\Big[\prod_{k=p}^{n} x_{kk'}\Big].$$

On dit alors que l'ordre de deux produits peut être inversé.

– Pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $x_k \in A$, $k \in \{p, p+1, \ldots, n\}$,

$$\prod_{k=p}^{n}(mx_k) = m^{n-p+1}\prod_{k=p}^{n} x_k.$$

– Pour tout $a \in A$, $\prod_{k=p}^{n} a = a^{n-p+1}$.

Les indices de sommation et de produit sont muets. Cela signifie que l'on peut les remplacer par n'importe quelle lettre. Par exemple,

$$\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{\ell=p}^{n} x_\ell = \ldots = \sum_{i=p}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{n} x_k = \prod_{\ell=p}^{n} x_\ell = \ldots = \prod_{i=p}^{n} x_i$$

pour tous $x_k \in A$, $k \in \{p, p+1, \ldots, n\}$.

On a aussi les formules de Chasles : si $(p, n, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$ alors

$$\sum_{k=p}^{n+\ell} x_k = \sum_{k=p}^{n} x_k + \sum_{k=n+1}^{n+\ell} x_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{n+\ell} x_k = \Big(\prod_{k=p}^{n} x_k\Big) \times \Big(\prod_{k=n+1}^{n+\ell} x_k\Big)$$

pour tous $x_k \in A$, $k \in \{p, p+1, \dots, n+\ell\}$.

On a aussi les formules de changement d'indice : si $(p, n, K) \in \mathbb{Z}^3$ alors

$$\sum_{k=p}^{n} x_{k+K} = \sum_{k'=p+K}^{n+K} x_{k'}.$$

pour tous $x_k \in A$, $k \in \{p+K, \dots, n+K\}$. On dit alors que l'on a effectué le changement d'indice : $k' = k + K$. Le changement d'indice implique un changement des bornes. Lorsqu'on effectue le changement d'indice $k' = k + K$, la borne $k = p$ devient $k' = p + K$ et la borne $k = n$ devient $k' = n + K$, ce que l'on note parfois :

$$\begin{aligned} k = p &\quad \longrightarrow \quad k' = p + K, \\ k = n &\quad \longrightarrow \quad k' = n + K. \end{aligned}$$

Par exemple, si x_1, x_2, x_3, x_4 appartiennent à A alors, en effectuant le changement d'indice $k' = k - 6$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{4} x_k = \sum_{k'=-5}^{-2} x_{6+k'},$$

ce que l'on peut vérifier, l'égalité précédente s'écrivant :

$$\underbrace{x_1}_{k=1} + \underbrace{x_2}_{k=2} + \underbrace{x_3}_{k=3} + \underbrace{x_4}_{k=4} = \underbrace{x_1}_{k'=-5} + \underbrace{x_2}_{k'=-4} + \underbrace{x_3}_{k'=-3} + \underbrace{x_4}_{k'=-2}.$$

De même, en effectuant le changement d'indice $k' = 5 - k$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{4} x_k = \sum_{k'=1}^{4} x_{5-k'},$$

ce que l'on peut vérifier, l'égalité précédente s'écrivant :

$$\underbrace{x_1}_{k=1} + \underbrace{x_2}_{k=2} + \underbrace{x_3}_{k=3} + \underbrace{x_4}_{k=4} = \underbrace{x_4}_{k'=1} + \underbrace{x_3}_{k'=2} + \underbrace{x_2}_{k'=3} + \underbrace{x_1}_{k'=4}.$$

Diviseur de zéro, élément nilpotent

> **Définition 2.37** *Soient $(A, +, \times)$ un anneau non nécessairement commutatif et x un élément de A différent de 0_A le zéro de l'anneau.*
>
> ✗ *On dit que x est un diviseur de zéro à gauche dans A s'il existe un élément y de A, $y \neq 0_A$, tel que $x \times y = 0_A$.*
>
> ✗ *On dit que x est un diviseur de zéro à droite dans A s'il existe un élément z de A, $z \neq 0_A$, tel que $z \times x = 0_A$.*
>
> ✗ *On dit que x est un diviseur de zéro dans A s'il est un diviseur de zéro à gauche ou à droite dans A.*
>
> ✗ *On dit que l'anneau $(A, +, \times)$ est intègre si $A \neq \{0_A\}$ et s'il n'admet aucun diviseur de zéro.*

En d'autres termes, un anneau $(A, +, \times)$ est intègre si $A \neq \{0_A\}$ et si

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad \Big(x \times y = 0_A \implies \big(x = 0_A \ \text{ ou } \ y = 0_A\big)\Big),$$

ou encore, par contraposée, si

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad \Big(\big(x \neq 0_A \ \text{ et } \ y \neq 0_A\big) \implies x \times y \neq 0_A\Big).$$

Bien entendu, si l'anneau est commutatif, la notion de diviseur de zéro à gauche est confondue avec celle de diviseur de zéro à droite.

Exemples

1. Dans l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, muni des deux lois $+$ et $\times$ définies au paragraphe 2.3.1 (voir en page 59), les deux applications

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sont des diviseurs de zéro puisqu'elles sont non nulles et vérifient $f \times g = 0$. En effet, $(f \times g)(x) = 0 \times x = 0$ si $x \leqslant 0$ et $(f \times g)(x) = \sqrt{x} \times 0 = 0$ si $x > 0$.

2. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ muni des lois usuelles $+$ et $\times$ ne possède pas de diviseur de zéro. C'est donc un anneau commutatif intègre.

3. Les deux anneaux commutatifs $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ et $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ sont intègres. Cela se vérifie directement à partir des tables d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ données en page 67. En revanche, $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ n'est pas intègre puisque $\widehat{2} \mathbin{\widehat{\times}} \widehat{2} = \widehat{0}$ et $\widehat{2} \neq \widehat{0}$. La classe d'équivalence $\widehat{2}$ est donc un diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

4. Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis des lois usuelles $+$ et $\times$ sont des anneaux commutatifs intègres.

5. Nous établirons au chapitre 6 que l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif) est intègre (voir en page 226).

6. Nous montrerons au chapitre 10 que l'anneau $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) n'est pas intègre (voir en page 426).

PROPOSITION 2.10 *Soit $(A, +, \times)$ un anneau non nécessairement commutatif. Tout diviseur de zéro dans A est nécessairement non inversible.*

Démonstration Cela se montre facilement en raisonnant par l'absurde. Soit $x \in A$. Supposons que x soit à la fois diviseur de zéro et inversible. Effectuons la démonstration dans le cas où x est diviseur de zéro à gauche (la démonstration dans le cas où x est diviseur de zéro à droite s'effectue suivant le même principe ; elle est laissée en exercice). Puisque x est diviseur de zéro à gauche, il existe un élément $y \in A$ non nul ($y \neq 0_A$) tel que $x \times y = 0_A$. En multipliant à gauche cette égalité par x^{-1}, qui existe car x est inversible, on obtient :

$$x^{-1} \times (x \times y) = x^{-1} \times 0_A. \tag{8}$$

Or, utilisant, dans l'ordre, que $\times$ est associative, que x^{-1} est l'inverse de x et que 1_A est l'élément unité de l'anneau, on a :

$$x^{-1} \times (x \times y) = (x^{-1} \times x) \times y = 1_A \times y = y.$$

De plus, $x^{-1} \times 0_A = 0_A$ puisque 0_A est absorbant pour la loi $\times$. Ainsi, (8) se réécrit : $y = 0_A$, ce qui est contraire à nos hypothèses. $\square$

DÉFINITION 2.38 *Soient $(A, +, \times)$ un anneau non nécessairement commutatif et 0_A le zéro de l'anneau. Un élément a de A est dit nilpotent si*

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad a^n = 0_A.$$

Si $(A, +, \times)$ est un anneau (non nécessairement commutatif) alors il est clair qu'un élément nilpotent non nul de A est diviseur de zéro.

Un anneau $(A, +, \times)$ possède-t-il toujours un (des) élément(s) nilpotent(s) ?

La réponse est bien évidemment « oui » puisque le zéro de l'anneau, 0_A, est nilpotent (en effet, $0_A^1 = 0_A$).

Y en a-t-il d'autres ?

Dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, il est inutile d'essayer d'en chercher un autre. En effet, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ possèdent une structure plus riche que celle d'un anneau. Ce sont en fait des corps commutatifs pour l'addition et la multiplication (la structure de corps fait l'objet du paragraphe 2.3.4) et nous verrons que la structure de corps exclut l'existence d'éléments nilpotents, à l'exception du zéro.

L'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Z}$, est intègre. Seul zéro est nilpotent dans $\mathbb{Z}$.

Nous rencontrerons dans cet ouvrage des exemples d'ensembles structurés qui possèdent des éléments nilpotents. Par exemple, nous verrons au chapitre 10 que l'ensemble $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni de l'addition et de la multiplication, possède des éléments nilpotents lorsque $n \geqslant 2$ (voir en page 427).

EXERCICE 5 Soit $(A, +, \times)$ un anneau non nécessairement commutatif.

1 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in A \quad 1_A - x^n = (1_A - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

2 - En déduire que si a est nilpotent alors $1_A - a$ est inversible.

Formule du Binôme de Newton dans un anneau

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout entier p compris entre 0 et n, on définit l'entier noté $\binom{n}{p}$, appelé *coefficient binomial*, de la manière suivante :

$$\binom{n}{p} \overset{déf.}{=} \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

où, par convention, $0! = 1$. Comme nous l'avons mentionné en page 26, le coefficient binomial est parfois noté C_n^p.

PROPOSITION 2.11 *Le coefficient binomial vérifie les propriétés suivantes :*

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$
- $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \binom{n}{1} = n.$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \{0, 1, \ldots, n\} \quad \binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}.$
- *Formule du triangle de Pascal :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall p \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}.$$

Démonstration Les trois premières propriétés sont évidentes d'après la définition des coefficients binomiaux. Vérifions la quatrième. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} &= \frac{n!}{(p-1)! \times (n+1-p)!} + \frac{n!}{p! \times (n-p)!} \\
&= \frac{n! \times p}{p! \times (n+1-p)!} + \frac{n! \times (n+1-p)}{p! \times (n+1-p)!} \\
&= \frac{n! \times p + n! \times (n+1-p)}{p! \times (n+1-p)!} = \frac{(n+1)!}{p! \times (n+1-p)!}.
\end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\frac{(n+1)!}{p! \times (n+1-p)!} = \binom{n+1}{p},$$

ce qui termine la démonstration □

On range les coefficients binomiaux dans le tableau suivant, appelé *triangle de Pascal*, en plaçant à la n-ième ligne et à la p-ième colonne le coefficient binomial $\binom{n}{p}$. En pratique, on commence par remplir la colonne correspondant à $p = 0$ par des 1 et la diagonale par des 1 puisque

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Puis on complète ligne par ligne le tableau en partant de la troisième ligne (correspondant à $n = 2$) en remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les coefficients de la $(n+1)$-ième ligne s'obtiennent à partir de ceux de la n-ième ligne puisque

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

pour tout $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On obtient ainsi le triangle de Pascal :

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

Il est à noter, pour chacune des lignes, la symétrie des coefficients due à la propriété :

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Rappelons que dans un anneau $(A, +, \times)$, contrairement à la première loi $+$ qui est commutative, la deuxième loi $\times$, elle, ne l'est pas nécessairement. Bien évidemment, rien ne s'oppose à ce qu'il existe des éléments de A qui commutent entre eux (par exemple, l'élément unité 1_A commute avec n'importe quel élément de l'anneau) et, dans ce cas, on peut appliquer la formule du binôme de Newton donnée dans la proposition suivante.

Proposition 2.12 (Formule du binôme de Newton)
Soient $(A, +, \times)$ un anneau non nécessairement commutatif, a et b deux éléments de A qui commutent pour la loi $\times$, c'est-à-dire tels que $a \times b = b \times a$, et n un entier naturel. Alors,

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

où, pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$, $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binomial.

Démonstration Notons 0_A et 1_A, respectivement, le zéro et l'unité de l'anneau $(A, +, \times)$.

$\trianglerighteq$ Pour montrer la première égalité, nous raisonnons par récurrence sur l'entier n. La propriété est vraie pour $n = 0$ puisque, par convention, $x^0 = 1_A$ pour tout $x \in A$, d'où $(a+b)^0 = 1_A$ et

$$\binom{0}{0}(a^0 \times b^0) = 1(1_A \times 1_A) = 1(1_A) = 1_A.$$

Elle est vraie aussi pour $n = 1$ puisque $(a+b)^1 = a + b$ et

$$\binom{1}{0}(a^0 \times b^1) + \binom{1}{1}(a^1 \times b^0) = 1(1_A \times b) + 1(a \times 1_A) = 1b + 1a = a + b.$$

Supposons la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$. Remarquons que $(a+b)^{n+1} = (a+b) \times (a+b)^n$. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

La loi $\times$ étant distributive par rapport à la loi $+$, on obtient :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{p+1} b^{n-p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n+1-p}$$

où on a utilisé que $a \times b = b \times a$. Effectuons alors le changement d'indice $\ell = p+1$ dans la première somme (l'indice étant muet, on peut finalement le remplacer par p). On obtient :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} a^p b^{n+1-p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n+1-p}.$$

Isolons dans la première somme le terme d'indice $p = n+1$ et dans le deuxième celui d'indice $p = 0$, ce qui permet de regrouper les deux sommes restantes :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \left[\left(\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \right) a^p b^{n+1-p} \right] + b^{n+1}$$

car $b^0 = a^0 = 1_A$ et $1 = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$. Utilisant alors la dernière propriété de la proposition 2.11 et remarquant que $1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1}$, on obtient :

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{p=1}^{n} \binom{n+1}{p} a^p b^{n+1-p} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1},$$

c'est-à-dire (en regroupant tout sous la même somme) :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} a^p b^{n+1-p},$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

$\trianglerighteq$ La deuxième égalité se vérifie grâce au changement d'indice $\ell = n - p$:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{n-\ell} a^{n-\ell} b^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} a^{n-\ell} b^{\ell}$$

où on a utilisé la troisième propriété de la proposition 2.11. L'indice ℓ étant muet, on peut alors le remplacer par n'importe quel indice, par exemple par p, ce qui termine la démonstration. $\square$

2.3.4 Structure de corps

Dans un anneau, un élément ne possède pas nécessairement de symétrique par rapport à la seconde loi (ou d'inverse puisque la seconde loi est souvent notée multiplicativement). Il est à noter que le zéro d'un anneau est absorbant pour la seconde loi. Il ne peut donc pas être symétrisable pour la seconde loi.

Considérons par d'exemple l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}\}$ muni des lois $\widehat{+}$ et $\widehat{\times}$. Il est immédiat d'après les tables de multiplication (voir en page 68) que les classes d'équivalence $\widehat{1}$ et $\widehat{3}$ possèdent des inverses et

$$\widehat{1}^{-1} = \widehat{1} \quad \text{et} \quad \widehat{3}^{-1} = \widehat{3}$$

où $\widehat{1}^{-1}$ et $\widehat{3}^{-1}$ désignent les inverses respectifs de $\widehat{1}$ et $\widehat{3}$ pour la loi $\widehat{\times}$. En revanche, la classe d'équivalence $\widehat{2}$ ne possède pas d'inverse puisque $\widehat{2} \mathbin{\widehat{\times}} \widehat{p} \neq \widehat{1}$ pour tout $\widehat{p} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. D'ailleurs, d'après la proposition 2.10, nous pourrions conclure directement à la non inversibilité de $\widehat{2}$ car $\widehat{2}$ est diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Cette remarque motive la définition d'un corps.

DÉFINITION 2.39 *Soit $(K, \top, *)$ un ensemble structuré.*

✗ *On dit que $(K, \top, *)$ est un corps si*

- *$(K, \top, *)$ est un anneau (non nécessairement commutatif),*
- *tout élément de K, distinct de l'élément zéro, est symétrisable pour la seconde loi $*$.*

✗ *Si, de plus, la seconde loi $*$ est commutative sur K alors on dit que le corps $(K, \top, *)$ est commutatif.*

Un corps est donc un anneau dont tous les éléments sont symétrisables pour la seconde loi, à l'exception de l'élément zéro.[8]

Nous devons le concept formel de corps au mathématicien allemand Heinrich Weber (1842-1913).

Remarques

1. Si x et y désignent deux éléments d'un corps commutatif $(K, +, \times)$ avec y non nul, alors on écrit souvent :

$$x \times y^{-1} = y^{-1} \times x = \frac{x}{y}.$$

2. Si $(K, +, \times)$ est un corps alors l'ensemble $K \setminus \{0_K\}$, que l'on note aussi K^*, muni de la loi $\times$ possède aussi une structure de groupe. $(K^*, \times)$ est appelé *groupe multiplicatif du corps.*

[8] Un corps est donc, en ce sens, un Seigneur des anneaux !

3. Il est clair que tout corps est un anneau intègre puisque dans un corps tout élément (distinct de l'élément zéro) est symétrisable pour la seconde loi (voir la proposition 2.10, page 74). La réciproque est bien évidemment fausse. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{Z}$, sous-entendu muni des deux lois usuelles $+$ et $\times$, est un anneau commutatif intègre mais ce n'est pas un corps.

4. Les élements nilpotents d'un anneau sont à chercher parmi les diviseurs de zéro et donc parmi les éléments non symétrisables pour la seconde loi (d'après la proposition 2.10). Un corps est un anneau particulier dont tous les éléments sont symétrisables pour la seconde loi, à l'exception du zéro. Ainsi, le seul élément nilpotent d'un corps est l'élément zéro.

Par la suite, nous noterons un corps par la lettre $\mathbb{K}$, première lettre du mot allemand *körper* qui signifie « corps » (au sens de l'objet). Il est à noter que les anglo-saxons utilisent le mot anglais *field* qui signifie « champ ». La notation $\mathbb{K}$ sous-entend donc la donnée d'un ensemble K muni des deux lois de composition interne $+$ et $\times$.

Exemples

1. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ (sous-entendu l'ensemble des rationnels et des réels munis de l'addition et de la multiplication) sont des corps commutatifs.

2. L'anneau (commutatif et intègre) $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif) n'est pas un corps puisqu'à l'exception des polynômes constants et non nuls, tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ ne possède pas d'inverse dans $\mathbb{K}[X]$. Nous verrons au chapitre 7 que l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni des deux lois $+$ et $\times$ définies en page 276, possède une structure de corps commutatif.

3. Comme nous le verrons au chapitre 10, l'ensemble $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni des opérations d'addition et produit n'est pas un corps puisqu'il existe des matrices non nulles et non inversibles.

4. Les deux ensembles structurés $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ et $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ sont deux corps commutatifs. On dit qu'ils sont finis car ils contiennent un nombre fini d'éléments. Il est à noter que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ est le corps fini de référence en informatique correspondant à l'arithmétique binaire. Plus généralement, on peut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ soit un corps est que l'entier naturel n soit un nombre premier. Par exemple, $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ est un corps et $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ n'est pas un corps.

5. Considérons le sous-ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \overset{déf.}{=} \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}.$$

L'addition et la multiplication entre réels définissent deux lois internes sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. En effet, pour tous $x = a + b\sqrt{2}$ et $x' = a' + b'\sqrt{2}$ dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,

$$x + x' = (a + a') + (b + b')\sqrt{2}, \quad x \times x' = (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2}.$$

D'où $x+x'$ et $x \times x'$ appartiennent à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. L'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ muni des deux lois $+$ et $\times$ possède une structure d'anneau commutatif, l'élément zéro étant le nombre 0 et l'élément unité le nombre 1. Est-ce un corps ? Pour répondre à cette question, considérons un élément non nul $x = a+b\sqrt{2}$ de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et cherchons s'il existe un élément $x' = a'+b'\sqrt{2}$ de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ vérifiant $(a+b\sqrt{2})\times(a'+b'\sqrt{2}) = 1$, c'est-à-dire vérifiant $(aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2} = 1$, ou encore, de manière équivalente, vérifiant le système de deux équations à deux inconnues (a' et b') suivant :[9]

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} aa' + 2bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases}$$

On obtient une équation ne portant que sur l'inconnue a' en multipliant la première équation par a, la seconde par $-2b$ et en additionnant le tout. De même, on obtient une équation ne portant que sur l'inconnue b' en multipliant la première équation par b, la seconde par $-a$ et en additionnant le tout. Ces équations sont :

$$(a^2 - 2b^2)a' = a \qquad \text{et} \qquad (2b^2 - a^2)b' = b.$$

Puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $x \neq 0$, on a : $a^2 - 2b^2 \neq 0$ et on déduit des deux égalités précédentes que le système (S) admet pour solution le couple (a', b') où

$$a' = \frac{a}{a^2 - 2b^2} \qquad \text{et} \qquad b' = \frac{-b}{a^2 - 2b^2}.$$

Tout élément non nul de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ possède un inverse. L'ensemble structuré $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times)$ est donc un corps commutatif.

Morphisme d'anneaux, morphisme de corps

DÉFINITION 2.40 *Soient $(A, +_A, \times_A)$ et $(A', +_{A'}, \times_{A'})$ deux anneaux (non nécessairement commutatifs) d'éléments unités respectifs 1_A et $1_{A'}$.*

✗ *On appelle* morphisme d'anneaux *de $(A, +_A, \times_A)$ dans $(A', +_{A'}, \times_{A'})$ toute application f de A vers A' telle que*

- $\forall (x, x') \in A^2 \quad f(x +_A x') = f(x) +_{A'} f(x')$,
- $\forall (x, x') \in A^2 \quad f(x \times_A x') = f(x) \times_{A'} f(x')$,
- $f(1_A) = 1_{A'}$.

Si, de plus, f est bijective alors on dit que f est un isomorphisme d'anneaux *ou que $(A, +_A, \times_A)$ et $(A', +_{A'}, \times_{A'})$ sont* isomorphes *par f.*

✗ *En particulier, si $(A, +_A, \times_A)$ et $(A', +_{A'}, \times_{A'})$ sont des corps alors l'application f est qualifiée de* morphisme de corps.

[9] Nous utilisons ici l'équivalence : $x+y\sqrt{2} = 1 \iff (x = 1 \text{ et } y = 0)$ où x et y désignent deux nombres rationnels. Nous avons démontré ce résultat au chapitre 1, page 18.

Commentons cette définition.

- La première propriété signifie que f est un morphisme de l'ensemble structuré $(A, +_A)$ dans l'ensemble structuré $(A', +_{A'})$ (voir en page 62). Plus précisément, puisque $(A, +_A)$ et $(A', +_{A'})$ sont des groupes (par définition d'un anneau), f est en fait un morphisme de groupes de $(A, +_A)$ dans $(A', +_{A'})$ et on peut en déduire (ceci fait l'objet de l'exercice 7 en fin de chapitre) que
$$f(0_A) = 0_{A'}$$
où 0_A (respectivement $0_{A'}$) désigne l'élément neutre de l'ensemble de départ A (resp. de l'ensemble d'arrivée A') pour la première loi $+_A$ (resp. $+_{A'}$). On dit alors que f transporte le zéro (de l'anneau). On peut aussi en déduire que, pour tout élément x de A,
$$f(-x) = -f(x)$$
et on dit que f transporte le symétrique pour la première loi. On montre aussi, par récurrence sur l'entier naturel n, que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A \quad f(nx) = nf(x).$$
- La deuxième propriété de la définition 2.40 signifie que f est un morphisme de l'ensemble structuré $(A, \times_A)$ dans l'ensemble structuré $(A', \times_{A'})$. Ce n'est en revanche pas un morphisme de groupes de $(A, \times_A)$ dans $(A', \times_{A'})$ car, cette fois-ci, les ensembles structurés, $(A, \times_A)$ et $(A', \times_{A'})$, ne sont pas des groupes. Par conséquent, l'égalité $f(1_A) = 1_{A'}$ ne se déduit pas de la deuxième propriété. Elle figure donc explicitement dans la définition d'un morphisme d'anneaux. En procédant comme dans l'exercice 7, on déduit facilement des deuxième et troisième propriétés que si un élement x de A est inversible, d'inverse x^{-1}, alors
$$f(x^{-1}) = \left[f(x)\right]^{-1}$$
et on dit que f transporte le symétrique pour la deuxième loi. On montre aussi, par récurrence sur l'entier naturel n, que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A \quad f(x^n) = \left[f(x)\right]^n.$$

2.4 Exercices de synthèse

Exercice 6 *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. La différence symétrique de A et B est l'ensemble, noté $A \Delta B$, défini par*
$$A \Delta B \overset{déf.}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1 - La différence symétrique de deux ensembles est-elle commutative ?

2 - Expliciter les ensembles suivants : $A\Delta\emptyset$, $A\Delta A$ et $A\Delta B$ si $A \subset B$.

3 - Expliciter l'ensemble $(A\Delta B) \cup \left(A \Delta \complement_E (B)\right)$.

EXERCICE 7

1 - Soient $(E, \top)$ *un ensemble structuré. Un élément* a *de* E *est dit simplifiable à gauche pour la loi* $\top$ *si*

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad a \top x = a \top x' \implies x = x'.$$

Un élément $a \in E$ *est dit simplifiable à droite pour la loi* $\top$ *si*

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad x \top a = x' \top a \implies x = x'.$$

Montrer que si $(G, \top)$ *est un groupe alors tout élément de* G *est simplifiable à gauche et à droite pour la loi* $\top$.

2 - Soient $(G_1, \top)$ *et* $(G_2, \blacktriangle)$ *deux groupes et* f *un morphisme de* $(G_1, \top)$ *dans* $(G_2, \blacktriangle)$. *On note* e_1 *l'élément neutre de* $(G_1, \top)$ *et* e_2 *l'élément neutre de* $(G_2, \blacktriangle)$.

a) Montrer que $f(e_1) \blacktriangle f(x) = f(x) \blacktriangle f(e_1) = f(x)$ *pour tout* $x \in G_1$.

b) Déduire des questions précédentes que $f(e_1) = e_2$ *(on dit que* f *transporte l'élément neutre).*

c) On note x' *le symétrique de* $x \in G_1$ *pour la loi* $\top$ *et* y' *le symétrique de* $f(x) \in G_2$ *pour la loi* $\blacktriangle$. *Montrer que* $f(x') = y'$ *(on dit que* f *transporte le symétrique).*

EXERCICE 8 *Soit* n *un entier naturel tel que* $n \geqslant 2$. *Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur* n, *que toute permutation* σ *de* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *peut s'écrire, d'au moins une manière, comme la composée de transpositions. Indication : considérer les deux cas :*

$$\sigma(n+1) = n+1 \qquad \textit{et} \qquad \sigma(n+1) = j \ \ \textit{avec} \ \ j \leqslant n.$$

2.5 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - De $A \cap B \subset A$ il vient : $A \cup (A \cap B) = A$. D'où : $(A \cup (A \cap B)) \cap B = A \cap B$.

2 - En factorisant par A, on a :

$$(A \cap B) \cup \big(A \cap \complement_E(B)\big) = A \cap \big(B \cup \complement_E(B)\big).$$

Or, $B \cup \complement_E(B) = E$ et $A \cap E = A$. Ainsi, $(A \cap B) \cup \big(A \cap \complement_E(B)\big) = A$.

3 - En distribuant, on a :

$$\complement_E(A \cup B) \cap (C \cup \complement_E(A)) = \big[\complement_E(A \cup B) \cap C\big] \cup \big[\complement_E(A \cup B) \cap \complement_E(A)\big].$$

De $A \subset A \cup B$ il vient : $\complement_E(A \cup B) \subset \complement_E(A)$. D'où :

$$\complement_E(A \cup B) \cap \complement_E(A) = \complement_E(A \cup B).$$

On a donc :

$$\complement_E(A \cup B) \cap \left(C \cup \complement_E(A)\right) = \left(\complement_E(A \cup B) \cap C\right) \cup \left(\complement_E(A \cup B)\right).$$

Remarquons que $\complement_E(A \cup B) \cap C$ est un sous-ensemble de $\complement_E(A \cup B)$. On peut donc écrire :

$$\left(\complement_E(A \cup B) \cap C\right) \cup \left(\complement_E(A \cup B)\right) = \complement_E(A \cup B).$$

Finalement,

$$\complement_E(A \cup B) \cap \left((C \cup \complement_E(A)\right) = \complement_E(A \cup B).$$

4 - On remarque que $B \cap C \subset B \subset A \cup B$. D'où $(A \cup B) \cap (B \cap C) = B \cap C$. On a donc :

$$\left[(A \cup B) \cap (B \cap C)\right] \cup (A \cup C) = (B \cap C) \cup (A \cup C).$$

De même, on remarque que $B \cap C \subset C \subset A \cup C$. D'où $(B \cap C) \cup (A \cup C) = A \cup C$. Finalement,

$$\left[(A \cup B) \cap (B \cap C)\right] \cup (A \cup C) = A \cup C.$$

5 - On remarque que $B \cap C \subset C \subset A \cup C$. D'où $(B \cap C) \cup (A \cup C) = A \cup C$. Ainsi,

$$(A \cup B) \cap \left[(B \cap C) \cup (A \cup C)\right] = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Finalement, en factorisant par A, on obtient :

$$(A \cup B) \cap \left[(B \cap C) \cup (A \cup C)\right] = A \cup (B \cap C).$$

Solution de l'exercice 2

Fonction $f : E \longrightarrow F$	$\mathcal{D}_f$	Appl.	$f(E)$	I., S., B.
$x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$	non		
$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \longmapsto \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$	oui	$\mathbb{R}^* \neq F$	Inj.
$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \longmapsto \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$	oui	$\mathbb{R}^* = F$	Bij.
$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 2 \\ 1/(x-2) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$	$\mathbb{R}$	oui	$\mathbb{R} = F$	Bij.
$x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	oui	$\mathbb{R}_+ \neq F$	non
$x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	oui	$\mathbb{R}_+ \neq F$	Inj.
$x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	oui	$\mathbb{R}_+ = F$	Bij.
$x \in \mathbb{R} \longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	non		
$x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	oui	$\mathbb{R} = F$	Bij.
$x \in]1, +\infty[\longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}_+^*$	$]1, +\infty[$	oui	$\mathbb{R}_+^* = F$	Bij.

Fonction $f : E \longmapsto F$	$\mathcal{D}_f$	Appl.	$f(E)$	I., S., B.
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$	$\mathbb{R}$	oui	$\mathcal{C}(0,1) \neq F$	non
$\begin{array}{ccc} [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$	$[0, 2\pi[$	oui	$\mathcal{C}(0,1) \neq F$	Inj.

Nota Bene : $\mathcal{C}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Solution de l'exercice 3

1 - Supposons l'application composée $g \circ f$ de E vers G injective et l'application f de E vers F surjective, et déduisons-en que l'application g de F vers G est injective, c'est-à-dire que, pour tout $(y, y') \in F^2$, $g(y) = g(y') \implies y = y'$. Considérons y et y' deux éléments de F tels que $g(y) = g(y')$. Or, par hypothèse, f étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ d'une part, et il existe $x' \in E$ tel que $y' = f(x')$ d'autre part. L'égalité $g(y) = g(y')$ se réécrit ainsi :

$$g(f(x)) = g(f(x'))$$

dont on déduit (puisque, par hypothèse, $g \circ f$ est injective) que $x = x'$. En composant par f dans cette dernière égalité, on obtient : $f(x) = f(x')$, c'est-à-dire : $y = y'$ puisque $f(x) = y$ et $f(x') = y'$, ce qui termine la démonstration.

2 - Supposons maintenant l'application composée $g \circ f$ de E vers G surjective et l'application g de F vers G injective et déduisons-en que l'application f de E vers F est surjective, c'est-à-dire que :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad f(x) = y.$$

Soit y un élément de F. Son image par g appartient à G, c'est-à-dire $g(y) \in G$. Or, par hypothèse, $g \circ f$ étant surjective, $g(y)$ possède (au moins) un antécédent par $g \circ f$. Autrement dit, il existe (au moins) un élément $x \in E$ tel que

$$g(f(x)) = g(y).$$

On en déduit alors $f(x) = y$ car g est injective (par hypothèse), ce qui termine la démonstration.

Solution de l'exercice 4

Remarquons tout d'abord que $\star$ définit bien une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$ car les deux opérations usuelles $+$ et $\times$ sont elles-mêmes des lois de composition interne sur $\mathbb{R}$.

1 - La loi $\star$ est non associative sur $\mathbb{R}$ car $2 \star (3 \star 4) = 52533 \neq (2 \star 3) \star 4 = 13605$. Elle est en revanche commutative sur $\mathbb{R}$. Vérifions-le. Soient x et y deux réels. La multiplication étant commutative sur $\mathbb{R}$, on a :

$$x \star y = x \times y + (x^2 - 1) \times (y^2 - 1) = y \times x + (y^2 - 1) \times (x^2 - 1) = y \star x.$$

La propriété de commutativité de la loi $\star$ se déduit de celle des deux lois usuelles $+$ et $\times$. On remarque que $1 \star x = x = x \star 1$ pour tout réel x. L'élément neutre est donc le réel 1. Bien sûr, $\mathbb{R}$ ne possède pas une structure de groupe pour la loi $\star$ puisque la loi n'est pas associative sur $\mathbb{R}$.

2 - Si s est un symétrique de l'élément 2 pour la loi $\star$ dans $\mathbb{R}$, il vérifie alors : $s\star 2 = 1 = 2\star s$. Calculer le réel s revient à chercher les solutions de l'équation : $3s^2 + 2s - 4 = 0$. Le réel 2 possède deux symétriques pour la loi $\star$. Ce sont les deux réels : $(-1+\sqrt{13})/3$ et $(-1-\sqrt{13})/3$.

3 - L'équation $2 \star x = 2$ (d'inconnue x) admet pour solutions 1 et $-5/3$; l'équation $2 \star x = 5$ (d'inconnue x) admet pour solutions $4/3$ et -2.

Solution de l'exercice 5

1 - C'est immédiat en développant le terme de droite (un simple calcul algébrique). Faisons-le. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in A$. Puisque la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$, on a :

$$(1_A - x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1}.$$

Effectuons le changement d'indice $\ell = k+1$ dans la dernière somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} = \sum_{\ell=1}^{n} x^\ell.$$

L'indice de sommation étant muet, on peut alors le remplacer par n'importe quel autre indice, donc par k. On a donc :

$$(1_A - x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \sum_{k=1}^{n} x^k = 1_A + \sum_{k=1}^{n-1} x^k - \left(\sum_{k=1}^{n-1} x^k + x^n\right) = 1_A - x^n.$$

Remarquer que nous n'avons pas eu besoin de supposer l'anneau commutatif pour établir ce résultat. De la même manière, on montre aussi :

$$1_A - x^n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)(1_A - x).$$

2 - Montrons à présent que si l'élément a de A est nilpotent alors $1_A - a$ est inversible. Soit $a \in A$. Supposons a nilpotent. Cela signifie qu'il existe un entier naturel N non nul tel que $a^N = 0_A$. Écrivons les égalités démontrées à la question précédente pour $n = N$ et pour $x = a$:

$$(1_A - a)\sum_{k=0}^{N-1} a^k = 1_A \qquad \text{et} \qquad \left(\sum_{k=0}^{N-1} a^k\right)(1_A - a) = 1_A.$$

Ces égalités montrent que l'élément $1_A - a$ est inversible et que son inverse, noté $(1_A - a)^{-1}$, s'écrit : $(1_A - a)^{-1} = \sum_{k=0}^{N-1} a^k$.

Solution de l'exercice 6

1 - Elle est commutative car $\cup$ l'est.

2 - Soient A, B deux parties de E. Utilisant que $A \setminus B = A \cap \complement_E(B)$, on a : $A\Delta B = \big(A \cap \complement_E(B)\big) \cup \big(B \cap \complement_E(A)\big)$. Ainsi, pour toute partie A de E,

$$A\Delta\emptyset = \big(A \cap \complement_E(\emptyset)\big) \cup \big(\emptyset \cap \complement_E(A)\big) = (A \cap E) \cup \emptyset = A \cup \emptyset = A,$$

$$A\Delta A = \big(A \cap \complement_E(A)\big) \cup \big(A \cap \complement_E(A)\big) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Supposons à présent $A \subset B$. On a alors : $A \cap \complement_E(B) = \emptyset$. D'où :

$$A\Delta B = \big(A \cap \complement_E(B)\big) \cup \big(B \cap \complement_E(A)\big) = \emptyset \cup \big(B \cap \complement_E(A)\big) = B \setminus A.$$

Remarquons que l'on a aussi : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

3 - Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Afin d'alléger les écritures, posons $M = (A\Delta B) \cup \big(A\Delta\complement_E(B)\big)$. On a :

$$M = \Big[\big(A \cap \complement_E(B)\big) \cup \big(B \cap \complement_E(A)\big)\Big] \cup \Big[(A \cap B) \cup \big(\complement_E(B) \cap \complement_E(A)\big)\Big].$$

L'union étant associative et commutative, on peut réarranger l'ordre des termes :

$$M = \Big[\underbrace{\big(A \cap \complement_E(B)\big) \cup (A \cap B)}_{= A \cap \left(\complement_E(B) \cup B\right)}\Big] \cup \Big[\underbrace{\big(B \cap \complement_E(A)\big) \cup \big(\complement_E(B) \cap \complement_E(A)\big)}_{= \left(B \cup \complement_E(B)\right) \cap \complement_E(A)}\Big].$$

Or, $\complement_E(B) \cup B = E$. Ainsi,

$$M = \Big[A \cap E\Big] \cup \Big[E \cap \complement_E(A)\Big] = A \cup \complement_E(A) = E.$$

Finalement, $(A\Delta B) \cup \big(A\Delta\complement_E(B)\big) = E$.

Solution de l'exercice 7

1 - Soient $(G, \top)$ un groupe (non nécessairement commutatif) et a un élément de G. Montrons que a est un élément simplifiable à gauche et à droite, c'est-à-dire montrons que l'on a, pour tous $x, x' \in G$, d'une part l'implication $a\top x = a\top x' \Longrightarrow x = x'$, et d'autre part l'implication $x\top a = x'\top a \Longrightarrow x = x'$. Désignons par a' le symétrique de a pour la loi $\top$ ($a' \in G$) et par e l'élément neutre de G pour cette même loi ($e \in G$). Soient x et x' deux éléments de G.

– Supposons que l'on ait : $a\top x = a\top x'$. En composant à gauche chaque membre de cette égalité par a', on obtient : $a'\top(a\top x) = a'\top(a\top x')$, c'est-à-dire (puisque la loi $\top$ est associative sur G) :

$$(a'\top a)\top x = (a'\top a)\top x'.$$

Or, $a'\top a = e$ puisque a' est le symétrique de a pour la loi $\top$. On a donc : $e\top x = e\top x'$, c'est-à-dire $x = x'$ car e est l'élément neutre pour la loi $\top$.

- De même, supposons que $x \top a = x' \top a$. En composant cette fois-ci non pas à gauche mais à droite par a', on obtient : $(x \top a) \top a' = (x' \top a) \top a'$, c'est-à-dire :
$$x \top (a \top a') = x' \top (a \top a')$$
par associativité de $\top$. Or, $a \top a' = e$ puisque a' est le symétrique de a pour la loi $\top$. On a donc : $x \top e = x' \top e$, c'est-à-dire $x = x'$ puisque e est l'élément neutre pour $\top$.

2 - a) Puisque e_1 est l'élément neutre de $(G_1, \top)$, $e_1 \top x = x$ et $x \top e_1 = x$ pour tout $x \in G_1$.

- Composons par f dans $e_1 \top x = x$. On obtient : $f(e_1 \top x) = f(x)$. Or, f étant un morphisme de $(G_1, \top)$ dans $(G_2, \perp)$, $f(e_1 \top x) = f(e_1) \perp f(x)$. Ainsi,
$$f(e_1) \perp f(x) = f(x).$$
- De même, en composant par f dans $x \top e_1 = x$, on obtient : $f(x \top e_1) = f(x)$ et on a : $f(x \top e_1) = f(x) \perp f(e_1)$ puisque f est un morphisme de $(G_1, \top)$ dans $(G_2, \perp)$. Ainsi,
$$f(x) \perp f(e_1) = f(x).$$

b) En prenant $x = e_1$ dans une des deux égalités établies à la question précédente, on obtient : $f(e_1) = f(e_1) \perp f(e_1)$. Or, puisque e_2 est l'élément neutre de $(G_2, \perp)$, on a aussi : $f(e_1) = f(e_1) \perp e_2$. On a donc :
$$f(e_1) \perp f(e_1) = f(e_1) \perp e_2.$$
D'où, en simplifiant à gauche par $f(e_1)$ (ce qu'on a le droit de faire puisque dans un groupe, tout élément est simplifiable), $f(e_1) = e_2$.

c) L'élément x' de G_1 désignant le symétrique de x pour la loi $\top$, $x' \top x = e_1$. En composant par f, on obtient : $f(x' \top x) = f(e_1)$ ou encore
$$f(x') \perp f(x) = e_2$$
car f est un morphisme de $(G_1, \top)$ dans $(G_2, \perp)$ et $f(e_1) = e_2$ (*cf.* question précédente). Or, l'élément y' de G_2 désignant le symétrique de $f(x)$ pour la loi $\perp$, on a aussi : $y' \perp f(x) = e_2$. Ainsi,
$$y' \perp f(x) = f(x') \perp f(x)$$
Ainsi, en simplifiant à droite par $f(x)$, on en déduit : $y' = f(x')$, ce qui termine la démonstration.

Solution de l'exercice 8

Soit $n \geqslant 2$. Montrons que toute permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ peut s'écrire comme la composée de transpositions. La démonstration s'effectue par récurrence sur l'entier n. Le cas $n = 2$ est immédiat (voir page 50). Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Si σ est l'application identité alors, par convention, elle s'écrit comme la composée de 0 transposition. Sinon, on procède en deux temps.

– On considère dans un premier temps le cas où σ laisse $n+1$ invariant, c'est-à-dire le cas où $\sigma(n+1) = n+1$. La restriction de σ à $\{1,2,\ldots,n\}$, que l'on note $\sigma|_{\{1,2,\ldots,n\}}$, est alors une permutation de $\{1,2,\ldots,n\}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, elle s'écrit comme la composée de M transpositions $\tau^{(1)}$, ..., $\tau^{(M)}$ de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$:

$$\sigma|_{\{1,2,\ldots,n\}} = \tau^{(1)} \circ \ldots \circ \tau^{(M)}. \tag{9}$$

Les applications $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(M)}$, qui sont definies sur $\{1,2,\ldots,n\}$, s'étendent à $\{1,2,\ldots,n,n+1\}$ (on note $\widetilde{\tau}^{(1)}$, ..., $\widetilde{\tau}^{(M)}$ les applications prolongées) en posant, pour tout $m \in \{1,\ldots,M\}$,

$$\begin{cases} \widetilde{\tau}^{(m)}(n+1) = n+1 \\ \forall k \in \{1,2,\ldots,n\} \quad \widetilde{\tau}^{(m)}(k) = \tau^{(m)}(k) \end{cases}$$

Les applications $\widetilde{\tau}^{(1)}, \ldots, \widetilde{\tau}^{(M)}$ sont des transpositions de $\{1,2,\ldots,n,n+1\}$. Calculons $\big(\widetilde{\tau}^{(1)} \circ \ldots \circ \widetilde{\tau}^{(M)}\big)(k)$ pour tout $k \in \{1,2,\ldots,n,n+1\}$. Si k appartient à $\{1,2,\ldots,n\}$ alors

$$\big(\widetilde{\tau}^{(1)} \circ \ldots \circ \widetilde{\tau}^{(M)}\big)(k) = \big(\tau^{(1)} \circ \ldots \circ \tau^{(M)}\big)(k)$$

car, pour tout $m \in \{1,\ldots,M\}$, $\widetilde{\tau}^{(m)} = \tau^{(m)}$ sur $\{1,2,\ldots,n\}$. Ainsi, utilisant (9), on a :

$$\big(\widetilde{\tau}^{(1)} \circ \ldots \circ \widetilde{\tau}^{(M)}\big)(k) = \sigma|_{\{1,2,\ldots,n\}}(k) = \sigma(k)$$

car $\sigma|_{\{1,2,\ldots,n\}} = \sigma$ sur $\{1,2,\ldots,n\}$. De plus,

$$\big(\widetilde{\tau}^{(1)} \circ \ldots \circ \widetilde{\tau}^{(M)}\big)(n+1) = n+1$$

car $\widetilde{\tau}^{(m)}(n+1) = n+1$ pour tout $m \in \{1,\ldots,M\}$. On a ainsi vérifié que $\widetilde{\tau}^{(1)} \circ \ldots \circ \widetilde{\tau}^{(M)} = \sigma$, ce qui montre que la permutation σ s'écrit comme la composée de transpositions de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n,n+1\}$.

– On considère maintenant le cas où σ ne laisse pas $n+1$ invariant, c'est-à-dire où $\sigma(n+1) = j$ avec $j \leqslant n$. Soit $\widetilde{\tau}_{j,n+1}$ la transposition de $\{1,2,\ldots,n,n+1\}$ échangeant j et $n+1$. On a alors :

$$\big(\widetilde{\tau}_{j,n+1} \circ \sigma\big)(n+1) = n+1.$$

Ainsi, $\widetilde{\tau}_{j,n+1} \circ \sigma$ laisse $n+1$ invariant. On est alors ramené au cas précédent, ce qui permet d'écrire $\widetilde{\tau}_{j,n+1} \circ \sigma$ comme la composée de M transpositions de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n,n+1\}$:

$$\widetilde{\tau}_{j,n+1} \circ \sigma = \widetilde{\tau}^{(1)} \circ \ldots \circ \widetilde{\tau}^{(M)}$$

où $\widetilde{\tau}^{(1)}$, ..., $\widetilde{\tau}^{(M)}$ sont des transpositions de $\{1,2,\ldots,n,n+1\}$. En composant à gauche par $\widetilde{\tau}_{j,n+1}$, on obtient :

$$\widetilde{\tau}_{j,n+1} \circ \widetilde{\tau}_{j,n+1} \circ \sigma = \widetilde{\tau}_{j,n+1} \circ \widetilde{\tau}^{(1)} \circ \ldots \circ \widetilde{\tau}^{(M)}$$

et donc

$$\sigma = \widetilde{\tau}_{j,n+1} \circ \widetilde{\tau}^{(1)} \circ \ldots \circ \widetilde{\tau}^{(M)}$$

puisque $\widetilde{\tau}_{j,n+1} = \widetilde{\tau}_{j,n+1}^{-1}$, ce qui termine la démonstration.

Deuxième partie

Ensembles numériques fondamentaux

Chapitre 3

Le corps des réels

3.1 Généralités

On suppose connues les propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. On désigne par $+$ et $\times$ l'addition et la multiplication entre entiers.

3.1.1 Le corps des rationnels

La relation $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ définie sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \quad \forall (m',n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \\ \big((m,n)\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}(m',n') \Longleftrightarrow m \times n' = n \times m'\big)$$

est une relation d'équivalence[1]. L'ensemble quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ est noté $\mathbb{Q}$ et est appelé *ensemble des nombres rationnels*. Remarquons que l'on peut identifier $\mathbb{Z}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ via l'injection $m \in \mathbb{Z} \mapsto (m,1) \in \mathbb{Q}$. On note $\frac{m}{n}$ ou m/n la classe d'équivalence d'un élément (m,n) de $\mathbb{Q}$ et plus simplement m la classe d'équivalence de $(m,1)$. Si $m/n \in \mathbb{Q}$, les éléments de la classe d'équivalence de m/n pour la relation $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ (c'est-à-dire les éléments (a,b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tels que $a/b = m/n$) sont appelés les fractions qui représentent m/n. L'entier relatif a est appelé le numérateur et b le dénominateur de la fraction. On désigne aussi la fraction a/b comme le quotient de a par b. Il résulte de la définition de la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ que

$$\forall d \in \mathbb{Z} \qquad \frac{d \times a}{d \times b} = \frac{a}{b}.$$

Il est de coutume de prendre pour représentant d'une classe d'équivalence la fraction $(\varepsilon\, m)/n$ où $\varepsilon \in \{-1,1\}$ et m et n sont deux entiers naturels premiers entre eux (c'est-à-dire sans diviseur commun autre que 1).

---

[1] Voir la définition 2.28, p. 57.

On munit l'ensemble $\mathbb{Q}$ des 2 lois notées $+_{\mathbb{Q}}$ et $\times_{\mathbb{Q}}$ définies par

$$\frac{m}{n} +_{\mathbb{Q}} \frac{m'}{n'} = \frac{m \times n' + m' \times n}{n \times n'} \quad \text{pour tout } \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ et } \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q};$$

$$\frac{m}{n} \times_{\mathbb{Q}} \frac{m'}{n'} = \frac{m \times m'}{n \times n'} \quad \text{pour tout } \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ et } \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q}.$$

On vérifie que $\mathbb{Q}$ muni des lois $+_{\mathbb{Q}}$ et $\times_{\mathbb{Q}}$ est un corps commutatif[(2)], c'est-à-dire que l'on a les propriétés suivantes.

- La loi $+_{\mathbb{Q}}$ est associative : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \quad (x +_{\mathbb{Q}} y) +_{\mathbb{Q}} z = x +_{\mathbb{Q}} (y +_{\mathbb{Q}} z)$.
- La loi $+_{\mathbb{Q}}$ est commutative : $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \quad x +_{\mathbb{Q}} y = y +_{\mathbb{Q}} x$.
- La loi $+_{\mathbb{Q}}$ possède pour *élément neutre* l'élément[(3)] $(0,1)$ noté $0_{\mathbb{Q}}$. Cet élément vérifie : $\forall x \in \mathbb{Q} \quad x +_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} = x$.
- Tout élément $x = (m,n)$ de $\mathbb{Q}$ possède un *symétrique* dans $\mathbb{Q}$ pour la loi $+_{\mathbb{Q}}$. Il s'agit de l'élément[(3)] $(-m,n)$, noté $-x$, qui vérifie : $x +_{\mathbb{Q}} -x = 0_{\mathbb{Q}}$.

Ces premières propriétés indiquent que $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}})$ est un groupe commutatif.

- La loi $\times_{\mathbb{Q}}$ est associative : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \quad (x \times_{\mathbb{Q}} y) \times_{\mathbb{Q}} z = x \times_{\mathbb{Q}} (y \times_{\mathbb{Q}} z)$.
- La loi $\times_{\mathbb{Q}}$ est commutative : $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \quad x \times_{\mathbb{Q}} y = y \times_{\mathbb{Q}} x$.
- La loi $\times_{\mathbb{Q}}$ possède pour *élément neutre* l'élément[(3)] $(1,1)$ noté $1_{\mathbb{Q}}$. Cet élément vérifie : $\forall x \in \mathbb{Q} \quad x \times_{\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Q}} = x$.
- Tout élément $x = (m,n)$ de $\mathbb{Q}$ différent de $0_{\mathbb{Q}}$ possède un *symétrique* dans $\mathbb{Q}$ pour la loi $\times_{\mathbb{Q}}$. Il s'agit de l'élément[(3)] (n,m) qui est noté x^{-1} et qui vérifie : $x \times_{\mathbb{Q}} x^{-1} = 1_{\mathbb{Q}}$.
- la loi $\times_{\mathbb{Q}}$ est distributive sur $+_{\mathbb{Q}}$:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \quad (x +_{\mathbb{Q}} y) \times_{\mathbb{Q}} z = (x \times_{\mathbb{Q}} z) +_{\mathbb{Q}} (y \times_{\mathbb{Q}} z).$$

On note $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble $\left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ et $\mathbb{Q}_+^* = \mathbb{Q}_+ \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$.

3.1.2 Relation d'ordre sur un ensemble

Définition 3.1 (Relation d'ordre)
Soit E un ensemble non vide. Une relation[(4)] $\mathcal{R}$ *de E dans E est appelée une relation d'ordre sur E si elle est :*

- *réflexive :* $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$;
- *anti-symétrique :* $\forall (x,y) \in E^2 \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$;
- *transitive :* $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.

(2) Voir la définition 2.39 p. 79.
(3) Lire « dont un représentant de la classe d'équivalence est », voir page 57.
(4) Voir la définition 2.11 p. 33.

Exemples

1. On vérifie que sur $\mathbb{Q}$ la relation $\leqslant$ définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Q}\quad \big(x\leqslant y \Longleftrightarrow y-x\in\mathbb{Q}_+\big)$$

est une relation d'ordre. On écrit également $y\geqslant x$ au lieu de $x\leqslant y$.

2. Sur $\mathbb{Q}$ la relation $<$ définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Q}\quad \big(x< y \Longleftrightarrow y-x\in\mathbb{Q}_+^*\big)$$

n'est pas une relation d'ordre (elle n'est ni réflexive, ni anti-symétrique). On écrit également $y>x$ au lieu de $x<y$.

3. Étant donné un ensemble A, la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(A)$.

Définition 3.2 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Cette relation d'ordre est qualifiée de relation d'ordre total sur E si*

$$\forall(x,y)\in E^2\quad \big(x\mathcal{R}y \quad ou \quad y\mathcal{R}x\big).$$

On vérifie aisément en revenant à la définition que la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$ est une relation d'ordre totale. Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition 3.1 *La relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$ a les propriétés suivantes :*

✗ *il s'agit d'une relation d'ordre total :*

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2\quad (x\leqslant y)\quad ou\quad (y\leqslant x);$$

✗ *elle est compatible avec les lois $+_{\mathbb{Q}}$ et $\times_{\mathbb{Q}}$:*

$$\begin{aligned}\forall(x,y,z)\in\mathbb{Q}^3\quad & \big(x\leqslant y \implies x+_{\mathbb{Q}}z\leqslant y+_{\mathbb{Q}}z\big)\\ et\quad & \Big(\big(x\leqslant y \quad et\quad 0\leqslant z\big)\implies x\times_{\mathbb{Q}}z\leqslant y\times_{\mathbb{Q}}z\Big).\end{aligned}$$

On dit que le corps $(Q,\ +_{\mathbb{Q}},\ \times_{\mathbb{Q}})$ muni de la relation d'ordre $\leqslant$ est un corps totalement ordonné.

3.1.3 Bornes supérieure et inférieure

Définition 3.3 *Soient E un ensemble muni d'une relation d'ordre total notée $\leqslant$ et A un sous-ensemble non vide de E. On dit qu'un élément S de E est un majorant de A si*

$$\forall x\in A\quad x\leqslant S.$$

Si l'ensemble des majorants est non vide, on dit que l'ensemble A est majoré.

Si un élément M de A est un majorant de A, alors il est unique et est appelé *élément maximal* de A. On note $M = \max_E A$.

Définition 3.4 *Soient E un ensemble muni d'une relation d'ordre total notée $\leqslant$ et A un sous-ensemble non vide de E. On dit qu'un élément s de E est un minorant de A si*

$$\forall x \in A \quad s \leqslant x.$$

Si l'ensemble des minorants est non vide, on dit que l'ensemble A est minoré.

Si un élément m de A est un minorant de A, alors il est unique et est appelé *élément minimal* de A. On note $m = \min_E A$.

Un ensemble A qui est à la fois minoré et majoré est dit *borné.*

Définition 3.5 *Soient E un ensemble muni d'une relation d'ordre total notée $\leqslant$ et A un sous-ensemble non vide de E.*

✗ *Si A est majoré, on appelle supremum ou borne supérieure de A le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants. On le note* $\sup_E A$.

✗ *Si A est minoré, on appelle infimum ou borne inférieure de A le plus grand élément, s'il existe, de l'ensemble des minorants. On le note* $\inf_E A$.

Exemples

1. Soient $E = \mathbb{Q}$ et $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant x \text{ et } x \leqslant 2\}$.
L'ensemble des majorants $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 2\}$ possède pour plus petit élément 2 ; cet élément appartient à A. La borne supérieure de A est donc son élément maximal.

2. Soient $E = \mathbb{Q}$ et $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant x \text{ et } x < 2\}$.
L'ensemble des majorants $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 2\}$ possède pour plus petit élément 2 ; cet élément n'appartient pas à A. L'ensemble A possède donc une borne supérieure mais pas d'élément maximal.

Remarque On prendra garde que l'élément maximal (resp. l'élément minimal) ou la borne supérieure (resp. la borne inférieure) d'un ensemble A dépend de l'ensemble E dont A est un sous-ensemble. Ainsi si $A = \{x \in E \mid 3x < 5\}$ on a

$$\sup_{\mathbb{Q}} A = \frac{5}{3} \qquad \text{et} \qquad \sup_{\mathbb{Z}} A = 1.$$

Dans $\mathbb{Q}$, la borne supérieure de A qui vaut $5/3$ n'est pas élément maximal de A. Dans $\mathbb{Z}$, la borne supérieure de A qui vaut 1 est également l'élément maximal de A. Par ailleurs, un ensemble majoré n'admet pas nécessairement de borne supérieure. L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ et } x^2 < 2\}$ est majoré (3 est un majorant) mais ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (nous l'établirons à la section suivante).

3.1.4 Les insuffisances du corps des rationnels

Une première insuffisance

Il est aisé de vérifier que si r désigne un nombre rationnel, il n'existe pas nécessairement de nombre rationnel x tel que $x \times_{\mathbb{Q}} x = r$. Autrement dit l'équation $x^2 = r$ n'a pas forcément de solution dans $\mathbb{Q}$. C'est le cas par exemple de l'équation $x^2 = 2$. Si cette équation avait une solution x dans $\mathbb{Q}_+$, alors il existerait $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ avec m et n sans diviseur commun autre que 1 tels que $x = m/n$ autrement dit tels que $m^2 = 2n^2$. Ceci impliquerait que m^2 est pair et par conséquent que m est pair[5]. Ainsi il existerait un entier naturel k non nul tel que $m = 2k$. On aurait alors $2n^2 = m^2 = 4k^2$ ce qui impliquerait que $n^2 = 2k^2$ et donc n serait pair. Ceci contredirait notre hypothèse que m et n sont sans diviseur commun autre que 1. Par ailleurs si l'équation avait une solution x dans $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_+$ alors le rationnel $-x$ qui appartiendrait à $\mathbb{Q}_+$ serait aussi solution (car $(-x)^2 = x^2$). On vient de voir que c'est impossible. Ce raisonnement par l'absurde permet de conclure que[6] l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Une seconde insuffisance

On peut par ailleurs démontrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q}_+^* \mid x^2 < 2\}$ ne possède ni élément maximal ni borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Pour le vérifier, raisonnons par l'absurde.

Soit f l'application de $\mathbb{Q}_+^*$ dans $\mathbb{Q}_+^*$ définie par $f(x) = \dfrac{x(x^2+6)}{3x^2+2}$. On montre aisément que

$$f(x)^2 - 2 = \frac{(x^2-2)^3}{(3x^2+2)^2} \tag{1}$$

et

$$f(x) - x = \frac{2x(2-x^2)}{3x^2+2}. \tag{2}$$

▷ Supposons que A possède un élément maximal a. On a $a^2 < 2$ car $a \in A$. D'après la relation (1), $b = f(a)$ est élément de A (car $f(a)^2 - 2 < 0$) et d'après la relation (2), $b > a$ (car $f(a) - a > 0$). On a une contradiction car $b \in A$ est strictement supérieur à l'élément maximal a. L'ensemble A ne possède donc pas d'élément maximal.

▷ Supposons maintenant que A possède une borne supérieure a. L'ensemble des majorants de A est $M = \{x \in \mathbb{Q}_+^* \mid x^2 \geqslant 2\}$. On a donc $a^2 \geqslant 2$. D'après la relation (1), $b = f(a)$ est élément de M (car $f(a)^2 - 2 \geqslant 0$) et d'après la relation (2), $b \leqslant a$ (car $f(a) - a \leqslant 0$). D'après la définition de la borne supérieure cela implique que $b = a$. On déduit de la relation (2) que $2 - a^2 = 0$. C'est impossible car nous avons montré que 2 n'est le carré d'aucun rationnel. L'ensemble A ne possède donc pas de borne supérieure.

---

[5] Cette propriété a été démontrée p. 17.

[6] Ce raisonnement établit que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Ainsi, dans $\mathbb{Q}$, un ensemble borné ne possède pas nécessairement de borne supérieure (ou de borne inférieure). On peut montrer que le fait que l'équation $x^2 = r$ où $r \in \mathbb{Q}$ n'admet pas nécessairement de solution dans $\mathbb{Q}$ est lié à cette même insuffisance. Il est donc souhaitable de construire une extension de l'ensemble $\mathbb{Q}$ qui, en plus d'être un corps commutatif totalement ordonné, posséderait la propriété suivante : « tout sous-ensemble borné possède une borne supérieure et une borne inférieure ». L'ensemble des nombres réels répond à ce besoin. Comme nous l'avons fait pour les nombres rationnels, il convient de construire avec rigueur l'ensemble des nombres réels et d'en étudier les propriétés.

Extension du corps des rationnels

La façon la plus simple de définir les nombres réels serait de dire qu'il s'agit de développements décimaux[7] illimités de la forme $x_0, x_1x_2\ldots$ comme $0,33333\ldots$ ou $\pi = 3,14159\ldots$. Autrement dit, un nombre réel serait définit comme une suite $(x_n)_n$ d'entiers naturels. Cela provoque un certain nombre de difficultés comme par exemple de connaître toutes les décimales de π ou encore d'expliquer pourquoi les développements $1,00\ldots$ et $0,99\ldots$ désignent le même nombre 1. D'autre part il serait délicat d'étendre à cet ensemble les lois somme et produit définies sur $\mathbb{Q}$. Si l'on essaie de généraliser aux développements décimaux illimités les règles d'addition et de multiplication des nombres décimaux, on se heurte au fait qu'il n'y a pas de « dernier chiffre à droite ».

Une méthode mathématiquement satisfaisante pour définir les nombres réels a été publiée en 1872 par Richard Dedekind[8]. Elle marque le début de « la modernité en mathématique, laquelle consiste à construire à l'aide de la logique et de la théorie des ensembles tous les objets mathématiques et à établir à partir de là leurs propriétés »[9]. Cette méthode relativement simple mais peu intuitive revient à définir un réel comme une partie de l'ensemble $\mathbb{Q}$. Plus précisément, elle consiste à considérer dans $\mathbb{Q}$ des sous-ensembles particuliers X appelés *coupures* et satisfaisant aux conditions suivantes :

- $\forall x \in X \quad \forall y \in \mathbb{Q} \setminus X \quad y < x$;
- X n'a pas de plus petit élément.

On définit alors un nombre réel comme étant une coupure. Intuitivement une coupure est l'ensemble de tous les nombres rationnels qui sont strictement supérieurs à un *nombre réel* donné et il n'y a aucune différence de nature entre un nombre réel et l'ensemble de tous les nombres rationnels qui lui sont supérieurs.

Il existe d'autres méthodes pour construire l'ensemble des nombres réels, par exemple en utilisant les suites de Cauchy[10] dans $\mathbb{Q}$. D'ailleurs, au cours de

[7] On appelle nombre décimal un nombre rationnel qui est le quotient d'un entier relatif par une puissance de 10. Par exemple 2/100 ou 3/50 sont des nombres décimaux, mais pas 1/3.

[8] DEDEKIND, Richard (1831, Braunschweig (Allemagne) - 1916, Braunschweig).

[9] R. Godement, Analyse mathématique, tome 1, Springer-Verlag, 2001.

[10] Voir le chapitre 5, page 198, pour la définition d'une suite de Cauchy.

l'année 1872, paraissent trois autres constructions du corps des nombres réels qui sont l'œuvre de Weierstrass, Cantor et Méray[11].

Pour une construction détaillée du corps des nombres réels et une présentation des différentes méthodes de construction, nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage *La planète* $\mathbb{R}$, *voyage au pays des nombres réels* par R. Brouzet et H. Boualem (Dunod, 2002).

3.1.5 Le corps des réels

Nous admettons l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$, muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ et d'une relation d'ordre total qui prolongent celles définies sur $\mathbb{Q}$ et qui possède les propriétés suivantes.

Propriétés de la somme

- La loi $+$ est associative : $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x+y)+z = x+(y+z)$;
- la loi $+$ est commutative : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x+y = y+x$;
- l'ensemble $\mathbb{R}$ possède un élément neutre pour $+$ qui est l'entier 0 : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x+0 = x$;
- tout élément x de $\mathbb{R}$ possède un symétrique dans $\mathbb{R}$ pour la loi $+$ appelé « opposé de x » et noté $-x$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists(-x) \in \mathbb{R} \quad x+(-x) = 0$.

Pour x et y réels, on note $x-y$ la somme de x avec l'opposé de y. On définit ainsi une loi de composition interne appelée soustraction qui n'est ni associative, ni commutative.

La commutativité et l'associativité de la loi $+$ ont pour conséquence la possibilité de considérer des sommes de réels de la forme $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ sans se préoccuper de l'ordre des termes. On note une telle somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Propriétés du produit

- la loi $\times$ est associative : $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x\times y)\times z = x\times(y\times z)$;
- la loi $\times$ est commutative : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x\times y = y\times x$;
- l'ensemble $\mathbb{R}$ possède un élément neutre pour $\times$ qui est l'entier 1 : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x\times 1 = x$;
- tout élément x de $\mathbb{R}$ différent de 0 possède un symétrique dans $\mathbb{R}$ pour la loi $\times$ appelé « inverse de x » et noté x^{-1} :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{R} \quad x\times x^{-1} = 1;$$

[11] Weierstrass, Karl (1815, Ostenfelde (Westphalie) - 1897, Berlin).
Cantor, Georg (1845, Saint-Petersbourg - 1918, Halle (Allemagne)).
Méray, Charles (1835, Chalon-sur-Saône - 1911, Dijon).

– la loi $\times$ est distributive sur $+$:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x+y)\times z = (x\times z) + (y\times z).$$

On note souvent le produit de deux réels x et y par juxtaposition xy plutôt que $x \times y$.

Pour x et y réels, $y \neq 0$, on note x/y le produit de x avec l'inverse de y. On définit ainsi une loi de composition interne appelée division qui n'est ni associative, ni commutative.

La commutativité et l'associativité de la loi $\times$ ont pour conséquence la possibilité de considérer des produits de réels de la forme $x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$ sans se préoccuper de l'ordre des termes. On note un tel produit $\prod_{k=1}^{n} x_k$.

Pour tout réel x, on définit la puissance n-ième de x (ou n désigne un entier naturel) par la relation de récurrence : $x^0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n = x \times x^{n-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1^n = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0^n = 0$. Si x est un réel non nul, on note x^{-n} l'inverse du réel x^n.

Propriétés de la relation d'ordre

La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$:

- elle est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant x$;
- elle est anti-symétrique : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Longrightarrow x = y$;
- elle est transitive : $\forall (x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Longrightarrow x \leqslant z$.

Cette relation d'ordre est compatible avec les lois $+$ et $\times$,

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad & \big(x \leqslant y \implies x+z \leqslant y+z\big) \\ \text{et} \quad & \Big(\big(x \leqslant y \text{ et } 0 \leqslant z\big) \implies x \times z \leqslant y \times z\Big). \end{aligned}$$

On écrit aussi $x \geqslant y$ pour $y \leqslant x$. On définit la relation $<$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x < y \quad \text{si} \quad \big(x \leqslant y \text{ et } x \neq y\big).$$

Il ne s'agit pas d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ (elle n'est ni réflexive, ni symétrique). On note aussi $y > x$ pour $x < y$.

On note par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x\} && \text{l'ensemble des réels positifs ;} \\ \mathbb{R}^- &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\} && \text{l'ensemble des réels négatifs ;} \\ \mathbb{R}^*_+ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} && \text{l'ensemble des réels strictement positifs ;} \\ \mathbb{R}^*_- &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} && \text{l'ensemble des réels strictement négatifs ;} \\ \mathbb{R}^* &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 0\} && \text{l'ensemble des réels non nuls.} \end{aligned}$$

Propriétés de la borne supérieure

Proposition 3.2 ✗ *Tout sous-ensemble A non vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure b qui vérifie*

$$(\forall x \in A \quad x \leqslant b) \quad et \quad (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x_\varepsilon \in A \quad b-\varepsilon < x_\varepsilon).$$

✗ *Tout sous-ensemble A non vide et minoré de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure a qui vérifie*

$$(\forall x \in A \quad x \geqslant a) \quad et \quad (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x_\varepsilon \in A \quad a+\varepsilon > x_\varepsilon).$$

Dans la caractérisation de la borne supérieure donnée à la proposition 3.2, la condition « $\forall x \in A \quad x \leqslant b$ » exprime le fait que b est un majorant de A. La condition « $\exists x_\epsilon \in A \quad b-\epsilon < x_\epsilon$ » exprime qu'il s'agit du plus petit : dès que l'on veut retrancher une quantité ϵ aussi petite soit-elle à b, on trouve des éléments de A qui sont plus grand que $b-\epsilon$, voir la figure 1. Le réel $b-\epsilon$ n'est donc pas un majorant de A. Dans la caractérisation de la borne inférieure, la condition « $\forall x \in A \quad x \geqslant a$ » exprime le fait que a est un minorant de A. La condition « $\exists x_\epsilon \in A \quad a+\epsilon > x_\epsilon$ » exprime qu'il s'agit du plus grand : dès que l'on veut ajouter une quantité ϵ aussi petite soit-elle à a, on trouve des éléments de A qui sont plus petits que $a+\epsilon$, voir la figure 1. Le réel $a+\epsilon$ n'est donc pas un minorant de A.

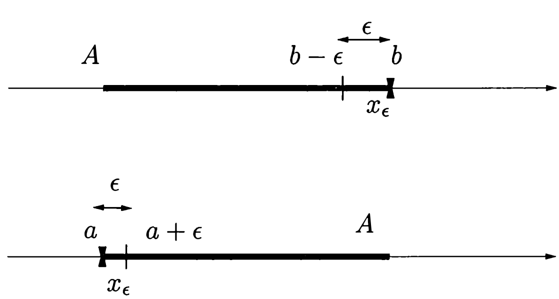


Fig. 1 Illustration de la situation décrite à la proposition 3.2.

Exemple Considérons l'ensemble $E = \{1/(1+x^2) \mid x \in \mathbb{R}_+^*, x \leqslant 1\}$. Sous l'hypothèse $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 0 < x \leqslant 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 < x^2 \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < 1+x^2 \leqslant 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} < 1. \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble E est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. Il admet pour borne supérieure 1 mais n'admet pas d'élément maximal. Il admet pour borne inférieure $\frac{1}{2}$ qui est également son élément minimal.

Théorème 3.1 (Propriété d'Archimède)

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \qquad n\varepsilon > x.$$

Démonstration Soient ε et x deux réels strictement positifs fixés. L'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n\varepsilon \leqslant x\}$ est un sous-ensemble non vide ($0 \in E$) et majoré (par x/ε) de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne supérieure b dans $\mathbb{R}$ (qui par définition est le plus petit des majorants de E). Puisque $b-1$ n'est pas un majorant de E, il existe $\widetilde{n} \in E$ tel que $\widetilde{n} > b-1$. On en déduit que $\widetilde{n}+1 > b$ et par conséquent que l'entier non nul $n_0 = \widetilde{n}+1$ n'appartient pas à E. On a donc $n_0\varepsilon > x$. La propriété d'Archimède est démontrée : il existe un entier naturel non nul n_0 tel que $n_0\varepsilon > x$ □

Remarque On appelle nombre irrationnel un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et on appelle nombre algébrique un réel qui est solution d'une équation algébrique à coefficients rationnels (c'est-à-dire de la forme $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, avec $a_k \in \mathbb{Q}$, $k \in \{0, \ldots, n\}$). L'ensemble des nombres algébriques contient $\mathbb{Q}$ et est un ensemble dénombrable[12]. Les autres réels sont qualifiés de transcendants. Par exemple $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel et un nombre algébrique (il est solution de l'équation algébrique $x^2 - 2 = 0$) alors que π est un nombre irrationnel et un nombre transcendant.

3.2 Propriétés des nombres réels

3.2.1 Propriétés calculatoires

L'objet de cette partie est de rappeler les principales propriétés et formules calculatoires concernant les nombres réels.

1. $$\forall (x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4 \quad \begin{aligned} &((x \leqslant y) \text{ et } (u \leqslant v)) \Longrightarrow x+u \leqslant y+v \\ &((x \leqslant y) \text{ et } (u < v)) \Longrightarrow x+u < y+v \\ &((x \leqslant y) \text{ et } (u \geqslant 0)) \Longrightarrow x \times u \leqslant y \times u \\ &((x \leqslant y) \text{ et } (u \leqslant 0)) \Longrightarrow x \times u \geqslant y \times u \end{aligned}$$

[12] Voir la définition 2.24 p. 52.

2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \quad 0 < x \leqslant y \iff 0 < \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$

$$x \leqslant y < 0 \iff \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} < 0$$

$$x < 0 < y \iff \frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \qquad \left(x \leqslant y \iff x^n \leqslant y^n\right)$

4. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \left(x \leqslant 1 \text{ et } n \leqslant m \Longrightarrow x^n \geqslant x^m\right)$

$$\left(x \geqslant 1 \text{ et } n \leqslant m \Longrightarrow x^n \leqslant x^m\right)$$

La proposition suivante est un simple corollaire de la proposition 2.12, page 77, démontrée dans le cas général d'un anneau.

PROPOSITION 3.3 (Formule du binôme de Newton[13])
Soient x et y deux réels et n un entier naturel non nul. On a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} \qquad \text{où} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarques

1. On note aussi couramment C_n^k au lieu de $\binom{n}{k}$, le $(k+1)^{\text{e}}$ coefficient de la formule du binôme de Newton.
2. La commutativité de la somme dans $\mathbb{R}$ implique que l'on a également

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k$$

et il peut être plus avantageux selon les situations d'utiliser l'une ou l'autre des deux expressions de la formule du binôme de Newton.

PROPOSITION 3.4 *Pour tous réels x et y et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \\ &= (x-y)\,(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}). \end{aligned}$$

[13] L'Histoire ne nous a pas transmis le nom du collaborateur de Newton qui a établi cette formule. C'est la raison pour laquelle on a coutume d'appeler cette formule « la formule du binome de Newton ».

Démonstration La formule se démontre par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}y^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}y^k - \sum_{\ell=1}^{n} x^{n-\ell}y^\ell\end{aligned}$$

(on a effectué le changement de variable $\ell = k+1$ dans la 2$^{\text{e}}$ somme)

$$= x^n - y^n,$$

les termes des deux sommes s'annulant deux à deux à l'exception des termes extrêmes correspondant à $k = 0$ dans la première somme et à $\ell = n$ dans la seconde. □

Proposition 3.5 *Pour tout entier naturel n non nul on a*[14]

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

Démonstration[15] Soient u_0, r deux réels et n un entier naturel non nul. On considère pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n+1$ les réels u_k définis[16] par la relation $u_k = u_{k-1} + r$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_m la quantité

$$S_m = \sum_{k=0}^{n} u_k^m.$$

---

(14) Un professeur de Gauss aurait donné l'exercice suivant à une classe un peu trop indisciplinée : « Messieurs, vous faites trop de bruit. Calculez-moi $1+2+3+\ldots+99+100$. Je ne veux entendre aucun bruit. »
Gauss le résolut immédiatement, en remarquant qu'en notant S cette somme, on a :

$$\begin{aligned}S &= 1+2+3+\ldots+100 \\ S &= 100+99+\ldots+1\end{aligned}$$

et donc $2S = 101+101+\ldots+101 = 100 \times 101 = 10100$. La somme valait donc 5050.

(15) Chacune de ces relations peut se démontrer en ayant recours à un raisonnement par récurrence, voir l'exercice 1 p. 106. Nous démontrons ici ces formules par une méthode « constructive » permettant d'établir l'expression de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

(16) Autrement dit on considère une progression arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, voir la définition 5.9 p. 201.

D'après la formule du binôme de Newton, on a pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$(u_k + r)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} r^i \, u_k^{m-i} = u_k^m + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} r^i \, u_k^{m-i}.$$

On en déduit en sommant ces relations pour k variant de 0 à n que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (u_k + r)^m &= \sum_{k=0}^{n} \left(u_k^m + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} r^i \, u_k^{m-i} \right) = \sum_{k=0}^{n} u_k^m + \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} r^i \, u_k^{m-i} \right) \\ &= S_m + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} r^i \left(\sum_{k=0}^{n} u_k^{m-i} \right) = S_m + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} r^i \, S_{m-i}. \end{aligned}$$

Or, $u_k + r = u_{k+1}$, de sorte que l'on a aussi

$$\sum_{k=0}^{n} (u_k + r)^m = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}^m = \sum_{k=1}^{n+1} u_k^m = S_m - u_0^m + u_{n+1}^m.$$

En combinant ces deux relations, on obtient

$$u_{n+1}^m = u_0^m + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} r^i \, S_{m-i}. \tag{3}$$

Prenons $u_0 = 0$ et $r = 1$; on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = k$ et la relation (3) s'écrit dans ce cas particulier

$$(n+1)^m = \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} S_{m-i}. \tag{4}$$

Prenons $m = 2$, on obtient

$$(n+1)^2 = 2S_1 + S_0.$$

Compte tenu du fait que $S_0 = (n+1)$, on trouve que la somme des n premiers entiers naturels vaut

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En prenant $m = 3$ dans la relation (4), on obtient

$$(n+1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + S_0$$

d'où on déduit que la somme des carrés des n premiers entiers naturels vaut

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En prenant $m = 4$ dans la relation (4), on obtient

$$(n+1)^4 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0$$

d'où on déduit que la somme des cubes des n premiers entiers naturels vaut

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

On peut poursuivre selon le même principe pour obtenir l'expression de la somme des puissances m-ième des n premiers entiers. On obtient ainsi

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$ □

EXERCICE 1 Redémontrer les relations données dans la proposition 3.5 en utilisant un raisonnement par récurrence.

PROPOSITION 3.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz[17])
Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Démonstration Considérons l'application $T : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)^2$. Pour tout réel λ, $T(\lambda)$ est positif car il s'agit d'une somme de carrés. De plus,

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda^2 x_i^2 + 2\lambda x_i y_i + y_i^2\right) = \lambda^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{=a} + 2\lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}_{=b} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}_{=c} \\ &= a\lambda^2 + 2b\lambda + c. \end{aligned}$$

Si $a \neq 0$, alors la fonction polynomiale du second degré T étant positive sur $\mathbb{R}$, l'équation $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ ne peut avoir qu'une racine double ou deux racines complexes (mais il ne peut y avoir deux racines réelles distinctes, sans quoi T serait négative sur un intervalle de longueur non nulle). On a par conséquent un discriminant négatif pour le trinôme T, *i.e.* $\Delta = 4b^2 - 4ac \leqslant 0$. Cette propriété se traduit par

$$b^2 - ac = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leqslant 0.$$

[17] CAUCHY, Augustin (1789, Paris - 1857, Sceaux).
SCHWARZ, Hermann (1843, Hermsdorf - 1921, Berlin).

Si $a = 0$ alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $x_i = 0$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui s'écrit $0 = 0$ est vraie. $\square$

EXERCICE 2 En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer l'inégalité de Minkowski[18] : pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Remarque Si on désigne par $\overrightarrow{x}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $(x_1, \ldots, x_n)$, par $\overrightarrow{y}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $(y_1, \ldots, y_n)$ et par $\| \; \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz exprime le fait que $|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leqslant \|\overrightarrow{x}\| \times \|\overrightarrow{y}\|$ et l'inégalité de Minkowski correspond à l'inégalité : $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leqslant \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$, voir la figure 2.

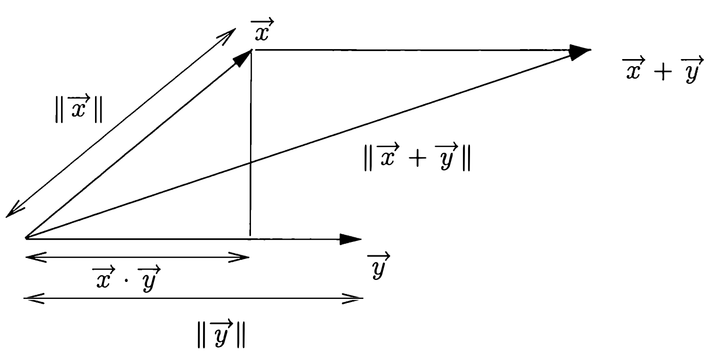


Fig. 2 Illustration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'inégalité de Minkowski.

3.2.2 La valeur absolue

DÉFINITION 3.6 *On appelle valeur absolue du réel x le réel positif noté $|x|$ défini par*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Les principales propriétés de la valeur absolue sont données dans la proposition suivante.

[18] MINKOWSKI, Hermann (1864, Kaunas (Lituanie) - 1909, Göttingen (Allemagne)).

PROPOSITION 3.7 *On a les propriétés suivantes :*

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \max\{x, -x\}$ *et* $|-x| = |x|$;
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (|x| = 0 \iff x = 0)$;
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x \times y| = |x| \times |y|$;
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x^n| = |x|^n$;
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x + y| \leqslant |x| + |y|$ (1^{re} inégalité triangulaire) ;
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$ (2^{e} inégalité triangulaire).

Démonstration $\trianglerighteq$ Les deux premières assertions sont des conséquences immédiates de la définition de la valeur absolue.

$\trianglerighteq$ La troisième assertion se démontre par disjonction des cas selon le signe de x et de y.

i) Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors d'une part $x \times y \geqslant 0$ et par conséquent $|x \times y| = x \times y$ et d'autre part $|x| = x, |y| = y$. La relation $|x \times y| = |x| \times |y|$ est donc établie dans ce cas.

ii) Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ alors d'une part $x \times y \leqslant 0$ et par conséquent $|x \times y| = -x \times y$ et d'autre part $|x| = x, |y| = -y$. La relation $|x \times y| = |x| \times |y|$ est donc établie dans ce cas.

iii) Si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors d'une part $x \times y \leqslant 0$ et par conséquent $|x \times y| = -x \times y$ et d'autre part $|x| = -x, |y| = y$. La relation $|x \times y| = |x| \times |y|$ est donc établie dans ce cas.

iv) Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$ alors d'une part $x \times y \geqslant 0$ et par conséquent $|x \times y| = x \times y$ et d'autre part $|x| = -x, |y| = -y$. La relation $|x \times y| = |x| \times |y|$ est donc établie dans ce cas.

On a démontré que dans les 4 cas envisageables selon les signes de x et de y, la relation était vraie. Elle est donc toujours vraie.

$\trianglerighteq$ La quatrième assertion se démontre aisément par récurrence en utilisant le résultat qui vient d'être établi.

$\trianglerighteq$ Pour démontrer la première inégalité triangulaire nous procédons à nouveau par disjonction des cas. Remarquons que l'on peut toujours supposer[19] que $x \leqslant y$.

i) Ou bien $0 \leqslant x \leqslant y$ et dans ce cas $|x + y| = x + y = |x| + |y|$. La relation est vraie.

ii) Ou bien $x \leqslant y \leqslant 0$ et dans ce cas $|x+y| = -(x+y) = -x + (-y) = |x| + |y|$. La relation est vraie.

[19] Il est toujours possible, étant donnés deux réels de nommer x le plus petit des deux et y le plus grand (ou inversement !).

iii) Ou bien $x \leqslant 0 \leqslant y$ avec $-x \geqslant y$ et

$$|x+y| = -(x+y) = (-x) - y = |x| - |y| \leqslant |x| + |y|.$$

La relation est vraie dans ce cas.

iv) Ou bien $x \leqslant 0 \leqslant y$ avec $-x \leqslant y$ et

$$|x+y| = x+y = -(-x) + y = -|x| + |y| \leqslant |x| + |y|.$$

La relation est vraie dans ce cas aussi.

Nous avons montré que dans les 4 cas envisageables, compte tenu de la commutativité de la somme, la relation était vraie. Elle est donc toujours vraie.

$\trianglerighteq$ Pour démontrer la seconde inégalité triangulaire, considérons deux réels x et y tels que[19] $|x| \geqslant |y|$. On a alors,

$$\big||x| - |y|\big| = |x| - |y| = |x - y + y| - |y|.$$

En utilisant la première inégalité triangulaire, on obtient

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y| + |y| - |y| = |x-y|.$$

La seconde inégalité triangulaire est démontrée. □

Exercice 3 Montrer, en utilisant une disjonction de cas, que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\max\{x,y\} = \tfrac{1}{2}\big(x+y+|x-y|\big) \quad \text{et} \quad \min\{x,y\} = \tfrac{1}{2}\big(x+y-|x-y|\big).$$

L'une des utilisations de la valeur absolue consiste à mesurer la distance entre deux points sur la droite réelle.

Définition 3.7 *On appelle distance usuelle sur $\mathbb{R}$ l'application*

$$\begin{array}{rccc} d : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & |x-y| \end{array}$$

Étant donnés deux réels x et y, le réel $d(x,y)$ est appelé distance de x à y.

Proposition 3.8 *La distance usuelle sur $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes :*

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \big(d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y\big)$,
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad d(x,y) = d(y,x)$,
3. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Démonstration Les deux premières assertions résultent des propriétés de la valeur absolue. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on obtient en utilisant la première inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x-z| = |x+(-y+y)-z| = |(x-y)+(y-z)| \\ &\leqslant |x-y|+|y-z| = d(x,y)+d(y,z). \end{aligned}$$

La 3$^{\text{e}}$ assertion est démontrée. □

Remarque Plus généralement, on appelle *distance* sur un ensemble E toute application d vérifiant les 3 assertions de la proposition 3.8. L'ensemble E muni de cette application est alors qualifié d'espace métrique. La notion d'espace métrique est abordée dans le chapitre 7 du *Cours de deuxième année*. Par exemple sur $\mathbb{C}$ l'application qui aux complexes z_1 et z_2 associe le module de $z_1 - z_2$ définit une distance.

3.2.3 Partie entière et racine n-ième

PROPOSITION 3.9 (Partie entière)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \leqslant x < \alpha + 1$. L'entier relatif α est appelé partie entière du réel x et est noté $E(x)$ ou $[x]$.

Démonstration On procède par disjonction de cas selon le signe de x.

⊵ Soit x un réel positif et $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$. L'ensemble A est non vide ($0 \in A$) et il est majoré dans $\mathbb{Z}$ car d'après la propriété d'Archimède[20], il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > x$ donc

$$\forall n \in A \quad n \leqslant x < N.$$

L'ensemble A étant un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ non vide et majoré, il admet un plus grand élément (ou élément maximal) α. L'entier α appartient à A, donc $\alpha \leqslant x$, et puisqu'il s'agit de l'élément maximal de A on a $\alpha + 1 \notin A$ donc $\alpha + 1 > x$.

⊵ Considérons à présent un réel x strictement négatif et notons B l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z} \mid n > x\}$. Cet ensemble est non vide ($0 \in B$) et il est minoré car d'après la propriété d'Archimède[21], il existe un entier N tel que $N > -x$, autrement dit tel que $x > -N$. L'ensemble B est donc un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, non vide et minoré; il admet un unique élément minimal $\beta \in \mathbb{Z}$. Cet élément minimal vérifie d'une part $\beta \in B$ donc $\beta > x$ et d'autre part $\beta - 1 \notin B$ donc $\beta - 1 \leqslant x$. On en déduit que l'entier relatif $\alpha = \beta - 1$ vérifie $\alpha \leqslant x < \alpha + 1$. □

Exemple On a $E(\pi) = 3$, $E(-\pi) = -4$, $E(3) = 3$, $E(-4) = -4$.

On appelle fonction partie entière l'application $E : x \in \mathbb{R} \mapsto E(x)$.

---

(20) Voir le théorème 3.1 p. 102.

(21) Voir le théorème 3.1 p. 102 ; on prend $\varepsilon = -1$ et on considère le réel strictement positif $-x$.

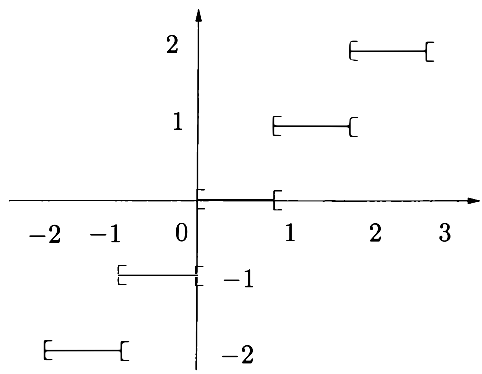


Fig. 3 Représentation graphique de la fonction partie entière.

La fonction partie entière possède les propriétés suivantes que l'on obtient directement à partir de la proposition 3.9.

PROPOSITION 3.10 *Soit x un nombre réel. On a*

1. $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$ *et* $x - 1 < E(x) \leqslant x$.
2. $E(x) = x \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
3. $\forall n \in \mathbb{Z} \quad E(x+n) = E(x) + n$.

PROPOSITION 3.11 (Racine n-ième d'un réel positif)
Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ donnés, il existe un unique réel positif b tel que $b^n = a$. Ce réel est noté $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$ et est appelé racine **n-ième**[22] *de a.*

Démonstration Nous verrons par la suite que ce résultat découle de manière évidente du fait que l'application $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Nous allons cependant en donner une démonstration directe qui utilise la notion de borne supérieure d'un ensemble. Remarquons que le résultat est évident pour $a = 0$, $a = 1$ et pour $n = 1$.

$\trianglerighteq$ Montrons tout d'abord que si le réel b existe, il est nécessairement unique. Pour cela supposons qu'il existe deux réels positifs b_1 et b_2 tels que $b_1^n = a$ et $b_2^n = a$. On a alors $b_1^n = b_2^n$ et, d'après la proposition 3.4,

$$b_1^n - b_2^n = (b_1 - b_2) \sum_{k=0}^{n-1} b_1^{n-1-k} b_2^k = 0.$$

[22] On parle de racine carrée lorsque $n = 2$ et de racine cubique lorsque $n = 3$.

Ce produit est nul si et seulement si[23] on a $b_1 - b_2 = 0$ ou si pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ on a $b_1^{n-1-k} b_2^k = 0$. Dans le premier cas cela implique que $b_1 = b_2$. Dans le deuxième cas cela implique que $b_1 = b_2 = 0$ (relation obtenue en considérant les valeurs $k = 0$ et $k = n-1$). On en déduit que s'il existe, le réel b vérifiant $b^n = a$ est unique.

⊵ Établissons à présent l'existence du réel b dans le cas où $a \in [1, +\infty[$. Considérons l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid x^n \leqslant a\}$; cet ensemble est non vide (car par exemple $1 \in A$) et il est majoré par a (si $x \geqslant 1$ alors $x \leqslant x^n \leqslant a$ et si $0 < x < 1$ alors $x \leqslant a$ car $a \geqslant 1$). Il admet donc une borne supérieure[24] b qui vérifie

$$\forall x \in A \quad x \leqslant b, \tag{5}$$

$$\text{et} \qquad \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x_\epsilon \in A \quad b - \epsilon < x_\epsilon. \tag{6}$$

Notons que d'après (5) on a nécessairement $b > 0$.

Trois cas sont envisageables : ou bien $b^n < a$, ou bien $b^n > a$, ou bien enfin $b^n = a$. Nous allons montrer que les deux premiers cas ne peuvent avoir lieu. Le seul cas possible sera alors le cas où $b^n = a$. Nous aurons ainsi démontré l'existence d'une racine n-ième de a. Pour montrer que les deux premiers cas ne peuvent avoir lieu, raisonnons par l'absurde.

– Supposons que $b^n < a$ et considérons un réel $\alpha \in]0,1[$. D'après la formule du binôme, nous avons

$$\begin{aligned}
(b+\alpha)^n - b^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k \alpha^{n-k} - b^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b^k \alpha^{n-k} \\
&\leqslant \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b^k \qquad (\text{car } \alpha \in]0,1[\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}^* \ \alpha^i \leqslant \alpha) \\
&< \alpha \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k = \alpha\, (1+b)^n.
\end{aligned}$$

On en déduit que si l'on choisit $\alpha \in]0,1[$ tel que $\alpha < \dfrac{a - b^n}{(1+b)^n}$ alors

$$(b+\alpha)^n - b^n < a - b^n$$

et par conséquent $(b+\alpha)^n < a$. C'est impossible car on aurait alors $b + \alpha$ qui serait un élément de A et qui serait strictement plus grand que la borne supérieure de cet ensemble. C'est en contradiction avec la condition (5). Le cas où $b^n < a$ est donc impossible.

– Supposons que $b^n > a$. D'après la proposition 3.4, pour tout élément x de A on a

$$b^n - a \leqslant b^n - x^n = (b-x) \sum_{k=0}^{n-1} b^k x^{n-1-k}.$$

[23] En effet, puisque $b_1 \geqslant 0$ et $b_2 \geqslant 0$ la somme est une somme de termes positifs ; elle est nulle si et seulement si chacun des termes de cette somme est nul.

[24] Voir la proposition 3.2 p. 101.

Par ailleurs, $0 < x^n \leqslant a < b^n$ donc $(x/b)^n < 1$ et par conséquent on a $0 < x/b < 1$. Cela implique que l'on a aussi $0 < x < b$ et donc $0 < x^k < b^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On obtient en utilisant ces résultats la relation suivante

$$b^n - a \leqslant (b-x)\sum_{k=0}^{n-1} b^k b^{n-1-k} = (b-x)\sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1} \leqslant (b-x)\, n\, b^{n-1}.$$

Autrement dit, pour tout $x \in A$ on a : $b - x \geqslant \dfrac{b^n - a}{n\, b^{n-1}}$. Posons $\varepsilon = \dfrac{b^n - a}{n\, b^{n-1}}$; on peut affirmer d'après ce qui précède que

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad b - x \geqslant \varepsilon.$$

Notons que cette assertion est la négation de l'assertion (6). On a donc établit une contradiction. Le cas où $b^n > a$ est donc lui aussi impossible. Le seul cas possible est le cas où $b^n = a$ et nous en déduisons l'existence d'une racine n-ième de a pour tout $a \in [1, +\infty[$.

⊵ Pour terminer la démonstration, il faut considérer le cas où $a \in]0,1[$. Posons $\alpha = 1/a$; on a $\alpha \in]1, +\infty[$ et d'après la partie précédente de la démonstration, on peut affirmer qu'il existe un unique réel $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\beta^n = \alpha$. Or

$$\beta^n = \alpha \iff \beta^n = \frac{1}{a} \iff \frac{1}{\beta^n} = a \iff \left(\frac{1}{\beta}\right)^n = a.$$

On en déduit donc qu'il existe un unique réel $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $b^n = a$, ce réel étant $1/\beta$. □

Exercice 4 En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{2/n}$.

Exercice 5 Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$; montrer que $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

3.2.4 Propriétés fondamentales

La proposition suivante sera utilisée à de nombreuses reprises dans la suite du cours. Elle indique que pour montrer qu'un réel est nul, il suffit de montrer qu'on peut le rendre, en valeur absolue, plus petit que n'importe quel réel strictement positif.

Proposition 3.12 *Soit x un réel.*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad |x| \leqslant \varepsilon) \implies x = 0.$$

Démonstration Raisonnons par l'absurde[25]. Supposons l'assertion fausse, c'est-à-dire supposons que[26]

$$\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad |x| \leqslant \varepsilon\big) \ \text{ et } \ x \neq 0.$$

Puisque x est non nul, le réel $\eta = \frac{1}{2}\,|x|$ est strictement positif et vérifie $|x| > \eta$. Cela contredit l'hypothèse $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad |x| \leqslant \varepsilon)$. On en déduit que l'assertion énoncée dans la proposition est vraie. □

> **DÉFINITION 3.8** *On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si*
>
> $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \big(x < y \implies \exists a \in A \quad x < a < y\big).$$

Remarques

1. Dire que A est dense dans $\mathbb{R}$ signifie qu'entre 2 réels distincts il y a toujours (au moins) un élément de A.

2. En utilisant les règles de négation d'une assertion quantifiée[26], on établit qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ si

$$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x < y) \quad \text{ et } \quad \big(\forall a \in A \quad (x \geqslant a \text{ ou } y \leqslant a)\big).$$

Exemple L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$: pour $x = \pi$ et $y = \frac{7}{2}$, on a pour tout $m \in \mathbb{Z}$: $m \leqslant \pi$ ou $m \geqslant \frac{7}{2}$.

La proposition suivante indique que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Cela signifie qu'entre deux nombres réels quelconques, il existe toujours un nombre rationnel. Il en existe même une infinité (dénombrable) comme on l'établira à la proposition 3.14.

> **PROPOSITION 3.13** *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.*

Démonstration Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. On utilise la propriété d'Archimède[27] en prenant $\varepsilon = y - x$ (on a bien $\varepsilon > 0$) :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_\alpha \in \mathbb{N}^* \qquad n_\alpha (y - x) > \alpha.$$

En choisissant de prendre $\alpha = 1$, on établit l'existence d'un entier $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_1(y - x) > 1$. On a donc $y - x > \dfrac{1}{n_1}$ c'est-à-dire $y > \dfrac{n_1 x + 1}{n_1}$.

---

[25] Cette proposition peut également être démontrée en utilisant un raisonnement par contraposée, voir p. 16.

[26] Voir p. 14 pour les règles de négation d'une assertion définie à l'aide de quantificateurs.

[27] Voir le théorème 3.1 p. 102.

Posons $a = \dfrac{E(n_1x)+1}{n_1}$; il est clair que $a \in \mathbb{Q}$. En utilisant les propriétés de la partie entière, voir la proposition 3.10, on obtient

$$a > \frac{(n_1x-1)+1}{n_1} = x \quad \text{et} \quad a \leqslant \frac{n_1x+1}{n_1} = x + \frac{1}{n_1} < y.$$

On a ainsi montré que pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, il existe un rationnel a vérifiant $x < a < y$ ce qui permet de conclure que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

Remarque On peut montrer que l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ des irrationnels est lui aussi dense dans $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 3.14 *Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$ et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A est dense dans $\mathbb{R}$ alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, strictement monotone*[28]*, telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x < a_n < y.$$

Démonstration On raisonne par récurrence. Puisque A est dense dans $\mathbb{R}$, d'après la définition 3.8, il existe $a_0 \in A$ tel que $x < a_0 < y$. Supposons, c'est notre hypothèse de récurrence, que pour un entier k fixé, il existe $a_k \in A$ tel que $x < a_k < y$. Comme A est dense dans $\mathbb{R}$ et que y et a_k sont deux réels, il existe $a_{k+1} \in A$ tel que $a_k < a_{k+1} < y$. On a ainsi prouvé l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x < a_n < y$. Sur le même principe, il est aisé de construire une suite strictement décroissante en privilégiant cette fois-ci x et a_k. □

PROPOSITION 3.15 *Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.*

Démonstration Supposons que A est dense dans $\mathbb{R}$: pour tous réels x, y avec $x < y$, il existe un élément a de A tel que $x < a < y$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un élément a_n de A vérifiant $x < a_n < x + 1/n$. D'après le théorème d'encadrement[29], on en conclut que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite converge vers x. □

3.3 Topologie de la droite réelle

Nous présentons dans cette partie quelques notions de topologie de la droite réelle utiles par la suite. Il s'agit également d'une introduction élémentaire aux notions de topologie qui seront abordées de manière plus détaillées dans le cadre des espaces métriques au chapitre 7 du *Cours de deuxième année.*

---

(28) Voir la définition 5.5, p. 187.

(29) Théorème 5.1 p. 185.

3.3.1 Intervalles

DÉFINITION 3.9 *On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ tel que*

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3\quad \big((\alpha\in I\quad et\quad \beta\in I\quad et\quad \alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta)\Longrightarrow\gamma\in I\big).$$

Autrement dit, un intervalle est défini comme un ensemble où tout réel compris entre deux réels de l'ensemble appartient à l'ensemble.

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$. On définit les intervalles d'extrémités a et b suivants,

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x \text{ et } x\leqslant b\}, \text{ appelé intervalle fermé } [a,b],\\
]a,b[&= \{x\in\mathbb{R}\mid a< x \text{ et } x< b\}, \text{ appelé intervalle ouvert }]a,b[,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
[a,b[&= \{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x \text{ et } x< b\},\\
]a,b] &= \{x\in\mathbb{R}\mid a< x \text{ et } x\leqslant b\}.
\end{aligned}$$

On appelle *centre* de chacun de ces intervalles le réel $x=\frac{1}{2}(a+b)$.

On définit aussi les intervalles non bornés suivants,

$$[a,+\infty[\;=\;\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x\},\quad]a,+\infty[\;=\;\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\},$$

$$]-\infty,b[\;=\;\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\},\quad]-\infty,b]\;=\;\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant b\}.$$

3.3.2 Ensemble ouvert et ensemble fermé

DÉFINITION 3.10 (Voisinage)
On dit que le sous-ensemble $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un voisinage du réel x_0 si $\mathcal{V}$ contient un intervalle ouvert de centre[30] *x_0, autrement dit, si*

$$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\qquad \Big(a<b\;\; et\;\; x_0=\tfrac{1}{2}(a+b)\;\; et\;\;]a,b[\subset\mathcal{V}\Big).$$

Exemples

1. Les intervalles $]-1,1]$ et $[-1,\frac{1}{2}]$ sont des voisinages de 0. La condition de la définition 3.10 est en particulier satisfaite avec $a=\frac{1}{4}$ et $b=-a$.

2. Les intervalles $]0,1]$, $[0,1]$ et $[2,3]$ ne sont pas des voisinages de 0. Très clairement, il n'existe pas d'intervalle ouvert de centre 0 qui soit inclus dans ces ensembles.

---

[30] On peut également définir un voisinage de x_0 de la manière suivante : le sous-ensemble $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un voisinage du réel x_0 si $\mathcal{V}$ contient un intervalle ouvert *contenant* x_0.

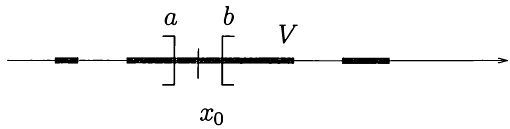


Fig. 4 Illustration de la situation décrite à la définition 3.10.

3. L'ensemble $\{1\} \cup]2, 3[$ n'est pas un voisinage de 1 mais c'est un voisinage de $\frac{5}{2}$ (la condition de la définition 3.10 est en particulier satisfaite avec $a = 2$ et $b = 3$.).

Remarque On dit que le sous-ensemble $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un *voisinage à gauche* du réel x_0 si $\mathcal{V}$ contient un intervalle de la forme $]a, x_0]$ autrement dit si $\exists a \in \mathbb{R} \quad]a, x_0] \subset \mathcal{V}$. De même, on dit que le sous-ensemble $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un *voisinage à droite* du réel x_0 si $\mathcal{V}$ contient un intervalle de la forme $[x_0, b[$ autrement dit si $\exists b \in \mathbb{R} \quad [x_0, b[\subset \mathcal{V}$.

DÉFINITION 3.11 (Ensemble ouvert, ensemble fermé)

✗ *Un sous-ensemble $\mathcal{O}$ non vide de $\mathbb{R}$ est qualifié d'ensemble ouvert si pour tout élément x de $\mathcal{O}$ il existe un intervalle ouvert de centre x inclus dans $\mathcal{O}$, autrement dit, un sous-ensemble $\mathcal{O}$ est ouvert s'il est voisinage de chacun de ses points.*

✗ *Un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ est appelé ensemble fermé si son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est ouvert.*

Exemples

1. Tout intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a < b$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, soit $x \in]a, b[$ et $d = \min\left\{\frac{1}{2}(x-a), \frac{1}{2}(b-x)\right\}$. L'intervalle ouvert $]x-d, x+d[$ est inclus dans $]a, b[$ et admet x pour centre.

2. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'est ni ouvert, ni fermé dans $\mathbb{R}$. En effet, considérons un rationnel x ; si $\mathbb{Q}$ était un ensemble ouvert, il existerait un intervalle ouvert $]a, b[$ (où $a < b$) de centre x inclus dans $\mathbb{Q}$. Comme l'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe au moins un nombre irrationnel entre a et b, ce qui revient à dire que l'intervalle $]a, b[$ n'est pas inclus dans $\mathbb{Q}$. On a donc une contradiction. Par ailleurs, montrer que $\mathbb{Q}$ est fermé revient à montrer que son complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est ouvert. Un raisonnement analogue au précédent utilisant le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ permet d'établir que ce n'est pas le cas.

3. Pour tout réel a, l'intervalle $]a, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ car quel que soit $x \in]a, +\infty[$, l'intervalle $]x-\delta, x+\delta[$ où $\delta = \frac{1}{2}(x-a)$ est un intervalle ouvert de centre x inclus dans $]a, +\infty[$. Son complémentaire $]-\infty, a]$ est donc un fermé de $\mathbb{R}$. De même, on montre que l'intervalle $]-\infty, a[$ est un ouvert.

4. L'ensemble $\mathbb{R}$ est un ouvert. En effet quel que soit le réel x l'intervalle $]x-1, x+1[$ est un intervalle ouvert de centre x inclus dans $\mathbb{R}$.

Remarques

1. Par convention, l'ensemble vide est un ouvert de $\mathbb{R}$. Son complémentaire qui est $\mathbb{R}$ est donc un fermé. Nous avons vu que $\mathbb{R}$ est un ensemble ouvert ; son complémentaire qui est l'ensemble vide est donc un fermé. On retiendra que l'ensemble vide et $\mathbb{R}$ sont à la fois des ouverts et des fermés. Ce sont les seuls à posséder cette propriété.

2. Un ensemble peut n'être ni ouvert ni fermé (c'est le cas par exemple de l'intervalle $]-3, 3]$ ou de $\mathbb{Q}$). Contrairement à son sens dans le langage courant, fermé n'est pas le contraire d'ouvert.

3. Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est fermé et borné est qualifié d'ensemble compact.

Proposition 3.16 (Union et intersection d'ouverts ou de fermés)

✗ *L'union d'un nombre quelconque*[31] *d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. L'intersection d'un nombre* fini *d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

✗ *L'intersection d'un nombre quelconque d'ensembles fermés est un ensemble fermé. L'union d'un nombre* fini *d'ensembles fermés est un ensemble fermé.*

Démonstration Ce résultat est admis. Ces propriétés sont démontrées dans le cas plus général d'un espace métrique dans le *Cours de deuxième année* page 375. La seconde partie de la proposition concernant les ensembles fermés s'obtient à partir de la première partie de la proposition en utilisant les lois de Morgan, voir la proposition 2.3, page 30. □

Exemples

1. Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'intervalle $[a, b]$ est un ensemble ouvert puisqu'il est la réunion des intervalles ouverts $]-\infty, a[$ et $]b, +\infty[$. On en déduit qu'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ ce qui explique la terminologie employée.

2. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$ car leur complémentaire dans $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles ouverts : $\complement\,\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1[$ et $\complement\,\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$.

3.3.3 Intérieur et adhérence d'un ensemble

Définition 3.12 *Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel. On dit que x_0 est un point intérieur à A si A est un voisinage de x_0. L'ensemble des points intérieurs à A est noté $\overset{\circ}{A}$ et est appelé intérieur de A.*

[31] On signifie par là, fini, dénombrable (voir la définition 2.24 p. 52) ou infini non dénombrable.

Exemples

1. Le réel 0 est intérieur à $]-1,1]$ mais n'est pas intérieur à $]0,1]$ ni à $[0,1]$.

2. L'intérieur de $\mathbb{Q}$ est l'ensemble vide. En effet, si un réel x_0 était intérieur à $\mathbb{Q}$ alors $\mathbb{Q}$ serait voisinage de x_0. D'après la définition 3.10, il existerait deux réels a et b avec $a < b$ et $\frac{1}{2}(a+b) = x_0$ tels que $]a,b[\subset \mathbb{Q}$. Cela est impossible car $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe au moins un nombre irrationnel entre a et b ce qui implique que $]a,b[\not\subset \mathbb{Q}$.

Remarques

1. L'intérieur d'un sous-ensemble non vide A de $\mathbb{R}$ est le plus grand ouvert contenu dans A. On a donc $\overset{\circ}{A} \subset A$.

2. L'intérieur d'un intervalle d'extrémités a et b est l'intervalle ouvert $]a,b[$.

Définition 3.13 (Adhérence)
Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel.

✗ *On dit que x_0 est un point adhérent à A si tout intervalle ouvert de centre x_0 contient au moins un élément de A. L'ensemble des points adhérents à A est noté $\overline{A}$ et est appelé adhérence de A.*

✗ *On dit que x_0 est un point d'accumulation de A si tout intervalle ouvert de centre x_0 contient au moins un élément de A autre que x_0.*

De manière équivalente, x_0 est un point adhérent à A si tout voisinage de x_0 contient au moins un élément de A et x_0 est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x_0 contient au moins un élément de A autre que x_0.

Exemples

1. Soit $A =]1,2] \cup \{3\}$. Le réel 1 est un point d'accumulation de A et un point adhérent de A. Le réel 1 n'appartient pas à A. Le réel 2 est un point d'accumulation de A et un point adhérent de A. Le réel 2 appartient à A. Le réel 3 est un point adhérent mais n'est pas un point d'accumulation. Le réel 3 appartient à A. Le réel 3/2 est un point d'accumulation de A et un point adhérent de A. Il appartient à A.

2. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, tout réel est un point d'accumulation et un point d'adhérence de $\mathbb{Q}$. L'adhérence de $\mathbb{Q}$ est donc l'ensemble $\mathbb{R}$.

Remarques

1. Un point d'accumulation de A est un point adhérent de A mais la réciproque est fausse.

2. Un point adhérent à l'ensemble A qui n'est pas un point d'accumulation est appelé un *point isolé*.

3. L'adhérence de A est le plus petit ensemble fermé contenant A. On a donc $A \subset \overline{A}$.

4. Si A est un ensemble borné dans $\mathbb{R}$, $M = \sup_{\mathbb{R}}(A)$ et $m = \inf_{\mathbb{R}}(A)$ sont deux points d'adhérence de A.
5. L'adhérence d'un intervalle d'extrémités a et b est l'intervalle fermé $[a, b]$.

3.3.4 La droite numérique achevée

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'a ni plus grand, ni plus petit élément. On lui adjoint 2 éléments notés[(32)] $+\infty$ et $-\infty$ de façon à construire l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$. On a donc $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre total définie sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty.$$

On prolonge partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ la structure algébrique de $\mathbb{R}$ en posant

$$\begin{array}{rcll} x + (+\infty) & = & +\infty & \forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x + (-\infty) & = & -\infty & \forall x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ x \times (+\infty) & = & +\infty & \forall x \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\} \\ x \times (-\infty) & = & -\infty & \forall x \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\} \end{array}$$

mais il n'est pas possible de définir[(33)]

$$(+\infty) + (-\infty), \qquad 0 \times (+\infty), \qquad 0 \times (-\infty),$$

de manière à ce que $\overline{\mathbb{R}}$ devienne un anneau[(34)].

DÉFINITION 3.14 (Voisinage de l'infini)
On appelle voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) tout sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ de la forme $]a, +\infty]$ (resp. $[-\infty, a[$) où

$$]a, +\infty] =]a, +\infty[\cup \{+\infty\} \qquad \textit{et} \qquad [-\infty, a[=]-\infty, a[\cup \{-\infty\}.$$

Si A est un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$, on dit que $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à A dans $\overline{\mathbb{R}}$ si tout voisinage de x_0 contient au moins un point de A.

(32) Le symbole ∞ aurait été créé par le mathématicien anglais John Wallis (1616, Ashford - 1703, Oxford) en s'inspirant d'une écriture cursive du m utilisée, à partir du VIIe siècle, pour écrire 1 000 en chiffres romain (donc ce que l'on pouvait considérer comme un très grand nombre).

(33) On notera que l'on retrouve là les difficultés intervenant dans le calcul des limites.

(34) Voir la définition 2.36 p. 66.

3.4 Exercices de synthèse

EXERCICE 6 *Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $a \leqslant b$ *et*

$$A = \left\{ \frac{1}{ma} + \frac{1}{nb} \mid m,n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1 - Montrer que A *possède un plus grand élément et que* A *est minoré.*

2 - Montrer, en utilisant la propriété d'Archimède, que A *admet* 0 *pour borne inférieure.*

3 - Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ *les réels* $\frac{1}{ka}$ *et* $\frac{1}{kb}$ *sont des points d'accumulation de* A.

EXERCICE 7 *On appelle nombre dyadique tout nombre rationnel de la forme* $m/2^n$ *où* $m \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer en utilisant la propriété d'Archimède que l'ensemble des nombres dyadiques*

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}\ , n \in \mathbb{N} \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$. *On pourra également montrer que l'ensemble des nombres décimaux est dense dans* $\mathbb{R}$.

EXERCICE 8 *Soit* f *une application définie sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(1) = 1$ *et*

i) $\forall x \neq 0 \quad (f(x) \neq 0$ *et* $f(1/x) = 1/f(x))$,

ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1 - Montrer que $f(0) = 0$ *puis que* f *est impaire.*

2 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on a* $f(n) = n$. *En déduire que pour tout* $x \in \mathbb{Q}$, *on a* $f(x) = x$.

3 - Vérifier que pour tout réel x, $f(x^2) = f(x)^2$ *(on pourra calculer* $f(\frac{1}{x(1-x)})$ *de deux manières différentes). En déduire que* f *est croissante.*

4 - En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$, *prouver finalement que l'application* f *est l'application identité.*

Cet exercice illustre bien comment certaines relations sur les réels (ici la propriété $f(x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*) peuvent être démontrées en ayant recours à la densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On commence par établir que la propriété est vraie pour les entiers naturels ce qui peut être fait, par exemple, par récurrence. On l'étend ensuite aux entiers relatifs en ayant recours à une propriété de parité. Le fait que tout nombre rationnel s'écrit comme quotient de deux entiers relatifs est ensuite utilisé pour établir la relation pour tous les rationnels. Enfin, la densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est exploitée pour établir la propriété dans le cas de tous les réels.*

3.5 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

Vérifions par récurrence que l'on a bien

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pour $n = 1$ la relation est vraie : $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1 = 1^2$.
Supposons maintenant que la relation soit vraie pour un entier n donné, autrement dit supposons que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et montrons que la relation est vraie pour l'entier suivant, autrement dit montrons que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Les autres raisonnements par récurrence sont à rédiger sur le même modèle, comme cela a été fait en page 20.

Solution de l'exercice 2

Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Démontrer l'inégalité de Minkowski revient à démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \right)^2.$$

On a

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i.$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 &\leqslant \sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}\right)^2.\end{aligned}$$

L'inégalité de Minkowski est démontrée.

Solution de l'exercice 3

Soient x et y deux réels. Deux cas sont possibles : ou bien $x \leqslant y$ ou bien $x > y$.

- Si $x \leqslant y$ alors d'une part $\max\{x,y\} = y$ et d'autre part $|x-y| = y-x$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = y$.
- Si $x > y$ alors d'une part $\max\{x,y\} = x$ et d'autre part $|x-y| = x-y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = x$.

Dans les deux cas, on a

$$\max\{x,y\} = \tfrac{1}{2}(x+y+|x-y|).$$

Cette égalité est donc vraie pour tous réels x, y. On procède selon le même principe pour établir la seconde relation.

Solution de l'exercice 4

En utilisant la formule du binôme (voir la proposition 3.3, p. 103), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k\\ &= 1+\underbrace{n\sqrt{\frac{2}{n}}}_{>0}+\frac{n!}{2\ (n-2)!}\frac{2}{n}+\underbrace{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k}_{>0}\\ &> 1+\frac{n!}{2\ (n-2)!}\frac{2}{n} = n.\end{aligned}$$

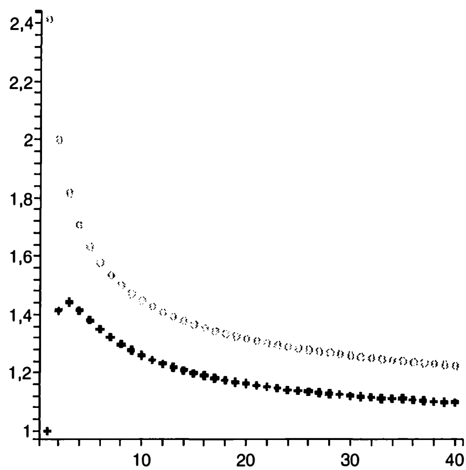
On en déduit que $\sqrt[n]{n} < 1+\sqrt{2/n}$. Par ailleurs,

$$\sqrt[n]{n} \geqslant 1 \iff n \geqslant (1)^n \iff n \geqslant 1.$$

On a donc démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1+\sqrt{2/n}$.

On peut illustrer avec MAPLE la propriété démontrée.

```
> N:=40: E1:=[[n, n^(1/n)] $n=1..N]:
> E2:= [[ n, 1+sqrt(2/n)] $n=1..N]:
> plot([E1,E2],style=point,symbol=[cross,diamond]);
```



Solution de l'exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Le réel $1/a$ est strictement positif, donc d'après la proposition 3.11, il existe un unique $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\beta^n = 1/a$ et par définition $\beta = \sqrt[n]{1/a}$. On a $(1/\beta)^n = a$ et par conséquent $1/\beta$ est la racine n-ième de a (celle-ci est unique). Finalement, on a $\beta = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$ et $\frac{1}{\beta} = \sqrt[n]{a}$ et par conséquent $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

Solution de l'exercice 6

1 - Notons $a_{mn} = \frac{1}{ma} + \frac{1}{nb}$ un élément de A. Il est clair que

$$0 < a_{mn} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

L'ensemble A est donc minoré par 0 et admet pour plus grand élément a_{11}.

2 - Tout élément de A est strictement positif. Pour montrer que 0 est borne inférieure de A montrons[35] que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \alpha \in A \quad \alpha - \varepsilon < 0.$$

D'après la propriété d'Archimède[36]

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \cdot n\varepsilon > x. \tag{7}$$

[35] Voir la proposition 3.2, p. 101.

[36] Voir le théorème 3.1, p. 102.

Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé prenons $x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; on obtient l'existence d'un entier naturel non nul n tel que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < n\,\varepsilon,$$

autrement dit, tel que

$$\frac{1}{na} + \frac{1}{nb} - \varepsilon < 0.$$

Comme $a_{nn} = \frac{1}{na} + \frac{1}{nb}$ est élément de A, on en conclut que 0 est bien la borne inférieure de A.

3 - Soient c et d deux réels tels que $a_k = \frac{1}{ka}$ appartienne à l'intervalle $]c, d[$. On veut montrer que cet intervalle contient un point de A. Soit ε le réel strictement positif défini par

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{ka} - c, d - \frac{1}{ka}\right\}.$$

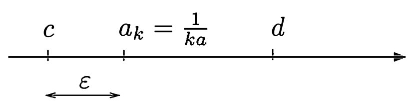


Fig. 5 Illustration de la situation considérée.

D'après la propriété d'Archimède (on prend $x = \frac{1}{b}$ dans la relation 7), il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{b} < n\varepsilon$. On a donc

$$0 < \frac{1}{nb} < \varepsilon = \min\left\{\frac{1}{ka} - c, d - \frac{1}{ka}\right\}$$

et on en déduit, voir la figure 5, que

$$0 < \frac{1}{ka} + \frac{1}{nb} < \frac{1}{ka} + \varepsilon < d$$

et que

$$\frac{1}{ka} + \frac{1}{nb} > \frac{1}{ka} - \frac{1}{nb} > \frac{1}{ka} - \varepsilon > c.$$

Ainsi a_{kn} appartient à $]c, d[$ et à A. Le réel $\frac{1}{ka}$ est donc bien un point d'accumulation de A. Sur le même principe on vérifie que $\frac{1}{kb}$ est aussi un point d'accumulation de A.

Solution de l'exercice 7

Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Pour montrer que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$, montrons que l'on peut trouver un nombre dyadique d tel que $x < d < y$. Posons $\varepsilon = y - x$. D'après la propriété d'Archimède[37]

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad n\,\varepsilon > 1.$$

[37] Voir le théorème 3.1, p. 102 ; on prend ici le réel 1 comme premier paramètre quantifié.

Par ailleurs, on vérifie facilement par récurrence que pour tout entier k on a $2^k > k$. On en déduit que
$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$
Posons $m = E(2^n x) + 1$ et considérons le nombre dyadique $d = \frac{m}{2^n}$. Vérifions que l'on a bien $x < d < y$. D'après les propriétés de la partie entière[38], on a d'une part
$$d = \frac{m}{2^n} = \frac{E(2^n x) + 1}{2^n} > \frac{2^n x}{2^n} = x$$
et d'autre part
$$d = \frac{m}{2^n} = \frac{E(2^n x) + 1}{2^n} < \frac{2^n x + 1}{2^n} = x + \frac{1}{2^n} < x + \varepsilon = y.$$
L'ensemble des nombres dyadiques est donc dense dans $\mathbb{R}$.

Un raisonnement en tout point identique où l'entier 2 est remplacé par 10 permet d'établir que l'ensemble des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 8

1 - Pour tout réel x, on a d'après la relation ii,
$$f(x+0) = f(x) + f(0).$$
On en déduit que $f(0) = f(x+0) - f(x) = 0$. On a aussi,
$$f(0) = f(-x+x) = f(-x) + f(x).$$
On en déduit que $f(-x) = -f(x)$, autrement dit que la fonction f est impaire.

2 - L'assertion « pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(n) = n$ » se vérifie par récurrence. On vient d'établir que $f(0) = 0$; elle est donc vraie pour $n = 0$. Supposons-la vraie pour un entier n fixé. On a alors, en utilisant la relation ii et l'hypothèse de récurrence,
$$f(n+1) = f(n) + f(1) = f(n) + 1 = n + 1.$$
D'après la relation i, ceci implique que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$f(1/p) = \frac{1}{f(p)} = \frac{1}{p}.$$
Tout rationnel strictement positif x s'écrit sous la forme $x = n/p$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. L'assertion « pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ $f(n/p) = n/p$ » se vérifie par récurrence sur n. Pour $n = 1$ la relation vient d'être démontrée. Si l'on suppose la relation vraie pour un entier n fixé alors la relation est également vraie pour l'entier $n+1$ puisque
$$\begin{aligned} f((n+1)/p) &= f(n/p + 1/p) = f(n/p) + f(1/p) \\ &= nf(1/p) + f(1/p) = \frac{n+1}{p}. \end{aligned}$$

---

[38] Voir la proposition 3.10 p. 111.

Par ailleurs, puisque la fonction f est impaire, si x est un rationnel négatif, on a

$$f(x) = f(-|x|) = -f(|x|) = -|x| = x.$$

La relation $f(x) = x$ est donc vraie pour tout rationnel x.

3 - En exploitant les propriétés de la fonction f, on obtient d'une part,

$$f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right) = \frac{1}{f(x(1-x))} = \frac{1}{f(x) - f(x^2)}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right) &= f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{f\,(1-x)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(1-x)} \\ &= \frac{1}{f(x)(1-f(x))}. \end{aligned}$$

De ces deux relations, on déduit que

$$\frac{1}{f(x) - f(x^2)} = \frac{1}{f(x)(1-f(x))}$$

autrement dit que $f(x^2) = f(x)^2$.

Soient x et y deux réels tels que $y \geqslant x$. Il existe un réel η tel que $y = x + \eta^2$. On a

$$f(y) = f(x+\eta^2) = f(x) + f(\eta^2) = f(x) + f(\eta)^2 \geqslant f(x).$$

La fonction f est donc croissante.

4 - Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas l'identité. Il existe alors un réel x_0 tel que $f(x_0) \neq x_0$. Supposons pour préciser les choses que $f(x_0) < x_0$ (un raisonnement analogue s'applique si l'on suppose $f(x_0) > x_0$). Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r dans l'intervalle $]f(x_0), x_0[$. Puisque f est croissante, on a

$$f(f(x_0)) \leqslant f(r) \leqslant f(x_0).$$

Or $f(r) = r$ puisque r est un rationnel, donc $r \leqslant f(x_0)$. Ceci contredit le fait que $r \in]f(x_0), x_0[$. On en déduit que l'application f est l'application identité.

CHAPITRE 4

Le corps des complexes

Dans ce chapitre, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels, muni des opérations usuelles, l'addition $+_{\mathbb{R}}$ et la multiplication $\times_{\mathbb{R}}$, que nous noterons plus simplement $+$ et $\times$. On note 0 et 1 les éléments neutres de $\mathbb{R}$ pour l'addition et pour la multiplication.

4.1 Structure de corps commutatif sur $\mathbb{R}^2$

Considérons l'ensemble produit $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$. Nous cherchons à munir cet ensemble de deux lois de composition interne afin de lui conférer une structure de corps commutatif.

4.1.1 Première approche

Munissons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des deux lois $\oplus$ et $\odot$ définies par

$$(a,b) \oplus (a',b') \overset{déf.}{=} (a+a', b+b'),$$
$$(a,b) \odot (a',b') \overset{déf.}{=} (a \times a', b \times b')$$

pour tous $(a,b), (a',b') \in \mathbb{R}^2$. Ces deux lois définissent des lois de composition interne sur $\mathbb{R}^2$ puisque les lois $+$ et $\times$ sont elles-mêmes des lois de composition interne sur $\mathbb{R}$. Les définitions de $\oplus$ et $\odot$ semblent assez naturelles (les opérations s'effectuent termes à termes). Confèrent-elles à $\mathbb{R}^2$ une structure de corps commutatif ? Pour répondre à cette question, examinons dans un premier temps les propriétés de la loi $\oplus$.

Propriétés de la loi $\oplus$

On vérifie aisément que la première loi $\oplus$ possède sur $\mathbb{R}^2$ les propriétés suivantes (qui se déduisent des propriétés de l'addition sur $\mathbb{R}$).

– La loi $\oplus$ est associative sur $\mathbb{R}^2$: pour tous $(a,b), (a',b'), (a'',b'') \in \mathbb{R}^2$,

$$\Big((a,b) \oplus (a',b')\Big) \oplus (a'',b'') = (a,b) \oplus \Big((a',b') \oplus (a'',b'')\Big).$$

- La loi $\oplus$ est commutative sur $\mathbb{R}^2$: $(a,b) \oplus (a',b') = (a',b') \oplus (a,b)$ pour tous $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$.
- L'ensemble $\mathbb{R}^2$ possède un élément neutre pour la loi $\oplus$. C'est l'élément $(0,0)$ puisque $(a,b) \oplus (0,0) = (a+0, b+0) = (a,b)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- Tout élément (a,b) de $\mathbb{R}^2$ possède un symétrique pour la loi $\oplus$ qui est l'élément $(-a,-b)$ car $(a,b) \oplus (-a,-b) = (0,0)$.

L'ensemble produit $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $\oplus$ possède ainsi une structure de groupe commutatif. Examinons à présent les propriétés de la seconde loi $\odot$.

Propriétés de la loi $\odot$

Les propriétés suivantes se déduisent des propriétés des deux lois $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{R}$.

- La loi $\odot$ est associative sur $\mathbb{R}^2$ car pour tous $(a,b),(a',b'),(a'',b'') \in \mathbb{R}^2$,
$$\Big((a,b) \odot (a',b')\Big) \odot (a'',b'') = (a,b) \odot \Big((a',b') \odot (a'',b'')\Big).$$
- La loi $\odot$ est commutative sur $\mathbb{R}^2$ puisque $(a,b) \odot (a',b') = (a',b') \odot (a,b)$ pour tous $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$.
- L'ensemble $\mathbb{R}^2$ possède pour élément neutre pour la loi $\odot$ l'élément $(1,1)$ puisque
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a,b) \odot (1,1) = (a \times 1, b \times 1) = (a,b).$$
- La loi $\odot$ est distributive par rapport à la loi $\oplus$. En effet, pour tous (a,b), (a',b'), (a'',b'') appartenant à $\mathbb{R}^2$,
$$(a,b) \odot \Big((a',b') \oplus (a'',b'')\Big) = \Big((a,b) \odot (a',b')\Big) \oplus \Big((a,b) \odot (a'',b'')\Big),$$
$$\Big((a',b') \oplus (a'',b'')\Big) \odot (a,b) = \Big((a',b') \odot (a,b)\Big) \oplus \Big((a'',b'') \odot (a,b)\Big).$$

Ainsi, l'ensemble structuré $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ est un anneau commutatif. Pour que les deux lois $\oplus$ et $\odot$ confèrent à $\mathbb{R}^2$ une structure de corps, il reste à s'assurer de l'existence d'un symétrique pour la loi $\odot$ pour tout élément non nul de $\mathbb{R}^2$.

Existence de symétrique pour la loi $\odot$

Un élément (a,b) appartenant à $\mathbb{R}^2$, différent de $(0,0)$, est symétrisable pour la loi $\odot$ s'il existe un élément (x,y) appartenant à $\mathbb{R}^2$ vérifiant
$$(a,b) \odot (x,y) = (1,1)$$
ou, de manière équivalente (en utilisant la définition de la loi $\odot$), vérifiant
$$\begin{cases} a \times x = 1 \\ b \times y = 1 \end{cases}$$

Il est maintenant évident qu'un élément de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(a,0)$ ou de la forme $(0,b)$ ne possède pas de symétrique pour la loi $\odot$. Par conséquent, muni des deux opérations $\oplus$ et $\odot$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ ne possède pas une structure de corps commutatif. Cette première approche se solde donc par un échec.

4.1.2 Seconde approche

D'après ce qui précède, la loi $\oplus$ confère à $\mathbb{R}^2$ une structure de groupe commutatif. Conservons-la et cherchons une nouvelle loi produit. Considérons sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ la loi $\otimes$ définie par

$$(a,b) \otimes (a',b') \overset{déf.}{=} (aa' - bb', ab' + a'b)$$

pour tous $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$. Cette nouvelle loi définit une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$ (puisque $+$ et $\times$ sont elles-mêmes des lois de composition interne sur $\mathbb{R}$). Remarquons que sa définition apparaît de façon bien moins naturelle que celle de la loi $\odot$. Examinons ses propriétés.

Propriétés de la loi $\otimes$

Les propriétés suivantes se déduisent des propriétés des lois $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{R}$.

- La loi $\otimes$ est associative sur $\mathbb{R}^2$: pour tous $(a,b),(a',b'),(a'',b'') \in \mathbb{R}^2$,

$$\Big((a,b) \otimes (a',b')\Big) \otimes (a'',b'') = (a,b) \otimes \Big((a',b') \otimes (a'',b'')\Big).$$

- La loi $\otimes$ est commutative sur $\mathbb{R}^2$ car $(a,b) \otimes (a',b') = (a',b') \otimes (a,b)$ pour tous $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$.
- L'ensemble $\mathbb{R}^2$ possède un élément neutre pour la loi $\otimes$. C'est l'élément $(1,0)$ puisque $(a,b) \otimes (1,0) = (a\times 1 - b\times 0, a\times 0 + b\times 1) = (a\times 1, b\times 1) = (a,b)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- La loi $\otimes$ est distributive par rapport à la loi $\oplus$ puisque

$$(a,b) \otimes \Big((a',b') \oplus (a'',b'')\Big) = \Big((a,b) \otimes (a',b')\Big) \oplus \Big((a,b) \otimes (a'',b'')\Big),$$
$$\Big((a',b') \oplus (a'',b'')\Big) \otimes (a,b) = \Big((a',b') \otimes (a,b)\Big) \oplus \Big((a'',b'') \otimes (a,b)\Big)$$

  pour tous (a,b), (a',b'), (a'',b'') appartenant à $\mathbb{R}^2$.

Par conséquent, l'ensemble structuré $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif. Est-ce un corps ?

Existence de symétrique pour la loi $\otimes$

Un élément (a,b) appartenant à $\mathbb{R}^2$, différent de $(0,0)$, est symétrisable pour la loi $\otimes$ s'il existe un élément (x,y) appartenant à $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$(a,b) \otimes (x,y) = (1,0)$$

ou, de manière équivalente d'après la définition de la loi $\otimes$, vérifiant le système

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}.$$

On obtient une équation ne portant que sur l'inconnue x en multipliant la première équation par a, la seconde par b et en additionnant le tout. De même, on obtient une équation ne portant que sur l'inconnue y en multipliant la première équation par $-b$, la seconde par a et en additionnant le tout. Ces équations sont

$$(a^2+b^2)x = a \qquad \text{et} \qquad (a^2+b^2)y = -b.$$

Puisque $(a,b) \neq (0,0)$, on a $a^2+b^2 \neq 0$ et on déduit des deux égalités précédentes que (S) possède pour unique solution le couple $(\tilde{x},\tilde{y})$ de $\mathbb{R}^2$ où

$$\tilde{x} = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad \text{et} \qquad \tilde{y} = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Par conséquent, tout élément non nul (a,b) de $\mathbb{R}^2$ possède un unique symétrique pour la loi $\otimes$ qui est l'élément

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

On a ainsi vérifié que l'ensemble structuré $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ était un corps commutatif. Cette seconde approche se solde donc par un succès.

4.1.3 Structure de corps commutatif sur $\mathbb{R} \times \{0\}$

Considérons le sous-ensemble $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$. Si $(a,0)$ et $(a',0)$ sont deux éléments de $\mathbb{R} \times \{0\}$ alors $(a,0) \oplus (a',0)$ et $(a,0) \otimes (a',0)$ appartiennent aussi à $\mathbb{R} \times \{0\}$ puisque

$$\begin{aligned}
&(a,0) \oplus (a',0) = (a+a', 0+0) = (a+a', 0),\\
&(a,0) \otimes (a',0) = (a \times a' - 0 \times 0, a \times 0 + 0 \times a') = (a \times a', 0).
\end{aligned}$$

Par conséquent, restreintes à $\mathbb{R} \times \{0\}$, les deux lois $\oplus$ et $\otimes$ définissent des lois de composition interne sur $\mathbb{R} \times \{0\}$, que nous notons $\widetilde{\oplus}$ et $\widetilde{\otimes}$. On les appelle les *lois induites* sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ par $\oplus$ et $\otimes$. On vérifie aisément les propriétés suivantes.

- La loi induite $\widetilde{\oplus}$ est associative et commutative sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ (puisque $\oplus$ l'est sur $\mathbb{R}^2$).
- La loi induite $\widetilde{\otimes}$ est distributive par rapport à la loi induite $\widetilde{\oplus}$ (puisque $\otimes$ l'est par rapport à $\oplus$) et associative sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ (puisque $\otimes$ l'est).
- Les éléments neutres $(0,0)$ et $(1,0)$ de $\mathbb{R}^2$ pour les lois $\oplus$ et $\otimes$ appartiennent au sous-ensemble $\mathbb{R} \times \{0\}$. Ce sont donc aussi les éléments neutres de $\mathbb{R} \times \{0\}$ pour les lois induites $\widetilde{\oplus}$ et $\widetilde{\otimes}$.
- Soit $(a,0)$ un élément de $\mathbb{R} \times \{0\}$. Ses symétriques pour les lois $\oplus$ et $\otimes$ sont $(-a,0)$ et $(1/a,0)$ car

$$\begin{aligned}
&(a,0) \oplus (-a,0) = (a-a,0) = (0,0),\\
&(a,0) \otimes (1/a,0) = (a \times 1/a - 0 \times 0, a \times 0 + 0 \times 1/a) = (1,0).
\end{aligned}$$

Ils appartiennent au sous-ensemble $\mathbb{R} \times \{0\}$. Ce sont donc aussi ses éléments symétriques pour les deux lois induites $\widetilde{\oplus}$ et $\widetilde{\otimes}$.

Ainsi, l'ensemble $\mathbb{R} \times \{0\}$ muni des deux lois induites $\widetilde{\oplus}$ et $\widetilde{\otimes}$ possède aussi une structure de corps commutatif. Cette structure est induite par celle définie sur $\mathbb{R}^2$. En ce sens, on dit que $\mathbb{R} \times \{0\}$ hérite de la structure de corps définie sur $\mathbb{R}^2$, ou encore que $(\mathbb{R} \times \{0\}, \widetilde{\oplus}, \widetilde{\otimes})$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$.

Afin d'alléger les écritures, nous notons par le même symbole $\oplus$ la loi sur $\mathbb{R}^2$ et la loi qu'elle induit sur $\mathbb{R} \times \{0\}$. Même commentaire pour $\otimes$.

Injection canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$

Il existe une injection naturelle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Considérons l'application Φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(a) = (a, 0)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Il est clair que

$$\Phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

De plus, Φ est injective. En effet, considérons deux nombres réels a et a'. Si $\Phi(a) = \Phi(a')$ alors, par définition de Φ, $(a, 0) = (a', 0)$, et par conséquent $a = a'$. L'injection Φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définit ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R} \times \{0\}$.

De plus, l'application Φ transporte dans $\mathbb{R} \times \{0\}$ les opérations définies sur $\mathbb{R}$. En effet, il est équivalent d'identifier à un couple de $\mathbb{R} \times \{0\}$ le résultat d'une opération effectuée d'abord dans $\mathbb{R}$ entre $a \in \mathbb{R}$ et $a' \in \mathbb{R}$, ou d'identifier d'abord a et a' aux couples $(a, 0)$ et $(a', 0)$ puis d'effectuer l'opération dans $\mathbb{R} \times \{0\}$, puisque

$$\begin{aligned}
\Phi(a + a') &= (a + a', 0) = (a, 0) \oplus (a', 0) = \Phi(a) \oplus \Phi(a'), \\
\Phi(a \times a') &= (a \times a', 0) = (a, 0) \otimes (a', 0) = \Phi(a) \otimes \Phi(a').
\end{aligned}$$

L'application Φ transporte aussi l'élément unité puisque $\Phi(1) = (1, 0)$.

En résumé, le corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ est isomorphe par Φ au sous-corps $(\mathbb{R} \times \{0\}, \oplus, \otimes)$ de $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$.

4.2 Le corps des nombres complexes

4.2.1 Définition de l'ensemble des nombres complexes

La structure de corps commutatif de $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ donne un sens à la définition suivante (nous la devons au mathématicien William Hamilton) :

DÉFINITION 4.1 *L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $\oplus$ et $\otimes$ définies pour tous (a,b), (a',b') appartenant à $\mathbb{R}^2$ par*

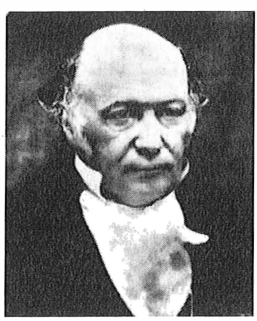
$$(a,b) \oplus (a',b') \overset{\text{déf.}}{=} (a+a', b+b')$$

$$(a,b) \otimes (a',b') \overset{\text{déf.}}{=} (aa'-bb', ab'+a'b)$$

possède une structure de corps commutatif. On le note $\mathbb{C}$ et on l'appelle le corps des nombres complexes.

Nous abandonnons les deux notations $\oplus$ et $\otimes$ au profit des deux notations $+$ et $\times$ (plus conventionnelles) ou, lorsque le contexte l'exige, $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$. Nous notons $0_{\mathbb{C}}$ l'élément zéro $(0,0)$ de $\mathbb{C}$, et $1_{\mathbb{C}}$ l'élément unité $(1,0)$ de $\mathbb{C}$.

HAMILTON, William (1805, Dublin - 1865, Dublin).



Astronome doté d'un esprit brillant (alors âgé de 16 ans, il décela une erreur dans le traité de mécanique céleste de Laplace), il devint en 1832 membre de l'Académie Royale Irlandaise. On lui doit d'importants travaux en mécanique et en optique. Hamilton inventa les quaternions (adaptation des nombres complexes à un espace tridimensionnel) appelés aussi nombres hypercomplexes. Ses travaux constituent l'un des fondements de l'algèbre moderne. Nous lui devons le terme *vecteur* (du Latin *vector* : qui transporte).

Notations et conventions

On note i l'élément $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ dit *unité imaginaire*[(1)]. On vérifie que

$$\mathrm{i}^2 = (0,1) \times_{\mathbb{C}} (0,1) = (-1,0) = -1_{\mathbb{C}}.$$

On convient, conformément à la discussion menée au paragraphe 4.1.3, d'identifier l'élément $(a,0)$ de $\mathbb{R}^2$ à l'élément a de $\mathbb{R}$. On écrira donc a au lieu de $(a,0)$. En particulier,

$$0 \overset{\text{not.}}{=} 0_{\mathbb{C}} = (0,0), \quad 1 \overset{\text{not.}}{=} 1_{\mathbb{C}} = (1,0) \quad \text{et} \quad \mathrm{i}^2 \overset{\text{not.}}{=} -1.$$

Il est important de noter que l'identification de $(a,0)$ avec a n'a de sens que parce qu'il existe une injection naturelle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. C'est l'application Φ définie au paragraphe 4.1.3. Ainsi, lorsque l'on écrit « $a = (a,0)$ », l'injection Φ

(1) Nous devons cette notation au mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783), considéré comme un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

est sous-entendue, l'écriture correcte étant $\Phi(a) = (a, 0)$. On dit aussi souvent de manière abusive que $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$ et on note $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Là encore, l'injection Φ est sous-entendue. Nous devrions écrire $\Phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$ et dire que l'on identifie $\mathbb{R}$ à une partie de $\mathbb{C}$ via l'injection canonique Φ.

Soit $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Compte tenu des conventions précédentes, nous avons

$$z \overset{déf.}{=} (a, b) = (a, 0) +_{\mathbb{C}} (0, b) = (a, 0) +_{\mathbb{C}} (0, 1) \times_{\mathbb{C}} (b, 0) \overset{not.}{=} a +_{\mathbb{C}} \mathrm{i} \times_{\mathbb{C}} b.$$

Nous adoptons la notation $z = a +_{\mathbb{C}} \mathrm{i} \times_{\mathbb{C}} b$ appelée *forme cartésienne*, plutôt que la notation $z = (a, b)$ et nous parlerons du nombre complexe z (ou du complexe z) plutôt que du couple z.

- Le réel a est appelé *partie réelle* du complexe z et il est noté $\mathcal{R}\mathrm{e}(z)$.
- Le réel b est appelé *partie imaginaire* du complexe z et il est noté $\mathcal{I}\mathrm{m}(z)$.

On peut donc écrire tout nombre complexe z sous la forme

$$z = \mathcal{R}\mathrm{e}(z) +_{\mathbb{C}} \mathrm{i} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{I}\mathrm{m}(z)$$

et cette écriture est unique. Deux nombres complexes sont égaux s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. Autrement dit, pour tous a, b, a', b' appartenant à $\mathbb{R}$,

$$a +_{\mathbb{C}} \mathrm{i} \times_{\mathbb{C}} b = a' +_{\mathbb{C}} \mathrm{i} \times_{\mathbb{C}} b' \quad \Longleftrightarrow \quad \big(a = a' \text{ et } b = b'\big).$$

DÉFINITION 4.2 *Un nombre complexe z est dit imaginaire pur si sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire si $z = \mathrm{i}b$ avec $b \in \mathbb{R}$, et on note $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.*

Afin d'alléger les écritures, nous abandonnons définitivement les deux notations indicielles $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ et nous convenons de noter $z + z'$ (respectivement $z \times z$ ou zz') l'addition (resp. la multiplication) des deux nombres complexes z et z'.

On note ainsi de la même manière les opérations dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$. Cette similitude dans les notations n'est en aucun cas gênante dans la pratique puisque les règles pour le calcul algébrique sont les mêmes dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ (ce sont deux corps commutatifs). On peut manipuler les éléments de $\mathbb{C}$ comme l'on manipule ceux de $\mathbb{R}$. On peut donc factoriser et/ou développer des expressions dans $\mathbb{C}$ comme on en a pris l'habitude dans $\mathbb{R}$, en prenant soin néanmoins de remplacer i^2 par -1 à chacune de ses apparitions dans une expression. Seule la nature des éléments que l'on manipule est différente. Par exemple,

$$z^2 + 3\mathrm{i}z - 5 + 4\mathrm{i} \overset{not.}{=} (a, b) \times_{\mathbb{C}} (a, b) +_{\mathbb{C}} (3, 0) \times_{\mathbb{C}} (0, 1) \times_{\mathbb{C}} (a, b) +_{\mathbb{C}} (-5, 4).$$

La manipulation de l'expression de gauche est moins lourde que celle de droite. Elles représentent pourtant le même nombre complexe. Seule l'écriture diffère. Remarquons que les opérations sur les nombres complexes, lorsqu'elles sont appliquées aux complexes particuliers que sont les nombres réels, redonnent les résultats connus dans $\mathbb{R}$. En ce sens, on dit que les opérations algébriques définies sur $\mathbb{C}$ prolongent celles définies sur $\mathbb{R}$.

On vérifie facilement la propriété suivante.

Proposition 4.1 *Pour tous z, z' appartenant à $\mathbb{C}$,*

$$\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z+z') = \mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) + \mathcal{R}\mathrm{e}\,(z') \quad \textit{et} \quad \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z+z') = \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) + \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z').$$

Remarque En général, $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z \times z') \neq \mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) \times \mathcal{R}\mathrm{e}\,(z')$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}\,(z \times z') \neq \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) \times \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z')$. Prenons par exemple $z = 1+\mathrm{i}$ et $z' = 2+\mathrm{i}$. On a : $z \times z' = 1+3\mathrm{i}$,

$$\underbrace{\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z \times z')}_{=1} \neq \underbrace{\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z)}_{=1} \times \underbrace{\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z')}_{=2} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathcal{I}\mathrm{m}\,(z \times z')}_{=3} \neq \underbrace{\mathcal{I}\mathrm{m}\,(z)}_{=1} \times \underbrace{\mathcal{I}\mathrm{m}\,(z')}_{=1}.$$

Conformément aux notations définies en page 70, on note, pour tout entier n non nul et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^n \overset{not.}{=} \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}_{n \text{ fois}}.$$

En particulier en prenant $n = 1$, on a $z^1 = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et on convient que $z^0 = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Puisque $\mathrm{i}^2 = -1$, on vérifie que

$$\mathrm{i}^{4n} = 1, \quad \mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4n+2} = -1, \quad \mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 4.2 *On a les formules suivantes :*

✗ $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad (z+z')^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k}.$

✗ $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \begin{cases} \dfrac{1-z^n}{1-z} & \textit{si } z \neq 1 \\ n & \textit{si } z = 1 \end{cases}$

Démonstration La première formule est celle du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$. Elle a été démontrée dans le cas général d'un anneau pour deux éléments z et z' tels que $z \times z' = z' \times z$ (voir la proposition 2.12, page 77). Elle est donc vraie pour n'importe quel couple d'éléments d'un corps commutatif, par exemple $\mathbb{C}$. Montrons la deuxième formule. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$(1-z) \times (1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) = 1 - z^n. \tag{1}$$

Cette égalité a été établie au chapitre 2 dans le cas général d'un anneau non nécessairement commutatif (voir l'exercice 5, page 75). Si $z \neq 1$ alors le nombre complexe $1-z$ est inversible (car il est non nul). Multiplions alors l'égalité (1) par $(1-z)^{-1}$. On obtient :

$$1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}.$$

Si maintenant $z=1$, on obtient directement $1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}=n$. □

4.2.2 Conjugaison d'un nombre complexe

DÉFINITION 4.3 *On appelle conjugué du nombre complexe $z=a+ib$ avec a et b deux réels, le nombre complexe, noté $\overline{z}$, de partie réelle a et de partie imaginaire $-b$.*

Autrement dit, si $z=a+ib$ avec a et b dans $\mathbb{R}$ alors

$$\overline{z}=a-ib.$$

Par exemple, $\overline{1+2i}=1-2i$, $\overline{i}=-i$, $\overline{4}=4$.

PROPOSITION 4.3 *On a les propriétés suivantes.*

- ✗ $\forall z\in\mathbb{C}\quad z\times\overline{z}=\big(\mathcal{R}\mathrm{e}(z)\big)^2+\big(\mathcal{I}\mathrm{m}(z)\big)^2$.
- ✗ $\forall z\in\mathbb{C}\quad \mathcal{R}\mathrm{e}\,(z)=(z+\overline{z})/2$ *et* $\mathcal{I}\mathrm{m}\,(z)=(z-\overline{z})/2i$.
- ✗ $\forall z\in\mathbb{C}\quad \overline{\overline{z}}=z$.
- ✗ $\forall z\in\mathbb{C}\quad \big(z\in\mathbb{R}\iff z=\overline{z}\big)$.
- ✗ $\forall z\in\mathbb{C}\quad \big(z\in i\mathbb{R}\iff \overline{z}=-z\big)$.
- ✗ $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2\quad \overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'},\quad \overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'},\quad \overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.
- ✗ $\forall(z,z')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*\quad \overline{(z/z')}=\overline{z}/\overline{z'}$.

Démonstration La démonstration de chacune des propriétés s'effectue en revenant aux définitions. La rédaction est laissée en exercice. □

EXERCICE 1 Soit j le nombre complexe défini par $j\overset{déf.}{=}-1/2+i\sqrt{3}/2$.
1 - Montrer que $\overline{j}=\dfrac{1}{j}=j^2$.
2 - En déduire que $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$.

4.3 Module et argument

4.3.1 Module d'un nombre complexe

Le produit d'un nombre complexe z et de son conjugué $\overline{z}$ est un nombre réel positif ou nul puisque

$$z\times\overline{z}=\big(\mathcal{R}\mathrm{e}(z)\big)^2+\big(\mathcal{I}\mathrm{m}(z)\big)^2\geqslant 0$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, ce qui nous autorise à prendre la racine carrée de $z \times \overline{z}$. La définition suivante a alors un sens.

DÉFINITION 4.4 *Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle module de z et on note $|z|$, le nombre réel positif ou nul défini par*

$$|z| \overset{déf.}{=} \sqrt{z \times \overline{z}} = \sqrt{\big(\mathcal{R}\mathrm{e}(z)\big)^2 + \big(\mathcal{I}\mathrm{m}(z)\big)^2}.$$

La notation est cohérente avec celle utilisée pour désigner la valeur absolue d'un nombre réel puisque si un nombre complexe z est réel, c'est-à-dire si $z = a$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors son module est donné par

$$|z| = \sqrt{a^2}$$

et il est égal à la valeur absolue de a. On dit que le module est un prolongement à $\mathbb{C}$ de la valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$. D'ailleurs, certaines des propriétés (elles sont données ci-après) du module d'un nombre complexe sont des extensions des propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel.

PROPOSITION 4.4 *On a les propriétés suivantes :*

✗ $\forall z \in \mathbb{C} \quad \big(|z| = 0 \iff z = 0\big)$.

✗ $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\overline{z}| = |z|$.

✗ $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\mathcal{R}\mathrm{e}(z)| \leqslant |z|$ *et* $|\mathcal{I}\mathrm{m}(z)| \leqslant |z|$.

✗ $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z \times z'| = |z| \times |z'|$.

✗ $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \quad |z/z'| = |z|/|z'|$.

✗ $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$. *(première inégalité triangulaire)*

✗ $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|$. *(deuxième inégalité triangulaire)*

Démonstration Les démonstrations des trois premières propriétés sont immédiates. Leur rédaction est laissée en exercice. Montrons la quatrième propriété. Pour montrer que les deux nombres réels positifs $|z \times z'|$ et $|z| \times |z'|$ sont égaux, il suffit de montrer que leurs carrés le sont. On a :

$$|z \times z'|^2 = \big(z \times z'\big)\big(\overline{z \times z'}\big) = \big(z \times \overline{z}\,\big) \times \big(z' \times \overline{z'}\big) = |z|^2 \times |z'|^2.$$

On procède de la même manière pour montrer la cinquième propriété. Démontrons la première inégalité triangulaire. Soient z et z' dans $\mathbb{C}$. On a :

$$|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'}.$$

Remarquons que $z'\overline{z}$ est le conjugué de $\overline{z'}z$. D'où, en utilisant la deuxième propriété de la proposition 4.3, $z\overline{z'} + z'\overline{z} = 2\mathcal{R}\mathrm{e}(z \times \overline{z'})$. On obtient ainsi :

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\mathcal{R}\mathrm{e}(z \times \overline{z'}) + |z'|^2. \tag{2}$$

Or, en utilisant successivement la troisième, la quatrième et la deuxième propriété de la proposition 4.4,

$$\mathcal{R}\mathrm{e}(z \times \overline{z'}) \leqslant |z \times \overline{z'}| = |z| \times |\overline{z'}| = |z| \times |z'|. \tag{3}$$

En regroupant (2) et (3), on obtient finalement l'inégalité :

$$|z + z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = \big(|z| + |z'|\big)^2,$$

d'où

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|,$$

ce qui termine la démonstration de la première inégalité triangulaire.

Montrons à présent la deuxième inégalité triangulaire en raisonnant par disjonction de cas. Soient z et z' deux nombres complexes. Supposons dans un premier temps $|z| \geqslant |z'|$. Alors, $\big||z| - |z'|\big| = |z| - |z'|$ et on a :

$$|z| - |z'| = |z - z' + z'| - |z'| \leqslant |z - z'| + |z'| - |z'| = |z - z'|$$

où on a utilisé la première inégalité triangulaire. Supposons maintenant $|z| < |z'|$. Alors, $\big||z| - |z'|\big| = -|z| + |z'|$ et on a :

$$-|z| + |z'| = -|z| + |z' - z + z| \leqslant -|z| + |z' - z| + |z| = |z' - z| = |z - z'|$$

où on a encore utilisé la première inégalité triangulaire. □

Remarque Il est à noter que l'application $(z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto |z - z'| \in \mathbb{R}_+$ définit une distance sur $\mathbb{C}$. La notion de distance sur un ensemble est définie à la page 109.

4.3.2 Argument d'un nombre complexe

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe non nul, avec x et y réels. On a alors : $|z|^2 = x^2 + y^2 \neq 0$ et

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \mathrm{i}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

ou encore, $z = |z|\,(\alpha + \mathrm{i}\beta)$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Cela conduit naturellement à la définition suivante.

DÉFINITION 4.5 *Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe non nul avec x et y réels. On appelle* argument *de z et on note $\mathrm{Arg}(z)$, tout nombre réel vérifiant :*

$$\cos\big(\mathrm{Arg}(z)\big) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \textit{et} \quad \sin\big(\mathrm{Arg}(z)\big) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Parmi ces réels (il y en a une infinité), un seul appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On l'appelle argument principal. *Si on le note φ, alors tout argument de z vérifie :*

$$\mathrm{Arg}(z) = \varphi + 2k\pi \quad \textit{avec} \quad k \in \mathbb{Z},$$

ce que l'on note : $\mathrm{Arg}(z) \equiv \varphi\ [2\pi]$, et on dit que $\mathrm{Arg}(z)$ est équivalent (ou congru) à φ modulo 2π.[(2)]

Contrairement au module qui est défini pour n'importe quel nombre complexe (nul ou non nul), l'argument du nombre complexe nul n'est pas défini. On retiendra les arguments suivants :

$$\mathrm{Arg}(1) \equiv 0 \ \ [2\pi], \quad \mathrm{Arg}(\mathrm{i}) \equiv \frac{\pi}{2} \ \ [2\pi],$$

$$\mathrm{Arg}(-1) \equiv \pi \ \ [2\pi], \quad \mathrm{Arg}(-\mathrm{i}) \equiv -\frac{\pi}{2} \ \ [2\pi].$$

On peut alors écrire tout nombre complexe z non nul sous la forme suivante appelée *écriture trigonométrique* ou *forme trigonométrique* :[3]

$$z = |z|\Big[\cos\big(\mathrm{Arg}(z)\big) + \mathrm{i}\sin\big(\mathrm{Arg}(z)\big)\Big].$$

On vérifie qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres complexes non nuls soient égaux est qu'ils aient même module et même argument (modulo 2π). Autrement dit, pour tous z, z' appartenant à $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$z = z' \iff \begin{cases} |z'| = |z| \\ \mathrm{Arg}(z') = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi \ \ \text{avec} \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Il est immédiat de vérifier les deux caractérisations suivantes.

- Un nombre complexe non nul z est réel si et seulement si,

$$\mathrm{Arg}(z) \equiv 0 \ \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \mathrm{Arg}(z) \equiv \pi \ \ [2\pi].$$

- Un nombre complexe non nul z est imaginaire pur si et seulement si,

$$\mathrm{Arg}(z) \equiv \frac{\pi}{2} \ \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \mathrm{Arg}(z) \equiv -\frac{\pi}{2} \ \ [2\pi].$$

Proposition 4.5 *On a les propriétés suivantes.*

✗ $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \mathrm{Arg}(\overline{z}) \equiv -\mathrm{Arg}(z) \ \ [2\pi]$.

✗ $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \quad \mathrm{Arg}(z \times z') \equiv \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z') \ \ [2\pi]$.

✗ $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \quad \mathrm{Arg}(z/z') \equiv \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z') \ \ [2\pi]$.

✗ $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad \mathrm{Arg}(z^n) \equiv n \times \mathrm{Arg}(z) \ \ [2\pi]$.

---

[2] L'argument d'un nombre complexe est en fait une classe d'équivalence (c'est un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$). Comme c'est souvent le cas lorsque l'on manipule des classes d'équivalence, on confond (abusivement) la classe avec un de ses représentants (on les note alors de la même manière) et on dit qu'un argument d'un nombre complexe est défini modulo 2π.

[3] Il est à noter que, dans certains cas, le passage de l'écriture cartésienne à l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe peut s'avérer difficile. En effet, si le calcul de son module ne pose aucune difficulté, en revanche, son argument ne s'obtient pas toujours de manière explicite.

Démonstration Chacune des démonstrations s'effectue en revenant à la définition de l'argument d'un nombre complexe. Vérifions la deuxième propriété. Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Soient $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta \equiv \mathrm{Arg}(z)\ [2\pi]$ et $z' = r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$ avec $r' = |z'|$ et $\theta' \equiv \mathrm{Arg}(z')\ [2\pi]$. On a :

$$\begin{aligned} z \times z' &= rr'\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big)\big(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta'\big) \\ &= rr'\Big[\big(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\big) + \mathrm{i}\big(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\big)\Big]. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a (voir le formulaire de trigonométrie, page 157)

$$\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' = \cos(\theta+\theta'), \quad \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' = \sin(\theta+\theta').$$

On obtient ainsi :

$$z \times z' = rr'\Big[\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')\Big].$$

D'où $\mathrm{Arg}(z\times z') \equiv \theta+\theta'\ [2\pi]$ puisque $rr' > 0$, et, par transitivité de la relation d'équivalence, $\mathrm{Arg}(z\times z') \equiv \mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(z')\ [2\pi]$. La démonstration des autres propriétés est laissée en exercice. □

4.3.3 Notation exponentielle complexe et forme polaire

Il est pratique d'utiliser pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ la notation exponentielle complexe

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \overset{not.}{=} \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Tout nombre complexe z non nul peut alors s'écrire sous la forme suivante appelée *écriture polaire* ou encore *forme polaire* :

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}(z)}$$

avec $|z| \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{Arg}(z) \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.6 *On a les propriétés suivantes.*

- ✗ $\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$ *et* $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$ *(formules d'Euler).*
- ✗ $\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \big|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big| = 1, \quad \mathrm{Arg}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) \equiv \theta\ [2\pi], \quad \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}.$
- ✗ $\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$ *et* $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}.$

Démonstration Pour chacune des propriétés, la démonstration utilise les formules de trigonométrie données plus loin (laissée en exercice). □

La notation exponentielle complexe est cohérente avec la notation de l'exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ puisque la propriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ est une extension à $i\mathbb{R}$ de la propriété $e^x \times e^{x'} = e^{x+x'}$ définie sur $\mathbb{R}$. En particulier, en prenant $\theta = \theta'$, l'égalité $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ s'écrit sous la forme trigonométrique suivante :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta).$$

Plus généralement, on a la formule suivante, dite de Moivre, du nom du mathématicien anglais Abraham de Moivre (1667-1754) :[4]

Corollaire 4.1 (Formule de Moivre)

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Démonstration En utilisant la notation exponentielle, on doit donc montrer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$. Supposons d'abord $n \in \mathbb{N}$. La démonstration s'effectue par récurrence sur n. La propriété est immédiate au rang 0 puisque nous avons, d'une part, $\left(e^{i\theta}\right)^0 = 1$ (par convention) pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et, d'autre part, $e^{i0\theta} = e^{i0} = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on ait $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (c'est notre hypothèse de récurrence) et montrons que

$$\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = e^{i(n+1)\theta}$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Écrivons $\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = \left(e^{i\theta}\right)^n e^{i\theta}$. Utilisant alors l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = e^{in\theta}e^{i\theta}.$$

Or, d'après la troisième propriété de la proposition 4.6, $e^{in\theta}e^{i\theta} = e^{i(n\theta+\theta)}$. On a donc :

$$\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = e^{i(n+1)\theta},$$

ce qui termine la démonstration pour $n \in \mathbb{N}$. Supposons à présent $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Le nombre complexe $e^{i\theta}$ est non nul puisqu'il est de module égal à 1. Ainsi,

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = \frac{1}{\left(e^{i\theta}\right)^{-n}} = \frac{1}{e^{-in\theta}} = e^{in\theta}$$

où on a utilisé l'égalité $\left(e^{i\theta}\right)^{-n} = e^{-in\theta}$ puisque $-n$ est strictement positif, et le fait que $1/e^{-in\theta} = e^{in\theta}$ d'après la deuxième propriété de la proposition 4.6. □

[4] En fait, Abraham de Moivre était français d'origine (né à Vitry-le-François à 170 km à l'est de Paris) mais il fut contraint de se réfugier en Angleterre, en 1685, à la suite de la révocation de l'Édit de Nantes.

Remarque Soit θ un réel. Il est important de savoir retrouver l'égalité

$$\boxed{e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}.} \tag{4}$$

Elle s'obtient en utilisant la factorisation $1 = e^{i\theta/2}e^{-i\theta/2}$. En effet,

$$e^{i\theta} + 1 = e^{i\theta/2}e^{i\theta/2} + e^{i\theta/2}e^{-i\theta/2} = \left(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}\right)e^{i\theta/2} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$$

car $\cos(\theta/2) = (e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})/2$ (première formule d'Euler). En procédant de la même manière, on a :

$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta/2}e^{i\theta/2} - e^{i\theta/2}e^{-i\theta/2} = \left(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}\right)e^{i\theta/2} = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$$

car $\sin(\theta/2) = (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})/(2i)$ (deuxième formule d'Euler). Puisque $i = e^{i\pi/2}$, on obtient finalement l'égalité

$$\boxed{e^{i\theta} - 1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i(\theta+\pi)/2}.} \tag{5}$$

Soient θ et φ deux réels. En utilisant les deux décompostions suivantes :

$$\theta = \frac{\theta+\varphi}{2} + \frac{\theta-\varphi}{2} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\theta+\varphi}{2} - \frac{\theta-\varphi}{2},$$

on obtient :

$$\boxed{e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) e^{i(\theta+\varphi)/2}.} \tag{6}$$

Lorsque l'on écrit un nombre complexe z sous la forme $r\,e^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la forme obtenue n'est pas nécessairement la forme polaire de z. C'est le cas si r est positif. En revanche, si r est négatif, alors $-r \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$re^{i\theta} = -(-r)e^{i\theta} = (-r)e^{i\pi}e^{i\theta}$$

car $e^{i\pi} = -1$. L'écriture polaire de z est alors $(-r)e^{i(\theta+\pi)}$.

Par exemple, l'écriture polaire du nombre complexe $z = e^{i\theta} + 1$ se déduit de l'égalité (4) en discutant sur le signe du terme $\cos(\theta/2)$:

- Si $\cos(\theta/2) > 0$, c'est-à-dire si $\theta \in]-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $|z| = 2\cos(\theta/2)$ et $\operatorname{Arg} z \equiv \theta/2\ [2\pi]$.
- Si $\cos(\theta/2) < 0$, c'est-à-dire si $\theta \in]\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $|z| = -2\cos(\theta/2)$ et $\operatorname{Arg} z \equiv \theta/2 + \pi\ [2\pi]$.

Une discussion analogue s'impose si l'on désire obtenir les formes polaires des nombres complexes donnés par (5) et (6).

4.3.4 Représentation géométrique

En rapportant le plan euclidien $\mathcal{P}$ au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on associe au nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels, le point M du plan $\mathcal{P}$, d'abscisse x et d'ordonnée y par rapport au repère $\mathcal{R}$. Le plan $\mathcal{P}$ est alors appelé *plan complexe* ou *diagramme d'Argand* du nom du mathématicien français (mais suisse d'origine) Jean-Robert Argand (né en 1768 à Genève, décédé en 1822 à Paris). À chaque nombre complexe correspond un point et un seul du plan complexe et, réciproquement, à chaque point du plan complexe correspond un nombre complexe et un seul.

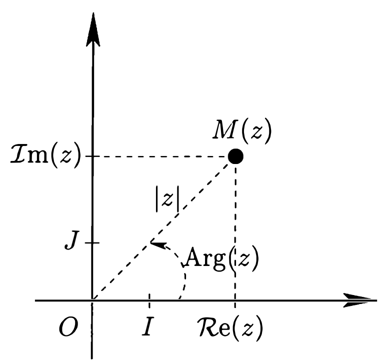


Fig. 1 Représentation du nombre complexe z, de module $|z|$ et d'argument $\mathrm{Arg}(z)$, dans le plan complexe.

Soit M le point du plan $\mathcal{P}$ associé au nombre complexe $z \in \mathbb{C}$. Le complexe z est appelé l'*affixe* du point M. De plus, $|z|$ représente la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et $\mathrm{Arg}(z)$ représente la mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{IOM}$, c'est-à-dire de l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe des abscisses. Réciproquement, le point M est appelé l'*image* du complexe z, ce que l'on note : $M(z)$. L'axe des abscisses représente l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On l'appelle l'*axe réel*. L'image du nombre complexe 1 est le point I de coordonnées $(1, 0)$ dans le repère $\mathcal{R}$. L'axe des ordonnées représente l'ensemble $\mathrm{i}\mathbb{R}$ des imaginaires purs. On l'appelle l'*axe imaginaire*. L'image de l'unité imaginaire i est le point J de coordonnées $(0, 1)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Soient M et M' deux points du plan $\mathcal{P}$ d'affixes respectives $z \neq 0$ et $z' \neq 0$. On a les propriétés suivantes (voir la figure 2).

- Les points M et M' sont symétriques par rapport au point O si et seulement si, $z' = -z$ ou, de manière équivalente, $|z'| = |z|$ et $\mathrm{Arg}(z') \equiv \mathrm{Arg}(z) + \pi\ [2\pi]$.
- Les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe réel si et seulement si, $z' = \overline{z}$ ou, de manière équivalente, $|z'| = |z|$ et $\mathrm{Arg}(z') \equiv -\mathrm{Arg}(z)\ [2\pi]$.

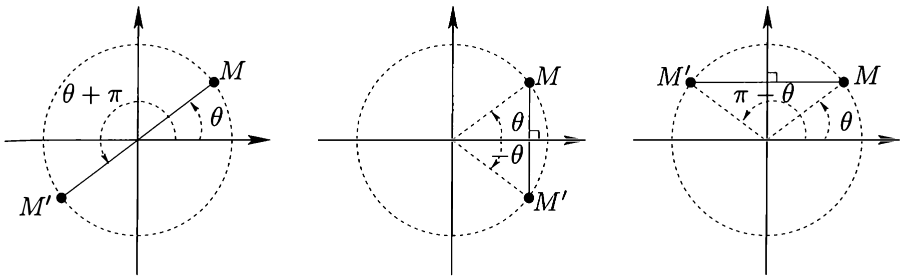


Fig. 2 Points symétriques par rapport à l'origine (dessin de gauche), par rapport à l'axe réel (dessin du centre), par rapport à l'axe imaginaire (dessin de droite).

– Les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire si et seulement si, $z' = -\overline{z}$ ou, de manière équivalente, si $|z'| = |z|$ et $\operatorname{Arg}(z') \equiv \pi - \operatorname{Arg}(z)\ [2\pi]$.

4.4 Racines d'un nombre complexe

4.4.1 Racines deuxièmes d'un nombre complexe

DÉFINITION 4.6 *Soient a et b deux réels. On appelle racine deuxième du nombre complexe $a + \mathrm{i}b$ tout nombre complexe z vérifiant :*

$$z^2 = a + \mathrm{i}b.$$

Cherchons les racines deuxièmes du nombre complexe $Z = a + \mathrm{i}b$.

Supposons $Z = 0$. Rappelons que $\mathbb{C}$ ne possède pas de diviseur de zéro (puisque c'est un corps). Ainsi, l'unique racine deuxième de 0 est 0.

Supposons désormais $Z \neq 0$. Considérons dans un premier temps le cas où $b = 0$, c'est-à-dire le cas où $Z = a$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ (le cas où $Z = 0$ a déjà été traité). Considérons les deux cas : $a > 0$ et $a < 0$.

– si $a > 0$ alors les racines deuxièmes z_1 et z_2 du nombre réel positif a sont la racine carrée de a, $z_1 = \sqrt{a}$, et son opposé, $z_2 = -\sqrt{a}$. On a donc : $z_1 = -z_2$ et $z_1 \neq z_2$.

– si $a < 0$ alors $z_1 = \mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $z_2 = -\mathrm{i}\sqrt{-a}$ sont les deux racines deuxièmes de Z. En effet,

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{i}\sqrt{-a}\right) \times \left(\mathrm{i}\sqrt{-a}\right) &= \mathrm{i}^2 \times \left(\sqrt{-a}\right)^2 = -(-a) = a,\\
\left(-\mathrm{i}\sqrt{-a}\right) \times \left(-\mathrm{i}\sqrt{-a}\right) &= (-\mathrm{i})^2 \times \left(\sqrt{-a}\right)^2 = -(-a) = a.
\end{aligned}$$

On a encore : $z_1 = -z_2$ et $z_1 \neq z_2$.

Considérons maintenant le cas où $b \neq 0$, c'est-à-dire le cas où $Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et recherchons les racines deuxièmes de Z sous la forme $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y désignent deux réels. On a les équivalences suivantes :

$$z^2 = Z \iff (x + \mathrm{i}y)^2 = a + \mathrm{i}b \iff x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = a + \mathrm{i}b.$$

En considérant le module, on peut aussi écrire : $|z^2| = |z|^2 = |Z|$, c'est-à-dire :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

car $|z|^2 = x^2 + y^2$ et $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On obtient alors le système de trois équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{array}\right. .$$

On déduit facilement de la première égalité et de la troisième égalité :

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right).$$

Posons alors : $\alpha = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)$ et $\beta = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)$. Les deux réels α et β ainsi définis sont positifs puisque $x^2 = \alpha$ et $y^2 = \beta$. On en déduit :

$$x = \pm\sqrt{\alpha} \quad \text{et} \quad y = \pm\sqrt{\beta}.$$

Il y a donc quatre solutions envisageables qui sont les quatre couples suivants : $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$, $(-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$, $(\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\beta})$ et $(-\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\beta})$. Il reste à satisfaire la deuxième égalité ($2xy = b$). On vérifie que l'on a :

$$2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} = \sqrt{b^2} = |b|.$$

Considérons les cas : $b > 0$ et $b < 0$ (le cas où $b = 0$ a déjà été traité).

- Si $b > 0$ (c'est-à-dire si $|b| = b$) alors $2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = b$. Par conséquent, seuls les deux couples $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ et $(-\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\beta})$ vérifient la deuxième équation du système. Les racines deuxièmes de Z sont donc :
$$z_1 = \sqrt{\alpha} + \mathrm{i}\sqrt{\beta} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{\alpha} - \mathrm{i}\sqrt{\beta}.$$
- Si $b < 0$ (c'est-à-dire si $|b| = -b$) alors $2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = -b$. Ce sont cette fois-ci les deux couples $(\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\beta})$ et $(-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ qui vérifient la deuxième équation du système. Les racines deuxièmes de Z sont donc :
$$z_1 = \sqrt{\alpha} - \mathrm{i}\sqrt{\beta} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{\alpha} + \mathrm{i}\sqrt{\beta}.$$

Dans les deux cas, $z_1 = -z_2$ et $z_1 \neq z_2$. On a démontré la proposition suivante.

Proposition 4.7 *Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines deuxièmes distinctes et opposées l'une de l'autre.*

Remarques

1. Nous verrons au paragraphe 4.4.3 (voir la remarque page 154) une méthode rapide permettant de trouver les formes polaires des deux racines deuxièmes d'un nombre complexe lorsque ce dernier sera lui-même écrit sous forme polaire.

2. Les racines deuxièmes d'un nombre complexe sont aussi appelées racines carrées de ce nombre complexe. Pour signifier que z_1 et z_2 sont les racines carrées d'un nombre complexe Z, nous n'utiliserons pas le symbole $\sqrt{\ }$ mais nous écrirons plutôt que z_1 et z_2 vérifient les égalités :

$$(z_1)^2 = Z \qquad \text{et} \qquad (z_2)^2 = Z.$$

En effet, conformément à la proposition 3.11 (donnée en page 111), nous réservons l'usage du symbole $\sqrt{\ }$ à la représentation de l'unique racine carrée positive (ou nulle) d'un nombre réel positif (ou nul). Nous l'utiliserons donc dans le cas où le complexe Z est un nombre réel positif pour représenter, parmi les deux racines deuxièmes, celle qui est positive, l'autre s'écrivant comme son opposé.

Exemples

1. La méthode générale permettant de calculer les racines deuxièmes d'un nombre complexe est celle qui est présentée en préambule à la proposition 4.7. Nous l'appliquons pour calculer les racines deuxièmes de $-3 - 4\mathrm{i}$. Nous les recherchons sous la forme cartésienne $x + \mathrm{i}y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires dans l'égalité

$$(x + \mathrm{i}y)^2 = -3 - 4\mathrm{i},$$

et en considérant les modules, on obtient le système de trois équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \end{cases}$$

dont on déduit $x^2 = 1$ et $y^2 = 4$, d'où $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$ et $y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Parmi les quatre couples $(1, 2)$, $(-1, 2)$, $(1, -2)$ et $(-1, -2)$, seuls les couples $(-1, 2)$ et $(1, -2)$ vérifient l'égalité $2xy = -4$. Les racines deuxièmes de $-3 - 4\mathrm{i}$ sont donc les deux nombres complexes $z_1 = -1 + 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - 2\mathrm{i}$. Elles sont opposées l'une de l'autre.

2. L'obtention des racines deuxièmes de -16 est immédiate car -16 est un nombre réel négatif. Ses racines deuxièmes sont les deux nombres imaginaires purs $z_1 = \mathrm{i}\sqrt{-(-16)} = 4\mathrm{i}$ et $z_2 = -\mathrm{i}\sqrt{-(-16)} = -4\mathrm{i}$. On a : $z_2 = -z_1$.

3. De même, l'obtention des racines deuxièmes du nombre réel positif 4 est immédiate. Ses racines deuxièmes sont les deux nombres réels $z_1 = \sqrt{4} = 2$ et $z_2 = -\sqrt{4} = -2$. On a encore : $z_2 = -z_1$.

Remarque Comme cela a été illustré dans les deux derniers exemples, le calcul des racines deuxièmes d'un nombre réel (qu'il soit positif ou négatif) est

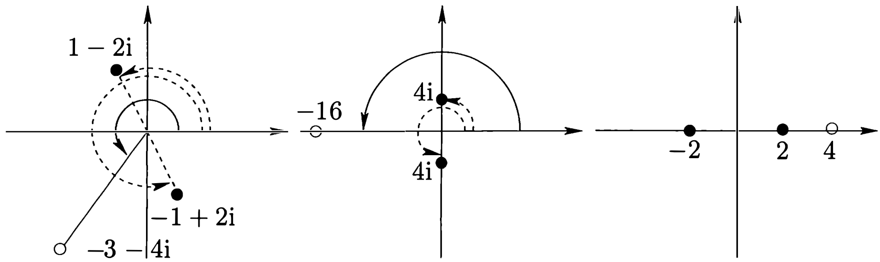


Fig. 3 Représentation dans le plan complexe des points d'affixe z (par des disques noirs « • ») et des points d'affixe Z (par des disques blancs « ∘ ») où $z^2 = Z$ avec $Z = -3 - 4i$ (dessin de gauche), $Z = -16$ (dessin du centre), $Z = 4$ (dessin de droite).

immédiat puisqu'il ne nécessite pas la résolution d'un système de trois équations comme dans le premier exemple. Toutefois, un calcul analogue à celui mené dans le premier exemple, bien que lourd et inutile dans le cas présent, nous conduit au même résultat. Par exemple, pour calculer les deux racines deuxièmes de -16, on peut résoudre le système de trois équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -16 \\ 2xy = 0 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-16)^2} = 16 \end{cases}$$

dont on déduit $x^2 = 0$ et $y^2 = 16$, d'où $x = 0$ et $y = \pm\sqrt{16} = \pm 4$. Il n'y a cette fois-ci que deux couples $(0, 4)$ et $(0, -4)$. Ils vérifient tous les deux l'égalité $2xy = 0$. On retrouve donc bien que les racines deuxièmes de -16 sont $z_1 = 4\mathrm{i}$ et $z_2 = -4\mathrm{i}$.

4.4.2 Calcul algébrique des racines d'un trinôme

On s'intéresse à présent à la résolution de l'équation du second degré

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{7}$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et où a, b et c sont des complexes fixés, avec $a \neq 0$. Toute solution sera qualifiée de *racine du trinôme* $az^2 + bz + c$. On commence par écrire le trinôme sous sa *forme canonique* :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$. On l'appelle le *discriminant* du trinôme (c'est un nombre complexe). En posant $Z = z + b/(2a)$, (7) s'écrit :

$$a\left[Z^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

ou encore, puisque $a \neq 0$,

$$Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Le problème de la résolution dans $\mathbb{C}$ de (7) se ramène ainsi au calcul des deux racines deuxièmes du nombre complexe Δ, c'est-à-dire au calcul des deux nombres complexes δ et δ' vérifiant : $\delta^2 = (\delta')^2 = \Delta$. Bien sûr, $\delta = \delta' = 0$ si $\Delta = 0$. D'après la proposition 4.7, le calcul d'une seule racine deuxième δ de Δ est suffisant car l'autre racine deuxième, δ', est l'opposé de δ. Les solutions de l'équation $Z^2 = \Delta/4a^2$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ sont :

$$Z_1 = \frac{\delta}{2a} \quad \text{et} \quad Z_2 = -\frac{\delta}{2a}.$$

On en déduit alors les deux solutions de (7). Ce sont les deux complexes

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Ces deux solutions sont distinctes si $\Delta \neq 0$ et égales si $\Delta = 0$. On a d'une part :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} + \frac{-b-\delta}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

D'autre part, on a :

$$z_1 \times z_2 = \left(\frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(\frac{-b-\delta}{2a}\right) = \frac{b^2-\delta^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2}.$$

Or, $\Delta = b^2 - 4ac$. Ainsi,

$$z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}.$$

Les relations $z_1 + z_2 = -b/a$ et $z_1 \times z_2 = c/a$ sont connues sous le nom de formules de Viète. En notant $s = z_1 + z_2$ et $p = z_1 \times z_2$, on obtient la factorisation suivante :

$$az^2 + bz + c = a\big(z^2 - sz + p\big).$$

Proposition 4.8 *Toute équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ de la forme*

$$az^2 + bz + c = 0$$

avec a, b et c appartenant à $\mathbb{C}$, $a \neq 0$, possède pour solution les nombres complexes z_1 et z_2 définis par

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

où δ est une racine deuxième du nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ (appelé le discriminant du trinôme az^2+bz+c). Si $\Delta \neq 0$ alors $z_1 \neq z_2$ (les racines sont distinctes) et si $\Delta = 0$ alors $z_1 = z_2$ (on dit que les racines sont confondues). De plus,

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}.$$

Lorsque les deux racines du trinôme $az^2 + bz + c$ sont confondues, on dit que le trinôme possède une racine double. On dira aussi que la racine est de multiplicité 2.

Remarquons que s'il a été établi que les deux racines deuxièmes d'un nombre complexe non nul étaient opposées, il n'y a en revanche aucune raison pour qu'en général les racines d'un trinôme $az^2 + bz + c$ le soient, comme l'illustrent les exemples suivants.

Exemples

1. Le discriminant de l'équation $z^2 - 3z + 3 + \mathrm{i} = 0$ est le nombre complexe

$$\Delta = (-3)^2 - 4(3+\mathrm{i}) = -3 - 4\mathrm{i}.$$

Comme nous l'avons vu précédemment, une de ses deux racines deuxièmes est le nombre complexe $\delta = -1 + 2\mathrm{i}$ car $(-1 + 2\mathrm{i})^2 = -3 - 4\mathrm{i}$. Les deux solutions de l'équation $z^2 - 3z + 3 + \mathrm{i} = 0$ s'écrivent ainsi :

$$z_1 = \frac{3 + (-1 + 2\mathrm{i})}{2} = 1 + \mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3 - (-1 + 2\mathrm{i})}{2} = 2 - \mathrm{i}.$$

2. Soit l'équation du second degré à coefficients réels $z^2 + 2z + 5 = 0$. Une des deux racines deuxièmes du discriminant $\Delta = -16$ est le nombre complexe imaginaire pur $\delta = 4\mathrm{i}$ car $(4\mathrm{i})^2 = -16$. Les solutions de $z^2 + 2z + 5 = 0$ s'écrivent :

$$z_1 = \frac{-2 + 4\mathrm{i}}{2} = -1 + 2\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-2 - 4\mathrm{i}}{2} = -1 - 2\mathrm{i}.$$

On remarque que $z_2 = \overline{z_1}$. Nous verrons au chapitre 6 que cela vient du fait que l'équation considérée est à coefficients réels (voir la proposition 6.9, page 252).

EXERCICE 2

1 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(3 + \mathrm{i})z^2 - (8 + 6\mathrm{i})z + 25 + 5\mathrm{i} = 0$.

2 - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\text{(E)} \quad z^3 - (5 + 3\mathrm{i})z^2 + (5 + 8\mathrm{i})z - 1 - 5\mathrm{i} = 0.$$

Trouver une racine évidente α de (E). En déduire a, b, c tels que

$$z^3 - (5 + 3\mathrm{i})z^2 + (5 + 8\mathrm{i})z - 1 - 5\mathrm{i} = (z - \alpha)(az^2 + bz + c).$$

Résoudre complètement (E).

4.4.3 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

DÉFINITION 4.7 *Soient a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n-ième du nombre complexe $a + \mathrm{i}b$ tout nombre complexe z vérifiant :*

$$z^n = a + \mathrm{i}b.$$

On retrouve pour $n = 2$ la définition d'une racine deuxième ou *racine carrée*. Une racine troisième est aussi appelée *racine cubique*. En particulier, on appelle *racine n-ième de l'unité* tout nombre complexe z vérifiant :

$$z^n = 1.$$

De toute évidence, le nombre 1 est racine n-ième de l'unité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, si n est pair alors -1 est aussi racine n-ième de l'unité puisque si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ alors

$$(-1)^n = (-1)^{2p} = \big((-1)^2\big)^p = 1^p = 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons les racines n-ièmes du nombre complexe $Z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels. Si Z est nul alors l'unique racine n-ième est 0. Supposons Z non nul, c'est-à-dire $(a, b) \neq (0, 0)$. Nous commençons par écrire Z sous forme polaire : $Z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Notons z une racine n-ième de Z et considérons sa forme polaire : $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Chercher $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = Z$ équivaut à chercher le couple $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que

$$\big(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\big)^n = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Suivant la formule de Moivre, $(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad & \Longleftrightarrow \quad \Big(r^n = \rho \quad \text{et} \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \ \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}\Big) \\ & \Longleftrightarrow \quad \left(r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \ \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}\right). \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.11 (voir page 111) le nombre réel strictement positif r est déterminé de manière unique puisque ρ est un nombre réel strictement positif. Les racines n-ièmes du nombre complexe non nul $Z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ s'écrivent :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Leur module est $\sqrt[n]{\rho}$. Il est indépendant de l'indice k. De plus, si k appartient à $\{0, \ldots, n-1\}$ alors, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2(k+\ell n)\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2(k+\ell n)\pi}{n}\right)\right] \\ & = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2\ell\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2\ell\pi\right)\right] \\ & = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

On a ainsi vérifié que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$\forall \ell \in \mathbb{Z} \quad z_{k+\ell n} = z_k,$$

ce qui montre que les racines n-ièmes de $Z = \rho e^{i\theta}$ sont en nombre fini : il y a en effet n racines distinctes les unes des autres. Ce sont les complexes $z_0, \ldots, z_{n-1}$ définis par

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad \text{avec} \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Calculons maintenant la somme de ces n racines n-ièmes. On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{\rho}\, e^{\mathrm{i}(\theta/n + 2k\pi/n)} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\mathrm{i}\theta/n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\mathrm{i}2\pi/n}\right)^k.$$

Or, si $n \geqslant 2$ alors $e^{\mathrm{i}2\pi/n} \neq 1$. Ainsi, en appliquant la deuxième formule de la proposition 4.2, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\mathrm{i}2\pi/n}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{\mathrm{i}2\pi/n}\right)^n}{1 - e^{\mathrm{i}2\pi/n}} = \frac{1 - e^{\mathrm{i}2\pi}}{1 - e^{\mathrm{i}2\pi/n}} = 0$$

car $e^{\mathrm{i}2\pi} = \cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi) = 1$. On en déduit que, pour $n \geqslant 2$, la somme des n racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle.

PROPOSITION 4.9 *Tout nombre complexe Z non nul possède exactement n racines n-ièmes. Elles sont distinctes deux à deux et s'écrivent :*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ désignent respectivement le module et l'argument de Z. Si $n \geqslant 2$ alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0.$$

Exemples

1. Recherchons les racines troisièmes de $Z = (\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2})/2$ sous forme polaire. Commençons par écrire Z sous forme polaire :

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = e^{\mathrm{i}\pi/4}.$$

Soit $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} &\iff r^3 e^{\mathrm{i}3\varphi} = e^{\mathrm{i}\pi/4} \\ &\iff \left(r^3 = 1 \quad \text{et} \quad 3\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right) \\ &\iff \left(r = 1 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right). \end{aligned}$$

Les racines troisièmes de $Z = (\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2})/2$ sont donc les complexes

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, 2\},$$

c'est-à-dire : $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$, $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}9\pi/12}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}17\pi/12} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}7\pi/12}$. Leurs images sont représentées sur la figure 4 (dessin de gauche).

2. Calculons les racines quatrièmes (recherchées sous forme polaire) du nombre complexe $Z = -16 = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ car $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$. Soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^4 = -16 \quad &\Longleftrightarrow \quad r^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\varphi} = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(r^4 = 16 \quad \text{et} \quad 4\varphi = \pi + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(r = \sqrt[4]{16} = 2 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right). \end{aligned}$$

Les racines quatrièmes de $Z = -16$ sont donc les nombres complexes :

$$z_k = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right] \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

c'est-à-dire les complexes $z_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$, $z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4}$ et $z_3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/4} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$. Les images sont représentées sur la figure 4 (dessin de droite).

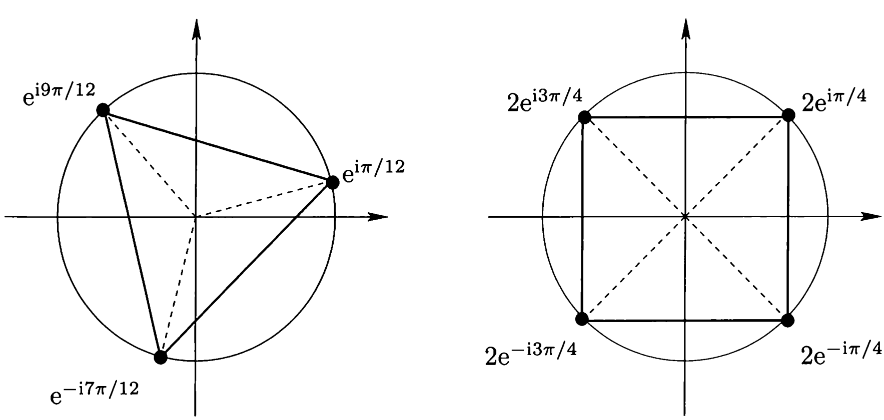


Fig. 4 Représentation dans le plan complexe des images des racines cubiques de $(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2})/2$ (dessin de gauche) et des racines quatrièmes de -16 (dessin de droite).

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1 - $z^4 + 2 = 0$,
2 - $z^2 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,
3 - $z^6 - (1-\mathrm{i})z^3 - \mathrm{i} = 0$,
4 - $z^7 = \overline{z}$,
5 - $\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^3 + \left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^2 + \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} + 1 = 0.$

Remarque Les deux *racines deuxièmes* du nombre complexe $Z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ (avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$) s'écrivent :

$$z_0 = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad z_1 = \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right).$$

Elles sont distinctes l'une de l'autre et vérifient :

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right) \\ &= \sqrt{\rho}\left(-\cos\frac{\theta}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right) = -\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right) = -z_0. \end{aligned}$$

Nous retrouvons le résultat de la proposition 4.7, à savoir que tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines deuxièmes distinctes l'une de l'autre et opposées l'une de l'autre. Par exemple, les deux racines carrées de -16 (qui s'écrit sous la forme polaire $16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$) sont

$$z_0 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_1 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -4\mathrm{i}.$$

Le résultat suivant est une conséquence directe de la proposition 4.9.

Corollaire 4.2 *Pour tout entier naturel n non nul, il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité. Elles sont distinctes deux à deux et s'écrivent :*

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \textit{avec} \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

De plus, les racines n-ièmes de l'unité non réelles sont deux à deux conjuguées.

Démonstration Soit n un entier naturel non nul. Remarquons que le complexe 1 admet pour module 1 et pour argument principal 0. D'après la proposition 4.9 (prendre $\rho = 1$ et $\theta = 0$), les n racines n-ièmes $z_0, \dots, z_{n-1}$ du nombre 1 s'écrivent : $z_k = \cos(2k\pi/n) + \mathrm{i}\sin(2k\pi/n)$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Ainsi, $z_0 = 1$ (on retrouve que 1 est une racine n-ième de l'unité). En particulier, si $n \geqslant 1$ est un entier naturel pair, c'est-à-dire si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, alors la racine n-ième de l'unité correspondant à l'indice p est -1 puisque

$$z_p = \cos\frac{2p\pi}{2p} + \mathrm{i}\sin\frac{2p\pi}{2p} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1.$$

On a aussi $z_0 = z_n$ et, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$z_{n-k} = \cos\frac{2(n-k)\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2(n-k)\pi}{n} = \cos\frac{2k\pi}{n} - \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n} = \overline{z_k}.$$

Ainsi, pour tout k appartenant à $\{0, \dots, n-1\}$, le nombre complexe z_{n-k} est le conjugué de z_k. En particulier, 1 est son propre conjugué et si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire si n est pair) alors -1 est aussi son propre conjugué. □

Exemples

1. Les racines cubiques de l'unité sont les complexes

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3} \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, 2\},$$

c'est-à-dire $z_0 = 1$, $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3} = \mathrm{j}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3} = \bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$. La racine $z_0 = 1$ est son propre conjugué. Les deux racines z_1 et z_2 sont conjuguées l'une de l'autre. Leurs images sont représentées sur la figure 5 (dessin de gauche).

2. Les racines quatrièmes de l'unité sont les complexes

$$z_k = \cos\frac{k\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2} \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

c'est-à-dire $z_0 = 1$, $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$, $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ et $z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -\mathrm{i}$. La racine $z_0 = 1$ est son propre conjugué. De même, la racine $z_2 = -1$ est son propre conjugué. Les deux racines restantes sont conjuguées l'une de l'autre : $z_3 = -\mathrm{i} = \bar{\mathrm{i}} = \overline{z_1}$. Leurs images sont représentées sur la figure 5 (dessin du milieu).

3. Les racines cinquièmes de l'unité sont données par

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{5} \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

c'est-à-dire $z_0 = 1$, $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/5}$, $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/5}$,

$$z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}6\pi/5} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\pi/5} \quad \text{et} \quad z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}8\pi/5} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/5}.$$

À l'exception de la racine $z_0 = 1$ qui est son propre conjugué, les autres racines sont conjuguées deux à deux :

$$z_4 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/5} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/5}} = \overline{z_1} \qquad \text{et} \qquad z_3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\pi/5} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/5}} = \overline{z_2}.$$

Leurs images sont représentées sur la figure 5 (dessin de droite).

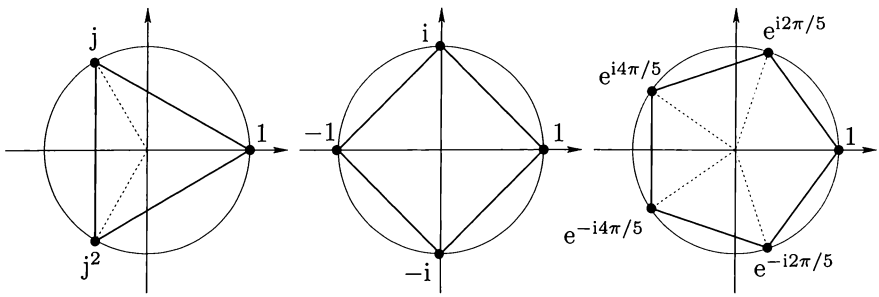


Fig. 5 Représentation dans le plan complexe des images des racines cubiques de l'unité (dessin de gauche), des racines quatrièmes de l'unité (dessin du centre) et des racines cinquièmes de l'unité (dessin de droite).

EXERCICE 4 Soit n un entier naturel non nul.
1 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^{2n} = 1$. Possède-t-elle des solutions réelles ?
2 - En déduire les solutions de l'équation (E) suivante :

$$\text{(E)} \qquad (z+1)^{2n} - (1-z)^{2n} = 0.$$

Vérifier que toutes les solutions sont des nombres complexes imaginaires purs.
3 - En effectuant des changements d'indice, montrer que

$$\prod_{k=n+1}^{2n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\left[-\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right], \quad \prod_{k=1}^{n-1}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

4 - Montrer que le produit des solutions non nulles de (E) vaut 1.

Racine n-ième primitive de l'unité

Soient $z_0, \ldots, z_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité. D'après la formule de Moivre, on peut écrire, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = (\omega_n)^k$$

où le nombre complexe non nul ω_n est défini par

$$\omega_n \overset{déf.}{=} \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Il est qualifié de *racine n-ième primitive de l'unité*. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, chacune des racines n-ièmes de l'unité s'écrit comme une puissance de la racine primitive ω_n. En particulier, une racine cubique primitive de l'unité est le nombre complexe j défini par $\mathrm{j} = -1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2$ (voir l'exercice 1) et une racine quatrième primitive de l'unité est l'unité imaginaire i.

Notons $\mathbb{U}_n$ l'ensemble constitué des racines n-ièmes de l'unité. D'après ce qui précède,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ (\omega_n)^k \,\middle|\, k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Par exemple,

- $\mathbb{U}_1 = \{1\}$,
- $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$,
- $\mathbb{U}_3 = \{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\}$,
- $\mathbb{U}_4 = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$,
- $\mathbb{U}_5 = \{1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/5}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/5}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\pi/5}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/5}\}$.

Soient M_0, M_1, ..., M_{n-1} les points du plan complexe d'affixes respectives z_0, z_1, ..., z_{n-1}. Il est clair que ces points sont disposés sur le cercle unité du plan complexe (c'est-à-dire sur le cercle de rayon 1 et d'origine O) et que les angles orientés $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1})$, $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$, ..., $(\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_0})$ ont tous $2\pi/n$ pour mesure. Cela signifie que, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, le point M_k s'obtient à partir du point M_{k-1} en effectuant une rotation de centre O et d'angle $2\pi/n$, le point M_0 étant le point d'affixe 1.

Par conséquent, les points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ sont les n sommets d'un polygône régulier de n cotés inscrit dans le cercle unité et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1. Nous en donnons des illlustrations pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$ sur la figure 5.

EXERCICE 5 Soit n un entier naturel non nul. On note $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité.

1 - Calculer $S_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (z_k)^q$ pour tout entier naturel q.

2 - Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right)^n = n(z^n + 1)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

4.5 Application à la trigonométrie

4.5.1 Rappels des formules de trigonométrie

Commençons par donner, lorsque cela est possible, les valeurs de

$$\cos(a), \quad \sin(a), \quad \tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}, \quad \mathrm{cotan}(a) = \frac{\cos(a)}{\sin(a)}$$

en quelques valeurs particulières de a :

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	IND
cotan	IND	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

où « IND » signifie « indéfinie ».

Relations entre les fonctions cos, sin, tan

Soit $a \in \mathbb{R}$. Rappelons la relation fondamentale de la trigonométrie :

$$\boxed{\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1.}$$

On en déduit les deux relations suivantes :

$$\boxed{1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}}$$

avec $a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, et

$$\boxed{1 + \text{cotan}^2(a) = \frac{1}{\sin^2(a)}}$$

avec $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La première relation (respectivement la deuxième relation) donnée ci-dessus se déduit de relation $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ en divisant, sous réserve que cela ait un sens, par $\cos^2(a)$ (resp. par $\sin^2(a)$).

Addition des arcs

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a alors les quatre relations suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \cos(a+b) & = & \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \cos(a-b) & = & \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) & = & \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b), \\ \sin(a-b) & = & \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b). \end{array}}$$

Remarquons que la deuxième (respectivement la quatrième) de ces quatre égalités se déduit de la première (resp. de la troisième) en remplaçant b par $-b$. On en déduit que si $a + b \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}.$$

En divisant numérateur et dénominateur par $\cos(a)\cos(b)$, ce qui suppose $a, b \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$\boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}}$$

avec $a, b, a+b \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant b par $-b$, on obtient :

$$\boxed{\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}}$$

avec $a, b, a-b \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Doublement des arcs

En prenant b égal à a dans les égalités précédentes, on obtient les formules suivantes (valables pour tout $a \in \mathbb{R}$) :

$$\boxed{\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \qquad \text{et} \qquad \sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a).}$$

De plus, si $a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ et $a \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\boxed{\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.}$$

Remarques

1. En utilisant que $\cos^2(a)+\sin^2(a) = 1$, on déduit de $\cos(2a) = \cos^2(a)-\sin^2(a)$ les deux relations suivantes (valables pour tout $a \in \mathbb{R}$) :

$$\boxed{\frac{1+\cos(2a)}{2} = \cos^2(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\cos(2a)}{2} = \sin^2(a).}$$

2. En utilisant la relation $1+\tan^2(a) = 1/\cos^2(a)$, qui est valable pour tout $a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, on a les égalités :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(a)} - 1 = \frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)},$$

$$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a) = 2\cos^2(a) \times \frac{\sin(a)}{\cos(a)} = \frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}.$$

En résumé, pour tout $a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{\cos(2a) = \frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)} \qquad \text{et} \qquad \sin(2a) = \frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}.}$$

Transformations trigonométriques

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Les formules suivantes se déduisent immédiatement des quatre formules fondamentales données plus haut (voir addition des arcs) :

$$\boxed{\begin{aligned} 2\cos(a)\cos(b) &= \cos(a+b)+\cos(a-b), \\ 2\sin(a)\sin(b) &= \cos(a-b)-\cos(a+b), \\ 2\sin(a)\cos(b) &= \sin(a+b)+\sin(a-b). \end{aligned}}$$

En posant $A = a + b$ et $B = a - b$, c'est-à-dire :

$$a = \frac{A+B}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{A-B}{2},$$

on trouve :

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(A)+\sin(B) &= 2\sin\Big(\frac{A+B}{2}\Big)\cos\Big(\frac{A-B}{2}\Big), \\ \sin(A)-\sin(B) &= 2\sin\Big(\frac{A-B}{2}\Big)\cos\Big(\frac{A+B}{2}\Big), \\ \cos(A)+\cos(B) &= 2\cos\Big(\frac{A+B}{2}\Big)\cos\Big(\frac{A-B}{2}\Big), \\ \cos(A)-\cos(B) &= -2\sin\Big(\frac{A+B}{2}\Big)\sin\Big(\frac{A-B}{2}\Big). \end{aligned}}$$

4.5.2 Développement de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel θ, on peut écrire $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme des sommes de puissances de $\cos(\theta)$ et/ou de $\sin(\theta)$. La méthode consiste à utiliser la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton :

$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = \big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k(\theta)\,\big(\mathrm{i}\sin(\theta)\big)^{n-k}.$$

On a ainsi l'égalité :

$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^{n-k} \cos^k(\theta) \sin^{n-k}(\theta). \tag{8}$$

Pour obtenir l'expression de $\cos(n\theta)$ (respectivement de $\sin(n\theta)$) comme une somme de puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, on identifie les parties réelles (resp. les parties imaginaires) dans l'égalité (8).

Exemple En utilisant la méthode proposée, développons $\cos(3\theta)$ (respectivement $\sin(3\theta)$) comme une somme de puissances de $\cos(\theta)$ (resp. de $\sin(\theta)$). Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta) = \big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cos^k(\theta)\big(\mathrm{i}\sin(\theta)\big)^{3-k},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
&\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)\\
&= \mathrm{i}^3\sin^3(\theta) + 3\mathrm{i}^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) + 3\mathrm{i}\cos^2(\theta)\sin(\theta) + \cos^3(\theta)\\
&= -\mathrm{i}\sin^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + 3\mathrm{i}\cos^2(\theta)\sin(\theta) + \cos^3(\theta)\\
&= -3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + \cos^3(\theta) + \mathrm{i}\left[3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)\right].
\end{aligned}$$

Identifions à présent les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\cos(3\theta) = -3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + \cos^3(\theta),$$

$$\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta).$$

En utilisant la relation $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, on obtient :

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(3\theta) = -4\sin^3(\theta) + 3\sin(\theta).$$

EXERCICE 6 En utilisant la méthode proposée, vérifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta),$$

$$\sin(5\theta) = 16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta).$$

Remarque Pour obtenir l'expression de $\tan(n\theta)$ en fonction de puissances de $\tan(\theta)$, on écrit (sous réserve que cela ait un sens) :

$$\tan(n\theta) = \frac{\sin(n\theta)/\cos^n(\theta)}{\cos(n\theta)/\cos^n(\theta)}$$

et on utilise les développements de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme des sommes de puissances, respectivement, de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$, et la relation

$$1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}.$$

Par exemple, développons $\tan(3\theta)$ comme une somme de puissances de $\tan(\theta)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\tan(3\theta) = \frac{\dfrac{\sin(3\theta)}{\cos^3(\theta)}}{\dfrac{\cos(3\theta)}{\cos^3(\theta)}} = \frac{\dfrac{-4\sin^3(\theta) + 3\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)}}{\dfrac{4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)}} = \frac{-4\tan^3(\theta) + 3\dfrac{\tan(\theta)}{\cos^2(\theta)}}{4 - \dfrac{3}{\cos^2(\theta)}}$$

En utilisant la relation $1 + \tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$, on obtient finalement :

$$\tan(3\theta) = \frac{-\tan^3(\theta) + 3\tan(\theta)}{1 - 3\tan^2(\theta)}$$

avec $\theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{6}$ et $\theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4.5.3 Linéarisation de $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel θ, on peut écrire $\cos^n(\theta)$ (respectivement $\sin^n(\theta)$) comme des sommes de termes de la forme $\cos(m\theta)$ (respectivement de la forme $\sin(m\theta)$) avec m un entier naturel tel que $m \leqslant n$. La méthode consiste à utiliser la formule d'Euler et celle du binôme de Newton. Par exemple,

$$\cos^n(\theta) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}.$$

On a ainsi l'égalité :

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-2k)\theta}. \tag{9}$$

On regroupe alors dans l'égalité (9) les termes en partant des extrêmes pour faire apparaître des éléments de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $m \leqslant n$. Utilisant à nouveau la formule d'Euler, on a :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta} = 2\cos(m\theta).$$

On procède suivant une méthode analogue pour $\sin^n(\theta)$.

Exemple Commençons par linéariser $\cos^4(\theta)$ en utilisant la méthode proposée. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos^4(\theta) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(4-k)\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(4-2k)\theta},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\cos^4(\theta) &= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\theta} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + 6 + 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\theta}\right)\\ &= \frac{1}{16}\Big(\underbrace{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\theta}\right)}_{=2\cos(4\theta)} + 4\underbrace{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}\right)}_{=2\cos(2\theta)} + 6\Big)\end{aligned}$$

où on a regroupé les termes en partant des extrêmes. Finalement,

$$\cos^4(\theta) = \frac{1}{8}\left[\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\right].$$

On aurait pu procéder directement comme suit (car le degré, ici 4, est petit) :

$$\begin{aligned}\cos^4(\theta) &= \left[\frac{\cos(2\theta)+1}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}\left[\cos^2(2\theta) + 2\cos(2\theta) + 1\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{\cos(4\theta)+1}{2} + 2\cos(2\theta) + 1\right] = \frac{1}{8}\left[\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\right].\end{aligned}$$

Plus généralement, linéarisons $\cos^{2p}(\theta)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos^{2p}(\theta) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{2p}.$$

Utilisons à présent la formule du binôme de Newton. On obtient :

$$\begin{aligned}\cos^{2p}(\theta) &= \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p-k)\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p-2k)\theta}\\ &= \frac{1}{2^{2p}}\left[\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p-2k)\theta} + \binom{2p}{p} + \sum_{k=p+1}^{2p}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p-2k)\theta}\right].\end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indice $k' = 2p - k$ dans la dernière somme :

$$\sum_{k=p+1}^{2p}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p-2k)\theta} = \sum_{k'=0}^{p-1}\binom{2p}{2p-k'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k'-2p)\theta} = \sum_{k'=0}^{p-1}\binom{2p}{k'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k'-2p)\theta}$$

car $\binom{2p}{2p-k'} = \binom{2p}{k'}$. L'indice k' étant muet, nous pouvons le remplacer par n'importe quel autre indice. On peut donc le remplacer par k. On obtient :

$$\cos^{2p}(\theta) = \frac{1}{2^{2p}}\left[\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p-2k)\theta} + \binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-2p)\theta}\right].$$

D'où, en regroupant les deux sommes :

$$\cos^{2p}(\theta) = \frac{1}{2^{2p}}\left[\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p-2k)\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2p-2k)\theta}\right) + \binom{2p}{p}\right].$$

Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p-2k)\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2p-2k)\theta} = 2\cos\big((2p-2k)\theta\big)$. Ainsi,

$$\cos^{2p}(\theta) = \frac{1}{2^{2p-1}}\left[\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos\big((2p-2k)\theta\big) + \frac{1}{2}\binom{2p}{p}\right].$$

Exercice 7 Soit θ un réel.
1 - Linéariser $\cos^5(\theta)$ et $\sin^5(\theta)$.
2 - Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\cos^{2p+1}(\theta) = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{k}\cos\big((2p+1-2k)\theta\big).$$

3 - De même, montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sin^{2p+1}(\theta) = \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{k}\sin\big((2p+1-2k)\theta\big).$$

4.6 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - On vérifie que $|\mathrm{j}|^2 = \mathrm{j} \times \bar{\mathrm{j}} = 1$, d'où $\bar{\mathrm{j}} = 1/\mathrm{j}$. On a aussi :

$$\mathrm{j}^2 = (-1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2)^2 = -1/2 - \mathrm{i}\sqrt{3}/2 = \bar{\mathrm{j}}.$$

2 - De l'égalité $\mathrm{j}^2 = 1/\mathrm{j}$ on déduit $\mathrm{j}^3 = 1$. Utilisant l'égalité $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$, on obtient :

$$1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 1 + \mathrm{j} + \bar{\mathrm{j}} = 1 + 2\,\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{j}) = 1 + 2 \times (-1/2) = 0.$$

Solution de l'exercice 2

1 - Le discriminant Δ du trinôme $(3+\mathrm{i})z^2 - (8+6\mathrm{i})z + 25 + 5\mathrm{i}$ vaut $-252 - 64\mathrm{i}$. Ses deux racines deuxièmes s'obtiennent en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -252 \\ 2xy = -64 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-252)^2 + (-64)^2} = 260 \end{cases}$$

dont on déduit $x^2 = 4$ et $y^2 = 256$, d'où $x = \pm 2$ et $y = \pm 16$. Seuls les couples $(2, -16)$ et $(-2, 16)$ vérifient l'égalité $2xy = -64$. Par conséquent, une racine deuxième de Δ est $2 - 16\mathrm{i}$ et les racines du trinôme $(3+\mathrm{i})z^2 - (8+6\mathrm{i})z + 25 + 5\mathrm{i}$ sont les nombres complexes

$$z_1 = \frac{5 - 5\mathrm{i}}{3 + \mathrm{i}} = 1 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 + 11\mathrm{i}}{3 + \mathrm{i}} = 2 + 3\mathrm{i}.$$

2 - Une racine évidente est 1. On peut alors factoriser par $(z - 1)$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que

$$z^3 - (5 + 3\mathrm{i})z^2 + (5 + 8\mathrm{i})z - 1 - 5\mathrm{i} = (z - 1)(az^2 + bz + c).$$

En développant l'expression de droite, puis en identifiant les monômes de même degré, on obtient : $a = 1$, $b = -4 - 3\mathrm{i}$ et $c = 1 + 5\mathrm{i}$, d'où

$$z^3 - (5 + 3\mathrm{i})z^2 + (5 + 8\mathrm{i})z - 1 - 5\mathrm{i} = (z - 1)(z^2 - (4 + 3\mathrm{i})z + 1 + 5\mathrm{i}).$$

Le discriminant Δ du trinôme $z^2 - (4 + 3\mathrm{i})z + 1 + 5\mathrm{i}$ vaut $3 + 4\mathrm{i}$ et une de ses racines deuxièmes est $2 + \mathrm{i}$ car $(2 + \mathrm{i})^2 = 3 + 4\mathrm{i}$. Les racines du trinôme $z^2 - (4+3\mathrm{i})z + 1 + 5\mathrm{i}$ sont donc $z_1 = 3 + 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1 + \mathrm{i}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ constitué des racines du polynôme de degré 3 est $\mathcal{S} = \{1, 3 + 2\mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}\}$.

Solution de l'exercice 3

1 - Les solutions de l'équation $z^4 + 2 = 0$ sont les complexes

$$z_k = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right] \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

c'est-à-dire : $z_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\pi/4}$, $z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i3\pi/4}$,

$$z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt[4]{2}e^{-i3\pi/4} \quad \text{et} \quad z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i7\pi/4} = \sqrt[4]{2}e^{-i\pi/4}.$$

2 - On vérifie que l'on a :

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = i.$$

Ainsi, les solutions de l'équation $z^2 = (1+i)/(1-i)$ sont les racines deuxièmes de l'unité imaginaire, c'est-à-dire les deux complexes opposés $z_0 = e^{i\pi/4}$ et $z_1 = e^{i(\pi/4+\pi)} = -e^{i\pi/4}$.

3 - En posant $u = z^3$, résoudre $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$ revient à trouver u tel que $u^2 - (1-i)u - i = 0$. Le discriminant Δ du trinôme $u^2 - (1-i)u - i$ vaut 2i et une de ses racines deuxièmes est $1+i$ car $(1+i)^2 = 2i$. Les deux solutions du trinôme $u^2 - (1-i)u - i$ sont $u = 1$ et $u' = -i$. Il convient à présent de résoudre les équations $z^3 = 1$ et $z^3 = -i$.

- Les racines cubiques de l'unité sont 1, j, $\bar{j}$.
- Les racines cubiques de $-i$ sont $e^{-i\pi/6}$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i7\pi/6} = e^{-i5\pi/6}$.

On en déduit l'ensemble $\mathcal{S}$ des racines du polynôme de degré 6 :

$$\mathcal{S} = \left\{1, j, \bar{j}, e^{-i\pi/6}, i, e^{-i5\pi/6}\right\}.$$

4 - Il est clair que 0 est une racine évidente de l'équation $z^7 = \overline{z}$. Cherchons à présent z sous la forme polaire $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$ et, d'après la formule de Moivre, $z^7 = \rho^7 e^{i7\theta}$. On a alors les équivalences suivantes :

$$z^7 = \overline{z} \iff \rho^7 e^{i7\theta} = \rho e^{-i\theta} \iff \left(\rho = 1 \quad \text{et} \quad \theta = k\pi/4 \ \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}\right).$$

L'ensemble des solutions s'écrit $\mathcal{S} = \{0\} \cup \left\{e^{ik\pi/4} \mid k \in \{0, 1, \ldots, 7\}\right\}$.

5 - En posant $u = (z-i)/(z+i)$, on se ramène à la résolution de $u^3+u^2+u+1 = 0$ qui s'écrit aussi $(u+1)(u^2+1) = 0$ et dont les racines sont -1, i et $-i$. De $u = (z-i)/(z+i)$, on obtient :

$$z = i\frac{1+u}{1-u}.$$

On déduit $z = 0$ de $u = -1$, $z = -1$ de $u = i$ et $z = 1$ de $u = -i$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions s'écrit ainsi : $\mathcal{S} = \{0, -1, 1\}$.

Solution de l'exercice 4

1 - Les solutions complexes de $u^{2n} = 1$ sont les racines $2n$-ièmes de l'unité. Il y en a $2n$. Elles s'écrivent : $u_k = e^{ik\pi/n}$, $k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$. Cherchons parmi ces solutions, celle(s) qui est (sont) réelle(s). Soit k un entier compris entre 0 et $2n-1$. Clairement, $u_k \in \mathbb{R}$ si et seulement si, $\sin(k\pi/n) = 0$. On a de plus l'équivalence suivante :

$$\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0 \iff \left(k = \ell n \text{ avec } \ell \in \mathbb{Z}\right).$$

Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que u_k appartienne à $\mathbb{R}$ est que k soit un multiple (dans $\mathbb{Z}$) de n. Or, k appartient à l'ensemble fini $\{0, 1, \ldots, 2n-1\}$. Par conséquent, les seules solutions réelles sont celles correspondant aux indices $k = 0$ et $k = n$. On a : $u_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$ et $u_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.

2 - Puisque le nombre 1 ne vérifie pas l'équation (E) (c'est immédiat), résoudre (E) revient à résoudre l'équation (E′) suivante :

$$(\mathrm{E}') \qquad \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = 1.$$

La résolution de cette dernière équation s'effectue facilement par changement d'inconnue. Posons $u = (1+z)/(1-z)$. On doit alors résoudre : $u^{2n} = 1$, c'est-à-dire calculer les racines $2n$-ièmes de l'unité. D'après la question précédente, $u_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/n}$, $k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$. De $u = (1+z)/(1-z)$ (avec $z \neq 1$), on obtient $z = (u-1)/(u+1)$ (avec $u \neq -1$). Les solutions de (E) sont donc

$$z_k = \frac{u_k - 1}{u_k + 1}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\} \setminus \{n\}$$

où la valeur n de l'indice a été exclue puisque $u_n = -1$. En utilisant les formules d'Euler, on vérifie alors facilement que, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\} \setminus \{n\}$,

$$z_k = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/n} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/n} + 1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n}\right)} = \mathrm{i}\,\frac{\sin\frac{k\pi}{2n}}{\cos\frac{k\pi}{2n}} = \mathrm{i}\tan\frac{k\pi}{2n},$$

établissant ainsi que les solutions de (E) sont des nombres complexes imaginaires purs.

3 - Le changement d'indice $k' = 2n - k$ permet d'écrire :

$$\prod_{k=n+1}^{2n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k'=n-1}^{1} \tan\left(\frac{(2n-k')\pi}{2n}\right) = \prod_{k'=1}^{n-1} \tan\left(\pi - \frac{k'\pi}{2n}\right).$$

Puisque $\tan(\pi - k'\pi/2n) = -\tan(k'\pi/2n)$ et remplaçant k' par k (l'indice est muet), on obtient l'égalité demandée :

$$\prod_{k=n+1}^{2n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \left[-\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right].$$

Effectuons le changement d'indice $k' = n - k$:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k'=n-1}^{1} \cos^2\left(\frac{(n-k')\pi}{2n}\right) = \prod_{k'=1}^{n-1} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k'\pi}{2n}\right).$$

Finalement, puisque $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k'\pi}{2n}\right) = \sin\left(\frac{k'\pi}{2n}\right)$ et l'indice k' étant muet,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

4 - Les solutions de (E) ont été trouvées à la deuxième question. Ce sont les complexes z_k, $k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\} \setminus \{n\}$. Noter que la solution nulle correspond à l'indice 0. Le produit des solutions non nulles de (E) s'écrit ainsi :

$$\prod_{k=1,\ k\neq n}^{2n-1} z_k = \left[\prod_{k=1}^{n-1} z_k\right]\left[\prod_{k=n+1}^{2n-1} z_k\right].$$

En utilisant alors les résultats des questions précédantes, on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1,\ k\neq n}^{2n-1} z_k &= \left[\prod_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{i}\tan\frac{k\pi}{2n}\right)\right]\left[\prod_{k=n+1}^{2n-1}\left(\mathrm{i}\tan\frac{k\pi}{2n}\right)\right] \\
&= \left[\prod_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{i}\tan\frac{k\pi}{2n}\right)\right]\left[\prod_{k=1}^{n-1}\left(-\mathrm{i}\tan\frac{k\pi}{2n}\right)\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n-1}\left[\left(\mathrm{i}\tan\frac{k\pi}{2n}\right)\left(-\mathrm{i}\tan\frac{k\pi}{2n}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n-1}\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\prod_{k=1,\ k\neq n}^{2n-1} z_k = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} = 1.$$

Solution de l'exercice 5

1 - Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$. Rappelons que les racines n-ièmes de l'unité sont les nombres complexes $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. On a :

$$S_q = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k/n}\right)^q = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kq/n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi q/n}\right)^k.$$

Considérons les deux cas suivants.

- Si q est multiple de n, c'est-à-dire si $q = \ell n$ avec $\ell \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi q/n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\ell} = 1$ et donc : $S_q = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}} = n$.
- Si q n'est pas multiple de n alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi q/n} \neq 1$ et donc, d'après la proposition 4.2 (voir page 136) :

$$S_q = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi q/n}\right)^k = \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi q/n}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi q/n}} = 0$$

car $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi q/n}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi q} = 1$.

En résumé, $S_q = \sum_{k=0}^{n-1} (z_k)^q = \begin{cases} n & \text{si } q \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2 - Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Grâce à la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} z^{n-q} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right)^q\right].$$

On peut alors, dans un premier temps, intervertir les deux sommes, puis, dans un second temps faire sortir de la deuxième somme les termes qui ne dépendent pas de son indice de sommation :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} z^{n-q} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right)^q\right] &= \sum_{q=0}^{n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{q} z^{n-q} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right)^q\right] \\ &= \sum_{q=0}^{n} \left[\binom{n}{q} z^{n-q} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right)^q\right].\end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right)^q = S_q$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right)^n = \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} z^{n-q} S_q.$$

D'après la question précédente, $S_0 = S_n = n$ car 0 et n sont des multiples de n, et $S_1 = \ldots = S_{n-1} = 0$. Finalement,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right)^n = \binom{n}{0} z^n S_0 + \binom{n}{n} S_n = n(z^n + 1).$$

Solution de l'exercice 6

D'après la formule de Moivre et celle du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) + \mathrm{i}\sin(5\theta) &= \left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)^5 \\ &= \mathrm{i}\sin^5(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta) - 10\mathrm{i}\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) \\ &\quad -10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 5\mathrm{i}\cos^4(\theta)\sin(\theta) + \cos^5(\theta) \\ &= \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta) \\ &\quad +\mathrm{i}\left[\sin^5(\theta) - 10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 5\cos^4(\theta)\sin(\theta)\right].\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient :

$$\cos(5\theta) = \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta),$$

$$\sin(5\theta) = \sin^5(\theta) - 10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 5\cos^4(\theta)\sin(\theta).$$

En utilisant la relation $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, on obtient :

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta),$$

$$\sin(5\theta) = 16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta).$$

Solution de l'exercice 7

1 - D'après les formules d'Euler et en développant grâce à celle du binôme de Newton, on obtient :

$$\cos^5(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}\Big[\cos(5\theta) + 5\cos(3\theta) + 10\cos(\theta)\Big],$$
$$\sin^5(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{16}\Big[\sin(5\theta) - 5\sin(3\theta) + 10\sin(\theta)\Big].$$

2 - Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après les formules d'Euler, on a :

$$\cos^{2p+1}(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^{2p+1}$$

D'où, en utilisant la formule du binôme de Newton,

$$\cos^{2p+1}(\theta) = \frac{1}{2^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} e^{i(2p+1-2k)\theta}.$$

Décomposons alors la somme en deux sommes comme suit :

$$\cos^{2p+1}(\theta) = \frac{1}{2^{2p+1}} \left[\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} e^{i(2p+1-2k)\theta} + \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} e^{i(2p+1-2k)\theta}\right].$$

Effectuons le changement d'indice $k' = 2p + 1 - k$ dans la dernière somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} e^{i(2p+1-2k)\theta} &= \sum_{k'=0}^{p} \binom{2p+1}{2p+1-k'} e^{i(2k'-(2p+1))\theta} \\ &= \sum_{k'=0}^{p} \binom{2p+1}{k'} e^{i(2k'-(2p+1))\theta} \end{aligned}$$

car $\binom{2p+1}{2p+1-k'} = \binom{2p+1}{k'}$. L'indice est muet. On peut alors le remplacer par k. Ainsi, en regroupant les deux sommes :

$$\cos^{2p+1}(\theta) = \frac{1}{2^{2p+1}} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \Big(e^{i(2p+1-2k)\theta} + e^{-i(2p+1-2k)\theta}\Big).$$

Or, $e^{i(2p+1-2k)\theta} + e^{-i(2p+1-2k)\theta} = 2\cos\big((2p+1-2k)\theta\big)$. On a donc :

$$\cos^{2p+1}(\theta) = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \cos\big((2p+1-2k)\theta\big).$$

3 - D'après les formules d'Euler,

$$\sin^{2p+1}(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^{2p+1}$$

Ainsi, en utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\sin^{2p+1}(\theta) = \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (-1)^k e^{i(2p+1-2k)\theta}$$

$$= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \left[\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} (-1)^k e^{i(2p+1-2k)\theta} + \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (-1)^k e^{i(2p+1-2k)\theta} \right].$$

Effectuons le changement d'indice $k' = 2p+1-k$ dans la dernière somme :

$$\sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (-1)^k e^{i(2p+1-2k)\theta}$$

$$= \sum_{k'=0}^{p} \binom{2p+1}{2p+1-k'} (-1)^{2p+1-k'} e^{-i(2p+1-2k')\theta}$$

$$= \sum_{k'=0}^{p} \binom{2p+1}{k'} (-1)^{k'+1} e^{-i(2p+1-2k')\theta}$$

car $\binom{2p+1}{2p+1-k'} = \binom{2p+1}{k'}$ et $(-1)^{2p+1-k'} = (-1)^{k'+1}$. L'indice k' étant muet, on le remplace par k. On en déduit :

$$\sin^{2p+1}(\theta) = \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} (-1)^k \left(e^{i(2p+1-2k)\theta} - e^{-i(2p+1-2k)\theta} \right).$$

Or, $e^{i(2p+1-2k)\theta} - e^{-i(2p+1-2k)\theta} = 2i \sin\big((2p+1-2k)\theta\big)$. Ainsi,

$$\sin^{2p+1}(\theta) = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} (-1)^k \sin\big((2p+1-2k)\theta\big)$$

car

$$\frac{2i}{(2i)^{2p+1}} = \frac{1}{(2i)^{2p}} = \frac{1}{2^{2p} i^{2p}} = \frac{1}{2^{2p}(i^2)^p} = \frac{1}{2^{2p}(-1)^p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}}.$$

CHAPITRE 5

Suites numériques

5.1 Définitions et généralités

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ le symbole $|\ |$ désigne la valeur absolue d'un réel. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ le symbole $|\ |$ désigne le module d'un complexe. Une *suite numérique* est une application d'un sous-ensemble infini $\mathbb{N}_1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. Au lieu de la noter

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_1 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

on la note $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ où $u_n = u(n)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on parle de *suite réelle* et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on parle de *suite complexe*. Pour $k \in \mathbb{N}_1$, le terme u_k est appelé *terme de rang* k de la suite numérique $(u_n)_n$. On dit encore que $(u_n)_n$ est la suite de *terme général* u_n.

On appelle *suite stationnaire* une suite dont les termes sont constants à partir d'un certain rang. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est à termes positifs (resp. négatifs) si pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ on a $u_n \geqslant 0$ (resp. $u_n \leqslant 0$).

Soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{K}$. On dit que la suite numérique $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de A si pour tout entier $n \in \mathbb{N}_1$ on a $u_n \in A$.

Une suite n'est pas nécessairement définie pour tout entier naturel n. Toutefois afin de simplifier l'exposé, nous ne considérerons que des suites définies sur $\mathbb{N}$. Il sera aisé d'adapter les énoncés aux cas de suites définies sur un sous-ensemble infini $\mathbb{N}_1$ de $\mathbb{N}$.

Exemples

1. La suite de terme général $1/n$ est une suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$.

2. La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ dont les termes de rang pair valent 1 et ceux de rang impair -1.

3. La suite de terme général $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ est une suite complexe définie sur $\mathbb{N}$.

4. La suite de terme général $u_n = (\mathrm{i}/n)^n$ est une suite complexe définie sur $\mathbb{N}^*$.

5. La suite de terme général $\sqrt{n-4}$ est une suite réelle définie sur l'ensemble $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 4\}$.

On dit que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont égales si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = v_n$. Par exemple les suites $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales.

Une suite peut être définie par la donnée du terme de rang 0 et d'une relation de récurrence liant des termes consécutifs. On parle alors de *suite récurrente* ou de suite définie par récurrence. Par exemple la suite $(u_n)_n$ définie par les relations : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n$ est une suite récurrente.

5.1.1 Convergence d'une suite numérique

DÉFINITION 5.1 ✗ *On dit que la suite numérique $(u_n)_n$ converge vers le scalaire ℓ (ou qu'elle tend vers $\ell \in \mathbb{K}$) si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Le scalaire ℓ est appelé limite de la suite.

✗ *On dit que la suite numérique $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{K}$ s'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Autrement dit, la suite $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{K}$ si*

$$\exists \ell \in \mathbb{K} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

✗ *On dit que la suite numérique $(u_n)_n$ diverge si elle ne converge pas. Autrement dit, la suite $(u_n)_n$ diverge si*

$$\forall \ell \in \mathbb{K} \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \quad \text{et} \quad |u_n - \ell| > \varepsilon).$$

Remarques

1. L'assertion $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$ définissant la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers ℓ s'interprète ainsi : une fois un réel ε strictement positif fixé, on peut trouver un entier N à partir duquel tous les termes de rang supérieur à N sont à une « distance » de ℓ inférieure à ε, voir la figure 1. On peut donc trouver un rang à partir duquel les valeurs de la suite sont arbitrairement proches de ℓ.

2. On ne modifie pas la *nature d'une suite* (le fait qu'elle converge ou diverge) ni la valeur de sa limite si on modifie ses termes jusqu'à un rang donné.

3. Si la suite réelle $(u_n)_n$ converge vers ℓ alors le réel ℓ est un point d'adhérence[(1)] de l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ puisque pour tout intervalle centré en ℓ de la forme $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ avec $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ contient tous les termes de la suite à partir du rang N.

La figure 1 représente graphiquement les 100 premiers termes de la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n+1}\sin(n)$ qui converge vers 0. Quelle que soit la valeur strictement positive de ε, à partir d'un certain rang N, tous les termes de la

[(1)] Voir la définition 3.13 p. 119.

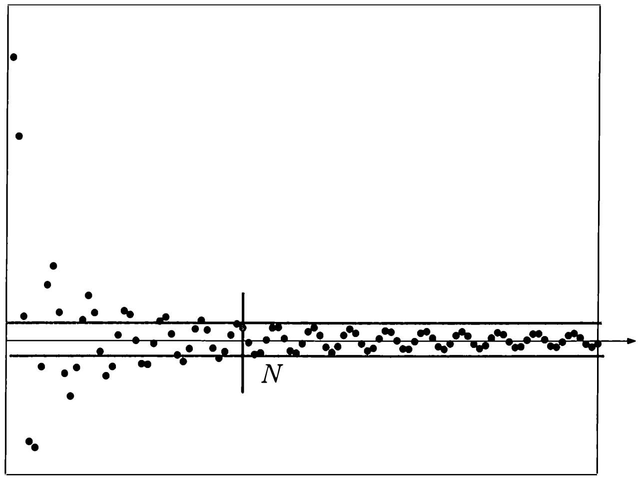


Fig. 1 Illustration graphique de la définition de la convergence.

suite $(u_n)_n$ sont compris dans une bande de largeur 2ε autour de la valeur ℓ de la limite.

Exercice 1 Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que le réel a est un point adhérent à A si et seulement si il existe une suite réelle $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers a.[(2)]

Proposition 5.1 *Si la suite numérique $(u_n)_n$ converge, la limite de la suite est unique. On la note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(u_n)_n$ converge et qu'elle a deux limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes. Posons $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell_2 - \ell_1|$. On a $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et d'après la définition 5.1,

$$\begin{aligned} &\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_1 \Longrightarrow |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon) \\ \text{et} \quad &\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_2 \Longrightarrow |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon). \end{aligned}$$

Notons $N = \max\{N_1, N_2\}$. En utilisant la première inégalité triangulaire[(3)], on obtient

$$|\ell_2 - \ell_1| \leqslant |\ell_2 - u_N| + |u_N - \ell_1| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell_2 - \ell_1|$$

[(2)] Indication : on rappelle que le réel a est un point adhérent à A si tout intervalle ouvert de centre a contient au moins un élément de A, autrement dit si

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in A \quad x \in]a - \eta, a + \eta[.$$

[(3)] Voir la proposition 3.7 p. 108.

ce qui est absurde puisque $1 > \frac{2}{3}$. On en conclut que si la suite numérique $(u_n)_n$ converge alors la limite de la suite est unique. □

Proposition 5.2 *Si une suite réelle à termes positifs converge, sa limite est un réel positif.*

Démonstration Considérons une suite $(u_n)_n$ à termes positifs qui converge vers un réel ℓ, c'est-à-dire, voir la définition 5.1, supposons que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon). \tag{1}$$

Pour montrer que le réel ℓ est nécessairement positif, raisonnons par l'absurde. Si on suppose que ℓ est strictement négatif alors on établit en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell|$ dans la relation (1) (on a bien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$) l'existence d'un entier naturel N tel que pour tout entier n supérieur à N,

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{|\ell|}{2}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$,

$$\frac{\ell}{2} \leqslant u_n - \ell \leqslant -\frac{\ell}{2}.$$

Ceci implique que $-\frac{1}{2}\ell \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\ell < 0$ ce qui est impossible puisque la suite $(u_n)_n$ est à termes positifs. On en conclut que le réel ℓ est nécessairement positif. □

Remarque On démontrerait de même que si une suite réelle à termes négatifs converge, sa limite est un réel négatif. Par contre, on prendra garde que si une suite réelle à termes *strictement* positifs converge, sa limite n'est pas nécessairement un réel *strictement* positif. Par exemple la suite de terme général $1/n$ est une suite à termes strictement positifs qui converge vers 0 (qui n'est pas un réel strictement positif).

Les résultats énoncés à la proposition 5.2 et dans la remarque précédente s'inscrivent dans un contexte plus général précisé dans la proposition suivante. Rappelons que la notion d'ensemble fermé dans $\mathbb{R}$ a été introduite à la définition 3.11 page 117.

Proposition 5.3 *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. L'ensemble A est fermé si et seulement si toutes les suites d'éléments de A qui convergent ont pour limite un élément de A.*

Démonstration $\trianglerighteq$ Supposons que A est fermé et considérons une suite $(u_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers un réel ℓ. Montrons que $\ell \in A$. Nous avons vu que la limite ℓ de la suite $(u_n)_n$ est un point adhérent à l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (*i.e.* $\ell \in \overline{U}$). Comme la suite $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de A, on a $U \subset A$ et par conséquent $\overline{U} \subset \overline{A}$. Or, l'ensemble A étant fermé, on a $A = \overline{A}$, donc $\overline{U} \subset A$. On en conclut que $\ell \in A$.

$\trianglerighteq$ Supposons maintenant que toutes les suites d'éléments de A qui convergent ont pour limite un élément de A et montrons que A est fermé, autrement dit que $A = \overline{A}$. Comme on a toujours $A \subset \overline{A}$, il suffit de montrer que $\overline{A} \subset A$. Soit x un élément de $\overline{A}$; cet élément est un point adhérent de A et par conséquent dans tout intervalle ouvert de centre x il existe (au moins) un élément de A. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un élément u_n appartenant à A dans l'intervalle $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$. La suite $(u_n)_n$ converge[4] vers x. Comme la suite $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de A, d'après l'hypothèse sa limite x est un élément de A. On a donc $x \in A$ ce qui permet de conclure que A est fermé. □

Remarque La situation considérée dans la proposition 5.2 correspond à l'ensemble $A = \mathbb{R}^+$. L'ensemble A est fermé dans $\mathbb{R}$ car son complémentaire $\complement A =]-\infty, 0[$ est un ensemble ouvert[5] : pour tout $x \in \complement A$, l'intervalle $]x - \delta, x + \delta[$ où $\delta = \frac{1}{2}|x|$ est un intervalle ouvert centré en x et inclus dans $\complement A$. D'après la proposition 5.3, toutes les suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$ qui convergent ont pour limite un élément de $\mathbb{R}^+$, autrement dit un réel positif.

Exemple Les termes de la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sin(e\pi n!)$ appartiennent à l'intervalle fermé $[-1, 1]$. La proposition 5.3 indique que si la suite $(u_n)_n$ converge alors sa limite appartient nécessairement à l'intervalle $[-1, 1]$. On montre, voir l'exercice 1.16, page 54 du *Cours de deuxième année*, que cette suite converge vers 0.

En complément à la proposition 5.2, l'exercice suivant permet d'établir une propriété qui constitue en quelque sorte une réciproque de la propriété énoncée à la proposition 5.2 (noter cependant la présence de « à partir d'un certain rang »).

> **EXERCICE 2** Montrer que si une suite réelle converge vers un réel strictement positif alors tous les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain rang. (Indication : on pourra s'inspirer de la démonstration de la proposition 5.2.)

Exemples

1. Montrons que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 1/n$ converge vers 0. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, considérons l'entier $N = E(1/\varepsilon) + 1$. D'après les propriétés

[4] En effet, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, en prenant $N = \mathrm{E}(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$, on a pour tout entier $n \geqslant N$ $|u_n - x| \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. La définition 5.1 permet donc de conclure à la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers x. Signalons que le théorème d'encadrement, que nous énoncerons ultérieurement, permet également d'établir ce résultat.

[5] Voir la définition 3.11 p. 117.

de la partie entière[6], on a $N > \varepsilon$. On en déduit que pour tout entier n avec $n \geqslant N$, on a

$$|u_n - 0| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} \leqslant \varepsilon.$$

D'après la définition 5.1, on en conclut que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

2. Considérons la suite de terme général $(-1)^n$. L'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a deux points d'adhérence 1 et -1. Si la suite converge, elle ne peut donc avoir pour limite que 1 ou -1. La suite ne converge pas vers -1. En effet, si on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alors

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \text{l'entier } n = 2N \text{ vérifie} \quad (n \geqslant N \ \text{ et } \ |u_n - \ell| = 2 > \varepsilon).$$

Elle ne converge pas non plus vers 1 car si on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alors

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \text{l'entier } n = 2N+1 \text{ vérifie} \quad (n \geqslant N \ \text{ et } \ |u_n - \ell| = 2 > \varepsilon).$$

Puisqu'aucun des points d'adhérence de l'ensemble U n'est limite de la suite $(u_n)_n$, on en déduit que la suite diverge, voir la remarque faite en page 172.

3. Considérons la suite de terme général $u_n = n$. Remarquons que d'après la proposition 5.2, si cette suite converge, sa limite est nécessairement un réel positif. Montrons que la suite $(u_n)_n$ ne converge vers aucun réel positif, c'est-à-dire montrons que

$$\forall \ell \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \ \text{ et } \ |u_n - \ell| > \varepsilon).$$

Soit $\ell \in \mathbb{R}^+$ et $\varepsilon = 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ considérons l'entier $n = N + E(\ell) + 2$. On a $n \geqslant N$ et

$$|u_n - \ell| = |n - \ell| = |N + E(\ell) + 2 - \ell| > |N + 1| \geqslant 1 = \varepsilon.$$

On peut donc conclure que la suite $(u_n)_n$ diverge.

EXERCICE 3 En utilisant la définition 5.1, déterminer la nature des suites dont le terme général est $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $(\mathrm{i})^n$, n^2.

PROPOSITION 5.4 *Si la suite numérique $(u_n)_n$ converge vers le scalaire ℓ alors la suite réelle de terme général $|u_n|$ converge vers le réel positif $|\ell|$.*

Démonstration Supposons que la suite numérique $(u_n)_n$ converge vers le scalaire ℓ, c'est-à-dire d'après la définition 5.1, supposons que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

[6] Voir la proposition 3.10 p. 111.

D'après la deuxième inégalité triangulaire[7], on a $\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant |u_n - \ell|$. On en déduit que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N \Longrightarrow \big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant \varepsilon\big)$$

c'est-à-dire que la suite numérique de terme général $|u_n|$ converge vers $|\ell|$. □

En général, on ne peut rien conclure sur la nature de la suite de terme général u_n à partir de la nature de la suite de terme général $|u_n|$. Considérons la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. La suite de terme général $|u_n|$ converge vers 1 mais la suite $(u_n)_n$ diverge. Dans le cas où la suite converge vers 0 on a toutefois le résultat suivant.

PROPOSITION 5.5 *La suite numérique $(u_n)_n$ converge vers* 0 *si et seulement si la suite réelle de terme général $|u_n|$ converge vers* 0.

Démonstration Les équivalences suivantes résultent de la définition 5.1 et des propriétés de la valeur absolue[7],

$$\begin{array}{ll} & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \Longleftrightarrow & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - 0| \leqslant \varepsilon) \\ \Longleftrightarrow & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon) \\ \Longleftrightarrow & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow \big||u_n| - 0\big| \leqslant \varepsilon) \\ \Longleftrightarrow & \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \end{array}$$

et permettent de démontrer la proposition. □

EXERCICE 4 Vérifier que la suite complexe $(u_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si la suite réelle de terme général $(\mathcal{R}\mathrm{e}(u_n))_n$ converge vers $\mathcal{R}\mathrm{e}(\ell)$ et la suite réelle de terme général $(\mathcal{I}\mathrm{m}(u_n))_n$ converge vers $\mathcal{I}\mathrm{m}(\ell)$.

DÉFINITION 5.2 ✗ *On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant \kappa)$$

et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

✗ *On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ si*

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_-^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant \kappa)$$

et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

[7] Voir la proposition 3.7 p. 108.

Remarque Il résulte de manière immédiate de la définition 5.2 que la suite $(u_n)_n$ *tend vers* $+\infty$ si et seulement si la suite $(-u_n)_n$ *tend vers* $-\infty$.

Exemple Montrons que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = n$ tend vers $+\infty$. Soient κ un réel strictement positif et $N = E(\kappa) + 1$; on a $N \geqslant \kappa$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$ on a $u_n = n \geqslant N \geqslant \kappa$. Il en résulte que

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant \kappa),$$

ce qui d'après la définition 5.2 établit que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 5 Montrer que la suite de terme général n^2 tend vers $+\infty$. Montrer que la suite de terme général $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.

Remarque La nature d'une suite réelle est de l'un des trois types suivants :
- convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ (comme la suite de terme général $\frac{1}{n}$) ;
- divergente en tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$ (comme la suite de terme général n) ;
- divergente sans tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ (comme la suite de terme général $(-1)^n$).

Par abus de langage, on dit qu'une suite a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour signifier qu'elle tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). On s'interdira toutefois de dire qu'une suite converge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. On dit aussi qu'une suite admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ pour signifier qu'elle converge vers un réel ou diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

5.1.2 Suites bornées

Définition 5.3 *Une suite numérique $(u_n)_n$ est dite bornée s'il existe un réel positif M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_n| \leqslant M$.*

Exemples

1. La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sin(n)$ est bornée car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| \leqslant 1$.

2. La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = e^n$ n'est pas bornée car[8] quel que soit le réel positif M, pour le terme de rang $n = \mathrm{E}(\ln(n+1)) + 1$ on a $|u_n| > M$.

[8] Traduisons sous forme d'assertion quantifiée la définition 5.3. La suite $(u_n)_n$ est bornée si

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant M.$$

En appliquant les règles de négation des assertions quantifiées, voir p. 14, on établit qu'une suite $(u_n)_n$ n'est pas bornée si

$$\forall M \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad |u_n| > M.$$

Définition 5.4 ✗ *Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite majorée s'il existe un réel A tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \leqslant A$. Ce réel A est appelé un majorant de la suite $(u_n)_n$.*

✗ *Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite minorée s'il existe un réel B tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \geqslant B$. Ce réel B est appelé un minorant de la suite $(u_n)_n$.*

Remarques

1. On rappelle que $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné mais que ce n'est pas le cas de $\mathbb{C}$. La notion de suite minorée ou majorée n'a donc de sens que pour les suites réelles.

2. Dire que la suite $(u_n)_n$ est majorée (resp. minorée) revient à dire, voir la définition 3.3, page 95, que l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs prises par la suite est un ensemble majoré (resp. minoré).

Proposition 5.6 *Toute suite numérique convergente est bornée.*

Démonstration Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. La définition 5.1, où l'assertion quantifiée est considérée avec $\varepsilon = 1$, indique que

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_1 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant 1).$$

Pour $n \geqslant N_1$ on a

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|.$$

La suite est donc majorée par $M = \max(u_0, u_1, \ldots, u_{N_1-1}, 1 + |\ell|)$. □

Proposition 5.7 ✗ *Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.*

✗ *Toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est minorée. Toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est majorée.*

Démonstration ⊵ La première assertion se démontre aisément en utilisant les propriétés de la valeur absolue. Si la suite réelle $(u_n)_n$ est bornée par $M \in \mathbb{R}^+$ alors M est un majorant et $-M$ est un minorant de la suite. Réciproquement, si la suite réelle $(u_n)_n$ est majorée par le réel A et minorée par le réel B alors elle est bornée par $M = \max(|A|, |B|)$.

⊵ Montrons que toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est minorée. Supposons que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$. On a[9]

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_1 \Longrightarrow u_n \geqslant 1).$$

La suite est donc minorée par $M = \min(u_0, u_1, \ldots, u_{N_1-1}, 1)$. Sur le même principe, on vérifie que toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est majorée. □

[9] Voir la définition 5.2 p. 177 ; on prend $\kappa = 1$.

Remarques

1. Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente. C'est le cas de la suite de terme général $(-1)^n$ qui est bornée par 1 mais qui diverge.

2. Une suite réelle tendant vers $+\infty$ n'est pas majorée mais une suite qui n'est pas majorée ne tend pas nécessairement vers $+\infty$. C'est le cas de la suite de terme général $(-1)^n\ n$ qui n'est pas majorée et qui ne tend pas vers $+\infty$.

5.2 Propriétés

5.2.1 Propriétés algébriques pour les suites numériques

On munit l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites numériques de deux lois de composition interne $+_{\mathcal{S}}$ et $\times_{\mathcal{S}}$ définies de la manière suivante. Si $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ sont deux éléments de $\mathcal{S}$, on définit $u +_{\mathcal{S}} v$ comme étant la suite de terme général $u_n + v_n$ et $u \times_{\mathcal{S}} v$ comme étant la suite de terme général $u_n \times v_n$.

On vérifie aisément les propriétés suivantes en utilisant les propriétés[10] de la somme et du produit dans $\mathbb{R}$.

1. La loi $+_{\mathcal{S}}$ est associative : $\forall (u, v, w) \in \mathcal{S}^3 \quad (u +_{\mathcal{S}} v) +_{\mathcal{S}} w = u +_{\mathcal{S}} (v +_{\mathcal{S}} w)$.
2. La loi $+_{\mathcal{S}}$ est commutative : $\forall (u, v) \in \mathcal{S}^2 \quad u +_{\mathcal{S}} v = v +_{\mathcal{S}} u$.
3. L'ensemble $\mathcal{S}$ possède un élément neutre pour $+_{\mathcal{S}}$, noté $(0)_n$ qui est la suite dont tous les termes sont nuls (cette suite est appelée la *suite nulle*). On a $\forall u \in \mathcal{S} \quad u +_{\mathcal{S}} (0)_n = u$.
4. Tout élément $u = (u_n)_n$ de $\mathcal{S}$ possède un symétrique pour la loi $+_{\mathcal{S}}$ noté $-u$ qui est la suite de terme général $-u_n$. On a $u +_{\mathcal{S}} (-u) = 0$.
5. La loi $\times_{\mathcal{S}}$ est associative :
$$\forall (u, v, w) \in \mathcal{S}^3 \quad (u \times_{\mathcal{S}} v) \times_{\mathcal{S}} w = u \times_{\mathcal{S}} (v \times_{\mathcal{S}} w).$$
6. La loi $\times_{\mathcal{S}}$ est commutative : $\forall (u, v) \in \mathcal{S}^2 \quad u \times_{\mathcal{S}} v = v \times_{\mathcal{S}} u$.
7. La loi $\times_{\mathcal{S}}$ est distributive par rapport à $+_{\mathcal{S}}$:
$$\forall (u, v, w) \in \mathcal{S}^3 \quad u \times_{\mathcal{S}} (v +_{\mathcal{S}} w) = (u \times_{\mathcal{S}} v) + (u \times_{\mathcal{S}} w).$$
8. L'ensemble $\mathcal{S}$ possède un élément neutre pour $\times_{\mathcal{S}}$, noté $(1)_n$ qui est la suite de terme général 1. On a $\forall u \in \mathcal{S} \quad u \times_{\mathcal{S}} (1)_n = u$.

Si u est une suite dont tous les termes sont non nuls, on note $1/u$ le symétrique de u pour la loi $\times_{\mathcal{S}}$. Le terme général de la suite $1/u$ est $1/u_n$.

On munit l'ensemble $\mathcal{S}$ d'une loi de composition externe que l'on note $\cdot$ et que l'on définit de la manière suivante : si $u = (u_n)_n \in \mathcal{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $\lambda \cdot u$ est la suite de terme général $\lambda \times u_n$. On a les propriétés suivantes.

[10] Voir p. 99.

9. $\forall (u,v) \in \mathcal{S}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot (u +_{\mathcal{S}} v) = \lambda \cdot u +_{\mathcal{S}} \lambda \cdot v.$
10. $\forall u \in \mathcal{S} \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u +_{\mathcal{S}} \mu \cdot u.$
11. $\forall u \in \mathcal{S} \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u.$
12. $\forall u \in \mathcal{S} \quad 1 \cdot u = u.$

Proposition 5.8 *L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites numériques muni des lois de composition interne $+_{\mathcal{S}}$ et $\times_{\mathcal{S}}$ est un anneau commutatif*[11]*.*

Démonstration Cela traduit les propriétés 1 à 7 ci dessus, voir la définition 2.36, page 66. □

Nous verrons dans la suite de ce cours que les propriétés 1 à 4 et 9 à 12 confèrent à l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites numériques une structure d'espace vectoriel.

Nous noterons aussi plus simplement $+$ et $\times$ les lois $+_{\mathcal{S}}$ et $\times_{\mathcal{S}}$. Les propositions qui suivent sont d'un grand intérêt pratique puisqu'elles permettent de déterminer la nature des suites $u+v$ ou $u \times v$ en fonction de la nature des suites u et v.

Proposition 5.9 *Soient u et v deux suites numériques de terme général u_n et v_n et soit λ un scalaire.*

- ✗ *Si les suites u et v convergent respectivement vers ℓ et ℓ' alors la suite $u+v$ converge vers $\ell + \ell'$.*
- ✗ *Si les suites u et v convergent respectivement vers ℓ et ℓ' alors la suite $u \times v$ converge vers $\ell \times \ell'$.*
- ✗ *Si la suite u converge vers ℓ alors la suite $\lambda \cdot u$ converge vers $\lambda \times \ell$.*
- ✗ *Si les suites u et v convergent respectivement vers ℓ et ℓ' et si $\ell' \neq 0$ alors la suite u/v converge vers ℓ/ℓ'.*

Démonstration Cette proposition est admise. Les assertions énoncées se démontrent en utilisant la définition de la convergence d'une suite, voir la définition 5.1. On pourra consulter la démonstration de la proposition 13.12, page 608, qui est très similaire. □

Remarque Si la suite u converge et la suite v diverge alors la suite $u+v$ diverge. Mais si les deux suites u et v divergent alors on ne peut rien conclure quant à la nature de la suite $u+v$; elle peut diverger ou converger. Considérons par exemple les suites de terme général $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$. Ces deux suites divergent mais la suite de terme général $u_n + v_n$ est la suite nulle et converge.

(11) Voir la définition 2.36 p. 66.

5.2.2 Autres propriétés algébriques pour les suites réelles

Dans le cas où les deux suites u et v ne convergent pas toutes les deux dans $\mathbb{R}$, la nature des suites $u+v$ et $u \times v$ ne peut être établie que sous certaines hypothèses supplémentaires sur les suites u et v. Les cas où il est possible de statuer sur la nature des suites $u+v$ et $u \times v$ sont indiqués dans les trois propositions suivantes. Tous les autres cas correspondent à des situations où il n'est pas possible de conclure sur la nature de la suite sans une étude plus approfondie (on parle de *forme indéterminée*).

PROPOSITION 5.10 *Soient u et v deux suites réelles.*

- ✗ *Si la suite u tend vers $+\infty$ et si la suite v est minorée (en particulier si la suite v a pour limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) alors la suite $u+v$ tend vers $+\infty$.*
- ✗ *Si la suite u tend vers $-\infty$ et si la suite v est majorée (en particulier si la suite v a pour limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) alors la suite $u+v$ tend vers $-\infty$.*

PROPOSITION 5.11 *Soient u et v deux suites réelles.*

- ✗ *Si la suite u tend vers $+\infty$ et si la suite v a pour limite $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ alors la suite $u \times v$ tend vers $+\infty$.*
- ✗ *Si la suite u tend vers $+\infty$ et si la suite v a pour limite $\ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ alors la suite $u \times v$ tend vers $-\infty$.*
- ✗ *Si la suite u tend vers $-\infty$ et si la suite v a pour limite $\ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ alors la suite $u \times v$ tend vers $+\infty$.*
- ✗ *Si la suite u tend vers $-\infty$ et si la suite v a pour limite $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ alors la suite $u \times v$ tend vers $-\infty$.*

PROPOSITION 5.12 *Soit u une suite réelle.*

- ✗ *Si la suite u à termes tous non nuls tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ alors la suite $1/u$ converge vers 0.*
- ✗ *Si la suite à termes strictement positifs (resp. négatifs) u converge vers 0 alors la suite $1/u$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*
- ✗ *Si la suite u tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et si λ est un réel strictement positif alors la suite $\lambda \cdot u$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*
- ✗ *Si la suite u tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et si μ est un réel strictement négatif alors la suite $\mu \cdot u$ tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).*

On peut résumer les propriétés qui ont été énoncées dans les propositions précédentes sous forme de tableaux. Le tableau suivant indique la limite éventuelle de la suite $u+v$ en fonction de la limite des suites u et v. On écrit IND pour *forme indéterminée* lorsque les hypothèses ne sont pas suffisantes pour conclure. On écrit PL pour signifier qu'il n'y a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

$v + u$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	PL
ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$	IND
PL	PL	IND	IND	IND

Le tableau suivant indique la limite éventuelle de la suite $u \times v$ en fonction de la limite des suites u et v.

$v \times u$	$\ell' > 0$	$\ell' = 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$\ell > 0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$\ell = 0$	0	0	0	IND	IND	IND
$\ell < 0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	PL
$+\infty$	$+\infty$	IND	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	IND
PL	PL	IND	PL	IND	IND	IND

On dispose à présent de la possibilité de déterminer la nature d'une suite numérique beaucoup plus simplement qu'en utilisant la définition 5.1. La méthode consiste à scinder le terme général de la suite à étudier en faisant apparaître le terme général de suites dont on connaît la nature (ou dont la nature est facile à déterminer) et on conclut en utilisant les résultats des propositions 5.9 à 5.12.

Exemples

1. Nous avons montré que la suite de terme général n tendait vers $+\infty$. On en déduit que la suite de terme général n^2 (qui est le produit de cette suite par elle-même) tend également vers $+\infty$. On peut alors affirmer que la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = 3n^2$ et la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = 5n$ tendent toutes les deux vers $+\infty$. Finalement, on peut conclure que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 3n^2 + 5n$ tend vers $+\infty$ car elle est la somme de la suite $(v_n)_n$ et de la suite $(w_n)_n$.

2. Considérons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 3n^2 - 5n$. Elle est la somme de la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = 3n^2$ et de la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = -5n$. La suite $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$ alors que la suite $(w_n)_n$ tend vers $-\infty$. Nous sommes dans un cas d'indétermination quant à la nature de la suite $(u_n)_n$. Pour lever cette indétermination, remarquons que

$$u_n = n^2 \left(3 - \frac{5}{n}\right).$$

La suite de terme général n tend vers $+\infty$ donc d'après la proposition 5.10 la suite de terme général $1/n$ tend vers 0 et par conséquent la suite de terme général $5/n$ tend également vers 0. On en déduit que la suite de terme général $3 - 5/n$ admet pour limite 3 qui est un réel strictement positif. On en conclut d'après la proposition 5.10 que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.

3. Considérons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}$. La suite de terme général $\sqrt{2n-1}$ tend vers $+\infty$ alors que la suite de terme général $-\sqrt{2n+1}$ tend vers $-\infty$ (nous le justifierons de manière précise dans la suite du chapitre). Nous sommes là encore dans un cas d'indétermination quant à la nature de la suite $(u_n)_n$. Pour lever cette indétermination, remarquons que[12]

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}\right)\left(\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}\right)}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} = -\frac{2}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}}.$$

La suite de terme général $\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}$ tend vers $+\infty$. On en déduit d'après la proposition 5.10 que la suite $(u_n)_n$ admet pour limite 0.

5.2.3 Propriétés d'ordre pour les suites réelles

La proposition suivante indique que si tous les termes d'une suite réelle convergente appartiennent à partir d'un certain rang à un intervalle fermé donné, alors la limite de la suite appartient nécessairement à ce même intervalle. Il s'agit d'un corollaire[13] de la proposition 5.3 correspondant successivement aux choix suivants de l'ensemble A : $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ et $[a, b]$.

Proposition 5.13 (Passage à la limite dans les inégalités)
Soient $(u_n)_n$ une suite réelle convergeant vers le réel ℓ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- ✗ *Si tous les termes de la suite $(u_n)_n$ sont minorés par le réel a à partir d'un certain rang alors $\ell \geqslant a$. Autrement dit,*

$$\big(\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant a)\big) \quad \Longrightarrow \quad \ell \geqslant a.$$

- ✗ *Si tous les termes de la suite $(u_n)_n$ sont majorés par le réel b à partir d'un certain rang alors $\ell \leqslant b$. Autrement dit,*

$$\big(\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant b)\big) \quad \Longrightarrow \quad \ell \leqslant b.$$

- ✗ *Si tous les termes de la suite $(u_n)_n$ à partir d'un certain rang appartiennent à l'intervalle $[a, b]$ alors $\ell \in [a, b]$. Autrement dit,*

$$\big(\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow a \leqslant u_n \leqslant b)\big) \quad \Longrightarrow \quad a \leqslant \ell \leqslant b.$$

---

[12] On multiplie et on divise simultanément l'expression de u_n par la quantité conjuguée de $\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}$ qui est $\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}$ puis on utilise la relation $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ valable pour tous réels a et b.

[13] Une autre façon d'établir la proposition consiste à utiliser la proposition 5.2 avec les suites qui ont pour terme général $u_n - a$ et $b - u_n$. On notera que la troisième assertion de la proposition est la conjonction des deux premières.

Remarque L'assertion $\left(\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n > a)\right)$ ne permet pas de conclure que $\ell > a$. On peut seulement conclure que la limite vérifie $\ell \geqslant a$. Par exemple la suite de terme général $u_n = 1/n$ vérifie $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ mais $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La proposition suivante indique que si la limite d'une suite réelle appartient à un intervalle ouvert donné alors à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à ce même intervalle.

PROPOSITION 5.14 *Soient $(u_n)_n$ une suite réelle convergeant vers le réel ℓ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si $a < \ell < b$ alors il existe un entier N tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n \geqslant N \Longrightarrow a < u_n < b\right).$$

Démonstration Considérons le réel $\varepsilon = \frac{1}{2}\min(b - \ell, \ell - a)$. On a $\varepsilon > 0$, $\ell - \varepsilon > a$ et $\ell + \varepsilon < b$. Puisque la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ, d'après la définition 5.1,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Autrement dit, pour $n \geqslant N$ on a $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$. Comme $\ell - \varepsilon > a$ et $\ell + \varepsilon < b$, on en conclut que $a < u_n < b$ pour tout entier n supérieur à N. □

THÉORÈME 5.1 (Théorème d'encadrement)
Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles vérifiant

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n).$$

✗ *Si les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent respectivement vers ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 alors $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \ell_3$.*

✗ *Si les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ.*

Démonstration ⊵ Considérons trois suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergeant respectivement vers ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3. Utilisons un raisonnement par l'absurde pour montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$ on a $u_n \leqslant v_n$ alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$. Supposons[14] par conséquent que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$ et que $\ell_1 > \ell_2$. On a dans ce cas $\ell_1 > \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)$ et la proposition 5.14 indique que

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n \geqslant N_1 \implies \tfrac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) < u_n\right).$$

On a aussi $\ell_2 < \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)$, donc d'après la proposition 5.14,

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n \geqslant N_2 \implies v_n < \tfrac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)\right).$$

[14] On rappelle, voir p. 18, que la négation de l'implication « $P \Longrightarrow Q$ » (si P alors Q) est « P et non(Q) ».

On en déduit que pour tout entier n supérieur à $\max(N_1, N_2)$ on a

$$v_n < \tfrac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) < u_n.$$

Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant N$ et achève le raisonnement par l'absurde. On procède de la même manière pour montrer que $\ell_2 \leqslant \ell_3$ ce qui permet d'en déduire que l'on a $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \ell_3$. La première partie du théorème est démontrée.

$\trianglerighteq$ Soit ε un réel strictement positif fixé. Par hypothèse les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergeant vers ℓ, on a d'après la définition 5.1

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon), \tag{2}$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_2 \implies |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon). \tag{3}$$

Par ailleurs, l'hypothèse

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \implies u_n \leqslant v_n \leqslant w_n)$$

implique que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N \implies u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell\big).$$

Soit $N_3 = \max(N, N_1, N_2)$. Pour $n \geqslant N_3$ on a d'après (2) et (3),

$$-\varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi pour tout entier n supérieur à N_3 on a $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. D'après la définition 5.1, on en conclut que la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ. La seconde partie du théorème est démontrée. $\square$

Exemple Considérons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n}\sin(n)$. Compte tenu du fait que la fonction sinus est majorée par 1 et minorée par -1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Nous avons montré que la suite de terme général $1/n$ tendait vers 0. Il en est de même d'après la proposition 5.9 de la suite de terme général $-1/n$. Le théorème d'encadrement permet de conclure que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

La proposition suivante joue un rôle analogue au théorème d'encadrement dans le cas des suites qui tendent vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Proposition 5.15 *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles vérifiant*

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \implies u_n \leqslant v_n).$$

✗ *Si la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ alors la suite $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$.*

✗ *Si la suite $(v_n)_n$ tend vers $-\infty$ alors la suite $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$.*

Démonstration $\trianglerighteq$ Supposons que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, c'est-à-dire d'après la définition 5.2, supposons que

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_1 \implies u_n \geqslant \kappa).$$

Par hypothèse

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \implies u_n \leqslant v_n).$$

On en déduit que pour tout entier n supérieur à $N_2 = \max(N_1, N)$ on a $v_n \geqslant u_n \geqslant \kappa$. Ainsi

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_2 \implies v_n \geqslant \kappa)$$

et d'après la définition 5.2, on en conclut que la suite $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$.

$\trianglerighteq$ Supposons que la suite $(v_n)_n$ tend vers $-\infty$. La suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = -v_n$ tend vers $+\infty$ et d'après l'hypothèse de la proposition

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \implies w_n \leqslant -u_n).$$

De la première partie de la démonstration, on en déduit que la suite de terme général $-u_n$ tend vers $+\infty$. Cela implique que la suite $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$. □

5.3 Monotonie

5.3.1 Suites réelles monotones

DÉFINITION 5.5

✗ *On dit que la suite réelle* $(u_n)_n$ *est croissante si :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geqslant u_n$.

✗ *On dit que la suite réelle* $(u_n)_n$ *est strictement croissante si :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$.

✗ *On dit que la suite réelle* $(u_n)_n$ *est décroissante si :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n$.

✗ *On dit que la suite réelle* $(u_n)_n$ *est strictement décroissante si :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.

✗ *On dit qu'une suite réelle est monotone si elle est croissante ou décroissante. On dit qu'une suite réelle est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Remarques

1. Une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante. C'est le cas de la suite de terme général $(-1)^n$. La négation de l'assertion « la suite est croissante » n'est donc pas « la suite est décroissante » mais « il existe un entier naturel n pour lequel $u_{n+1} < u_n$ ».

2. Pour montrer qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est croissante, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Pour montrer qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est décroissante, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

3. Si tous les termes de la suite $(u_n)_n$ sont *strictement positifs*, alors pour montrer que la suite est croissante on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1}/u_n \geqslant 1$ Pour montrer qu'elle est décroissante, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1}/u_n \leqslant 1$.

4. Si tous les termes de la suite $(u_n)_n$ sont *strictement négatifs*, alors pour montrer que la suite est croissante on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1}/u_n \leqslant 1$ Pour montrer qu'elle est décroissante, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1}/u_n \geqslant 1$.

5. Il résulte de manière directe de la définition que si la suite $(u_n)_n$ est croissante (resp. décroissante) alors la suite de terme général $-u_n$ est une suite décroissante (resp. croissante).

6. Rappelons que le corps $\mathbb{C}$ n'étant pas muni de relation d'ordre, la notion de suite monotone ne peut pas avoir de sens pour une suite complexe.

Exemples

1. La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ est strictement croissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^p} > 0.$$

2. Montrons que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \mathrm{e}^{2n+\frac{1}{n}}$ est strictement croissante. Il s'agit d'une suite à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{2-\frac{1}{n(n+1)}}.$$

Comme $0 < \frac{1}{n(n+1)} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 < 2 - \frac{1}{n(n+1)} < 2$. La fonction exponentielle étant croissante, on obtient $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \mathrm{e}^1 > 1$, *i.e.* $u_{n+1} > u_n$.

3. Considérons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Pour déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f' : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x(x+1)^2}$. Cette dérivée étant à valeurs strictement positives, l'application f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, f est nécessairement à valeurs strictement négatives sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = f(n) < 0.$$

La suite $(u_n)_n$ est donc strictement décroissante.

PROPOSITION 5.16

✗ *Si les suites réelles u et v sont croissantes (resp. décroissantes) alors la suite $u + v$ est croissante (resp. décroissante).*

✗ *Si les suites réelles u et v sont à termes positifs et croissantes (resp. décroissantes) alors la suite $u \times v$ est croissante (resp. décroissante).*

✗ *Si la suite u est croissante (resp. décroissante) alors pour tout réel λ positif la suite $\lambda \cdot u$ est croissante (resp. décroissante) et pour tout réel μ négatif la suite $\mu \cdot u$ est décroissante (resp. croissante).*

Démonstration La vérification est aisée en utilisant la définition 5.5 et les propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. □

THÉORÈME 5.2

✗ *Toute suite croissante et majorée est convergente.*

✗ *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Démonstration ⊵ Soit $(u_n)_n$ une suite croissante et majorée par un réel M. L'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée (par M) de $\mathbb{R}$, donc[15] il admet une borne supérieure ℓ et on a[16]

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \ell \qquad \text{et} \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad u_{N_\varepsilon} > \ell - \varepsilon$$

Par ailleurs, comme la suite $(u_n)_n$ est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N_\varepsilon$ on a $u_n \geqslant u_{N_\varepsilon}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\ell \geqslant u_n \geqslant u_{N_\varepsilon} > \ell - \varepsilon,$$

autrement dit que $0 \leqslant \ell - u_n < \varepsilon$. Ainsi, pour tout réel strictement positif ε il existe un entier N_ε tel que pour tout entier n supérieur à N_ε on ait $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. D'après la définition 5.1, cela signifie que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

⊵ La deuxième assertion se déduit de la première en appliquant le résultat qui vient d'être établi à la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = -u_n$. Si la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée alors la suite $(v_n)_n$ est croissante et majorée. □

Exemple Nous avons établi page 188 que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est décroissante. Montrons qu'elle est minorée. Pour tout

[16] Voir la caractérisation de la borne supérieure d'un ensemble donnée à la proposition 3.2 p. 101.

$k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto 1/x$ est majorée sur l'intervalle $[k, k+1]$ par $1/k$ et est minorée par 0, *i.e* : $\forall x \in [k, k+1] \quad 0 \leqslant 1/x \leqslant 1/k$. On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x.$$

Or,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(k+1) - \ln(k) \qquad \text{et} \qquad \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

La première somme vaut $\sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1)-\ln(k)\big) = \ln(n+1)-\ln(1) = \ln(n+1)$. On en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \geqslant 0.$$

D'après le théorème 5.2, la suite $(u_n)_n$ étant décroissante et minorée, elle converge. Sa limite est un réel appelé *constante d'Euler*[17] et est notée γ.

Remarque En prenant la contraposée[18] des implications du théorème 5.2, on obtient la caractérisation suivante d'une suite qui ne converge pas : ou bien elle n'est pas bornée, ou bien elle n'est pas monotone.

PROPOSITION 5.17

✗ *Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers* $+\infty$.

✗ *Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers* $-\infty$.

Démonstration ⊵ Soit $(u_n)_n$ une suite réelle non majorée, c'est-à-dire[19] telle que

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad u_N > M.$$

[17] La constante d'Euler, appelée aussi constante de Mascheroni du nom du géomètre italien Lorenzo Mascheroni (1750-1800), bien que très étudiée n'est qu'imparfaitement connue au niveau de ses propriétés. On ignore par exemple toujours si la constante d'Euler est un nombre rationnel ou non. Godfrey Hardy, un des grands mathématiciens du XX$^{\text{e}}$ siècle, était si perplexe devant les propriétés de la constante d'Euler qu'il déclara qu'il donnerait sa chaire à Oxford à qui prouverait son irrationalité. Sa valeur approchée est $\gamma \approx 0,57721$.

[18] Voir p. 12 la signification de ce terme.

[19] Voir la définition 5.4 p. 179. On en considère ici la négation :

$$\text{non } (\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad u_N \leqslant M) \equiv \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad u_N > M.$$

Si on suppose que la suite $(u_n)_n$ est croissante alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$ on a $u_n \geqslant u_N$. On en conclut que

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant M\big)$$

c'est-à-dire[20] que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.

$\trianglerighteq$ La deuxième assertion se déduit de la première en appliquant le résultat qui vient d'être établi à la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = -u_n$. Si la suite $(u_n)_n$ est décroissante et non minorée alors la suite $(v_n)_n$ est croissante et non majorée. $\square$

Exemple Soit $r \in]1, +\infty[$. Montrons que la suite de terme général $u_n = r^n$ tend vers $+\infty$. Il s'agit d'une suite dont les termes sont strictement positifs et qui est strictement croissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r > 1.$$

Cette suite n'est pas bornée : pour tout réel strictement positif κ, le terme de rang $n = 1 + E\left(\ln(\kappa)/\ln(r)\right)$ est supérieur strictement à κ puisque

$$u_n > \kappa \quad \Longleftrightarrow \quad r^n > \kappa \quad \Longleftrightarrow \quad n\ln(r) > \ln(\kappa) \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{\ln(\kappa)}{\ln(r)},$$

les deux dernières équivalences résultant du fait que la fonction logarithme est strictement croissante et strictement positive sur $]1, +\infty[$. D'après la proposition 5.17, on en déduit que si $r \in]1, +\infty[$, la suite de terme général $u_n = r^n$ tend vers $+\infty$.

5.3.2 Suites adjacentes

Définition 5.6 *Deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *l'une des deux suites est croissante et l'autre est décroissante ;*
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0.$

Exemple La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}$ est croissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

La suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ est décroissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

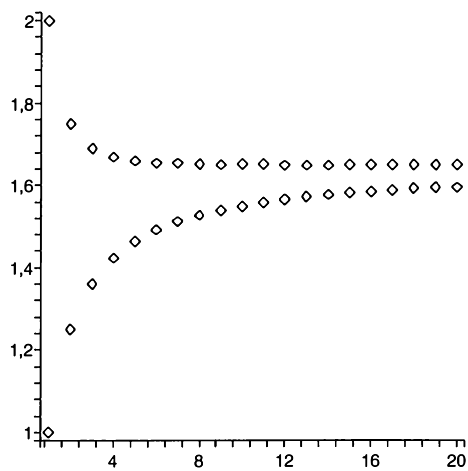
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) < 0.$$

---

[20] Voir la définition 5.2 p. 177.

Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$. Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont donc adjacentes. Illustrons graphiquement cet exemple avec MAPLE.

```
> u:=n -> sum(1/k^2,k=1..n):
> v:=n -> u(n)+1/n:
> N:=20: plot([[[n,u(n)] $n=1..N],[[n,v(n)] $n=1..N]],style=point);
```



THÉORÈME 5.3 *Si deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes alors elles convergent et ont même limite.*

Démonstration Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites adjacentes telles que[21] la suite $(u_n)_n$ est croissante et la suite $(v_n)_n$ est décroissante. Considérons la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$. En utilisant le fait que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont monotones, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_{n+1} - w_n = \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\leqslant 0} - \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\geqslant 0} \leqslant 0.$$

La suite $(w_n)_n$ est donc décroissante. Par ailleurs, puisque les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes on a $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ et la suite $(w_n)_n$ converge vers 0. Les termes de la suite $(w_n)_n$ sont donc nécessairement positifs. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant v_n$. En utilisant par ailleurs la monotonie des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

(21) Étant données deux suites adjacentes, on peut toujours décider de nommer $(u_n)_n$ celle des deux qui est croissante et $(v_n)_n$ l'autre suite. Cette hypothèse n'est donc aucunement limitative.

Puisque la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée (par exemple par v_0), d'après le théorème 5.2 elle converge vers un réel ℓ_1. Puisque la suite $(v_n)_n$ est décroissante et minorée (par exemple par u_0), d'après le théorème 5.2 elle converge vers un réel ℓ_2. Des égalités

$$0 = \lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \ell_1 - \ell_2,$$

on conclut que $\ell_1 = \ell_2$, ce qui achève la démonstration. □

Remarque Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites adjacentes. Elles convergent vers une même limite ℓ. Si l'on suppose que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante alors la démonstration du théorème 5.3 indique que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

Cela signifie qu'on peut obtenir une valeur approchée de la limite commune ℓ des deux suites adjacentes en calculant $\widetilde{\ell_n} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ pour n assez grand. L'erreur commise est inférieure à $\frac{1}{2}|v_n - u_n|$.

Exemple Nous avons établi page 189 que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est convergente et que sa limite est la constante d'Euler γ. Nous avons établi page 188 que la suite $(u_n)_n$ est décroissante. Considérons la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Par une méthode analogue à celle utilisée page 188 pour montrer que $(u_n)_n$ est décroissante, on montre que la suite $(v_n)_n$ est croissante. Comme par ailleurs

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \to +\infty} \ln(1 + \tfrac{1}{n}) = 0,$$

les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Elles convergent toutes les deux vers la même limite γ. On dispose ainsi d'une méthode pour calculer une valeur approchée de la constante d'Euler γ. On a

$$\gamma \approx \frac{1}{2}(u_n + v_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \ln\big(n(n+1)\big)$$

pour une valeur de n choisie assez grande. Supposons que l'on veuille une valeur approchée de γ avec une erreur inférieure à ε. Compte tenu de la remarque précédente, il faut choisir n tel

$$\tfrac{1}{2}|v_n - u_n| = \tfrac{1}{2} \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{soit} \quad n \geqslant \frac{1}{e^{2\varepsilon} - 1}.$$

```
> epsilon:=10^(-3): n:=ceil(1/(exp(2*epsilon)-1));
                              n := 500
> evalf(sum(1/k,k=1..n)-(1/2)*log(n*(n+1)));
                            0.577216330
```

Une valeur approchée de la constante d'Euler est donc 0.577.

Exercice 6 Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$u_0 = a, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \quad \text{et} \quad v_0 = b, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1 - Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont à valeurs positives et que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2 - En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante et minorée.
3 - Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
La limite commune des deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ est appelée *moyenne arithmético-géométrique* des réels a et b.

5.4 Suites extraites

Définition 5.7 (Suite extraite)
La suite numérique $(v_n)_n$ est une suite extraite ou une sous-suite de la suite $(u_n)_n$ s'il existe une application h de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante, appelée extractrice, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = u_{h(n)}.$$

Exemples

1. L'application $h : n \in \mathbb{N} \mapsto 2n$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite de terme général $v_n = u_{2n}$ est appelée *suite des termes pairs* extraite de la suite $(u_n)_n$.

2. L'application $h : n \in \mathbb{N} \mapsto 2n+1$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite de terme général $v_n = u_{2n+1}$ est appelée *suite des termes impairs* extraite de la suite $(u_n)_n$.

3. La suite de terme général $v_n = u_{|n^2-9n|}$ n'est pas une suite extraite de la suite $(u_n)_n$ car l'application $n \mapsto |n^2 - 9n|$ n'est pas strictement croissante.

4. L'application $h : n \in \mathbb{N} \mapsto n^3$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite de terme général $v_n = u_{n^3}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_n$.

Remarques

1. On vérifie par récurrence que si h est une extractrice alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $h(n) \geqslant n$.

2. Toute sous-suite d'une sous-suite de la suite $(u_n)_n$ est une sous-suite de la suite $(u_n)_n$ puisque la composée de deux applications croissantes est une application croissante (et par conséquent la composée de deux extractrices est une extractrice).

PROPOSITION 5.18 *Si la suite numérique $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ alors toute sous-suite de la suite $(u_n)_n$ converge également vers ℓ.*

Démonstration Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$; d'après la définition 5.1, pour tout réel ε strictement positif fixé,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Considérons une extractrice h et montrons que la suite $(u_{h(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Comme h est une extractrice, h est croissante et $h(N) \geqslant N$. Donc, si $n \geqslant N$ on a $h(n) \geqslant h(N) \geqslant N$ et par conséquent $|u_{h(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon$. On a donc établi l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_{h(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon),$$

qui d'après la définition 5.1 indique que la suite $(u_{h(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. □

Remarques

1. On montrerait de même que si une suite réelle tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors toute sous-suite de cette suite tend également vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

2. En prenant la contraposée de l'assertion énoncée dans la proposition 5.18, on obtient une condition suffisante pour qu'une suite n'admette pas de limite dans $\mathbb{K}$: il suffit que deux suites extraites aient deux limites distinctes. Ainsi, la suite de terme général $(-1)^n$ diverge car la suite des termes pairs converge vers 1 et la suite des termes impairs converge vers -1.

3. On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite numérique tout scalaire qui est limite d'une sous-suite de cette suite. D'après la proposition 5.18, une suite numérique convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence. D'après la remarque précédente, une suite qui a plusieurs valeurs d'adhérence diverge. On peut montrer qu'une suite converge si et seulement si elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

Exemples

1. La suite de terme général $1/n^3$ converge vers 0 car il s'agit d'une suite extraite de la suite de terme général $1/n$ dont on a montré la convergence vers 0.

2. La suite de terme général $\sqrt{2n+1}$ tend vers $+\infty$ car il s'agit d'une suite extraite de la suite de terme général $\sqrt{n}$ qui tend vers $+\infty$.

3. Montrons que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sin(n)$ diverge. Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ. Dans ce cas, les deux suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ dont le terme général est

$$v_n = u_{n-1} = \sin(n-1) \quad \text{et} \quad w_n = u_{n+1} = \sin(n+1)$$

convergent elles aussi vers ℓ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin(1)\cos(n)$$

d'où
$$\sin(n)\big(\sin(n+1)-\sin(n-1)\big)=\sin(1)\sin(2n). \tag{4}$$

La suite de terme général $\sin(2n)$ est la suite extraite de la suite $(u_n)_n$ correspondant aux termes d'indices pairs. Elle converge donc également vers ℓ. En considérant la limite quand n tend vers $+\infty$ de chaque membre de la relation (4), on obtient $0=\sin(1)\,\ell$, puis comme $\sin(1)\neq 0$ on en déduit que $\ell=0$. On a donc établi que si la suite $(u_n)_n$ converge alors sa limite ne peut être que $\ell=0$. La limite de la suite $(x_n)_n$ de terme général $x_n=\cos(n)$ est dans ce cas égale à 1 ou -1 compte tenu de la relation $\cos^2(n)=1-\sin^2(n)$. Pour conclure, il suffit de considérer la relation

$$\cos(n+1)=\cos(n)\cos(1)-\sin(n)\sin(1)$$

qui quand n tend vers $+\infty$ impose, compte tenu de la limite des suites $(u_n)_n$ et $(x_n)_n$, que $\cos(1)=1$. Cette égalité qui est bien entendu fausse constitue la contradiction recherchée. On en conclut que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n=\sin(n)$ diverge.

L'assertion énoncée à la proposition 5.18 admet une réciproque. On peut montrer que si toutes les sous-suites d'une suite convergent vers une même limite alors la suite dont sont extraites les sous-suites converge elle-même vers cette limite. Bien entendu cette propriété n'est pas utilisable en pratique pour montrer qu'une suite converge (il est impossible d'étudier toutes les sous-suites d'une suite donnée, il en existe une infinité). Toutefois, il est possible en étudiant certaines sous-suites bien choisies de pouvoir conclure à la convergence de la suite comme le montre la proposition 5.19.

Proposition 5.19 *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite numérique $(u_n)_n$ converge est que la sous-suite des termes d'indice pair et la sous-suite des termes d'indice impair admettent la même limite. Dans ce cas, cette limite commune est la limite de la suite $(u_n)_n$.*

Démonstration $\trianglerighteq$ D'après la proposition 5.18, si la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ alors la sous-suite des termes d'indice pair et la sous-suite des termes d'indice impair convergent toutes les deux vers ℓ.

$\trianglerighteq$ Réciproquement, supposons que la sous-suite des termes d'indice pair et la sous-suite des termes d'indice impair convergent vers une même limite ℓ. D'après la définition 5.1, pour tout réel ε strictement positif,

$$\begin{aligned} &\exists N_1\in\mathbb{N}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad (n\geqslant N_1\Longrightarrow |u_{2n}-\ell|\leqslant\varepsilon),\\ \text{et}\quad &\exists N_2\in\mathbb{N}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad (n\geqslant N_2\Longrightarrow |u_{2n+1}-\ell|\leqslant\varepsilon). \end{aligned} \tag{5}$$

Soient $N=\max(2N_1,2N_2+1)$ et $p\in\mathbb{N}$ tel que $p\geqslant N$.

1. Si p est pair, il existe un entier k tel que $p=2k$ et $k\geqslant N_1$.
2. Si p est impair, il existe un entier k tel que $p=2k+1$ et $k\geqslant N_2$.

D'après (5), dans les deux cas on a $|u_p - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier N tel que $|u_p - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout entier p supérieur à N. D'après la définition 5.1, cela signifie que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. □

EXERCICE 7 Soit $(u_n)_n$ une suite numérique dont les sous-suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ convergent. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge.

WEIERSTRASS, Karl (1815, Osterfeld - 1897, Berlin).

Weierstrass enseigna les mathématiques à l'université de Berlin. On le considère généralement comme un des plus grands mathématiciens du XIX$^{\text{e}}$ siècle. Il introduit en mathématiques une rigueur jusqu'ici ignorée, mettant fin à des conclusions hardies de convergence, de continuité ou de dérivabilité comme le firent imprudemment par exemple Fourier et Cauchy. On lui doit la première définition précise de la notion de limite d'une suite et d'une fonction ainsi que la définition formelle de la continuité d'une fonction.

THÉORÈME 5.4 (Théorème de Bolzano-Weierstrass[22])
De toute suite numérique bornée on peut extraire une sous-suite convergente dans $\mathbb{K}$.

Démonstration Ce théorème est admis. Une méthode pour le démontrer consiste à construire par récurrence, pour une suite $(u_n)_n$ donnée, deux suites adjacentes $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ et une extractrice h telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{h(n)} \in [a_n, b_n]$. On aura alors

$$\begin{cases} a_n \leqslant b_n & \forall n \in \mathbb{N}, \\ [a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}] & \forall n \in \mathbb{N}, \\ \lim\limits_{n \to +\infty} a_n - b_n = 0. \end{cases}$$

Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ étant adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ qui vérifie (cette propriété est appelée « propriété des segments emboîtés »)

$$\{\ell\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n].$$

[22] Ce théorème a été énoncé par Bernhard Bolzano vers 1830 et a été démontré par Karl Weierstrass au début des années 1860.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aura $|u_{h(n)} - \ell| \leqslant b_n - a_n$ et on pourra conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} (u_{h(n)} - \ell) = 0,$$

autrement dit qu'il existe une suite extraite de la suite $(u_n)_n$ qui converge (vers ℓ). □

Exemple La suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (par exemple 1 est un majorant et -1 est un minorant) et on a montré page 196 qu'elle diverge. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on sait qu'on peut toutefois extraire de cette suite une sous-suite qui converge. Le théorème de Bolzano-Weierstrass ne nous indique malheureusement pas comment obtenir une telle sous-suite.

5.5 Suites de Cauchy

CAUCHY, Augustin-Louis (1789, Paris - 1857, Sceaux).

Augustin-Louis Cauchy commence sa carrière comme ingénieur militaire. En 1816, il obtient un poste de professeur à la Faculté des Sciences de Paris et à l'École Polytechnique et entre à l'Académie des Sciences. L'œuvre de Cauchy est considérable, surtout en analyse où il a su donner le cadre rigoureux nécessaire à son développement. Il introduit une notion précise de continuité et élabore une définition rigoureuse de l'intégrale. Son travail concerne tous les domaines des mathématiques, en particulier les équations différentielles, la théorie des groupes et l'algèbre linéaire.

DÉFINITION 5.8 (Suite de Cauchy)
La suite numérique $(u_n)_n$ est appelée suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ si elle vérifie la condition :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$
$$\big((n \geqslant N \ \ et \ \ m \geqslant N) \Longrightarrow |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon\big).$$

En d'autres termes, une suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy si en se fixant un « seuil » ε on peut trouver un rang N tel que la distance entre deux termes quelconques de la suite choisis au delà du rang N reste toujours plus petite que la valeur seuil fixée. Intuitivement, on a l'impression qu'une telle suite doit converger. C'est ce que nous établirons précisément au théorème 5.5.

Exemple Montrons que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 1/n^2$ est une suite de Cauchy. Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geqslant m$, on a

$$|u_n - u_m| = \left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| = \left|\frac{n^2 - m^2}{n^2 m^2}\right| = \frac{(n+m)(n-m)}{n^2 m^2}.$$

Comme $0 \leqslant n-m \leqslant n$ et $0 \leqslant n+m \leqslant 2n$, on a $|u_n - u_m| \leqslant 2/m^2$.
Soit ε un réel strictement positif et $N = E(\sqrt{2/\varepsilon}) + 1$. Quels que soient les entiers m et n vérifiant $n \geqslant m \geqslant N$ on a $2/m^2 \leqslant \varepsilon$ et par conséquent

$$|u_n - u_m| \leqslant \varepsilon.$$

D'après la définition 5.8, la suite de terme général $1/n^2$ est une suite de Cauchy.

THÉORÈME 5.5 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite numérique soit une suite de Cauchy est qu'elle converge.*

Démonstration $\trianglerighteq$ Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ et montrons qu'il s'agit d'une suite de Cauchy. Remarquons tout d'abord que pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on obtient en utilisant la première inégalité triangulaire[23]

$$|u_n - u_m| = |u_n - \ell + \ell - u_m| \leqslant |u_n - \ell| + |u_m - \ell|. \tag{6}$$

Soit ε un réel strictement positif. Puisque la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, d'après la définition 5.1 on a[24]

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k \geqslant N \implies |u_k - \ell| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon). \tag{7}$$

D'après la relation (7), pour tous entiers m, n vérifiant $m > N$ et $n > N$, on a

$$|u_n - \ell| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{et} \quad |u_m - \ell| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

On déduit de la relation (6) que

$$|u_n - u_m| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$
$$\big((n \geqslant N \quad \text{et} \quad m \geqslant N) \implies |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon\big).$$

La suite $(u_n)_n$ est donc une suite de Cauchy.

$\trianglerighteq$ La démonstration de la réciproque fait l'objet de l'exercice 8. □

Exemple Montrons que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge en montrant que cette suite n'est pas une suite de Cauchy. Il s'agit pour cela d'établir l'assertion[25] :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N}$$
$$\big((n \geqslant N \ \text{ et } \ m \geqslant N) \ \text{ et } \ |u_n - u_m| > \varepsilon\big). \tag{8}$$

[23] Voir la proposition 3.7 p. 108.

[24] L'assertion donnée à la définition 5.1 est valable pour tout réel strictement positif ε ; elle est donc vraie pour le réel $\frac{1}{2}\varepsilon$ considéré ici.

[25] Cette assertion est la négation de l'assertion « la suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy », voir la définition 5.8.

Étant donné $N \in \mathbb{N}$, considérons les entiers $n = 2^N$ et $m = 2^{N+1}$; on a

$$u_m - u_n = \sum_{k=2^N+1}^{2^{N+1}} \frac{1}{k} > \left(2^{N+1} - 2^N\right) \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{2}$$

car dans la somme, il y a $2^{N+1} - 2^N$ termes positifs tous supérieurs à $1/2^{N+1}$. On a donc montré l'assertion (8) avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$. La suite $(u_n)_n$ n'est donc pas une suite de Cauchy et d'après le théorème 5.5 elle ne converge pas[26]. Il est par ailleurs aisé de vérifier que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante ; comme elle ne converge pas, la suite $(u_n)_n$ tend donc vers $+\infty$, voir le théorème 5.2 et la proposition 5.17.

Remarques

1. L'intérêt du théorème 5.5 est qu'il fournit un moyen de montrer qu'une suite converge sans qu'il soit besoin, comme lorsqu'on utilise la définition 5.1, de connaître la valeur de la limite de la suite.

2. On prendra garde que la condition $\lim_{n\to+\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$ n'est pas suffisante pour conclure que la suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy. On pourra s'en convaincre en considérant la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour laquelle

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ sans que cette suite soit une suite de Cauchy, voir l'exemple précédent.

Exercice 8 Le but de cet exercice est de montrer que toute suite numérique de Cauchy converge.
1 - Montrer en utilisant la définition 5.8 que toute suite de Cauchy est bornée (on pourra s'inspirer de la démonstration de la proposition 5.6, page 179).
2 - Montrer qu'une suite de Cauchy qui possède une suite extraite convergente est une suite convergente.
3 - En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, en déduire que toute suite numérique de Cauchy converge.

Remarque Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$) converge vers un unique réel (resp. complexe). On dit que $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est un *espace métrique*[27] *complet* pour la distance usuelle. Cette notion sera étudiée en détail au chap. 7 du *Cours de deuxième année*. Cette propriété n'est pas vérifiée par $\mathbb{Q}$: une suite de nombres rationnels peut être une suite de Cauchy et

[26] On peut également conclure à la divergence de la suite $(u_n)_n$ en remarquant que la relation $u_{2^N} - u_{2^{N+1}} > 1/2$ implique que les deux sous-suites $(u_{2^N})_{N\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2^{N+1}})_{N\in\mathbb{N}}$ extraites de la suite $(u_n)_n$ ne peuvent converger vers une même limite, voir la proposition 5.18.

ne pas converger dans $\mathbb{Q}$ (i.e. ne pas avoir pour limite un nombre rationnel). Bien entendu puisque $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, cela implique que la suite converge alors vers un nombre irrationnel dans $\mathbb{R}$. Un tel exemple de suite est fourni par la suite de terme général x_n où x_n désigne l'approximation décimale de $\sqrt{2}$ avec n chiffres significatifs

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.4, \quad x_2 = 1.41, \quad x_3 = 1.414,$$

La suite est une suite de Cauchy car pour tous entiers m, n vérifiant $n > m$ on a $|x_n - x_m| \leqslant 10^{-m}$. Bien entendu la suite converge vers $\sqrt{2}$ qui n'est pas un rationnel.

5.6 Suites usuelles

5.6.1 Suites arithmétiques et suites géométriques

Définition 5.9 (Suite arithmétique)
On appelle suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{K}$ toute suite numérique $(u_n)_n$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r.$$

Proposition 5.20 *Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$u_n = u_0 + r\, n$$

et la somme des n premiers termes de la suite arithmétique $(u_n)_n$ est

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{n}{2}\,(u_0 + u_{n-1}).$$

Démonstration $\trianglerighteq$ La première propriété se vérifie aisément en utilisant un raisonnement par récurrence.

$\trianglerighteq$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} \big(u_0 + r\,k\big) = nu_0 + r\sum_{k=0}^{n-1} k = nu_0 + r\frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n}{2}\,\big(2u_0 + r(n-1)\big) = \frac{n}{2}\,\big(2u_0 + (u_{n-1} - u_0)\big) = \frac{n}{2}\,(u_0 + u_{n-1}). \end{aligned}$$

La seconde propriété est établie. $\square$

Exemple La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 2n$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$ car

$$u_{n+1} = 2(n+1) = 2n + 2 = u_n + r.$$

D'après la proposition 5.20, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{k=0}^{n-1} 2k = n(n-1)$, autrement dit, la somme des n premiers nombres pairs vaut $n(n+1)$.

Remarque Une suite arithmétique de raison 0 est une suite constante. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une suite arithmétique de raison r est strictement croissante (et tend vers $+\infty$) si $r > 0$; elle est strictement décroissante (et tend vers $-\infty$) si $r < 0$.

Définition 5.10 (Suite géométrique)
On appelle suite géométrique de raison $r \in \mathbb{K}$ toute suite numérique $(u_n)_n$ non nulle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = r\, u_n.$$

Proposition 5.21 *Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison r. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$u_n = u_0\, r^n.$$

Si $r \neq 1$, la somme des n premiers termes de la suite géométrique $(u_n)_n$ est

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0\, \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Démonstration $\trianglerighteq$ La première assertion se vérifie facilement en utilisant un raisonnement par récurrence.

$\trianglerighteq$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \sum_{k=0}^{n-1} r^k$. En multipliant cette relation par $1-r$, on obtient

$$(1-r)S_n = u_0(1-r) \sum_{k=0}^{n-1} r^k = u_0 \left(\sum_{k=0}^{n-1} r^k - \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \right) = u_0(1-r^n),$$

les termes des deux sommes s'annulant deux à deux. On en déduit la relation cherchée. $\square$

Proposition 5.22 *Une suite géométrique de raison r converge si et seulement si $|r| < 1$ ou $r = 1$.*

Démonstration $\trianglerighteq$ Commençons par établir le résultat suivant :

une suite géométrique qui converge admet nécessairement pour limite 0, *sauf si elle est de raison* 1 *auquel cas il s'agit d'une suite constante.*

Supposons que la suite géométrique $(u_n)_n$ de raison r converge vers le scalaire ℓ. Il est évident que la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = u_{n-1}$ converge aussi vers ℓ. Par ailleurs pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = u_0\, r^n = u_0\, r\, r^{n-1} = r\, u_{n-1} = r\, v_n.$$

La suite de terme général $r\, v_n$ converge vers $r\,\ell$ alors que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Puisque ces 2 suites sont égales, par unicité de la limite, on en déduit que nécessairement

$$\ell = r\,\ell.$$

Cela implique ou bien $\ell = 0$ ou bien $r = 1$.

$\trianglerighteq$ Considérons une suite géométrique de raison r ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = u_0\, r^n \quad \text{avec} \quad u_0 \neq 0.$$

Pour étudier la nature de la suite $(u_n)_n$, procédons par disjonction des cas selon les valeurs de la raison. Trois cas sont envisageables : ou bien $|r| < 1$, ou bien $|r| > 1$ ou bien $|r| = 1$.

- Remarquons que si $|r| > 1$ alors la suite de terme général $|r|^n$ tend vers $+\infty$ car il s'agit d'une suite strictement croissante et non majorée, voir la proposition 5.17. On en déduit que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, dont le terme général est $|u_n| = |u_0|\;|r|^n$, diverge. Nous avons vu[28] que si la suite $(u_n)_n$ convergeait alors nécessairement la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait aussi. On en déduit, par contraposition, que si $|r| > 1$ alors la suite $(u_n)_n$ diverge.
- Montrons que si $|r| < 1$ alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 0. Soit ε un réel strictement positif fixé ; on a

  $$|u_n - 0| = |r^n| = |r|^n,$$

  de sorte que $|u_n - 0|$ est plus petit que ε dès que $n \geqslant N = 1 + E\,(\ln\varepsilon/\ln|r|)$.
- Lorsque $|r| = 1$ deux cas sont envisageables :
  - ou bien $r = 1$ et la suite $(u_n)_n$ est une suite constante qui converge ;
  - ou bien $r \neq 1$ et dans ce cas si la suite converge c'est nécessairement vers 0 d'après la première partie de la démonstration. Ce n'est pas possible car la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait également vers 0 alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| = |u_0|\;|r|^n = |u_0| \neq 0$

On peut donc conclure que la suite géométrique de raison r converge vers 0 si et seulement si $|r| < 1$ et est une suite constante si et seulement si $r = 1$. Elle diverge dans les autres cas. $\square$

---

[28] Voir la proposition 5.4 p. 176.

5.6.2 Suites récurrentes

Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f une application de E dans E. On peut définir une suite $(u_n)_n$ par

1. la donnée de son terme initial $u_0 = a$ où a est un élément de E ;
2. la donnée d'une relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

On dit alors que la suite $(u_n)_n$ est définie par récurrence.

On remarquera que pour assurer l'existence de la suite $(u_n)_n$, il faut que $f(E) \subset E$ et que $a \in E$.

Les propriétés générales d'une suite définie par récurrence sont étroitement liées aux propriétés de la fonction f et seront étudiées au chapitre 13. Elles font intervenir de manière essentielle la notion de continuité.

Exercice 9 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 3)$.
1 - Soit $(v_n)_n$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique.
2 - Soit $(S_n)_n$ la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_n$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

5.7 Exercices de synthèse

Exercice 10

Étant donnée une suite numérique $(u_n)_n$, on considère la suite $(v_n)_n$ de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

correspondant à la moyenne arithmétique, ou moyenne de Cesàro[29]*, des n premiers termes de la suite $(u_n)_n$.*

1 - On suppose que la suite $(u_n)_n$ converge vers le scalaire ℓ.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|v_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell|$.

b) En déduire que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$ on a $|v_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n} N M_N + \frac{1}{2}\varepsilon$ où $M_N = \max\limits_{k=1,\ldots,N-1} |u_k - \ell|$.

c) En déduire que la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ.

On a donc établi que si une suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = \ell.$$

Lorsque $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$ a une limite quand n tend vers $+\infty$, on dit que la suite $(u_n)_n$ converge au sens de Cesàro.

2 - Montrer qu'une suite numérique $(u_n)_n$ *peut converger au sens de Cesàro sans converger au sens usuel de la définition 5.1.*

3 - Démontrer que si une suite réelle $(u_n)_n$ *est monotone et bornée alors*

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell,$$

autrement dit que toute suite réelle monotone et bornée qui converge au sens de Cesàro, converge au sens usuel et réciproquement.

Exercice 11 *Le but de cet exercice est d'établir la formule de Stirling*

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-n}$$

permettant d'obtenir une expression approchée de factoriel n *lorsque* n *est très grand.*

1 - a) Soit ϕ *la fonction définie par*

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x.$$

Montrer que ϕ *est positive sur l'intervalle* $[0, 1[$.

b) Soit ψ *la fonction définie par* $\psi(x) = \phi(x) - \dfrac{x^3}{3(1-x^2)}$. *Montrer que* ψ *est négative sur l'intervalle* $[0, 1[$. *En déduire que pour tout* $x \in [0, 1[$,

$$0 \leqslant \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \leqslant \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

c) En considérant la suite $(x_n)_n$ *de terme général* $x_n = 1/(2n+1)$, *déduire de ce qui précède que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

2 - a) On considère les suites $(a_n)_n$ *et* $(b_n)_n$ *définies par*

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-n}}{n!} \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}.$$

Montrer que les suites $(a_n)_n$ *et* $(b_n)_n$ *sont adjacentes. On désigne par* ℓ *leur limite commune. Justifier que* $\ell > 0$.

---

(29) Cesàro, Ernesto (1859, Naples - 1906, Naples). Mathématicien italien, connu surtout pour ses contributions à la géométrie différentielle et à la théorie des séries infinies. On lui doit aussi le résultat suivant sur les nombres premiers : *étant donnés deux entiers naturels p et q choisis au hasard, la probabilité que ces deux entiers soient premiers entre eux vaut* $6/\pi^2$.

b) Justifier que pour les grandes valeurs de n, $\frac{1}{\ell}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-n}$ peut être considéré comme une expression approchée de $n!$.

On s'intéresse maintenant au calcul de ℓ. On donne la formule suivante, connue sous le nom de formule de Wallis[30],

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^2}{n\left(\prod_{k=1}^{n} 2k-1\right)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2} = \pi.$$

3 - Montrer en utilisant la formule de Wallis que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

En déduire que $\ell = 1/\sqrt{2\pi}$. (On pourra considérer la sous-suite des termes d'indices pairs extraite de la suite $(a_n)_n$.)

5.8 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - Supposons que le réel a est un point adhérent à A, autrement dit que

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in A \quad x \in]a-\eta, a+\eta[. \tag{9}$$

On veut montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers a, c'est-à-dire montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ telle que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in A$;
2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - a| \leqslant \varepsilon)$.

D'après l'assertion (9) considérée avec des réels η de la forme $1/n, n \in \mathbb{N}^*$ on établit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un élément x_n dans A vérifiant $|x_n - a| < 1/n$. La suite $(x_n)_n$ ainsi obtenue est une suite d'éléments de A dont il reste à établir qu'elle converge vers a. Soit ε un réel strictement positif quelconque. Puisque $|x_n - a| < 1/n$, on a $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$ pour tout entier n tel que $1/n \leqslant \varepsilon$, autrement dit pour tout entier n supérieur à $N = E(1/\varepsilon) + 1$. On a donc montré la condition 2.

2 - Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers a c'est-à-dire, supposons qu'il existe suite $(x_n)_n$ telle que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in A$;

[30] Cette relation est démontrée dans l'exercice 10 p. 947.

2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - a| \leqslant \varepsilon)$;

et montrons que le réel a est un point adhérent à A, autrement dit que

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in A \quad x \in]a-\eta, a+\eta[.$$

Soit η un réel strictement positif quelconque. D'après la relation 2 utilisée avec $\varepsilon = \eta/2$, il existe un entier N tel que $|x_N - a| \leqslant \eta/2$ et d'après la relation 1, $x_N \in A$. On a donc établit l'existence d'un réel $x_N \in A$ tel que $x_N \in]a-\eta, a+\eta[$ puisque $[a-\eta/2, a+\eta/2] \subset]a-\eta, a+\eta[$.

Solution de l'exercice 2

Considérons une suite $(u_n)_n$ qui converge vers un réel ℓ strictement positif. D'après la définition 5.1 p. 172

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon),$$

autrement dit, pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N on ait

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon. \tag{10}$$

Prenons $\varepsilon = \ell/2$. Puisque $\ell > 0$, on a $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la relation (10), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n supérieur à N on ait

$$\frac{\ell}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3\ell}{2}.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_n$ est à valeurs strictement positives au moins à partir du rang N (il n'est pas exclu que pour des entiers inférieurs à N, des valeurs u_n soient également strictement positives).

Solution de l'exercice 3

1 - Montrons que la suite $(u_n)_n$ de terme général est $1/\sqrt{n}$ converge vers 0. Soit ε un réel strictement positif et $N = E(1/\varepsilon^2) + 1$. Puisque $E(1/\varepsilon^2) + 1 > 1/\varepsilon^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$, on a

$$|u_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{E(1/\varepsilon^2) + 1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1/\varepsilon^2}} = \varepsilon.$$

D'après la définition 5.1 p. 172, on peut conclure que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \begin{cases} \mathrm{i} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4k+1 \\ -1 & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4k+2 \\ -\mathrm{i} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4k+3 \\ 1 & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4k+4 \end{cases}.$$

L'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a donc 4 points d'adhérence 1, i, $-$i et -1. Si la suite converge, elle ne peut donc avoir pour limite que l'une de ces 4 valeurs. La suite ne converge pas vers i. En effet prenons $\varepsilon = 1$,

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad n = 4N + 3 \text{ vérifie } (n \geqslant N \text{ et } |u_n - \mathrm{i}| = |-\mathrm{i} - \mathrm{i}| = 2 > \varepsilon).$$

La suite ne converge pas vers $-$i. En effet prenons $\varepsilon = 1$,

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad n = 4N + 1 \text{ vérifie } (n \geqslant N \text{ et } |u_n - (-\mathrm{i})| = |\mathrm{i} + \mathrm{i}| = 2 > \varepsilon).$$

La suite ne converge pas vers 1. En effet prenons $\varepsilon = 1/2$ (pour changer),

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad n = 4N + 2 \text{ vérifie } (n \geqslant N \text{ et } |u_n - 1| = |-1 - 1| = 2 > \varepsilon).$$

La suite ne converge pas non plus vers -1. En effet prenons $\varepsilon = 1$,

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad n = 4N + 4 \text{ vérifie } (n \geqslant N \text{ et } |u_n - (-1)| = |1 + 1| = 2 > \varepsilon).$$

On en conclut que la suite de terme général $(-\mathrm{i})^n$ diverge.

3 - Remarquons que d'après la proposition 5.2, si la suite de terme général n^2 converge, sa limite est nécessairement un réel positif. Montrons que la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge vers aucun réel positif, c'est-à-dire montrons que[31]

$$\forall \ell \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon).$$

Soit $\ell \in \mathbb{R}^+$ et $\varepsilon = 1/2$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ considérons l'entier $n = N + E(\ell) + 2$. On a $n = N + 1 + E(\ell) + 1 > N + 1 + \ell$. On en déduit que $n \geqslant N$ et que

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| = |n^2 - \ell| = (n + \ell)|n - \ell| &\geqslant (N + 1)(N + E(\ell) + 2 - \ell) \\ &\geqslant (N + 1)^2 > \frac{1}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

On peut donc conclure que la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Solution de l'exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}$ désignons par a_n la partie réelle de u_n et par b_n sa partie imaginaire : $u_n = a_n + \mathrm{i}\, b_n$. Désignons par ℓ_1 la partie réelle de ℓ et par ℓ_2 sa partie imaginaire : $\ell = \ell_1 + \mathrm{i}\,\ell_2$. On a $|u_n - \ell| = \sqrt{(a_n - \ell_1)^2 + (b_n - \ell_2)^2}$.

$\trianglerighteq$ Supposons que la suite $(a_n)_n$ converge vers ℓ_1 et que la suite $(b_n)_n$ converge vers ℓ_2 et montrons que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell_1 + \mathrm{i}\,\ell_2$. D'après la définition 5.1 p. 172, les hypothèses se traduisent par

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant \eta \Longrightarrow |a_n - \ell_1| \leqslant \alpha) \tag{11}$$

et

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant \eta \Longrightarrow |b_n - \ell_2| \leqslant \alpha) \tag{12}$$

---

[31] Voir la définition 5.1 p. 172.

et il s'agit de montrer que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon) \tag{13}$$

Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé considérons les assertions (11) et (12) avec $\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon$. On obtient pour $n \geqslant N = \max(\eta_1, \eta_2)$

$$|u_n - \ell| = \sqrt{(a_n - \ell_1)^2 + (b_n - \ell_2)^2} \leqslant \sqrt{\tfrac{1}{4}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

L'assertion (13) est donc démontrée.

⊵ Réciproquement, supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ et montrons que la suite $(a_n)_n$ converge vers ℓ_1 et que la suite $(b_n)_n$ converge vers ℓ_2. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(a_n - \ell_1)^2 + (b_n - \ell_2)^2} \leqslant \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad (a_n - \ell_1)^2 + (b_n - \ell_2)^2 \leqslant \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$(a_n - \ell_1)^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{et} \quad (b_n - \ell_2)^2 \leqslant \varepsilon^2$$

autrement dit que

$$|a_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |b_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon. \tag{14}$$

Par hypothèse, la suite $(u_n)_n$ convergeant vers ℓ, on a

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

D'après la relation (14), on en déduit d'une part que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |a_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon)$$

et d'autre part que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |b_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon).$$

D'après la définition 5.1 p. 172, cela signifie que la suite $(a_n)_n$ converge vers ℓ_1 et que la suite $(b_n)_n$ converge vers ℓ_2.

Solution de l'exercice 5

1 - Nous avons déjà montré à l'exercice 3 que la suite de terme général n^2 divergeait. De manière plus précise, montrons que cette suite tend vers $+\infty$. D'après la définition 5.2, il s'agit de montrer que

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant \kappa).$$

Soient $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ et $N = E(\kappa) + 1$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$ on a

$$u_n = n^2 \geqslant N^2 = (E(\kappa) + 1)^2 = E(\kappa)^2 + 2E(\kappa) + 1 \geqslant E(\kappa) + 1 \geqslant \kappa.$$

L'assertion est démontrée et on en conclut que la suite de terme général n^2 tend vers $+\infty$.

2 - Montrons que la suite de terme général $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$. Soient $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ et $N = (E(\kappa)+1)^2$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$ on a

$$u_n = \sqrt{n} \geqslant \sqrt{N} = \sqrt{(E(\kappa)+1)^2} = E(\kappa)+1 \geqslant \kappa.$$

Donc,

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant \kappa)$$

et d'après la définition 5.2, la suite de terme général $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 6

1 - Montrons par récurrence que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont à valeurs positives. La propriété est vraie au rang 0 puisque $0 < a < b$. Supposons la propriété vraie pour un entier n donné et montrons que la propriété est alors vraie pour l'entier suivant. Si $u_n \geqslant 0$ et si $v_n \geqslant 0$ alors $u_n v_n \geqslant 0$ et $u_n + v_n \geqslant 0$ et par conséquent

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \geqslant 0.$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}\, v_{n-1}} \\ &= \tfrac{1}{2}\big(u_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}\, v_{n-1}} + v_{n-1}\big) = \tfrac{1}{2}\big(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}}\big)^2. \end{aligned}$$

Puisque $v_n - u_n \geqslant 0$, on en déduit que $v_n \geqslant u_n$.

2 - Pour montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la quantité $u_{n+1} - u_n$ est positive. D'après ce qui précède, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n\, v_n} - u_n \geqslant \sqrt{u_n\, u_n} - u_n = 0.$$

Pour montrer que la suite $(v_n)_n$ est décroissante montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la quantité $v_{n+1} - v_n$ est négative. On a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}.$$

Or $v_n \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

Puisque la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \geqslant u_0 \quad \text{et} \quad v_n \leqslant v_0.$$

D'après la première question, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0,$$

ce qui permet de conclure que la suite $(u_n)_n$ est majorée par v_0 et que la suite $(v_n)_n$ est minorée par u_0. D'après le théorème 5.2, les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent.

3 - Pour montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, il reste à vérifier que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. Notons ℓ_1 la limite de la suite $(u_n)_n$ et ℓ_2 celle de la suite $(v_n)_n$. La limite de la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = \frac{1}{2}(u_n+v_n)$ est alors $\frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2)$. Par ailleurs la suite $(t_n)_n$ de terme général $t_n = v_{n+1}$ converge vers ℓ_2. Par ailleurs, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

on en déduit que les suites $(t_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont égales. Cela implique, par unicité de la limite, que leur limite est identique. On a donc

$$\frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) = \ell_2.$$

On en déduit que $\ell_2 = \ell_1$ et par conséquent que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Cela implique que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_1 - \ell_2 = 0.$$

Solution de l'exercice 7

Montrons que si les suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ extraites de la suite $(u_n)_n$ convergent alors nécessairement la sous-suite des termes d'indice pair $(u_{2n})_n$ et la sous-suite des termes d'indice impair $(u_{2n+1})_n$ convergent vers une même limite. On pourra alors conclure à la convergence de la suite $(u_n)_n$ d'après la proposition 5.19.

Signalons que l'énoncé indique que les sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent mais il n'est pas possible de conclure directement à la convergence de la suite $(u_n)_n$ en invoquant directement la proposition 5.19 car on ne suppose pas dans l'énoncé que ces deux suites convergent vers une même limite. C'est ce que nous allons établir.

Supposons que la suite $(u_{2n})_n$ converge vers $\ell_1 \in \mathbb{K}$ et que la suite $(u_{2n+1})_n$ converge vers $\ell_2 \in \mathbb{K}$. Considérons la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = u_{n^2}$. Les termes de la sous-suite des termes d'indice pairs $(v_{2n})_n$ extraite de la suite $(v_n)_n$ ont pour expression

$$v_{2n} = u_{(2n)^2} = u_{4n^2} = u_{2(2n^2)}.$$

On peut en déduire que cette suite est une suite extraite de la sous-suite des termes d'indice pair $(u_{2n})_n$ qui est extraite de la suite $(u_n)_n$. Par conséquent elle converge vers ℓ_1. Les termes de la sous-suite des termes d'indice impair $(v_{2n+1})_n$ extraite de la suite $(v_n)_n$ ont pour expression

$$v_{2n+1} = u_{(2n+1)^2} = u_{4n^2+2n+1} = u_{2(2n^2+n)+1}.$$

On peut en déduire que cette suite est une suite extraite de la sous-suite des termes d'indice impairs $(u_{2n+1})_n$ qui est extraite de la suite $(u_n)_n$. Par conséquent elle converge vers ℓ_2.

Par hypothèse la suite $(v_n)_n$ converge. Elle admet deux sous-suites qui convergent vers ℓ_1 et ℓ_2. Cela ne peut avoir lieu d'après la proposition 5.18 que si $\ell_1 = \ell_2$.

Solution de l'exercice 8

1 - Soit $(u_n)_n$ une suite numérique de Cauchy. D'après la définition 5.8 (on prend $\varepsilon = 1$),

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \big((n \geqslant N \text{ et } m \geqslant N) \Longrightarrow |u_n - u_m| \leqslant 1\big).$$

On en déduit que pour tout entier n supérieur à N,

$$|u_n| \leqslant |u_n - u_N + u_N| \leqslant |u_n - u_N| + |u_N| \leqslant 1 + |u_N|.$$

Par ailleurs les termes $u_0, \ldots, u_{N-1}$ sont bornés par le module ou la valeur absolue (selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) du plus grand d'entre eux. Finalement les termes de la suite $(u_n)_n$ sont tous bornés par

$$M = \max(|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |u_N|).$$

2 - Soit $(u_n)_n$ une suite numérique de Cauchy. D'après la définition 5.8,

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \\ &\qquad\qquad \big((n \geqslant N_1 \text{ et } m \geqslant N_1) \Longrightarrow |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon_1\big). \end{aligned} \tag{15}$$

Par hypothèse, la suite $(u_n)_n$ possède une sous-suite $(u_{h(n)})_n$ qui converge. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de cette sous-suite. D'après la définition 5.1 p.172,

$$\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N_2 \Longrightarrow |u_{h(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon_2\big). \tag{16}$$

Soit ε un réel strictement positif fixé. Prenons $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon$ dans la relation (15) et $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon$ dans la relation (16) et notons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Pour tout entier n supérieur à N on a $h(n) \geqslant n \geqslant N$ car h est une extractrice, voir p. 194. Par ailleurs, en utilisant la première inégalité triangulaire et les relations (15) et (16), on obtient :

$$|u_n - \ell| \leqslant \underbrace{|u_n - u_{h(n)}|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|u_{h(n)} - \ell|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}} \leqslant \varepsilon.$$

On a donc montré que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\big)$$

autrement dit que la suite $(u_n)_n$ convergeait vers ℓ.

3 - Considérons une suite de Cauchy. D'après la première question, on peut affirmer qu'il s'agit d'une suite bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on en déduit qu'on peut extraire de cette suite une sous-suite convergente. On dispose donc d'une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente. On peut affirmer, d'après la deuxième question, que cette suite converge. On a donc montré que toute suite de Cauchy était nécessairement convergente.

Solution de l'exercice 9

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 3}{2} - \frac{u_{n-1} + 3}{2} = \frac{u_n - u_{n-1}}{2} = \frac{v_{n-1}}{2}.$$

On en déduit que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. D'après la proposition 5.21 p. 202, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc $v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La suite $(S_n)_n$ converge donc vers 2. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n - u_0.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 1 + S_n$ ce qui permet de conclure que la suite $(u_n)_n$ converge vers 3.

Solution de l'exercice 10

1 - a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &= \left| \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} - \ell \right| = \left| \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n - n\ell}{n} \right| \\ &= \left| \frac{(u_1 - \ell) + (u_2 - \ell) + \ldots + (u_n - \ell)}{n} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k - \ell|}{n}. \end{aligned} \tag{17}$$

b) Puisque par hypothèse la suite $(u_n)_n$ admet pour limite ℓ, d'après[32] la définition 5.1,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \tfrac{1}{2}\, \varepsilon). \tag{18}$$

On déduit des relations (17) et (18) que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$ on a

$$\begin{aligned}|v_n - \ell| &\leqslant \sum_{k=1}^{N-1} \frac{|u_k - \ell|}{n} + \sum_{k=N}^{n} \frac{|u_k - \ell|}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k - \ell| + \sum_{k=N}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k - \ell| + \underbrace{(n - N + 1)}_{\leqslant n}\frac{\varepsilon}{2n} \qquad (19) \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} M_N + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{N-1}{n} M_N + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{N}{n} M_N + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

où $M_N = \max\limits_{k=1,\dots,N-1} |u_k - \ell|$.

c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{NM_N}{n} = 0$, d'après[32] la définition 5.1,

$$\exists \widehat{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n \geqslant \widehat{N} \Longrightarrow \left|\frac{N M_N}{n}\right| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon\right). \qquad (20)$$

En combinant (19) et (20) on obtient, pour tout entier n avec $n \geqslant \max(N, \widehat{N})$,

$$|v_n - \ell| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Finalement on a établi que pour tout réel strictement positif ε on pouvait trouver un entier $\widetilde{N}$ (par exemple $\widetilde{N} = \max(N, \widehat{N})$) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant \widetilde{N} \Longrightarrow |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

D'après la définition 5.1, cela signifie que la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ.

2 - Considérons la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. Cette suite diverge. La suite des moyennes de Cesàro est la suite de terme général v_n où $v_n = 0$ si n est pair et $v_n = -\frac{1}{n}$ si n est impair. Cette suite converge vers 0. On a donc établi qu'une suite pouvait converger au sens de Cesàro sans converger au sens usuel.

3 - D'après le théorème 5.2 p. 189, toute suite réelle $(u_n)_n$ monotone et bornée converge, donc d'après la première question elle converge aussi au sens de Cesàro. Comme de plus, la limite au sens usuel coïncide avec la limite au sens de Cesàro, on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \quad \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell,$$

La réciproque correspond à la question 1. Le résultat est démontré.

---

[32] La définition 5.1 indique que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ si

$$\forall \xi \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \xi).$$

Cette assertion étant vraie pour tout réel strictement positif ξ, étant donné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ elle est vraie avec $\xi = \frac{1}{2}\,\varepsilon$, ce qui correspond à la forme utilisée ici.

Solution de l'exercice 11

1 - a) L'application ϕ est définie sur $]-1,1[$. Elle est dérivable sur cet intervalle et admet pour dérivée l'application

$$\phi' : x \in]-1,1[\longmapsto \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Puisque ϕ' est positive sur $]-1,1[$, l'application ϕ est croissante sur $]-1,1[$. On a $\phi(0) = 0$ donc ϕ est positive sur $[0,1[$.

b) L'application ψ est définie sur $]-1,1[$. Elle est dérivable sur cet intervalle de dérivée

$$\psi' : x \in]-1,1[\longmapsto -\frac{2x^4}{3(1-x^2)^2}.$$

Puisque ψ' est négative sur $]-1,1[$, l'application ψ est décroissante sur $]-1,1[$. On a $\psi(0) = 0$ donc ψ est négative sur $[0,1[$. On a donc pour tout $x \in [0,1[$,

$$\phi(x) \leqslant \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

On en déduit que pour tout $x \in [0,1[$,

$$0 \leqslant \phi(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \leqslant \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

c) La suite $(x_n)_n$ de terme général $x_n = 1/(2n+1)$ est à valeurs dans $]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\phi(x_n) = \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1.$$

D'après la question précédente, on en déduit que

$$0 \leqslant \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

2 - a) Considérons les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}}{n!} \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{(n+1)^{n+3/2}\,\mathrm{e}^{-(n+1)}}{n^{n+1/2}\,\mathrm{e}^{-n}} \\
&= \frac{1}{n+1}\,\mathrm{e}^{-1}\,\exp\big((n+3/2)\ln(n+1) - (n+1/2)\ln(n)\big) \\
&= \frac{1}{n+1}\,\mathrm{e}^{\ln(n+1)}\,\exp\left((n+1/2)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1\right) \\
&= \exp\left(\frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1\right).
\end{aligned}$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on déduit du résultat de la question précédente que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \mathrm{e}^0 = 1.$$

La suite $(a_n)_n$ est donc croissante. Montrons à présent que la suite $(b_n)_n$ est décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{a_{n+1}}{a_n} \exp\left(\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1\right) \exp\left(\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right).\end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$\frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant 0.$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leqslant \mathrm{e}^0 = 1.$$

La suite $(b_n)_n$ est donc décroissante.

Pour montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes, il reste à vérifier que $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. On a

$$b_n - a_n = a_n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} - a_n = a_n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} - 1\right).$$

La suite $(a_n)_n$ est croissante, la suite $(b_n)_n$ est décroissante et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $a_n \leqslant b_n$ puisque $\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} > 1$. On en déduit que la suite $(a_n)_n$ est majorée par b_0. D'après le théorème 5.2, p. 189, puisque la suite $(a_n)_n$ est croissante et majorée, elle converge. Par ailleurs, il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} - 1) = 0$. Cela permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, autrement dit que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. Comme $a_1 = 1/e > 0$ et que $\ell \geqslant a_1$, on peut en déduire que ℓ est strictement positif.

b) Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ étant adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a (voir p. 193) $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ autrement dit

$$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}}{n!} \leqslant \ell \leqslant \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}}{n!}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant n! - \frac{1}{\ell}\, n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} - 1.$$

Lorsque n est très grand, l'expression $\frac{1}{\ell}\, n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}$ peut être considéré comme une expression approchée de $n!$ car $\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}$ est alors très proche de 1 et par conséquent $\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} - 1$ est très proche de 0. Nous verrons ultérieurement avec les développements limités que $\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} - 1 \approx \frac{1}{12n}$.

3 - D'après l'inégalité de Wallis,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2} = \pi.$$

On en déduit que la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}$ converge vers $\sqrt{\pi}$. Or

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2^n n!}{1\cdot 3\cdots(2n-1)} = \frac{2^n\, n!}{\sqrt{n}}\frac{2^n\, n!}{2^n\, n!\,(1\cdot 3\cdots(2n-1))} \\ &= \frac{2^n\, n!}{\sqrt{n}}\frac{2^n\, n!}{(2n)!} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$.

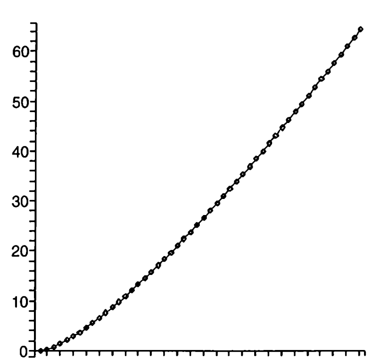
La suite $(a_n)_n$ converge vers ℓ, donc la sous suite des termes d'indices pairs extraite de la suite $(a_n)_n$ converge aussi vers ℓ. Or

$$a_{2n} = \frac{2n^{2n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-2n}}{(2n)!} = \sqrt{2}\times\underbrace{\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}}_{=u_n}\times\Big(\underbrace{\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}}{n!}}_{=a_n}\Big)^2.$$

La suite $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{\pi}$ et la suite $(a_n)_n$ converge vers ℓ. En considérant la limite de chacun des termes des la relation $a_{2n} = \sqrt{2}\,u_n\,a_n^2$, on obtient $\ell = \sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\ell^2$. La limite ℓ étant non nulle, on en déduit que $\ell = 1/\sqrt{2\pi}$.

On visualiser avec MAPLE l'approximation de $n!$ par la formule de Stirling en fonction de n. Compte tenu des grandes valeurs prises par $n!$ lorsque n est grand, on représente en ordonnée le logarithme décimal de $n!$ (on a donc $n! = 10^y$ où y est la valeur en ordonnée).

```
> u:= n-> sqrt(2*Pi)*n^(n+1/2)/exp(n):
> N:=50: plot([[[n,log10(factorial(n))] $n=1..N],
              [[n,log10(u(n))] $n=1..N]]);
```



∘ $n!$

—— formule de Stirling

Troisième partie

Polynômes et fractions rationnelles

Chapitre 6

L'anneau des polynômes

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif muni des opérations usuelles (c'est-à-dire muni de l'addition $+_{\mathbb{K}}$ et de la multiplication $\times_{\mathbb{K}}$ que nous noterons aussi plus simplement $+$ et $\times$) qui peut être

- soit le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels,
- soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels,
- soit le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

On note 0 et 1 les éléments neutres pour l'addition et pour la multiplication. Il nous arrivera parfois de les noter $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$ pour marquer leur appartenance au corps $\mathbb{K}$.

6.1 Définition de l'ensemble des polynômes

6.1.1 Polynôme formel

Définition 6.1 *On appelle polynôme formel à coefficients dans $\mathbb{K}$ (ou plus simplement polynôme sur $\mathbb{K}$) une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{K}$ dont tous les termes à partir d'un certain rang sont égaux à 0. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

En d'autres termes, $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ signifie qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n > N \implies a_n = 0\big).$$

Le polynôme P s'écrit ainsi : $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots)$ et les termes a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_N se nomment les *coefficients* du polynôme P. On appelle *polynôme nul* le polynôme noté $0_{\mathbb{K}[X]}$ dont tous les coefficients sont nuls : $0_{\mathbb{K}[X]} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. On le note plus simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté avec l'élément nul du corps $\mathbb{K}$. On appelle *polynôme constant* un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de la forme $P = (a_0, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots)$.

Définition 6.2 *On dit que deux polynômes $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ sont égaux, et on note $P = Q$, si $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

6.1.2 Valuation et degré d'un polynôme

DÉFINITION 6.3 *Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$.*

✗ *On appelle degré de P, et on note $\deg(P)$, le plus grand entier naturel n tel que $a_n \neq 0$. Autrement dit, $\deg(P) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$.*

✗ *Le coefficient $a_{\deg(P)}$ se nomme coefficient de plus haut degré de P et le polynôme P est dit normalisé (ou unitaire) si $a_{\deg(P)} = 1$.*

✗ *On appelle valuation de P, et on note $\operatorname{val}(P)$, le plus petit entier naturel n tel que $a_n \neq 0$. Autrement dit, $\operatorname{val}(P) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$.*

Exemples

1. Soit $P = (1, 0, 0, 5 + \mathrm{i}, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[X]$. On a : $\operatorname{val}(P) = 0$ et $\deg(P) = 3$.
2. Soit $P = (0, 0, 12\mathrm{i}, 20, 1, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[X]$. On a : $\operatorname{val}(P) = 2$ et $\deg(P) = 4$. Ce polynôme est normalisé.

Remarques

1. Par convention, on pose $\deg\left(0_{\mathbb{K}[X]}\right) = -\infty$ et $\operatorname{val}\left(0_{\mathbb{K}[X]}\right) = +\infty$.
2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $\operatorname{val}(P) \leqslant \deg(P)$.

DÉFINITION 6.4 *Un polynôme P appartenant à $\mathbb{K}[X]$ est appelé monôme si $\operatorname{val}(P) = \deg(P)$.*

Par exemple, le polynôme $P = (0, 0, 5, 0, \ldots)$ est un monôme car $\operatorname{val}(P) = \deg(P) = 2$.

Remarque Si deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont égaux alors $\operatorname{val}(P) = \operatorname{val}(Q)$ et $\deg(P) = \deg(Q)$ La réciproque est fausse car, par exemple, les polynômes $P = (0, 1, 1, 2, 0, \ldots)$ et $Q = (0, 3, 0, 12, 0, \ldots)$ sont différents. Ils ont pourtant même valuation ($\operatorname{val}(P) = \operatorname{val}(Q) = 1$) et même degré ($\deg(P) = \deg(Q) = 3$).

6.2 Structures algébriques sur les polynômes

6.2.1 Addition de polynômes

DÉFINITION 6.5 *Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On appelle somme des polynômes P et Q (ou addition de P et Q) le polynôme de $\mathbb{K}[X]$, noté $P + Q$ et défini par*

$$P + Q \overset{déf.}{=} (a_n +_{\mathbb{K}} b_n)_{n\in\mathbb{N}} .$$

On a ainsi défini une première loi (de composition) interne sur $\mathbb{K}[X]$ notée $+$.

Exemple Si $P = (1, 1, 1, 0, \ldots)$ et $Q = (0, 2, 3, -1, 0, \ldots)$ alors

$$P + Q = (1, 1, 1, 0, 0, \ldots) + (0, 2, 3, -1, 0, 0, \ldots) = (1, 3, 4, -1, 0, 0, \ldots).$$

PROPOSITION 6.1 *Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. On a :*
- ✗ $\deg(P + Q) \leqslant \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$,
- ✗ $\operatorname{val}(P + Q) \geqslant \min\{\operatorname{val}(P), \operatorname{val}(Q)\}$.

Démonstration Commençons par montrer la première propriété. Considérons deux polynômes $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(P) = p$ et $\deg(Q) = q$. Les coefficients a_p et b_q sont nécessairement non nuls. Supposons (sans perte de généralité) que $p \geqslant q$ et considérons les cas $p > q$ et $p = q$.
- Si $p > q$ alors $P + Q = (a_0 + b_0, \ldots, a_q + b_q, a_{q+1}, \ldots, a_p, 0, 0, \ldots)$. Par hypothèse, $a_p \neq 0$. On en déduit alors que $\deg(P + Q) = p$, c'est-à-dire que $\deg(P + Q) = \deg(P) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$.
- Si $p = q$ alors $P + Q = (a_0 + b_0, \ldots, a_p + b_p, 0, 0, \ldots)$. Ainsi, $\deg(P + Q) = p$ à la condition que $a_p + b_p \neq 0$, sinon $\deg(P + Q) < \deg(P)$.

Utilisant un raisonnement analogue, on montre la deuxième propriété. La rédaction est laissée en exercice. □

Remarque La démonstration de la première propriété de la proposition précédente fait apparaître que si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors

$$\deg(P + Q) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}.$$

De même, on vérifie (à partir de la démonstration de la deuxième propriété) que si $\operatorname{val}(P) \neq \operatorname{val}(Q)$ alors

$$\operatorname{val}(P + Q) = \min\{\operatorname{val}(P), \operatorname{val}(Q)\}.$$

Structure de groupe commutatif sur $\mathbb{K}[X]$

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ muni de la loi $+$ possède une structure de groupe commutatif. En effet, l'addition définie sur l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{K}[X]$ puisque l'addition $+_{\mathbb{K}}$ définie sur le corps $\mathbb{K}$ est elle-même une loi de composition interne sur $\mathbb{K}$. De plus, l'addition des polynômes possède les propriétés suivantes (qui se déduisent des propriétés de l'addition sur $\mathbb{K}$).
- Elle est associative : pour tous $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$(P + Q) + R = P + (Q + R).$$

- Elle admet un élément neutre dans $\mathbb{K}[X]$. C'est le polynôme $0_{\mathbb{K}[X]}$ car

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P + 0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]} + P = P.$$

- Tout polynôme $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ admet un symétrique dans $\mathbb{K}[X]$ qui est le polynôme $-P = (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet,

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P + (-P) = (-P) + P = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

- Elle est commutative : $P + Q = Q + P$ pour tous P, Q dans $\mathbb{K}[X]$.

6.2.2 Multiplication d'un polynôme par un élément de $\mathbb{K}$

Définition 6.6 *Étant donnés $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et α un scalaire de $\mathbb{K}$, on définit le polynôme noté $\alpha \cdot P$ (ou plus simplement αP) de $\mathbb{K}[X]$ par*

$$\alpha \cdot P \overset{déf.}{=} (\alpha \times_{\mathbb{K}} a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

La multiplication d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ par un élément de $\mathbb{K}$ ne définit pas une loi (de composition) interne sur $\mathbb{K}[X]$ mais une loi (de composition) externe sur $\mathbb{K}[X]$. On l'appelle loi produit externe. Si P appartient à $\mathbb{K}[X]$ alors, pour tout α non nul de $\mathbb{K}$,

$$\deg(\alpha \cdot P) = \deg(P) \quad \text{et} \quad \mathrm{val}(\alpha \cdot P) = \mathrm{val}(P)\,.$$

Cette loi possède les propriétés suivantes.

Proposition 6.2 *La multiplication d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ par un élément de $\mathbb{K}$ vérifie :*

- ✗ $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \quad \alpha \cdot (P+Q) = \alpha \cdot P + \alpha \cdot Q,$
- ✗ $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall P \in \mathbb{K}[X] \quad (\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \cdot P = \alpha \cdot P + \beta \cdot P,$
- ✗ $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \alpha \cdot (\beta \cdot P) = (\alpha \times_{\mathbb{K}} \beta) \cdot P,$
- ✗ $\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot P = P.$

Démonstration Il suffit de revenir à la définition de la loi produit externe. La rédaction est laissée en exercice. □

6.2.3 Multiplication de polynômes

Définition 6.7 *Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On appelle produit de P et Q le polynôme de $\mathbb{K}[X]$, noté $P \times Q$ (ou plus simplement PQ), défini par $P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n \overset{déf.}{=} a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \overset{not.}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Exemple Soient $P = (1, 2\mathrm{i}, 2, 0, 0, \ldots)$ et $Q = (1, 2, 0, 0, \ldots)$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Les coefficients du polynôme $P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}[X]$ vérifient :

$$\begin{cases} c_0 &= a_0b_0 = 1 \\ c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 = 2 + 2\mathrm{i} \\ c_2 &= \underbrace{a_0b_2}_{=0} + a_1b_1 + a_2b_0 = 2 + 4\mathrm{i} \\ c_3 &= \underbrace{a_0b_3}_{=0} + \underbrace{a_1b_2}_{=0} + a_2b_1 + \underbrace{a_3b_0}_{=0} = 4 \\ c_4 &= \underbrace{a_0b_4}_{=0} + \underbrace{a_1b_3}_{=0} + \underbrace{a_2b_2}_{=0} + \underbrace{a_3b_1}_{=0} + \underbrace{a_4b_0}_{=0} = 0 \\ \vdots & \\ c_n &= 0 \quad \text{pour tout } n \geqslant 4 \end{cases}$$

On a ainsi obtenu : $P \times Q = (1, 2 + 2\mathrm{i}, 2 + 4\mathrm{i}, 4, 0, 0, \ldots)$.

PROPOSITION 6.3 *Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. On a :*

- ✗ $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$,
- ✗ $\mathrm{val}(P \times Q) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.

Démonstration Démontrons la première propriété (la deuxième propriété se démontre sur le même modèle ; elle est laissée en exercice). Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(P) = p$ et $\deg(Q) = q$. On a donc $a_n = 0$ pour tout entier $n > p$, et $b_n = 0$ pour tout entier $n > q$. Soit $P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$. Pour montrer que $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$, on doit vérifier d'une part que $c_{p+q} \neq 0$, et d'autre part que $c_{p+q+\ell} = 0$ pour tout $\ell \geqslant 1$. Commençons par calculer c_{p+q}. On vérifie :

$$\begin{aligned} c_{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} &= a_0 \overbrace{b_{p+q}}^{=0} + a_1 \overbrace{b_{p+q-1}}^{=0} + \ldots + a_{p-1} \overbrace{b_{q+1}}^{=0} \\ &\quad + \underbrace{a_pb_q}_{\neq 0} + \underbrace{a_{p+1}}_{=0} b_{q-1} + \ldots + \underbrace{a_{p+q}}_{=0} b_0 = a_pb_q \neq 0. \end{aligned}$$

De même, on vérifie :

$$\begin{aligned} c_{p+q+1} = \sum_{k=0}^{p+q+1} a_k b_{p+q+1-k} &= a_0 \overbrace{b_{p+q+1}}^{=0} + a_1 \overbrace{b_{p+q}}^{=0} + \ldots + a_{p-1} \overbrace{b_{q+2}}^{=0} \\ &\quad + a_p \underbrace{b_{q+1}}_{=0} + \underbrace{a_{p+1}}_{=0} b_q + \ldots + \underbrace{a_{p+q+1}}_{=0} b_0 = 0. \end{aligned}$$

Plus généralement, on peut vérifier que $c_{p+q+\ell} = 0$ pour tout $\ell \geqslant 1$. □

Structure d'anneau commutatif et intègre sur $\mathbb{K}[X]$

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ muni des lois $+$ et $\times$ possède une structure d'anneau commutatif. Nous avons déjà vérifié que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ muni de la loi $+$ possède une structure de groupe commutatif (voir page **223**) et il est facile de vérifier, d'après le proposition 6.3, que la multiplication de deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est une loi (de composition) interne sur $\mathbb{K}[X]$. Il reste alors à établir que la multiplication des polynômes possède les propriétés suivantes.[1]

- Elle est associative : pour tous $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$,
$$(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R).$$
- Elle est distributive par rapport à l'addition : pour tous P, Q, R dans $\mathbb{K}[X]$,
$$P \times (Q + R) = (P \times Q) + (P \times R) \quad \text{et} \quad (Q + R) \times P = (Q \times P) + (R \times P).$$
- Elle admet un élément neutre dans $\mathbb{K}[X]$ pour la multiplication. C'est le polynôme $1_{\mathbb{K}[X]} = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ que l'on note plus simplement 1 si aucune confusion n'est à craindre avec l'élément unité du corps $\mathbb{K}$. En effet,
$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = 1_{\mathbb{K}[X]} \times P = P.$$
- Elle est commutative : $P \times Q = Q \times P$ pour tous P, Q dans $\mathbb{K}[X]$.

Il est à noter que si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés respectifs p et q, alors le polynôme $P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nul. En effet, son $(p+q)$-ième coefficient c_{p+q} est non nul puisque $c_{p+q} = a_p \times b_q$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. On a ainsi établi que, pour tous P, Q de $\mathbb{K}[X]$,
$$\left(P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \quad \text{et} \quad Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}\right) \implies P \times Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]},$$
autrement dit que l'anneau $\left(\mathbb{K}[X], +, \times\right)$ est intègre. Remarquons qu'à l'exception des polynômes constants et non nuls, les éléments de $\mathbb{K}[X]$ ne possèdent pas de symétrique pour la loi $\times$. L'anneau $\left(\mathbb{K}[X], +, \times\right)$ n'est donc pas un corps.

6.2.4 Notion d'indéterminée

> **DÉFINITION 6.8** *On appelle indéterminée le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par*
> $$X \overset{déf.}{=} (0, 1, 0, 0, 0, \ldots).$$

On vérifie alors que
$$\begin{aligned} X^2 &= X \times X = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots), \\ X^3 &= X^2 \times X = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots), \\ X^4 &= X^3 \times X = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots), \end{aligned}$$

[1] Elles se déduisent des propriétés de la multiplication sur le corps $\mathbb{K}$.

et, par récurrence sur n, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X^n = (0, 0, 0, \dots, 0, \overset{\overset{(n+1)\text{-ième position}}{\downarrow}}{1}, 0, 0, \dots)$$

où le coefficient 1 est placé en $(n+1)$-ième position. On convient que

$$X^0 = 1_{\mathbb{K}[X]}.$$

Ainsi, le polynôme formel $P = (a_0, a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots)$ de $\mathbb{K}[X]$ vérifie :

$$\begin{aligned} P &= (a_0, a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots) \\ &= (a_0, 0, 0, \dots) + (0, a_1, 0, \dots) + \dots + (0, \dots, 0, a_N, 0, \dots) \\ &= a_0 \cdot \underbrace{(1, 0, 0, \dots)}_{= X^0} + a_1 \cdot \underbrace{(0, 1, 0, \dots)}_{= X} + \dots + a_N \cdot \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)}_{= X^N}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$P = a_0 \cdot X^0 + a_1 \cdot X^1 + a_2 \cdot X^2 + \dots + a_N \cdot X^N$$

et on dit que le polynôme indéterminée X est *générateur* de $\mathbb{K}[X]$. Puisqu'il a été convenu que $X^0 = 1_{\mathbb{K}[X]}$, on peut alors écrire le polynôme formel

$$P = (a_0, a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots) \tag{1}$$

comme suit :

$$P = a_0 1_{\mathbb{K}[X]} + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_N X^N, \tag{2}$$

$$P = a_N X^N + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 1_{\mathbb{K}[X]} \tag{3}$$

et on dit que l'on a écrit P dans le sens des puissances croissantes (expression (2)) ou dans le sens des puissances décroissantes (expression (3)). Nous utiliserons désormais l'une ou l'autre des deux dernières écritures, délaissant ainsi la première écriture (1). On écrit encore :

$$P \overset{not.}{=} \sum_{k=0}^{N} a_k X^k.$$

Remarque Nous convenons de l'abus d'écriture suivant : pour $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $X - \alpha$ le polynôme $X - \alpha \cdot 1_{\mathbb{K}[X]}$ de $\mathbb{K}[X]$. Ainsi, un polynôme constant $P = (a_0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots)$ s'écrit $P = a_0 1_{\mathbb{K}[X]} = a_0$.

6.2.5 Fonction polynomiale

Définition 6.9 *À tout polynôme $P = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_N, 0, 0, \dots) \in \mathbb{K}[X]$ on associe l'application $\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout $x \in \mathbb{K}$ par*

$$\widetilde{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N.$$

Cette application est appelée fonction polynomiale associée à P.[2] *En particulier, la fonction polynomiale associée à un monôme est appelée fonction monôme.*

Exemples

1. Si $P = (1, 0, 0, 5 + \mathrm{i}, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[X]$ alors $\forall x \in \mathbb{C}\ \widetilde{P}(x) = 1 + (5 + \mathrm{i})x^3$.
2. Si $P = (0, 0, 12\mathrm{i}, 20, 1, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[X]$ alors $\forall x \in \mathbb{C}\ \widetilde{P}(x) = 12\mathrm{i}x^2 + 20x^3 + x^4$.
3. La fonction monôme associée à $P = (0, 0, 5, 0, \ldots)$ est $\widetilde{P} : x \longmapsto 5x^2$.

6.3 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

6.3.1 Division euclidienne

THÉORÈME 6.1 (Division euclidienne)
Étant donnés deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$A = BQ + R \quad \textit{et} \quad \deg(R) < \deg(B)\,.$$

Déterminer le couple (Q, R) c'est effectuer la division euclidienne de A par B. Les polynômes A et B se nomment respectivement dividende et diviseur. Les polynômes Q et R se nomment respectivement quotient et reste.

Démonstration La démonstration se décompose en deux parties : existence des polynômes Q, R et unicité du couple (Q, R).

$\trianglerighteq$ Commençons par la démonstration de l'existence. Elle est constructive en ce sens qu'elle fournit explicitement l'algorithme permettant d'effectuer une division euclidienne. Soient $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $B = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(A) = n$ et $\deg(B) = m$. On a alors $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Considérons les deux cas suivants : $\deg(A) < \deg(B)$ et $\deg(A) \geqslant \deg(B)$. Supposons dans un premier temps que $\deg(A) < \deg(B)$. L'existence d'un couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$ est alors évidente. Il suffit en effet de prendre $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $R = A$ puisque

$$A = 0_{\mathbb{K}[X]}B + A \qquad \text{et} \qquad \deg(R) = \deg(A) < \deg(B).$$

Supposons maintenant que $\deg(A) \geqslant \deg(B)$, c'est-à-dire que $n \geqslant m$, et considérons les deux polynômes Q_1 et R_1 de $\mathbb{K}[X]$ définis par

$$Q_1 = \alpha_1 X^{n-m} \qquad \text{et} \qquad R_1 = A - Q_1 B$$

où le coefficient α_1 est défini comme le quotient des coefficients de plus haut degré de A et de B, $\alpha_1 = a_n/b_m$. La définition du monôme Q_1 a bien un sens puisque, par hypothèse, nous avons $b_m \neq 0$ et $n \geqslant m$. Le coefficient α_1 est non nul car $a_n \neq 0$. Calculons le degré du polynôme R_1. Puisque $R_1 = A - Q_1 B$, d'après la proposition 6.1,

$$\deg(R_1) \leqslant \max\bigl\{\deg(A), \deg(Q_1 B)\bigr\}.$$

(2) En toute rigueur, on devrait parler d'application polynomiale.

D'après la proposition 6.3, $\deg(Q_1 B) = \deg(Q_1) + \deg(B)$. On obtient donc :

$$\deg(R_1) \leqslant \max\big\{\deg(A), \deg(Q_1) + \deg(B)\big\}.$$

Or, $\deg(Q_1) + \deg(B) = (n - m) + m = n$. Donc, $\deg(R_1) \leqslant \max\{n, n\} = n$. On vérifie par ailleurs que le coefficient d'indice n du polynôme R_1 est

$$a_n - b_m \alpha_1 = a_n - b_m \frac{a_n}{b_m} = 0.$$

Par conséquent, le polynôme R_1 est de degré strictement inférieur à celui de A, soit $\deg(R_1) < \deg(A)$. Avons-nous $\deg(R_1) < \deg(B)$? Si la réponse est positive alors la démonstration est terminée puisqu'on peut prendre $Q = Q_1$ et $R = R_1$. Sinon, on réitère avec le couple (R_1, B) ce que l'on vient de faire avec le couple (A, B). Soit $k_1 = \deg(R_1)$. On définit les deux polynômes Q_2 et R_2 de $\mathbb{K}[X]$ comme suit :

$$Q_2 = \alpha_2 X^{k_1 - m} \qquad \text{et} \qquad R_2 = R_1 - Q_2 B$$

où le coefficient α_2 est défini comme le quotient des coefficients de plus haut degré de R_1 et B. Le scalaire α_2 est nécessairement non nul. On peut alors vérifier que $\deg(R_2) < \deg(R_1)$. Avons-nous $\deg(R_2) < \deg(B)$? Si la réponse est positive alors la démonstration est terminée. En effet, puisque

$$R_2 = R_1 - Q_2 B = (A - Q_1 B) - Q_2 B = A - (Q_1 + Q_2)B,$$

il suffit de prendre $Q = Q_1 + Q_2$ et $R = R_2$. Sinon, on réitère avec le couple (R_2, B) ce que l'on vient de faire avec le couple (R_1, B). En procédant ainsi, on construit une suite d'entiers $(\deg(R_k))_{k \in \mathbb{N}}$, strictement décroissante, ce qui nous assure l'existence d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(R_N) < \deg(B)$. On peut alors arrêter le processus car

$$\begin{aligned}
R_N &= R_{N-1} - Q_N B \\
&= R_{N-2} - (Q_{N-1} + Q_N)B \\
&= R_{N-3} - (Q_{N-2} + Q_{N-1} + Q_N)B \\
&= \dots \\
&= A - (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N)B.
\end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N$ et $R = R_N$.

$\trianglerighteq$ Montrons maintenant l'unicité. Elle s'effectue en utilisant un mode de raisonnement par l'absurde. On suppose qu'il existe deux couples distincts de solutions. Soit $(Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = BQ_1 + R_1 \tag{4}$$

avec $\deg(R_1) < \deg(B)$. Soit $(Q_2, R_2) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = BQ_2 + R_2 \tag{5}$$

avec $\deg(R_2) < \deg(B)$. On suppose que $(Q_1, R_1) \neq (Q_2, R_2)$. Seul le cas où $Q_1 \neq Q_2$ et $R_1 \neq R_2$ est à considérer, les deux autres cas $Q_1 = Q_2$, $R_1 \neq R_2$ et $Q_1 \neq Q_2$, $R_1 = R_2$ permettant tout de suite de conclure à la contradiction. Supposons donc $Q_1 \neq Q_2$ et $R_1 \neq R_2$. Par différence des équations (4) et (5), on obtient :

$$B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1.$$

En raisonnant sur les degrés, on en déduit :

$$\deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) = \deg(R_2 - R_1).$$

Or, $\deg(Q_1 - Q_2) \geqslant 0$ puisque, par hypothèse, $Q_1 \neq Q_2$. On a donc :

$$\deg(B) \leqslant \deg(R_2 - R_1).$$

Par ailleurs, $\deg(R_2 - R_1) \leqslant \max\{\deg(R_2), \deg(R_1)\}$, d'où, puisque R_1 et R_2 ont des degrés inférieurs strictement à celui de B,

$$\deg(R_2 - R_1) < \deg(B).$$

Cette dernière inégalité (stricte) est en contradiction avec l'inégalité (large) $\deg(B) \leqslant \deg(R_2 - R_1)$, ce qui termine la démonstration. □

Remarques

1. Comme cela a été dit dans la démonstration, si $\deg(A) < \deg(B)$ alors, dans la division euclidienne de A par B, le quotient Q est le polynôme nul et le reste R le polynôme A, c'est-à-dire $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $R = A$, puisque

$$A = 0_{\mathbb{K}[X]}B + A \quad \text{et} \quad \deg(R) = \deg(A) < \deg(B).$$

2. Supposons $\deg(A) \geqslant \deg(B)$. Puisque

$$\deg(R) < \deg(B) \leqslant \deg(B) + \deg(Q) = \deg(BQ),$$

on déduit de l'égalité $A = BQ + R$ et de la remarque faite en page 223 que $\deg(A) = \max\{\deg(BQ), \deg(R)\} = \deg(BQ)$. On a donc :

$$\deg(A) = \deg(B) + \deg(Q).$$

Exemples

1. Considérons dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes $A = X^2 + \mathrm{i}$ et $B = X^3 - \mathrm{i}X^2 + \mathrm{i}X + 1$. Remarquons que $\deg(A) = 2 < \deg(B) = 3$. Par conséquent, le quotient Q et le reste R dans la division euclidienne de A par B sont $Q = 0$ et $R = X^2 + \mathrm{i}$. Remarquons qu'aucun calcul n'a été nécessaire pour trouver Q et R.

2. Considérons maintenant les deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants

$$A = X^4 + 2X^3 - X + 6 \qquad \text{et} \qquad B = X^3 - 6X^2 + X + 4.$$

Effectuons la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{R}[X]$. Remarquons que $\deg(A) \geqslant \deg(B)$. Par conséquent, le calcul des deux polynômes Q et R n'est pas aussi immédiat qu'il l'a été dans l'exemple précédent. Pour déterminer Q et R, nous procédons en suivant pas à pas chacune des étapes explicitées dans la démonstration. En pratique, il est conseillé de disposer les deux polynômes A et B comme suit :

$$\begin{array}{r||l}
A = \overbrace{X^4+2X^3-X+6}^{\text{Dividende}} & \overbrace{X^3-6X^2+X+4}^{\text{Diviseur}} = B \\
-Q_1 \times B = -(X^4-6X^3+X^2+4X) & \underbrace{X+8}_{\text{Quotient}} = \underbrace{Q_1+Q_2}_{=Q} \\
\hline
R_1 = 8X^3-X^2-5X+6 & \\
-Q_2 \times B = -(8X^3-48X^2+8X+32) & \\
\hline
R_2 = \underbrace{47X^2-13X-26}_{\text{Reste}} &
\end{array}$$

Nous avons arrété le processus car le degré du reste $R_2 = 47X^2 - 13X - 26$ est strictement inférieur au degré du diviseur $B = X^3 - 6X^2 + X + 4$. On a ainsi obtenu que $A = BQ + R$ avec $Q = X + 8$, $R = 47X^2 - 13X - 26$ et $\deg(R) < \deg(B)$. On a donc l'égalité :

$$X^4 + 2X^3 - X + 6 = (X^3 - 6X^2 + X + 4)(X + 8) + 47X^2 - 13X - 26$$

que l'on peut justifier indépendamment du calcul précédent en développant le terme de droite.

Pour effectuer la division euclidienne de A par B lorsque $\deg(A) \geqslant \deg(B)$, il a été impératif d'écrire les deux polynômes A et B dans le sens des puissances décroissantes. La division euclidienne est d'ailleurs aussi appelée *division suivant les puissances décroissantes.*

Exercice 1 Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $\phi \in \mathbb{R}$. On considère les polynômes A_n et B de $\mathbb{C}[X]$ définis par

$$A_n = X^n \sin\phi - X \sin n\phi + \sin(n-1)\phi \quad \text{et} \quad B = X^2 - 2X\cos\phi + 1.$$

On désigne par Q_n et R_n respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de A_n par B.

1 - En effectuant la division euclidienne, vérifier que

$$(a)\ \ Q_2 = \sin\phi, \qquad (b)\ \ Q_3 = X\sin\phi + \sin 2\phi,$$

$$(c)\ \ Q_4 = X^2 \sin\phi + X \sin 2\phi + \sin 3\phi.$$

2 - Sans effectuer de division, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$,

$$R_n = 0 \quad \text{et} \quad Q_n = \sum_{k=2}^{n} X^{n-k} \sin(k-1)\phi.$$

6.3.2 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

DÉFINITION 6.10 *Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A (ou que A est divisible par B) s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que*

$$A = BQ.$$

En d'autres termes, B divise A si le reste de la division euclidienne de A par B est nul. On dit aussi que A est un multiple de B ou que B est un diviseur de A.

Remarques

1. Si A et B désignent deux polynômes non nuls et si B divise A alors

$$\deg(B) \leqslant \deg(A).$$

2. Tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ est divisible par lui-même puisque $A = A \times 1_{\mathbb{K}[X]}$.
3. Le polynôme nul est divisible par n'importe quel polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ puisque $0_{\mathbb{K}[X]}$ est absorbant pour la loi $\times$ ($0_{\mathbb{K}[X]} = P \times 0_{\mathbb{K}[X]}$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$).
4. Soient A, B, C, D dans $\mathbb{K}[X]$. On vérifie aisément les points suivants :
   - si A divise B et B divise C alors A divise C,
   - si A divise B alors A divise BC,
   - si A divise B et A divise C alors A divise $B + C$,
   - si A divise B et C divise D alors AC divise BD.
5. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Si B divise A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\alpha \cdot B$ divise A. En effet, puisque B divise A, il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. D'où, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$,

$$A = (\alpha \cdot B)(\frac{1}{\alpha} \cdot Q).$$

En particulier, puisque A divise A, tout polynôme de la forme $\alpha \cdot A$ avec α appartenant à $\mathbb{K}^*$ divise A. En ce sens, on dit que la divisibilité est définie à un facteur multiplicatif près.

DÉFINITION 6.11 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que* $\deg(P) \geqslant 1$.

✗ *Le polynôme P est dit irréductible (ou premier) dans $\mathbb{K}[X]$ s'il n'admet pour diviseur que les polynômes $\alpha \cdot 1_{\mathbb{K}[X]}$ et $\alpha \cdot P$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Autrement dit, le polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible lorsque les seuls polynômes qui le divisent sont, à un facteur multiplicatif près, $1_{\mathbb{K}[X]}$ et lui-même.*

✗ *Dans le cas contraire, on dit qu'il est réductible.*

Par exemple, le polynôme $P = X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. En revanche, il est divisible dans $\mathbb{C}[X]$ par les deux polynômes $X - \mathrm{i}$ et $X + \mathrm{i}$. Le polynôme $P = X^2 + 1$ est donc réductible dans $\mathbb{C}[X]$.

Remarques

1. Un polynôme irréductible est toujours non nul.

2. Si $P = a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ avec $a_1 \neq 0$ alors P est un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

> **EXERCICE 2** Soient $(m,p) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $m \geqslant p$ et $a > 0$.
> 1 - Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A_m = X^m - a^m$ soit divisible par $B_p = X^p - a^p$.
> 2 - Expliciter le quotient et le reste de la division euclidienne de A_m par B_p dans le cas où $kp \leqslant m < (k+1)p$ avec $k \in \mathbb{N}$.

6.3.3 Division selon les puissances croissantes

THÉORÈME 6.2 (Division selon les puissances croissantes)
Étant donnés un entier k et deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ avec $\mathrm{val}(B) = 0$, *il existe un unique couple (Q_k, R_k) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que*

$$A = BQ_k + X^{k+1}R_k \quad \textit{et} \quad \deg(Q_k) \leqslant k.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ donné, trouver Q_k et R_k, c'est effectuer la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre k. Les polynômes A et B se nomment respectivement dividende et diviseur. Les polynômes Q_k et $X^{k+1}R_k$ se nomment respectivement quotient et reste à l'ordre k.

Démonstration Elle se décompose en deux parties : existence (à l'ordre k) des polynômes Q_k, R_k et unicité (à l'ordre k) du couple (Q_k, R_k).

$\trianglerighteq$ Montrons l'existence en effectuant une récurrence sur l'ordre k. On note respectivement $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ les polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$. Commençons par montrer le résultat pour $k = 0$. L'hypothèse $\mathrm{val}(B) = 0$ nous assure que $b_0 \neq 0$. Soit Q_0 le polynôme constant de $\mathbb{K}[X]$ défini par $Q_0 = a_0/b_0$. Il est nul si $a_0 = 0$. Intéressons-nous au polynôme $A - BQ_0$. Sa valuation est supérieure ou égale à 1 puisque son coefficient de rang 0 est

$$a_0 - \frac{a_0}{b_0}b_0 = 0.$$

On peut par conséquent factoriser le polynôme $A - BQ_0$ par X, ce qui signifie qu'il existe $R_0 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A - BQ_0 = XR_0$. Si $a_0 = 0$ alors $Q_0 = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $\deg(Q_0) = -\infty$. Si $a_0 \neq 0$ alors Q_0 est un polynôme constant non nul; il vérifie $\deg(Q_0) = 0$. Dans les deux cas, $\deg(Q_0) < 1$. Cela termine la démonstration de la propriété pour $k = 0$ puisqu'on a montré qu'il existait $(Q_0, R_0) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ_0 + XR_0$ et $\deg(Q_0) < 1$. Supposons maintenant (c'est notre hypothèse de récurrence) la propriété vraie à l'ordre k, c'est-à-dire supposons qu'il existe un couple $(Q_k, R_k) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = BQ_k + X^{k+1}R_k \tag{6}$$

avec $\deg(Q_k) \leqslant k$, et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $k+1$, c'est-à-dire montrons qu'il existe un couple $(Q_{k+1}, R_{k+1}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = BQ_{k+1} + X^{k+2}R_{k+1}$$

avec $\deg(Q_{k+1}) \leqslant k+1$. Appliquons sur le polynôme R_k un raisonnement identique à celui que nous avons utilisé pour $k=0$. Soit $R_k = (r_p)_{p\in\mathbb{N}}$. On définit le polynôme $\widehat{Q} = r_0/b_0$. C'est un polynôme constant qui est nul si $r_0 = 0$. La valuation de $R_k - B\widehat{Q}$ est alors supérieure ou égale à 1, ce qui montre l'existence d'un polynôme $\widehat{R} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $R_k - B\widehat{Q} = X\widehat{R}$, autrement dit tel que

$$R_k = B\widehat{Q} + X\widehat{R}.$$

En injectant cette égalité dans (6) (qui est l'hypothèse de récurrence), il vient :

$$A = B\left(Q_k + X^{k+1}\widehat{Q}\right) + X^{k+2}\widehat{R}$$

et on vérifie facilement la majoration suivante :

$$\deg\big(Q_k + X^{k+1}\widehat{Q}\big) \leqslant \max\Big\{\underbrace{\deg(Q_k)}_{\leqslant k}, \underbrace{\deg(X^{k+1})}_{=k+1} + \underbrace{\deg(\widehat{Q})}_{=0}\Big\} = k+1$$

où on a considéré uniquement le cas où le polynôme constant $\widehat{Q} = r_0/b_0$ était non nul (ce qui correspond à $r_0 \neq 0$). Si $r_0 = 0$ alors on a $\deg\big(Q_k + X^{k+1}\widehat{Q}\big) = \deg(Q_k) \leqslant k < k+1$. On a donc, dans les deux cas,

$$\deg\big(Q_k + X^{k+1}\widehat{Q}\big) \leqslant k+1.$$

La démonstration de la propriété à l'ordre $k+1$ est alors terminée en prenant $Q_{k+1} = Q_k + X^{k+1}\widehat{Q}$ et $R_{k+1} = \widehat{R}$.

⊵ Pour montrer que le couple (Q_k, R_k) est unique, on utilise un raisonnement par l'absurde. On suppose qu'il existe deux couples distincts de solutions, c'est-à-dire on suppose qu'il existe $(Q_{k,1}, R_{k,1}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = BQ_{k,1} + X^{k+1}R_{k,1} \tag{7}$$

avec $\deg(Q_{k,1}) \leqslant k$, et qu'il existe $(Q_{k,2}, R_{k,2}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = BQ_{k,2} + X^{k+1}R_{k,2} \tag{8}$$

avec $\deg(Q_{k,2}) \leqslant k$, et que $(Q_{k,1}, R_{k,1}) \neq (Q_{k,2}, R_{k,2})$. On considère seulement le cas où $Q_{k,1} \neq Q_{k,2}$ et $R_{k,1} \neq R_{k,2}$. Les deux autres cas $Q_{k,1} = Q_{k,2}$, $R_{k,1} \neq R_{k,2}$ et $Q_{k,1} \neq Q_{k,2}$, $R_{k,1} = R_{k,2}$ sont immédiats. On considère donc que $Q_{k,1} \neq Q_{k,2}$ et $R_{k,1} \neq R_{k,2}$. Par différence de (7) et (8), on obtient :

$$B(Q_{k,1} - Q_{k,2}) = X^{k+1}(R_{k,2} - R_{k,1})$$

et, compte tenu que $\mathrm{val}(B) = 0$, cela implique que

$$\mathrm{val}(Q_{k,1} - Q_{k,2}) = k + 1 + \mathrm{val}(R_{k,2} - R_{k,1}).$$

L'hypothèse $R_{k,2} \neq R_{k,1}$ impose alors que

$$\operatorname{val}(Q_{k,1} - Q_{k,2}) \geqslant k + 1.$$

Par ailleurs, $\deg(Q_{k,1}) \leqslant k < k+1$ et $\deg(Q_{k,2}) \leqslant k < k+1$. Par conséquent, $\deg(Q_{k,1} - Q_{k,2}) < k+1$, et donc (on utilise ici le fait que la valuation d'un polynôme non nul est inférieure, au sens large, à son degré) :

$$\operatorname{val}(Q_{k,1} - Q_{k,2}) < k + 1.$$

Cette inégalité (stricte) est en parfaite contradiction avec l'inégalité (large) $\operatorname{val}(Q_{k,1} - Q_{k,2}) \geqslant k + 1$. La démonstration est terminée. □

Exemples

1. Soient $A = 4 + X^2$ et $B = 1 + X + X^2$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Effectuons la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre 2. Nous utilisons la disposition suivante :

$$
\begin{array}{r||l}
\overbrace{A = 4 + X^2}^{\text{Dividende}} & \overbrace{1 + X + X^2}^{\text{Diviseur}} = B \\ \cline{2-2}
-(4 + 4X + 4X^2) & \underbrace{4 - 4X + X^2}_{\text{Quotient à l'ordre 2}} \quad = Q_2 \\ \cline{1-1}
-4X - 3X^2 & \\
-(-4X - 4X^2 - 4X^3) & \\ \cline{1-1}
X^2 + 4X^3 & \\
-(X^2 + X^3 + X^4) & \\ \cline{1-1}
X^3 R_2 = \underbrace{3X^3 - X^4}_{\text{Reste}} &
\end{array}
$$

Nous avons arrêté le processus car la valuation du reste $3X^3 - X^4$ est strictement supérieure à 2 et le degré du quotient est inférieur ou égal à 2 (rappelons qu'ici, 2 est l'ordre de la division). Ainsi, $A = BQ_2 + X^3 R_2$ avec $Q_2 = 4 - 4X + X^2$, $R_2 = 3 - X$ et $\deg(Q_2) = 2$. On a donc l'égalité :

$$4 + X^2 = (1 + X + X^2)(4 - 4X + X^2) + 3X^3 - X^4$$

que l'on peut vérifier en développant le terme de droite (ce qui est d'ailleurs recommandé).

2. Soient $A = X + X^4$ et $B = 1 + X$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Effectuons la division de A par B selon les puissances croissantes aux ordres $1, 2, 3, 4, 5$.

- À l'ordre 0, $Q_0 = 0$ et $XR_0 = X + X^4$.
- Pour l'ordre $k \geqslant \operatorname{val}(A)$, on utilise la disposition suivante :

$$
\begin{array}{r||l}
X + X^4 & 1 + X \\ \cline{2-2}
-(X + X^2) & X - X^2 + X^3 \\ \cline{1-1}
-X^2 + X^4 & \\
-(-X^2 - X^3) & \\ \cline{1-1}
X^3 + X^4 & \\
-(X^3 + X^4) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

On obtient ainsi :

· à l'ordre 1 : $Q_1 = X$ et $X^2R_1 = -X^2 + X^4$,

· à l'ordre 2 : $Q_2 = X - X^2$ et $X^3R_2 = X^3 + X^4$,

· à l'ordre 3 : $Q_3 = X - X^2 + X^3$ et $X^4R_3 = 0$.

On déduit : $Q_k = X - X^2 + X^3$ et $X^{k+1}R_k = 0$ pour tout $k \geqslant 3$.

Remarque Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Soient Q_k le quotient et $X^{k+1}R_k$ le reste dans la division selon les puissances croissantes à l'ordre k de A par B. Si $k < \mathrm{val}(A)$ alors $Q_k = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $X^{k+1}R_k = A$. Par exemple, dans $\mathbb{R}[X]$, la division selon les puissances croissantes de $X^2 + X^3$ par $1 + X - 2X^2$ donne

– à l'ordre 0 : $Q_0 = 0$ et $XR_0 = X^2 + X^3$:

$$(X^2 + X^3) = (1 + X - 2X^2) \times 0 + X(X + X^2),$$

– à l'ordre 1 : $Q_1 = 0$ et $X^2R_1 = X^2 + X^3$:

$$(X^2 + X^3) = (1 + X - 2X^2) \times 0 + X^2(1 + X),$$

– à l'ordre 2 : $Q_2 = X^2$ et $X^3R_2 = 2X^4$:

$$(X^2 + X^3) = (1 + X - 2X^2)X^2 + X^3 2X$$

car

$$\begin{array}{r||l} X^2 + X^3 & 1 + X - 2X^2 \\ \cline{2-2} -(X^2 + X^3 - 2X^4) & X^2 \\ \hline 2X^4 & \end{array}$$

Comme l'ont montré les exemples précédents, pour effectuer une division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre k avec $k \geqslant \mathrm{val}(A)$, il est impératif d'écrire les deux polynômes A et B dans le sens des puissances croissantes !

6.4 Dérivation des polynômes

6.4.1 Définition d'un polynôme dérivé

Définition 6.12 *Soit* $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ *un polynôme de* $\mathbb{K}[X]$ *tel que* $\deg(P) = n \geqslant 1$. *On appelle polynôme dérivé de* P *le polynôme de* $\mathbb{K}[X]$, *noté* P', *défini par*

$$P' \overset{\text{déf.}}{=} a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \ldots + na_nX^{n-1}.$$

Si le polynôme P *est de degré* 0 *alors le polynôme dérivée* P' *est* $0_{\mathbb{K}[X]}$.

Autrement dit, si $n \geqslant 1$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors

$$P' \stackrel{déf.}{=} \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

Ainsi, si $\deg(P) = n$ avec $n \geqslant 1$ alors $\deg(P') = n - 1$. Par exemple, si $P = 3 + 2X^3 + 4X^5$ alors $P' = 6X^2 + 20X^4$.

Lien avec la notion de dérivation en analyse

Plaçons-nous dans le cas particulier où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soient P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et P' son polynôme dérivé. Considérons maintenant les fonctions polynomiales $\widetilde{P}$ et $\widetilde{P'}$ associées, respectivement, à P et à P'. On constate que $\widetilde{P'}(x)$ correspond à la dérivée de la fonction polynomiale $\widetilde{P}(x)$, autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{P'}(x) = \frac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}x}(x).$$

En effet, la dérivée de $x \longmapsto a_k x^k$ étant $x \longmapsto k a_k x^{k-1}$, si $\widetilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}x}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \widetilde{P'}(x).$$

On a les propriétés suivantes.

Proposition 6.4 *Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :*

$$(P+Q)' = P' + Q', \quad (\lambda \cdot P)' = \lambda \cdot P', \quad (PQ)' = P'Q + PQ'.$$

Démonstration Les deux premières propriétés sont aisées à démontrer. La démonstration de la troisième propriété s'effectue en deux temps. Commençons par montrer que la propriété est vraie pour les monômes. Soient X^h et X^k avec $(h, k) \in \mathbb{N}^2$. On a : $X^h X^k = X^{h+k}$, d'où $(X^h X^k)' = (h+k)X^{h+k-1}$. D'autre part, $(X^h)' = hX^{h-1}$ et $(X^k)' = kX^{k-1}$, d'où

$$(X^h)'X^k + X^h(X^k)' = (hX^{h-1})X^k + X^h(kX^{k-1}) = (h+k)X^{h+k-1}.$$

Ainsi, $(X^h)'X^k + X^h(X^k)' = (X^h X^k)'$. La troisième propriété est donc démontrée lorsque P et Q sont deux monômes. Considérons à présent $P = \sum_{h=0}^{n} a_h X^h$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$. On a :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{h=0}^{n} a_h X^h\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k\right) &= \sum_{h=0}^{n}\left[a_h X^h \Big(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k\Big)\right] \\ &= \sum_{h=0}^{n}\left[\sum_{k=0}^{m}\Big(a_h b_k (X^h X^k)\Big)\right].\end{aligned}$$

Utilisant alors les deux premières propriétés, on en déduit :

$$(PQ)' = \sum_{h=0}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{m}\Big(a_h b_k (X^h X^k)'\Big)\Big].$$

Or, on vient de montrer que $(X^h X^k)' = (X^h)'X^k + X^h(X^k)'$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(PQ)' &= \sum_{h=0}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{m}\Big(a_h b_k \big((X^h)'X^k + X^h(X^k)'\big)\Big)\Big]\\ &= \sum_{h=0}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{m}\Big(a_h b_k \big((X^h)'X^k\big)\Big)\Big] + \sum_{h=0}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{m}\Big(a_h b_k \big(X^h(X^k)'\big)\Big)\Big].\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$(PQ)' = \underbrace{\Big(\sum_{h=0}^{n} a_h (X^h)'\Big)}_{=P'}\underbrace{\Big(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k\Big)}_{=Q} + \underbrace{\Big(\sum_{h=0}^{n} a_h X^h\Big)}_{=P}\underbrace{\Big(\sum_{k=0}^{m} b_k (X^k)'\Big)}_{=Q'},$$

c'est-à-dire : $(PQ)' = P'Q + PQ'$, ce qui termine la démonstration. □

Les deux premières propriétés de la proposition 6.4 s'énoncent comme suit : la dérivée de la somme de deux polynômes est égale à la somme de leurs dérivées et la dérivée du produit d'un polynôme par un scalaire est égale au produit de la dérivée de ce polynôme par ce même scalaire. En ce sens, on dit que l'opération de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ est *linéaire* ou encore que la dérivation est une *application linéaire* de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

6.4.2 Dérivées successives - formule de Taylor

DÉFINITION 6.13 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre n du polynôme P, que l'on note $P^{(n)}$, comme suit :*

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall k \in \{1,\dots,n\} \quad P^{(k)} = \big(P^{(k-1)}\big)'. \end{cases}$$

On a donc, successivement, $P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$, $P^{(2)} = (P')'$, $P^{(3)} = (P'')'$, etc, et on note parfois $P^{(2)} = P''$ et $P^{(3)} = P'''$. On montre par récurrence sur l'ordre de k (la rédaction est laissée en exercice) que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(P+Q)^{(k)} = P^{(k)} + Q^{(k)} \qquad \text{et} \qquad (\lambda \cdot P)^{(k)} = \lambda \cdot P^{(k)}$$

et on dit que l'opération de dérivation à l'ordre k sur $\mathbb{K}[X]$ est *linéaire*.

Étudions les dérivées successives du monôme X^k. Soit $k \in \mathbb{N}$. On vérifie :

$$\begin{array}{rcl}(X^k)^{(1)} & = & kX^{k-1}, \\ (X^k)^{(2)} & = & k(k-1)X^{k-2}, \\ (X^k)^{(3)} & = & k(k-1)(k-2)X^{k-3}, \\ & \vdots & \\ (X^k)^{(h)} & = & k(k-1)(k-2)\dots(k-h+1)X^{k-h} \quad \text{si } h \leqslant k.\end{array}$$

On a donc, lorsque $h \leqslant k$,

$$(X^k)^{(h)} = \frac{k!}{(k-h)!}X^{k-h}. \tag{9}$$

En particulier, en prenant $h = k$,

$$(X^k)^{(k)} = \underbrace{(k \times (k-1) \times (k-2) \times \dots \times 2 \times 1)}_{=k!} X^0 = k!$$

puisque $X^0 = 1_{\mathbb{K}[X]}$. C'est un polynôme constant. Ses dérivées d'ordre supérieur strictement à k sont donc nulles : $(X^k)^{(h)} = 0$ pour tout entier h strictement supérieur à k. Considérons maintenant le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de degré n et déterminons ses dérivées successives. En dérivant terme à terme et en appliquant les résultats concernant les monômes, on obtient, pour $h \leqslant n$:

$$P^{(h)} = \sum_{k=h}^{n} \Big(k(k-1)(k-2)\dots(k-h+1)a_k X^{k-h}\Big) \tag{10}$$

et en particulier, en prenant $h = n$:

$$P^{(n)} = \underbrace{(n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1)}_{=n!} a_n X^0 = n! \times a_n.$$

C'est un polynôme constant. Ainsi, $P^{(h)} = 0$ pour tout entier h strictement supérieur à n. On en déduit le résultat suivant :

Proposition 6.5 (Formule de MacLaurin pour les polynômes)
Soit $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Alors, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$a_k = \frac{\widetilde{P^{(k)}}(0)}{k!}$$

où $\widetilde{P^{(k)}}$ désigne la fonction polynomiale associée à $P^{(k)}$. En d'autres termes, si P est un polynôme de degré n alors

$$P = \widetilde{P}(0) + \frac{\widetilde{P'}(0)}{1!}X + \frac{\widetilde{P''}(0)}{2!}X^2 + \dots + \frac{\widetilde{P^{(n)}}(0)}{n!}X^n.$$

Démonstration Soit $h \leqslant n$. De (10) il vient, pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$\widetilde{P^{(h)}}(x) = \sum_{k=h}^{n} \Big(k(k-1)(k-2)\dots(k-h+1)a_k x^{k-h} \Big).$$

Isolons alors dans la somme le terme d'indice $k = h$:

$$\widetilde{P^{(h)}}(x) = h! \times a_h + \sum_{k=h+1}^{n} \Big(k(k-1)(k-2)\dots(k-h+1)a_k x^{k-h} \Big).$$

Ainsi, en choisissant $x = 0$, on obtient : $\widetilde{P^{(h)}}(0) = h! \times a_h$. On vérifie de plus que $\widetilde{P}(0) = a_0$, ce qui termine la démonstration. □

Plus généralement, on a la formule de Taylor pour les polynômes (on remarque qu'en prenant $c = 0$, on retrouve la formule de MacLaurin pour les polynômes).

THÉORÈME 6.3 (Formule de Taylor pour les polynômes)
Soient $c \in \mathbb{K}$ et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n$. Alors,

$$P = \widetilde{P}(c) + \frac{\widetilde{P'}(c)}{1!}(X-c) + \frac{\widetilde{P''}(c)}{2!}(X-c)^2 + \dots + \frac{\widetilde{P^{(n)}}(c)}{n!}(X-c)^n$$

où, pour tout entier k compris entre 0 et n, $\widetilde{P^{(k)}}$ désigne la fonction polynomiale associée au polynôme $P^{(k)}$.

Démonstration Comme nous l'avons fait pour la démonstration de la troisième propriété de la proposition 6.4, nous commençons par montrer le résultat pour les monômes. Soit X^k avec $k \in \mathbb{N}$. Soit $c \in \mathbb{K}$. On a : $X^k = (X - c + c)^k$. Ainsi, en utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$X^k = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{(k-\ell)!\ell!} c^{k-\ell}(X-c)^\ell = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c)}{\ell!}(X-c)^\ell$$

car, pour tout $\ell \in \{0, 1, \dots, k\}$, on a (voir l'équation (9)) :

$$\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c) = \frac{k!}{(k-\ell)!} c^{k-\ell}.$$

Nous considérons à présent le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et nous notons $\widetilde{P}$ sa fonction polynomiale associée. D'après ce qui précède,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \Big[a_k \sum_{\ell=0}^{k} \frac{\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c)}{\ell!}(X-c)^\ell \Big] = \sum_{k=0}^{n} \Big[a_k \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c)}{\ell!}(X-c)^\ell \Big]$$

puisque $\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c) = 0$ pour tout entier ℓ strictement supérieur à k. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\Big[a_k \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c)}{\ell!}(X-c)^\ell\Big] &= \sum_{k=0}^{n}\Big[\sum_{\ell=0}^{n} a_k \frac{\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c)}{\ell!}(X-c)^\ell\Big] \\ = \sum_{\ell=0}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c)}{\ell!}(X-c)^\ell\Big] &= \sum_{\ell=0}^{n}\Big[\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k \widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c)\Big)\frac{1}{\ell!}(X-c)^\ell\Big]\end{aligned}$$

où on a, dans un premier temps, fait entrer le coefficient a_k dans la somme indicée par ℓ, puis interverti les deux sommes, et enfin factorisé par $\frac{1}{\ell!}(X-c)^\ell$ dans la deuxième somme (celle indicée par k). De plus, d'après la propriété de linéarité de la dérivation d'ordre ℓ,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(X^k\right)^{(\ell)} = \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\Big)^{(\ell)} = P^{(\ell)}, \quad \text{d'où :} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c) = \widetilde{P^{(\ell)}}(c).$$

Finalement, on obtient :

$$P = \sum_{\ell=0}^{n}\Big[\underbrace{\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k \widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c)\Big)}_{=\widetilde{P^{(\ell)}}(c)}\frac{1}{\ell!}(X-c)^\ell\Big] = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\widetilde{P^{(\ell)}}(c)}{\ell!}(X-c)^\ell,$$

ce qui termine la démonstration. □

EXERCICE 3 Trouver un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\widetilde{P}(1) = 3, \quad \widetilde{P'}(1) = 4, \quad \widetilde{P''}(1) = 5 \quad \text{et} \quad \widetilde{P^{(n)}}(1) = 0 \ \forall n \geqslant 3.$$

6.5 Racines d'un polynôme

6.5.1 Définition d'une racine

DÉFINITION 6.14 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que le scalaire α de $\mathbb{K}$ est une racine de P si $\widetilde{P}(\alpha) = 0$ où $\widetilde{P}$ désigne la fonction polynomiale associée à P.*

Il est important de noter que les racines d'un polynôme appartiennent, par définition, au corps sur lequel le polynôme est défini. Ainsi, les racines d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ appartiennent nécessairement toutes à $\mathbb{R}$. Cependant, il arrive fréquemment que l'équation $\widetilde{P}(\alpha) = 0$ admette des solutions α complexes. Dans ce cas-là, on dira encore que α est une racine de P mais en prenant garde de préciser clairement que cette racine appartient non pas à $\mathbb{R}$ mais à $\mathbb{C}$. Par exemple, le polynôme $P = X^2 + 1$ appartient à $\mathbb{R}[X]$ et il n'admet aucune racine (sous-entendu dans $\mathbb{R}$). On vérifie cependant que

$$\widetilde{P}(\mathrm{i}) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

On dit alors que i est une racine de P dans $\mathbb{C}$. Cette situation arrive aussi lorsque l'on manipule des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, le polynôme $P = X^2 - 2$ appartient à $\mathbb{Q}[X]$ et il n'admet aucune racine (sous-entendu dans $\mathbb{Q}$). En revanche, on vérifie que

$$\widetilde{P}(\sqrt{2}) = 0 \quad \text{avec} \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

On dit alors que $\sqrt{2}$ est une racine de P dans $\mathbb{R}$ pour lever toute ambiguïté.

On appelle *équation algébrique* d'inconnue x sur $\mathbb{K}$ une équation de la forme :

$$\widetilde{P}(x) = 0$$

où $\widetilde{P}$ est la fonction polynomiale associée à un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$. D'une manière générale, résoudre une équation sur $\mathbb{K}$, c'est trouver tous les éléments de $\mathbb{K}$ qui vérifient cette équation. En particulier, résoudre l'équation algébrique $\widetilde{P}(x) = 0$ sur $\mathbb{K}$, c'est trouver (toutes) les racines de P appartenant à $\mathbb{K}$.

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un scalaire soit racine d'un polynôme.

Proposition 6.6 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. L'élément α de $\mathbb{K}$ est une racine de P si et seulement si, $X - \alpha$ divise P.*

Démonstration En effectuant la division euclidienne de P par $X - \alpha$, on obtient l'existence et l'unicité de deux polynômes Q et R de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P = (X - \alpha)Q + R$ avec $\deg(R) < 1$. Le polynôme R est donc un polynôme constant ; il est donné par $R = \widetilde{P}(\alpha)$ puisque $\widetilde{P}(\alpha) = \widetilde{R}(\alpha)$. Cela s'obtient simplement en prenant $x = \alpha$ dans l'égalité $\widetilde{P}(x) = (x - \alpha)\widetilde{Q}(x) + \widetilde{R}(x)$ valable pour tout x appartenant à $\mathbb{K}$. Il y a donc équivalence entre le fait que α soit une racine de P et le fait que $X - \alpha$ divise P. En effet,

$$\widetilde{P}(\alpha) = 0 \iff R = 0 \iff P = (X - \alpha)Q.$$

La démonstration est terminée. $\square$

Exemple Le polynôme $P = 5X^2 - 25X + 30$ de $\mathbb{R}[X]$ admet pour racine les deux réels 2 et 3 puisque $\widetilde{P}(2) = \widetilde{P}(3) = 0$. Il est donc divisible à la fois par $X - 2$ et par $X - 3$. On obtient alors la factorisation suivante :

$$P = 5\,(X - 2)\,(X - 3)\,.$$

Exercice 4 Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Il n'existe pas de méthode systématique pour déterminer les racines d'un polynôme de degré supérieur à 4. En revanche, il existe des types particuliers de polynômes dont on peut déterminer certaines racines (voire toutes) de manière algorithmique. C'est le cas des polynômes à coefficients entiers dont on peut déterminer toutes les racines rationnelles.

Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers ($a_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$) et p, q deux entiers relatifs non nuls sans diviseur commun autre que 1 et -1 dans $\mathbb{Z}$. Nous allons démontrer le résultat suivant : une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que le nombre rationnel p/q soit racine de P est que p divise[3] a_0 et que q divise a_n.

D'après la définition, p/q est racine de P si $\widetilde{P}(p/q) = 0$, autrement dit si

$$a_0 + a_1 \frac{p}{q} + a_2 \frac{p^2}{q^2} + \ldots + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_n \frac{p^n}{q^n} = 0.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par q^n on obtient que si p/q est racine de P alors

$$a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + a_2 p^2 q^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} q = -a_n p^n, \qquad (11)$$

c'est-à-dire :

$$\big(a_0 q^{n-1} + a_1 p q^{n-2} + a_2 p^2 q^{n-3} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1}\big) q = -a_n p^n.$$

- Remarquons que q divise le terme de gauche de l'égalité ; il divise donc nécessairement le terme de droite $-a_n p^n$. Comme p et q sont sans diviseur commun, il en va de même de p^n et de q. Ainsi, puisque q divise $-a_n p^n$, il divise obligatoirement a_n. On a donc établi que si p/q est racine de P alors q divise a_n dans $\mathbb{Z}$.
- Pour établir la seconde condition, il suffit de remarquer que l'égalité (11) peut s'écrire :

$$-a_0 q^n = p\big(a_1 q^{n-1} + a_2 p q^{n-3} + \ldots + a_{n-1} p^{n-2} q + a_n p^{n-1}\big)$$

  et d'utiliser un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait. Puisque p divise le terme de droite de l'égalité, il divise nécessairement le terme de gauche $-a_0 q^n$. Comme p et q sont sans diviseur commun, il en va de même de p et de q^n. Ainsi, puisque p divise $-a_0 q^n$, il divise obligatoirement a_0. On a donc établi que si p/q est racine de P alors p divise a_0 dans $\mathbb{Z}$.

[3] c'est-à-dire que le reste de la division entière de p par a_0 soit nul.

Voyons maintenant comment utiliser ce résultat pour déterminer les racines rationnelles du polynôme

$$P = 2X^3 - X^2 - X - 3.$$

Si P admet une racine p/q appartenant à $\mathbb{Q}$ alors p devra nécessairement diviser (dans $\mathbb{Z}$) $a_0 = -3$ et q devra nécessairement diviser (dans $\mathbb{Z}$) $a_3 = 2$. Les valeurs possibles pour p sont donc $-3, -1, 1, 3$ et les valeurs possibles pour q sont $-2, -1, 1, 2$. Si P possède des racines dans $\mathbb{Q}$, cela ne peut être que les nombres rationnels suivants :

$$-3, \ -\frac{3}{2}, \ -1, \ -\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ 1, \ \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad 3.$$

On trouve :

$$P(-3) = -63, \quad P(-3/2) = -21/2, \quad P(-1) = -5, \quad P(-1/2) = -3,$$

$$P(3) = -39, \quad P(3/2) = 0, \quad P(1) = -3, \quad P(1/2) = -7/2.$$

On en déduit que le polynôme $P = 2X^3 - X^2 - X - 3$ possède une unique racine dans $\mathbb{Q}$ qui est $3/2$.

On prendra garde qu'un polynôme à coefficients entiers n'a pas nécessairement de racine dans $\mathbb{Q}$ (c'est le cas par exemple de $X^3 + 2$).

6.5.2 Multiplicité d'une racine

DÉFINITION 6.15 *Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.*

✗ *On dit que α est une racine de multiplicité h de P s'il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que*

$$P = (X - \alpha)^h Q \quad et \quad \widetilde{Q}(\alpha) \neq 0.$$

L'entier naturel h s'appelle alors l'ordre de multiplicité (ou la multiplicité) de la racine α.

✗ *Dans le cas particulier où $h = 1$, la racine est appelée racine simple de P et dans le cas où $h > 1$, la racine est appelée racine multiple de P. Si $h = 2$ alors α est une racine double, si $h = 3$ alors α est une racine triple.*

Exemple Le polynôme $P = X^5 - X^3 - X^2 + 1$ de $\mathbb{R}[X]$ admet -1 pour racine. On a en effet :

$$P = (X+1)\underbrace{(X^4 - X^3 - X + 1)}_{=Q_1}.$$

Cette racine est simple car $\widetilde{Q}_1(-1) \neq 0$. Il admet aussi 1 pour racine puisque

$$P = (X-1)\underbrace{(X^4 + X^3 - X - 1)}_{=Q_2}$$

Cette racine n'est pas simple car $\widetilde{Q}_2(1) = 0$. Elle est en revanche double car

$$P = (X-1)^2\underbrace{(X^3+2X^2+2X+1)}_{=Q_3} \quad \text{avec} \quad \widetilde{Q}_3(1) \neq 0.$$

Proposition 6.7 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de $\mathbb{K}$ sont des racines distinctes de P, de multiplicités respectives $h_1, \ldots, h_m$, alors il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que*

$$P = \left[\prod_{k=1}^{m}(X-\alpha_k)^{h_k}\right]Q$$

avec $\widetilde{Q}(\alpha_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Démonstration Elle s'effectue par récurrence sur le nombre m de racines distinctes considérées. La propriété est évidente pour $m = 1$. Supposons la propriété vraie pour un entier $m \geqslant 1$ et montrons qu'elle est alors vraie pour l'entier $m+1$. L'hypothèse de récurrence est la suivante : si P est un polynôme admettant pour racines distinctes sur $\mathbb{K}$ les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de multiplicités respectives $h_1, \ldots, h_m$, alors il existe un polynôme $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = \left[\prod_{k=1}^{m}(X-\alpha_k)^{h_k}\right]T$$

avec $\widetilde{T}(\alpha_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Supposons que ce polynôme P admette aussi pour racine sur $\mathbb{K}$ le scalaire α_{m+1} de multiplicité h_{m+1}. Cela signifie qu'il existe un polynôme P_{m+1} de $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X-\alpha_{m+1})^{h_{m+1}}P_{m+1}$$

avec $\widetilde{P}_{m+1}(\alpha_{m+1}) \neq 0$. Ainsi, $(X-\alpha_{m+1})^{h_{m+1}}$ divise P. D'après la factorisation de P explicitée dans l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $(X-\alpha_{m+1})^{h_{m+1}}$ divise T puisqu'il ne divise aucun des polynômes $(X-\alpha_1)^{h_1}$, $\ldots$, $(X-\alpha_m)^{h_m}$. Par conséquent, il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$T = (X-\alpha_{m+1})^{h_{m+1}}Q.$$

En combinant ce dernier résultat avec l'hypothèse de récurrence, on aboutit à la nouvelle factorisation de P :

$$P = \left[\prod_{k=1}^{m+1}(X-\alpha_k)^{h_k}\right]Q.$$

Il reste maintenant à vérifier que $\widetilde{Q}(\alpha_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m+1\}$. Commençons par considérer les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Pour tout entier i compris entre 1 et m, $\widetilde{T}(\alpha_i) \neq 0$ (d'après notre hypothèse de récurrence) et

$$\widetilde{T}(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_{m+1})^{h_{m+1}}\widetilde{Q}(\alpha_i).$$

On en déduit alors que $\widetilde{Q}(\alpha_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ puisque les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ sont tous distincts. Intéressons-nous maintenant à α_{m+1}. Remarquons que P_{m+1} se factorise sous la forme

$$P_{m+1} = \left[\prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{h_k}\right] Q.$$

Or, $\widetilde{P}_{m+1}(\alpha_{m+1}) \neq 0$. On en déduit que $\widetilde{Q}(\alpha_{m+1}) \neq 0$, ce qui termine la démonstration. □

Exemple Reprenons l'exemple du polynôme $P = X^5 - X^3 - X^2 + 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Ce polynôme admet -1 pour racine simple et 1 pour racine double. On a :

$$P = (X + 1)(X - 1)^2 \underbrace{(X^2 + X + 1)}_{= Q} \quad \text{avec} \quad \widetilde{Q}(-1) \neq 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{Q}(1) \neq 0.$$

Remarque Si $P = \left[\prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{h_k}\right] Q$ alors, en passant aux degrés,

$$\deg(P) = h_1 + h_2 + \ldots + h_m + \deg(Q).$$

Ainsi, la somme des multiplicités des racines distinctes d'un polynôme est inférieure ou égale au degré de ce dernier : $h_1 + h_2 + \ldots + h_m \leqslant \deg(P)$. Par conséquent :

- tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ possède au plus n racines distinctes ;
- tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ de degré n possédant $n + 1$ racines distinctes est nécessairement nul.

6.5.3 Multiplicité d'une racine et polynômes dérivés

Commençons par le lemme suivant.

Lemme 6.1 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Si α est une racine de multiplicité $h > 1$ de P alors α est une racine de multiplicité $h - 1$ de P'.*

Démonstration Par définition, le scalaire α de $\mathbb{K}$ est une racine de multiplicité $h > 1$ du polynôme P s'il existe un polynôme Q_1 de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^h Q_1$ et $\widetilde{Q_1}(\alpha) \neq 0$. En dérivant, on obtient :

$$P' = h(X - \alpha)^{h-1} Q_1 + (X - \alpha)^h Q_1'.$$

Posons $Q_2 = hQ_1 + (X - \alpha)Q_1'$. On a ainsi : $P' = (X - \alpha)^{h-1} Q_2$ et on vérifie que $\widetilde{Q_2}(\alpha) = h\widetilde{Q_1}(\alpha) \neq 0$ car $\widetilde{Q_1}(\alpha) \neq 0$. On a ainsi exhibé un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, à savoir Q_2, tel que $P' = (X - \alpha)^{h-1} Q_2$ avec $\widetilde{Q_2}(\alpha) \neq 0$, montrant ainsi que α est une racine de P' de multiplicité $h - 1$. □

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un scalaire soit une racine de multiplicité h d'un polynôme.

PROPOSITION 6.8 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Le scalaire α de $\mathbb{K}$ est une racine de multiplicité h de P si et seulement si,*

$$\begin{cases} \forall k \in \{0, \dots, h-1\} & \widetilde{P^{(k)}}(\alpha) = 0 \\ \widetilde{P^{(h)}}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration Elle s'effectue en deux étapes (implication et réciproque).

⊵ Commençons par montrer l'implication. Soit α une racine de P de multiplicité h. Supposons dans un premier temps $h > 1$. D'après le lemme 6.1, α est alors une racine de P' de multiplicité $h-1$. En réitérant le raisonnement, on obtient que α est une racine de P'' de multiplicité $h-2$, puis que α est une racine de $P^{(3)}$ de multiplicité $h-3$, et ainsi de suite. On obtient finalement que α est une racine simple de $P^{(h-1)}$, ce qui signifie qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P^{(h-1)} = (X-\alpha)Q$ avec $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$. D'où, en dérivant,

$$P^{(h)} = (X-\alpha)Q' + Q$$

et on a $\widetilde{P^{(h)}}(\alpha) = \widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$. Supposons à présent $h = 1$. Le scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine simple de P. Cela signifie qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)Q$ et $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$. D'où, en dérivant, $P' = (X-\alpha)Q' + Q$ et $\widetilde{P'}(\alpha) = \widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$. On a donc $\widetilde{P}(\alpha) = 0$ et $\widetilde{P'}(\alpha) \neq 0$. Finalement, on a vérifié que si α est une racine de multiplicité $h \geqslant 1$ de P alors $\widetilde{P^{(k)}}(\alpha) = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, h-1\}$ et $\widetilde{P^{(h)}}(\alpha) = \widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$.

⊵ Pour montrer la réciproque, on utilise la formule de Taylor pour les polynômes. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n. Soit $1 \leqslant h \leqslant n$. On suppose d'une part que α est racine de $P, \dots, P^{(h-1)}$, et d'autre part que $\widetilde{P^{(h)}}(\alpha) \neq 0$. On a alors :

$$P = \frac{\widetilde{P^{(h)}}(\alpha)}{h!}(X-\alpha)^h + \frac{\widetilde{P^{(h+1)}}(\alpha)}{(h+1)!}(X-\alpha)^{h+1} + \dots + \frac{\widetilde{P^{(n)}}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n.$$

Factorisons par $(X-\alpha)^h$. On obtient :

$$P = (X-\alpha)^h \left[\frac{\widetilde{P^{(h)}}(\alpha)}{h!} + \frac{\widetilde{P^{(h+1)}}(\alpha)}{(h+1)!}(X-\alpha) + \dots + \frac{\widetilde{P^{(n)}}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^{n-h} \right].$$

En notant Q le polynôme entre crochets, on a obtenu que $P = (X-\alpha)^h Q$ avec $\widetilde{Q}(\alpha) = \widetilde{P^{(h)}}(\alpha)/h!$, et le scalaire $\widetilde{Q}(\alpha)$ est non nul puisque, par hypothèse, $\widetilde{P^{(h)}}(\alpha) \neq 0$. On a ainsi montré que α était une racine de multiplicité h de P. □

Exemple Considérons le polynôme $P = X^3 - 3X + 2 \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$P' = 3X^2 - 3 \quad \text{et} \quad P'' = 6X.$$

Ainsi, P admet 1 pour racine double car $\widetilde{P}(1) = \tilde{P}'(1) = 0$ et $\widetilde{P}''(1) = 6 \neq 0$.

6.5.4 Relations entre coefficients et racines d'un polynôme

Considérons un polynôme P de degré 2 à coefficients réels, $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$ avec a_0, a_1, a_2 dans $\mathbb{R}$ et a_2 non nul. Un résultat fait cas de relations entre la somme, le produit des deux racines (si elles existent) α_1 et α_2 de P dans $\mathbb{R}$, avec ses coefficients a_2, a_1, a_0. Quelles sont-elles ? Pour les retrouver, il suffit de développer le terme de droite dans l'égalité

$$a_2X^2 + a_1X + a_0 = a_2\left(X - \alpha_1\right)\left(X - \alpha_2\right).$$

Après identification, on obtient les deux formules classiques (dites *formules de Viète*, du nom du mathématicien français François Viète) :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2} \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Remarquons que les deux racines α_1 et α_2 ne sont pas nécessairement distinctes. Par exemple, le trinôme $P = 2X^2 - 12X + 18$ de $\mathbb{R}[X]$ admet pour unique racine le réel 3. Cette racine est double. Les deux racines α_1 et α_2 sont confondues ($\alpha_1 = \alpha_2 = 3$) et elles vérifient les deux formules de Viète :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 3 + 3 = -\frac{(-12)}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha_1\alpha_2 = 3 \times 3 = \frac{18}{2}.$$

VIÈTE, François (1540, Fontenay-le-Comte - 1603, Paris).

Juriste et conseiller auprès du Parlement de Bretagne (à Rennes) puis de Tours, Viète introduit les notations littérales utilisant des voyelles pour les inconnues et des consonnes pour les quantités connues. On lui doit aussi des travaux en trigonométrie, entre autres les expressions de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ comme fonctions polynomiales de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ obtenues par des constructions géométriques.
Durant la guerre contre l'Espagne, il offrit ses services à Henri IV, Roi de France et de Navarre, en décodant les messages (en écriture chiffrée) qui étaient interceptés.

Il est possible de généraliser les formules de Viète au cas de polynômes appartenant à $\mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K}$ non nécessairement égal à $\mathbb{R}$, et de degré $n \geqslant 1$. Pour cela, commençons par la définition d'un polynôme scindé.

DÉFINITION 6.16 *Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ et de degré n est dit scindé sur $\mathbb{K}$ (ou scindable sur $\mathbb{K}$) s'il existe un scalaire β de $\mathbb{K}$, β non nul, et n scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non nécessairement distincts deux à deux appartenant à $\mathbb{K}$ tels que*

$$P = \beta \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)\,.$$

Il est évident que la notion de polynôme scindé dépend étroitement du corps $\mathbb{K}$ considéré, comme on peut le vérifier avec les deux exemples suivants. Le polynôme $P = X^2 - 2$, qui peut être considéré comme un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$, n'est pas scindé sur $\mathbb{Q}$. Il l'est en revanche sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ car

$$P = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}).$$

Le polynôme $P = 2X^2 + 2$, qui appartient aussi à $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$, n'est scindé ni sur $\mathbb{Q}$, ni sur $\mathbb{R}$. Il est en revanche scindé sur $\mathbb{C}$ car

$$P = 2(X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$$

avec $\mathrm{i}^2 = -1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Lorsqu'un polynôme de degré n est scindé, il existe des relations entre ses coefficients et ses n racines distinctes ou confondues. À titre d'exemple, intéressons-nous au cas $n = 3$. Soient $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ un polynôme scindé de $\mathbb{K}[X]$ avec $a_3 \neq 0$. Notons α_1, α_2, α_3 ses racines (distinctes ou confondues) dans $\mathbb{K}$. Alors, en développant le terme de droite dans l'égalité

$$a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = a_3\,(X - \alpha_1)\,(X - \alpha_2)\,(X - \alpha_3)\,,$$

et après identification, on obtient facilement les trois relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \dfrac{a_1}{a_3}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}. \end{cases}$$

Considérons par exemple le polynôme $P = 2X^3 - 10X^2 + 16X - 8$ de $\mathbb{R}[X]$. Il admet pour racines les scalaires 2 (racine double) et 1 (racine simple) puisque $\widetilde{P}(1) = \widetilde{P}(2) = \widetilde{P}'(2) = 0$, $\widetilde{P}'(1) \neq 0$ et $\widetilde{P}''(2) \neq 0$. Parmi les trois racines α_1, α_2 et α_3, deux sont confondues ($\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ et $\alpha_3 = 1$) et on a :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 + 2 + 1 = -\dfrac{(-10)}{2}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = (2 \times 2) + (2 \times 1) + (2 \times 1) = \dfrac{16}{2}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 2 \times 2 \times 1 = -\dfrac{(-8)}{2}. \end{cases}$$

Plus généralement, considérons maintenant un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, non nul, de degré n et scindé sur $\mathbb{K}$, $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ avec a_0, a_1, $\ldots$, a_n dans $\mathbb{K}$ et $a_n \neq 0$. Désignons par α_1, α_2, $\ldots$, α_n ses racines (distinctes ou confondues) sur $\mathbb{K}$. Il y a n formules reliant les coefficients et les racines de P. Elles s'obtiennent en développant$P = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\ldots(X - \alpha_n)$ et en identifiant les coefficients de même degré. Elles s'écrivent :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Chacune d'elles fait apparaître une somme à indice multiple correspondant à la somme des produits de k racines parmi les n racines de P. Cette somme contient donc autant de termes que de parties à k éléments que l'on peut constituer (sans ordre ni remise) à partir d'un ensemble à n éléments. Elle comporte ainsi $\binom{n}{k}$ termes et chacun des termes est constitué d'un produit de k racines. En particulier, la première relation (celle correspondant à $k = 1$) donne l'expression de la somme des racines, et la dernière relation (celle correspondant à $k = n$) donne l'expression du produit des racines. Elles s'écrivent :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Considérons par exemple le polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$ de $\mathbb{K}[X]$ avec $a_4 \neq 0$. Supposons P scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, si α_1, α_2, α_3, α_4 désignent les racines (distinctes ou confondues) de P sur $\mathbb{K}$, on a les quatre relations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant 4} \alpha_{i_1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{a_3}{a_4},\\
&\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 4} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{a_2}{a_4},\\
&\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant 4} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\alpha_{i_3} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\frac{a_1}{a_4},\\
&\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant 4} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\alpha_{i_3}\alpha_{i_4} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{a_0}{a_4}.
\end{aligned}\right.$$

EXERCICE 5 Déterminer le nombre complexe λ pour que l'équation algébrique

$$x^3 + 2x^2 + 3x + \lambda = 0$$

ait deux de ses racines dont le produit vaut 2.

6.6 Étude des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$

Dans la pratique, les calculs s'effectuent généralement en considérant comme corps de référence le corps des nombres complexes ou celui des nombres réels.

Nous portons ainsi une attention particulière aux polynômes à coefficients complexes dans un premier temps, et aux polynômes à coefficients réels dans un second temps.

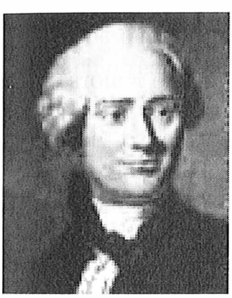
6.6.1 Polynômes de $\mathbb{C}[X]$

Le théorème suivant que les anglo-saxons appellent *théorème fondamental de l'algèbre* est aussi appelé théorème de d'Alembert-Gauss, du nom du mathématicien français Jean Le Rond d'Alembert (il fut le premier à l'avoir énoncé sous une forme complète ; il en donna une démonstration peu convaincante) et du mathématicien allemand Karl Friedrich Gauss (il le démontra en 1799). Citons aussi l'ingénieur français Albert Girard (1595-1632) qui avait déjà énoncé ce théorème dès 1629, sans pourtant réussir à le démontrer.

THÉORÈME 6.4 (de d'Alembert-Gauss)
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration Admise. □

D'ALEMBERT, Jean Le Rond (1717, Paris - 1783, Paris).



Philosophe, ami de Diderot (avec qui il co-dirigea l'Encyclopédie) et de Voltaire, d'Alembert fut l'un des mathématiciens et physiciens les plus renommés du XVIII^{e} siècle. Il entra à 24 ans à l'Académie des Sciences comme adjoint astronome, puis, 13 ans plus tard, à l'Académie française. Son œuvre est considérable. Nous lui devons une théorie mathématique des cordes vibrantes. Son existence avait pourtant mal commencée puisque, nouveau-né, il avait été recueilli sur les marches de la chapelle Saint-Jean-Le-Rond, attenant à la tour nord de Notre-Dame, d'où le nom qui lui fut donné.

Il résulte du théorème de d'Alembert-Gauss que

- tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ possède n racines (comptées avec leurs multiplicités) dans $\mathbb{C}$. Un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n possède ainsi n racines distinctes ou confondues dans $\mathbb{C}$;
- les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ;
- tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$;

On dit que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est *algébriquement clos*.

Si on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ les *m racines distinctes* de multiplicités respectives $h_1, \ldots, h_m$, du polynôme $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$, alors

$$m \leqslant n \quad \text{et} \quad h_1 + \ldots + h_m = n.$$

Le polynôme P se factorise alors sous la forme suivante :

$$P = a_n \prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{h_k}.$$

Il est à noter la présence du coefficient a_n (nécessairement non nul puisque $\deg(P) = n$) dans cette factorisation. On dit que l'on a effectué la *décomposition de P en produit de polynômes irréductibles dans* $\mathbb{C}[X]$.

Exemple Les racines du polynôme unitaire $P = X^5 - X^3 - X^2 + 1$ de $\mathbb{C}[X]$ (qui est de degré 5) sont -1 (racine simple), j (racine simple), $\bar{\mathrm{j}}$ (racine simple) et 1 (racine double). Sa factorisation en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit :

$$P = (X+1)(X-1)^2(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}}).$$

Exercice 6

1 - Déterminer les racines deuxièmes de $8 + 6\mathrm{i}$, puis résoudre dans $\mathbb{C}$

$$(\mathrm{E}_1) \quad \mathrm{i}z^2 - (1+\mathrm{i})z + 2\mathrm{i} - 1 = 0.$$

2 - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(\mathrm{E}_2) \quad \mathrm{i}z^3 + (2\mathrm{i}-1)z^2 - (\mathrm{i}+4)z + 3(2\mathrm{i}-1) = 0.$$

a) Montrer que si cette équation admet une solution réelle r alors cette solution vérifie le système suivant :

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} r^2 + 4r + 3 = 0 \\ r^3 + 2r^2 - r + 6 = 0 \end{cases}.$$

b) Indiquer si l'équation (E_2) admet des solutions réelles.

c) Combien l'équation (E_2) admet-elle de solutions ? Trouver toutes les solutions de l'équation (E_2).

6.6.2 Polynômes de $\mathbb{R}[X]$

Puisque $\mathbb{R}$ est inclus, *via* l'injection canonique, dans $\mathbb{C}$ (voir page 23), tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut s'interpréter comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et on peut lui appliquer le théorème de d'Alembert-Gauss. Ainsi, tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n possède n racines (distinctes ou confondues) dans $\mathbb{C}$.

Remarquons que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $\widetilde{P}(\overline{\alpha}) = \overline{\widetilde{P}(\alpha)}$. On a alors le résultat suivant.

Proposition 6.9 *Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Le scalaire $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité h de P dans $\mathbb{C}$ si et seulement si, $\overline{\alpha}$ est une racine de multiplicité h de P dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration D'après la proposition 6.8, le scalaire α est une racine de multiplicité h de P dans $\mathbb{C}$ si et seulement si,

$$\forall k \in \{0, \ldots, h-1\} \quad \widetilde{P^{(k)}}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{P^{(h)}}(\alpha) \neq 0.$$

En procédant par équivalence, on vérifie que, pour tout $k \in \{0, \ldots, h-1\}$,

$$\widetilde{P^{(k)}}(\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\widetilde{P^{(k)}}(\alpha)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{P^{(k)}}(\overline{\alpha}) = 0.$$

On a aussi : $\widetilde{P^{(h)}}(\alpha) \neq 0 \iff \overline{\widetilde{P^{(h)}}(\alpha)} \neq 0 \iff \widetilde{P^{(h)}}(\overline{\alpha}) \neq 0$, ce qui termine la démonstration. □

Les racines d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ne sont pas toujours toutes réelles. Par exemple, le trinôme $P = aX^2 + bX + c$ avec a, b, c dans $\mathbb{R}$ et $a \neq 0$, possède des racines réelles seulement dans le cas où $b^2 - 4ac \geqslant 0$. Dans le cas où $b^2 - 4ac < 0$, les racines appartiennent à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Contrairement au corps $\mathbb{C}$, le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas algébriquement clos. Un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré n n'est donc pas nécessairement scindé. Il l'est à la condition qu'il possède n racines réelles comptées avec leurs multiplicités (c'est-à-dire n racines distinctes ou confondues).

Polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair

Montrons qu'un polynôme P de degré 3 à coefficients réels possède au moins une racine réelle.

- Considérons dans un premier temps le cas où P admet trois racines distinctes α_1, α_2, α_3. Supposons que l'une d'entre elles, disons α_1, ne soit pas réelle (la démonstration est terminée dans le cas où $\alpha_1 \in \mathbb{R}$). Puisque, par hypothèse, P a tous ses coefficients dans $\mathbb{R}$, on a l'équivalence suivante :

  $$\widetilde{P}(\alpha_1) = 0 \iff \widetilde{P}(\overline{\alpha_1}) = 0,$$

  ce qui signifie que $\overline{\alpha_1}$ est une racine de P. Elle appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ car α_1 appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, et elle est distincte de α_1 puisque $\mathcal{I}\mathrm{m}(\alpha_1) \neq 0$. La racine $\overline{\alpha_1}$ est nécessairement une des deux autres racines de P. On a donc : $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$ ou $\alpha_3 = \overline{\alpha_1}$. Sans perte de généralité, on suppose que $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$. Il reste alors la racine α_3. Procédons comme pour la racine α_1. Puisque P est à coefficients réels, on a l'équivalence suivante :

  $$\widetilde{P}(\alpha_3) = 0 \iff \widetilde{P}(\overline{\alpha_3}) = 0.$$

  Ainsi, $\overline{\alpha_3}$ est aussi une racine de P. Puisque, par hypothèse, $\overline{\alpha_3}$ est différente des deux autres racines, à savoir de α_1 et $\overline{\alpha_1}$, la seule possibilité est que $\overline{\alpha_3}$ soit égale à α_3, autrement dit que α_3 soit réelle, ce qui montre que le polynôme P possède une racine réelle.
- Considérons maintenant le cas où P admet dans $\mathbb{C}$ une seule racine de multiplicité 3. Notons α cette racine. Puisque P est à coefficients réels, on a l'équivalence :

  $$\widetilde{P}(\alpha) = 0 \iff \widetilde{P}(\overline{\alpha}) = 0.$$

Ainsi, $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P. On a alors nécessairement $\overline{\alpha} = \alpha$, ce qui montre que α appartient à $\mathbb{R}$.

- Considérons enfin le cas où P admet dans $\mathbb{C}$ deux racines distinctes, α_1 et α_2, avec α_1 une racine simple et α_2 une racine double. Alors, P appartenant à $\mathbb{R}[X]$, $\overline{\alpha_2}$ est racine de P, de même multiplicité que α_2. On a donc nécessairement $\overline{\alpha_2} = \alpha_2$, ce qui montre que α_2 appartient à $\mathbb{R}$.

Plus généralement, on a le résultat suivant que nous admettrons[4].

PROPOSITION 6.10 *Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont :

- les polynômes de degré 1, c'est-à-dire les polynômes de la forme $aX + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$,
- les polynômes de degré 2 ne possédant aucune racine réelle, c'est-à-dire les polynômes de la forme aX^2+bX+c avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $b^2-4ac < 0$.

On montre facilement que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 3 est nécessairement réductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Factorisation irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

Considérons un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré n :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$$

avec a_0, a_1, a_2, ..., a_n dans $\mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P possède n racines (distinctes ou confondues) dans $\mathbb{C}$. Nous ne nous intéressons ici qu'aux racines distinctes. Supposons que certaines de ces racines soient réelles. Notons-les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et notons $h_1, h_2, \ldots, h_m$ leurs multiplicités respectives. Les autres racines ont nécessairement des parties imaginaires non nulles. Elles appartiennent à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. D'après la proposition 6.9, nous pouvons les classer par couples de racines complexes conjuguées $(\beta_1, \overline{\beta_1})$, $(\beta_2, \overline{\beta_2})$, ..., $(\beta_{m'}, \overline{\beta_{m'}})$, de multiplicités respectives s_1, s_2, ..., $s_{m'}$. On a nécessairement :

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_m + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_{m'}) = n$$

et le polynôme P se factorise sur $\mathbb{C}$ de la manière suivante :

$$P = a_n \underbrace{\left[\prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{h_k}\right]}_{\text{racines dans } \mathbb{R}} \underbrace{\left[\prod_{k=1}^{m'} (X - \beta_k)^{s_k} (X - \overline{\beta_k})^{s_k}\right]}_{\text{racines dans } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}.$$

[4] Ce résultat sera établi à l'exercice 12, page 627.

Soit k un entier compris entre 1 et m'. On a :

$$(X-\beta_k)(X-\overline{\beta_k}) = X^2 - (\beta_k + \overline{\beta_k})X + \beta_k\overline{\beta_k}.$$

Or, $\mathcal{R}\mathrm{e}(\beta_k) = \dfrac{\beta_k + \overline{\beta_k}}{2}$ et $|\beta_k| = \sqrt{\beta_k\overline{\beta_k}}$. On en déduit :

$$(X-\beta_k)(X-\overline{\beta_k}) = X^2 - 2\,\mathcal{R}\mathrm{e}(\beta_k)X + |\beta_k|^2.$$

Ainsi, $(X-\beta_k)(X-\overline{\beta_k}) \in \mathbb{R}[X]$ puisque $\mathcal{R}\mathrm{e}(\beta_k)$ et $|\beta_k|^2$ appartiennent à $\mathbb{R}$. Posons $p_k = -2\,\mathcal{R}\mathrm{e}(\beta_k)$ et $q_k = |\beta_k|^2$. La décomposition de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit :

$$P = a_n \Big[\prod_{k=1}^{m} (X-\alpha_k)^{h_k}\Big]\Big[\prod_{k=1}^{m'} (X^2 + p_k X + q_k)^{s_k}\Big]$$

où, pour tout entier k variant de 1 à m', le polynôme $X^2 + p_k X + q_k$ de $\mathbb{R}[X]$ vérifie : $p_k^2 - 4q_k < 0$ et admet β_k et $\overline{\beta}_k$ pour racines dans $\mathbb{C}$.

Exemple Reprenons le polynôme $P = X^5 - X^3 - X^2 + 1$. C'est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Ses racines dans $\mathbb{R}$ sont -1 (racine simple) et 1 (racine double). Dans $\mathbb{C}$, ses racines sont -1, j et $\bar{\mathrm{j}}$ (racines simples) et 1 (racine double). La factorisation de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit :

$$P = (X+1)(X-1)^2(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}}).$$

Développons le produit $(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}})$. On a :

$$(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}}) = X^2 - (\mathrm{j}+\bar{\mathrm{j}})X + \mathrm{j}\,\bar{\mathrm{j}} = X^2 - 2\,\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{j})X + |\mathrm{j}|^2.$$

Rappelons que $\mathrm{j} = -1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2$. On a donc $\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{j}) = -1/2$ et $|\mathrm{j}|^2 = 1$. D'où

$$(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}}) = X^2 + X + 1.$$

La factorisation irréductible de P dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit ainsi :

$$P = (X+1)(X-1)^2(X^2+X+1).$$

Remarque Certains polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ ne possèdent aucune racine réelle. C'est le cas par exemple de $P = X^4 + 1$. Les racines sont toutes de partie imaginaire non nulle. Elles peuvent toutes être classées par couples de racines complexes conjuguées $(\beta_1, \overline{\beta_1})$, $(\beta_2, \overline{\beta_2})$, ..., $(\beta_{m'}, \overline{\beta_{m'}})$. En notant s_1, s_2, ..., $s_{m'}$ leurs multiplicités respectives et n le degré de $P = a_0 + \ldots + a_n X^n$ ($a_n \neq 0$), on a alors :

$$2(s_1 + s_2 + \ldots + s_{m'}) = n$$

et la factorisation irréductible de P dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit :

$$P = a_n \prod_{k=1}^{m'} (X^2 + p_k X + q_k)^{s_k} \qquad \text{avec} \quad \forall k \in \{1, \ldots, m'\} \quad p_k^2 - 4q_k < 0$$

où, pour tout $k \in \{1, \ldots, m'\}$, le polynôme $X^2 + p_k X + q_k$ de $\mathbb{R}[X]$ admet β_k et $\overline{\beta_k}$ pour racines dans $\mathbb{C}$. Par exemple, la factorisation irréductible de $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit :

$$X^4 + 1 = (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}).$$

On a les égalités suivantes :

$$(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}) = X^2 - \sqrt{2}X + 1,$$
$$(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4}) = X^2 + \sqrt{2}X + 1.$$

On en déduit la factorisation irréductible de $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1).$$

Exercice 7 Donner une factorisation irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes
1 - $P = X^6 + 1$,
2 - $Q = X^8 + X^4 + 1$,
3 - $R_\varphi = X^6 - 2X^3 \cos\varphi + 1$ avec $\varphi \in [0, \pi[$.

6.7 Exercices de synthèse

Exercice 8 *Soit n un entier naturel non nul.*

1 - Résoudre $z^{4n} - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$. On notera z_0, z_1, z_2, ..., z_{4n-1} les racines. En particulier, préciser les valeurs des quatre racines z_0, z_n, z_{2n} et z_{3n}.

2 - Vérifier que $X^{4n} - 1 = \left(X^4 - 1\right) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^{4k}$.

3 - En effectuant les changements d'indices appropriés, montrer que

$$\prod_{k=2n+1}^{4n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}) = \prod_{k=1}^{2n-1} (X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n}),$$

$$\prod_{k=n+1}^{2n-1} \left[(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n})\right] = \prod_{k=1}^{n-1} \left[(X + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n})(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})\right].$$

En déduire que

$$\prod_{k=0}^{4n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}) = (X^4 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (X^2 - 2\mathrm{i}X \sin\frac{k\pi}{2n} - 1)(X^2 + 2\mathrm{i}X \sin\frac{k\pi}{2n} - 1).$$

4 - Déduire des questions précédentes que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^{4k} = \prod_{k=1}^{n-1}(z^2 - 2\mathrm{i}z\sin\frac{k\pi}{2n} - 1)(z^2 + 2\mathrm{i}z\sin\frac{k\pi}{2n} - 1).$$

5 - En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

EXERCICE 9 *On considère les polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (appelés* polynômes de Bernoulli*) définis, par récurrence sur n, par $B_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$, par*

$$B'_n = nB_{n-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \widetilde{B}_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

où $\widetilde{B}_n$ désigne la fonction polynomiale associée à B_n. On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est un polynôme normalisé, de degré n, à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

1 - Calculer B_1, B_2, B_3 et B_4.

2 - Montrer que $\widetilde{B}_n(0) = \widetilde{B}_n(1)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

3 - Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\widetilde{Q}_n(x) = \widetilde{B}_n(x+1) - \widetilde{B}_n(x)$. Montrer par récurrence que $Q_n = nX^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

4 - Pour $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, on pose $S_k^{(n)} = 1 + 2^n + 3^n + \ldots + k^n$. Déduire de la question précédente que

$$S_k^{(n)} = \frac{1}{n+1}\left(\widetilde{B}_{n+1}(k+1) - \widetilde{B}_{n+1}(1)\right).$$

5 - Calculer $S_k^{(1)}$, $S_k^{(2)}$ et $S_k^{(3)}$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

6 - Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{B}_n(1-x) = (-1)^n\widetilde{B}_n(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \widetilde{B}_n(0)$. Ces nombres sont appelés nombres de Bernoulli*. Déduire de ce qui précède que $b_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geqslant 1$.*

7 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$,

$$\widetilde{B}_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\widetilde{B}_{n-k}(x)\,y^k.$$

8 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k x^{n-k}.$$

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k = 0$ *pour tout $n \geqslant 2$.*

EXERCICE 10 *On considère $n+1$ points $\mathcal{M}_j$ de coordonnées (x_j, y_j), $0 \leqslant j \leqslant n$, où les x_j sont tous distincts. On cherche à interpoler les points $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$, ..., $\mathcal{M}_n$ par une fonction polynomiale. On va pour cela chercher une fonction polynomiale $\widetilde{P}$, à coefficients réels, dont la courbe représentative passe exactement par les $n+1$ points $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$, ce qui revient à écrire :*

$$\forall j \in \{0,1,\ldots,n\} \quad \widetilde{P}(x_j) = y_j.$$

1 - Montrer que s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n tel que $\widetilde{P}(x_j) = y_j$ pour tout $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, alors il est unique.

2 - Soit $i \in \{0,1,\ldots,n\}$. Déterminer l'unique polynôme L_i de $\mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à n qui vérifie :

$$\begin{cases} \widetilde{L}_i(x_i) = 1, \\ \forall j \in \{0,1,\ldots,n\} \quad \big(j \neq i \implies \widetilde{L}_i(x_j) = 0\big). \end{cases}$$

3 - En déduire l'expression du polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, solution du problème d'interpolation. Le polynôme P est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange *des $n+1$ points $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$.*

4 - Application : déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange des quatre points $\mathcal{M}_0(-1,-1)$, $\mathcal{M}_1(0,0)$, $\mathcal{M}_2(1,1)$ et $\mathcal{M}_3(2,0)$.

6.8 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - Soit $\phi \in \mathbb{R}$. Puisque $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$, on a :

$$A_2 = X^2\sin\phi - X\sin 2\phi + \sin\phi = (X^2 - 2X\cos\phi + 1)\sin\phi = B\sin\phi.$$

D'où $Q_2 = \sin\phi$ et $R_2 = 0$. Posons la division euclidienne de A_3 par B. On a :

$$\begin{array}{r||l} A_3 = X^3\sin\phi - X\sin 3\phi + \sin 2\phi & X^2 - 2X\cos\phi + 1 \\ \cline{2-2} -(X^3\sin\phi - 2X^2\sin\phi\cos\phi + X\sin\phi) & X\sin\phi + \sin 2\phi = Q_3 \\ \cline{1-1} 2X^2\sin\phi\cos\phi - X(\sin 3\phi + \sin\phi) + \sin 2\phi & \\ = X^2\sin 2\phi - 2X\sin 2\phi\cos\phi + \sin 2\phi & \\ -(X^2\sin 2\phi - 2X\sin 2\phi\cos\phi + \sin 2\phi) & \\ \cline{1-1} R_3 = 0 & \end{array}$$

D'où $Q_3 = X\sin\phi + \sin 2\phi$ et $R_3 = 0$. Posons maintenant la division euclidienne de A_4 par B. On a :

$$\begin{array}{r||l} A_4 = X^4\sin\phi - X\sin 4\phi + \sin 3\phi & X^2 - 2X\cos\phi + 1 \\ \cline{2-2} -(X^4\sin\phi - 2X^3\sin\phi\cos\phi + X^2\sin\phi) & X^2\sin\phi + X\sin 2\phi \\ \cline{1-1} 2X^3\sin\phi\cos\phi - X^2\sin\phi - X\sin 4\phi + \sin 3\phi & + \sin 3\phi = Q_4 \\ = X^3\sin 2\phi - X^2\sin\phi - X\sin 4\phi + \sin 3\phi & \\ -(X^3\sin 2\phi - 2X^2\sin 2\phi\cos\phi + X\sin 2\phi) & \\ \cline{1-1} X^2(2\sin 2\phi\cos\phi - \sin\phi) - X(\sin 2\phi + \sin 4\phi) + \sin 3\phi & \\ = X^2\sin 3\phi - 2X\sin 3\phi\cos\phi + \sin 3\phi & \\ -(X^2\sin 3\phi - 2X\sin 3\phi\cos\phi + \sin 3\phi) & \\ \cline{1-1} R_4 = 0 & \end{array}$$

D'où $Q_4 = X^2 \sin\phi + X \sin 2\phi + \sin 3\phi$ et $R_4 = 0$.

2 - D'après la question précédente, la propriété est vraie au rang 2 (nous l'avons même vérifiée aux rangs 3 et 4). Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Supposons $A_n = BQ_n$ (c'est l'hypothèse de récurrence) et déduisons-en que $A_{n+1} = BQ_{n+1}$. Commençons par faire apparaître Q_n dans l'expression de Q_{n+1}. Il suffit d'isoler le terme d'indice $k = n+1$ et de factoriser par X dans la somme restante :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \Big[X^{n+1-k} \sin(k-1)\phi\Big] = X \sum_{k=2}^{n} \Big[X^{n-k} \sin(k-1)\phi\Big] + \sin n\phi.$$

On a donc : $Q_{n+1} = XQ_n + \sin n\phi$. Calculons maintenant BQ_{n+1}. On vérifie :

$$BQ_{n+1} = B\left(XQ_n + \sin n\phi\right) = XBQ_n + B \sin n\phi = XA_n + B \sin n\phi$$

car, par hypothèse, $BQ_n = A_n$. Remplaçons A_n et B par leurs expressions :

$$\begin{aligned} &BQ_{n+1} \\ &= X\left(X^n \sin\phi - X \sin n\phi + \sin(n-1)\phi\right) + \left(X^2 - 2X\cos\phi + 1\right) \sin n\phi \\ &= X^{n+1} \sin\phi - X\left(2\cos\phi \sin n\phi - \sin(n-1)\phi\right) + \sin n\phi. \end{aligned}$$

Or, $2\cos\phi \sin n\phi = \sin(n+1)\phi + \sin(n-1)\phi$. Ainsi,

$$BQ_{n+1} = X^{n+1} \sin\phi - X \sin(n+1)\phi + \sin n\phi = A_{n+1},$$

ce qui termine la démonstration.

Solution de l'exercice 2

1 - Puisque $a > 0$, les racines complexes du polynôme $X^p - a^p$ sont les nombres complexes $\alpha_\ell = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\ell\pi/p}$, $0 \leqslant \ell \leqslant p-1$. Elles sont toutes simples. Une condition nécessaire et suffisante pour que $X^p - a^p$ divise $X^m - a^m$ est donc que les complexes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ soient aussi racines de $X^m - a^m$. On a les équivalences :

$$\left(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\ell\pi/p}\right)^m - a^m = 0 \iff a^m(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\ell\pi m/p} - 1) = 0 \iff m = kp \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que $X^m - a^m$ soit divisible par $X^p - a^p$ est que $m = kp$ avec $k \in \mathbb{N}$.

2 - Étape 1 : par hypothèse, on a supposé $m \geqslant p$. Effectuons la division euclidienne de A_m par B_p. On obtient :

$$A_m = B_p X^{m-p} + R_1 \quad \text{avec} \quad R_1 = a^p X^{m-p} - a^m.$$

- Si $m = p$ alors le reste R_1 est nul. On retrouve que A_p est divisible par B_p.
- Supposons maintenant $m > p$. Si, de plus, $m - p < p$, c'est-à-dire si $p < m < 2p$, alors la division est terminée et le reste R_1 est non nul (A_m n'est pas divisible par B_p). En revanche, si $m - p \geqslant p$, c'est-à-dire si $m \geqslant 2p$, alors on doit poursuivre la division.

Étape 2 : supposons donc $m \geqslant 2p$ et poursuivons la division. On obtient :

$$A_m = B_p(X^{m-p} + a^p X^{m-2p}) + R_2 \quad \text{avec} \quad R_2 = a^{2p} X^{m-2p} - a^m.$$

- Si $m = 2p$ alors $R_2 = 0$. On retrouve que A_{2p} est divisible par B_p.
- On suppose maintenant $m > 2p$. Si, de plus, $m - 2p < p$, c'est-à-dire si $2p < m < 3p$, alors la division est terminée et $R_2 \neq 0$. En revanche, si $m - 2p \geqslant p$, c'est-à-dire si $m \geqslant 3p$, alors on doit encore poursuivre la division.

Étape 3 : supposons donc $m \geqslant 3p$ et poursuivons la division. On obtient :

$$A_m = B_p(X^{m-p} + a^p X^{m-2p} + a^{2p} X^{m-3p}) + R_3 \quad \text{avec} \quad R_3 = a^{3p} X^{m-3p} - a^m.$$

- Si $m = 3p$ alors $R_3 = 0$. On retrouve que A_{3p} est divisible par B_p.
- On suppose maintenant $m > 3p$. Si, de plus, $m - 3p < p$, c'est-à-dire si $3p < m < 4p$, alors la division est terminée et $R_3 \neq 0$. En revanche, si $m - 3p \geqslant p$, c'est-à-dire si $m \geqslant 4p$, alors on doit encore poursuivre la division.

Par conséquent, à l'étape $k \geqslant 1$, c'est-à-dire lorsque $kp \leqslant m < (k+1)p$, on a : $A_m = B_p Q_k + R_k$ avec Q_k et R_k définis par :

$$Q_k = \sum_{\ell=1}^{k} a^{(\ell-1)p} X^{m-\ell p} \quad \text{et} \quad R_k = a^{kp} X^{m-kp} - a^m.$$

Montrons ce résultat. On a :

$$\begin{aligned} (X^p - a^p)Q_k &= (X^p - a^p)\sum_{\ell=1}^{k} a^{(\ell-1)p} X^{m-\ell p} \\ &= \sum_{\ell=1}^{k} a^{(\ell-1)p} X^{m-(\ell-1)p} - \sum_{\ell=1}^{k} a^{\ell p} X^{m-\ell p}. \end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indice $\ell' = \ell + 1$ dans la dernière somme :

$$(X^p - a^p)Q_k = \sum_{\ell=1}^{k} a^{(\ell-1)p} X^{m-(\ell-1)p} - \sum_{\ell'=2}^{k+1} a^{(\ell'-1)p} X^{m-(\ell'-1)p}.$$

Remplaçons à présent ℓ' par ℓ (l'indice de sommation est muet) dans la dernière somme. Isolons le terme d'indice $\ell = 1$ dans la première somme et celui d'indice $\ell = k+1$ dans la dernière somme. Les deux sommes restantes s'annulent et on obtient :

$$(X^p - a^p)Q_k = X^m - a^{kp} X^{m-kp}.$$

On a donc :

$$(X^p - a^p)Q_k + R_k = \left(X^m - a^{kp} X^{m-kp}\right) + \left(a^{kp} X^{m-kp} - a^m\right) = X^m - a^m,$$

ce qui termine la démonstration.

Solution de l'exercice 3

Soit P un polynôme de degré m. Appliquons la formule de Taylor. On a :

$$P = \widetilde{P}(1) + \widetilde{P'}(1)(X-1) + \frac{\widetilde{P''}(1)}{2}(X-1)^2 + \ldots + \frac{\widetilde{P^{(m)}}(1)}{m!}(X-1)^m.$$

Or, $\widetilde{P}(1) = 3$, $\widetilde{P'}(1) = 4$, $\widetilde{P''}(1) = 5$ et $\widetilde{P^{(n)}}(1) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 3$. On en déduit alors que

$$P = 3 + 4(X-1) + \frac{5}{2}(X-1)^2 = \frac{5}{2}X^2 - X + \frac{3}{2}.$$

Solution de l'exercice 4

Considérons dans un premier temps le cas où $n = 0$, puis le cas où $n = 1$.

- Si $n = 0$ alors $(X+1)^0 - X^0 - 1 = -1$. Son degré est inférieur strictement à celui de $X^2 + X + 1$; il n'est donc pas divisible par $X^2 + X + 1$.
- Si $n = 1$ alors $(X+1)^1 - X^1 - 1 = 0$. Le polynôme nul étant divisible par n'importe quel polynôme, il est donc divisible par $X^2 + X + 1$.

Supposons à présent $n \geqslant 2$. Les racines du polynôme $X^2 + X + 1$ sont j et $\bar{\mathrm{j}}$ avec $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Que savons-nous sur j ? On sait (voir l'exercice 1 du chapitre 4) que $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^{-1}$ et $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$. De plus, $\mathrm{j}^3 = 1$ ou, plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{j}^{3k} = 1$, $\mathrm{j}^{3k+1} = \mathrm{j}$ et $\mathrm{j}^{3k+2} = \mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$. Dire que le polynôme $P = (X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$ équivaut à dire que j est racine de P ou que $\bar{\mathrm{j}}$ est racine de P puisque $P \in \mathbb{R}[X]$. Calculons $\widetilde{P}(\mathrm{j})$. On a :

$$\widetilde{P}(\mathrm{j}) = (\mathrm{j}+1)^n - \mathrm{j}^n - 1 = (-1)^n \mathrm{j}^{2n} - \mathrm{j}^n - 1$$

où on a utilisé que $\mathrm{j} + 1 = -\mathrm{j}^2$. Posons $n = 3k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$. On a : $\mathrm{j}^n = \mathrm{j}^{3k+r} = \mathrm{j}^r$, $\mathrm{j}^{2n} = \mathrm{j}^{6k+2r} = \mathrm{j}^{2r}$. D'où

$$\widetilde{P}(\mathrm{j}) = (-1)^{3k+r}\mathrm{j}^{2r} - \mathrm{j}^r - 1.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k et r avons-nous $\widetilde{P}(\mathrm{j}) = 0$? Pour répondre à cette question, nous procédons maintenant à une discussion sur r :

- Le premier cas $r = 0$ est impossible car $\widetilde{P}(\mathrm{j}) = (-1)^{3k} - 2 \neq 0$. Le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ n'est donc pas divisible par $X^2 + X + 1$ lorsque $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$.
- Le deuxième cas $r = 1$ conduit à $\widetilde{P}(\mathrm{j}) = (-1)^{3k+1}\mathrm{j}^2 - \mathrm{j} - 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\widetilde{P}(\mathrm{j})$ soit nul est que $(-1)^{3k+1} = -1$, autrement dit que $3k$ soit pair, c'est-à-dire : $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. On en déduit alors que le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$ lorsque $n = 3(2p) + 1 = 6p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$.
- Le troisième cas $r = 2$ conduit à $\widetilde{P}(\mathrm{j}) = (-1)^{3k+2}\mathrm{j} - \mathrm{j}^2 - 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\widetilde{P}(\mathrm{j})$ soit nul est que $(-1)^{3k+2} = -1$, autrement dit que $3k$ soit impair, c'est-à-dire : $k = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. On en déduit alors que le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$ lorsque $n = 3(2p + 1) + 2 = 6p + 5$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 5

Soit $P = X^3 + 2X^2 + 3X + \lambda \in \mathbb{C}[X]$. On note α_1, α_2 et α_3 les trois racines complexes (distinctes ou confondues) de P. Commençons par écrire les (trois) relations existantes entre les coefficients et les racines du polynôme P. Elles sont regroupées dans le système suivant :

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcr} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & -2 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 & = & 3 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 & = & -\lambda \end{array} \right. .$$

Or, par hypothèse, le produit de deux des racines de P (disons, par exemple, α_1 et α_2) vaut 2, c'est-à-dire : $\alpha_1\alpha_2 = 2$. On obtient donc le système suivant :

$$(\mathrm{S}') \quad \left\{ \begin{array}{rcr} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & -2 \\ \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2) & = & 1 \\ -2\alpha_3 & = & \lambda \end{array} \right. .$$

Déterminons α_3 (ce qui nous donnera alors directement λ). Pour cela, réécrivons la première équation de (S') sous la forme : $\alpha_1 + \alpha_2 = -(2 + \alpha_3)$, et injectons-la dans la deuxième équation de (S'). On obtient :

$$\alpha_3^2 + 2\alpha_3 + 1 = 0,$$

c'est-à-dire $(\alpha_3 + 1)^2 = 0$, soit $\alpha_3 = -1$, d'où $\lambda = -2 \times (-1) = 2$. Bien que cela ne soit pas demandé dans l'énoncé, on peut déterminer assez facilement les deux autres racines, α_1 et α_2, du polynôme P. En effet, on sait d'une part que $\alpha_1\alpha_2 = 2$ (par hypothèse) et d'autre part que $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$ (cette égalité se déduit de la deuxième équation de (S')). Ainsi, connaissant leur somme ($s = -1$) et leur produit ($p = 2$), les deux nombres α_1 et α_2 sont aussi les racines du polynôme $X^2 - sX + p = X^2 + X + 2$ de discriminant égal à -7. On obtient alors $\alpha_1 = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{7})/2$ et $\alpha_2 = (-1 - \mathrm{i}\sqrt{7})/2$.

Solution de l'exercice 6

1 - Les racines deuxièmes de $8 + 6\mathrm{i}$ sont les complexes de la forme $a + ib$ avec a et b deux réels tels que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a^2 - b^2 & = & 8 \\ 2ab & = & 6 \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \end{array} \right.$$

Ce système admet pour solutions les couples (a, b) suivants : $(3, 1)$ et $(-3, -1)$. Les deux racines deuxièmes de $8 + 6\mathrm{i}$ sont donc $\delta = 3 + \mathrm{i}$ et $\delta' = -3 - \mathrm{i}$. Le discriminant de l'équation (E_1) vaut $8 + 6\mathrm{i}$. Les solutions de (E_1) sont donc :

$$s_1 = \frac{(1 + \mathrm{i}) + \delta}{2\mathrm{i}} = 1 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad s_2 = \frac{(1 + \mathrm{i}) + \delta'}{2\mathrm{i}} = \mathrm{i}.$$

2 - a) Supposons que le réel r soit solution de (E_2). On a alors :

$$\mathrm{i}r^3 + (2\mathrm{i} - 1)r^2 - (4 + \mathrm{i})r + 3(2\mathrm{i} - 1) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$-(r^2+4r+3)+\mathrm{i}(r^3+2r^2-r+6)=0.$$

Rappelons que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. Ainsi, r est solution de (E_2) si et seulement si, il est solution du système suivant :

$$(\mathrm{S})\quad \left\{\begin{array}{lcl} r^2+4r+3 & = & 0 \\ r^3+2r^2-r+6 & = & 0 \end{array}\right.$$

b) Une condition nécessaire et suffisante pour que (E_2) admette une solution réelle est que le système (S) admette une solution (réelle). Considérons la première équation de ce système. Elle admet deux solutions réelles qui sont $r_1=-1$ et $r_2=-3$. On a :

$$r_1^3+2r_1^2-r_1+6=8\neq 0 \quad \text{et} \quad r_2^3+2r_2^2-r_2+6=0.$$

On en déduit que le système (S), et par conséquent que l'équation (E_2), admet une unique solution réelle $r_2=-3$.

c) Les solutions de l'équation (E_2) sont les racines du polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$ défini par

$$P=\mathrm{i}X^3+(2\mathrm{i}-1)X^2-(\mathrm{i}+4)X+3(2\mathrm{i}-1).$$

Ce polynôme est de degré 3. D'après le théorème de D'Alembert, il admet trois racines, comptées avec leurs multiplicités, dans $\mathbb{C}$. Puisque -3 est racine de P (d'après la question b), il existe un unique $Q\in\mathbb{C}[X]$ tel que $P=(X+3)Q$. On obtient l'expression de Q, par exemple, en effectuant la division euclidienne de P par $X+3$ (on peut également procéder par identification). On obtient :

$$Q=\mathrm{i}X^2-(\mathrm{i}+1)X+(2\mathrm{i}-1).$$

D'après la question 1, Q admet pour racines $s_1=1-2\mathrm{i}$ et $s_2=\mathrm{i}$. On a donc la décomposition en produit de facteurs irréductibles suivante pour $P\in\mathbb{C}[X]$

$$P=\mathrm{i}(X+3)(X-\mathrm{i})(X-(1-2\mathrm{i})).$$

On peut finalement conclure que les racines de (E_2) sont -3, i et $1-2\mathrm{i}$.

Solution de l'exercice 7

1 - Les racines dans $\mathbb{C}$ de X^6+1 sont $\alpha_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/6}$ avec $k\in\{0,1,\dots,5\}$. Ce sont donc les nombres complexes $\alpha_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$, $\alpha_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=\mathrm{i}$, $\alpha_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6}$, $\alpha_3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/6}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6}$, $\alpha_4=\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2}=-\mathrm{i}$ et $\alpha_5=\mathrm{e}^{\mathrm{i}11\pi/6}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$. Le polynôme P se factorise alors dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme irréductible :

$$P=(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6})(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6})(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6})(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6})$$

dont on déduit la factorisation irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ suivante :

$$P=(X^2-X\sqrt{3}+1)(X^2+1)(X^2+X\sqrt{3}+1).$$

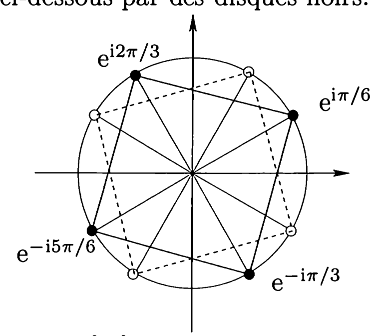
Voici une autre manière de procéder dont l'idée est de faire apparaître des identités remarquables :

$$\begin{aligned}
P &= X^6 - X^4 + X^4 + X^2 - X^2 + 1\\
&= X^2(X^4 - X^2 + 1) + X^4 - X^2 + 1\\
&= (X^2+1)(X^4 - X^2 + 1)\\
&= (X^2+1)(X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2)\\
&= (X^2+1)\left((X^2+1)^2 - 3X^2\right)\\
&= (X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1).
\end{aligned}$$

2 - Effectuons le changement d'indéterminée $Y = X^4$. Le polynôme $Q = X^8 + X^4 + 1$ s'écrit $Y^2 + Y + 1$ dont les deux racines (complexes) sont j et $\bar{\mathrm{j}}$. Il convient alors de calculer les racines quatrièmes de j et celles de $\bar{\mathrm{j}}$. Les racines quatrièmes de j sont les nombres complexes $\alpha_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/6 + k\pi/2)}$ avec $k \in \{0,1,2,3\}$, c'est-à-dire les quatre complexes :

$$\alpha_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}, \quad \alpha_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3} = \mathrm{j}, \quad \alpha_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}, \quad \alpha_3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = -\mathrm{j}.$$

Leurs images sont représentées sur la figure ci-dessous par des disques noirs. Les racines quatrièmes de $\bar{\mathrm{j}}$ sont les conjugués des racines quatrièmes de j. Autrement dit, les racines quatrièmes de $\bar{\mathrm{j}}$ sont les complexes $\overline{\alpha_0} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$, $\overline{\alpha_1} = \bar{\mathrm{j}}$, $\overline{\alpha_2} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$ et $\overline{\alpha_3} = -\bar{\mathrm{j}}$. Leurs images sont représentées sur la figure ci-contre par des disques blancs.



Il suffit alors de factoriser, puis de regrouper les complexes conjugés deux à deux.
On obtient la factorisation irréductible de Q dans $\mathbb{R}[X]$ suivante :

$$\begin{aligned}
Q &= (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6})(X - \mathrm{j})(X - \bar{\mathrm{j}})(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6})(X + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6})\\
&\quad \times (X + \mathrm{j})(X + \bar{\mathrm{j}})\\
&= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - X + 1).
\end{aligned}$$

Voici une autre manière de procéder :

$$\begin{aligned}
Q &= X^8 + 2X^4 + 1 - X^4\\
&= (X^4+1)^2 - X^4\\
&= (X^4 + X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)\\
&= (X^4 + 2X^2 + 1 - X^2)(X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2)\\
&= \left((X^2+1)^2 - X^2\right)\left((X^2+1)^2 - 3X^2\right)\\
&= (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1).
\end{aligned}$$

3 - Soit $\varphi \in [0, \pi[$. Posons $Y = X^3$. Le discriminant du polynôme $Y^2 - 2Y\cos\varphi + 1$ est donné par : $\Delta = 4(\cos^2\varphi - 1) = -4\sin^2\varphi = (2\mathrm{i}\sin\varphi)^2$. Une racine carrée de Δ est le nombre complexe $2\mathrm{i}\sin\varphi$. S'en déduit alors les racines de $Y^2 - 2Y\cos\varphi + 1$:

$$\frac{2\cos\varphi + 2\mathrm{i}\sin\varphi}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{et} \quad \frac{2\cos\varphi - 2\mathrm{i}\sin\varphi}{2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}.$$

Pour obtenir les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme R_φ, il suffit alors de résoudre les deux équations $X^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ et $X^3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$. Les solutions de la première équation sont les complexes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/3}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi)/3}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+4\pi)/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-2\pi)/3}$. Les solutions de la seconde équation sont les complexes conjugués des solutions de la première équation. Elles s'écrivent ainsi : $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/3}$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi+2\pi)/3}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-2\pi)/3}$. On en déduit alors la factorisation de R_φ dans $\mathbb{R}[X]$ suivante :

$$R_\varphi = \left(X^2 - 2X\cos\tfrac{\varphi}{3} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\tfrac{\varphi+2\pi}{3} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\tfrac{\varphi-2\pi}{3} + 1\right).$$

Cette factorisation est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ lorsque $\varphi \in]0, \pi[$. Dans le cas particulier où $\varphi = 0$, on a :

$$R_{\varphi=0} = (X^2 - 2X + 1)(X^2 + X + 1)^2 = (X-1)^2(X^2 + X + 1)^2.$$

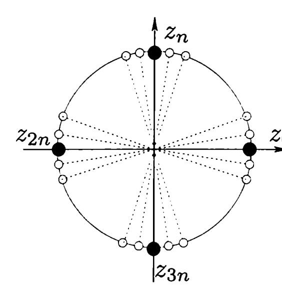
Cette dernière factorisation est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution de l'exercice 8

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

1 - Les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^{4n} - 1 = 0$ sont les nombres complexes $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}$ avec k un entier variant de 0 à $4n-1$. Il y en a $4n$. Ce sont les racines $4n$-ièmes de l'unité. En particulier,

- pour $k = 0$: $z_0 = 1$,
- pour $k = n$: $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$,
- pour $k = 2n$: $z_{2n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$,
- pour $k = 3n$: $z_{3n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i}$.



On remarque que $z_0^4 = z_n^4 = z_{2n}^4 = z_{3n}^4 = 1$. Ainsi, les quatre complexes z_0, z_n, z_{2n}, z_{3n} sont les racines quatrièmes de l'unité.

2 - Pour vérifier l'égalité $X^{4n} - 1 = (X^4 - 1)\sum_{k=0}^{n-1} X^{4k}$, il suffit de développer le terme de droite (voir par exemple la correction de l'exercice 5 donnée en page 87).

3 - En effectuant le changement d'indice $k' = 4n - k$, on obtient :

$$\prod_{k=2n+1}^{4n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}) = \prod_{k'=2n-1}^{1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(4n-k')\pi/2n}) = \prod_{k'=1}^{2n-1} (X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\pi/2n}).$$

Puisque l'indice k' est muet, il peut être finalement remplacé par k. On a donc :

$$\prod_{k=2n+1}^{4n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}) = \prod_{k=1}^{2n-1} (X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n}). \tag{12}$$

De même, en effectuant le changement d'indice $k' = 2n - k$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=n+1}^{2n-1} \left[(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n})\right] \\
&= \prod_{k'=n-1}^{1} \left[(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-k')\pi/2n})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-k')\pi/2n})\right] \\
&= \prod_{k'=1}^{n-1} \left[(X + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\pi/2n})(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\pi/2n})\right].
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on remplace finalement l'indice k' par k. On a donc :

$$\prod_{k=n+1}^{2n-1} \left[(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n})\right] = \prod_{k=1}^{n-1} \left[(X + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n})(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})\right]. \quad (13)$$

Procédons en deux étapes. Commençons par isoler dans $\prod_{k=0}^{4n-1}(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})$ les indices $k = 0$ et $k = 2n$ (on retrouve alors les deux racines réelles $z_0 = 1$ et $z_{2n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$). En remarquant que $(X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$, on a :

$$\prod_{k=0}^{4n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}) = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{2n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}) \prod_{k=2n+1}^{4n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}).$$

D'où, en utilisant (12) puis en regroupant les deux produits :

$$\prod_{k=0}^{4n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}) = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{2n-1} \left[(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n})\right].$$

Isolons à présent dans le dernier produit l'indice $k = n$ (on retrouve cette fois-ci les deux racines imaginaires pures $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$ et $z_{3n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i}$). En remarquant que $(X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i}) = X^2 + 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{4n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}) = \underbrace{(X^2 - 1)(X^2 + 1)}_{=X^4-1} &\prod_{k=1}^{n-1} \left[(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n})\right] \\
\times &\prod_{k=n+1}^{2n-1} \left[(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n})\right].
\end{aligned}$$

D'où, en utilisant (13) puis en regroupant les deux produits et enfin en réordonnant les facteurs apparaissant dans le produit :

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=0}^{4n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}) = \\
&(X^4 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \Big[\underbrace{(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n})}_{=X^2-2\mathrm{i}X\sin\frac{k\pi}{2n}-1} \underbrace{(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n})(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})}_{=X^2+2\mathrm{i}X\sin\frac{k\pi}{2n}-1}\Big],
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\prod_{k=0}^{4n-1}(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})=(X^4-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2-2\mathrm{i}X\sin\frac{k\pi}{2n}-1)(X^2+2\mathrm{i}X\sin\frac{k\pi}{2n}-1).$$

4 - Considérons le polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$ défini par $P=X^{4n}-1$. Ce polynôme admet $4n$ racines distinctes sur $\mathbb{C}$. Elles ont été calculées à la première question. Son terme de plus haut degré ayant pour coefficient 1, la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$X^{4n}-1=\prod_{k=0}^{4n-1}(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}).$$

Enfin, utilisant les égalités établies à la première question et à la deuxième question, on en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n-1}X^{4k}=\prod_{k=1}^{n-1}(X^2-2\mathrm{i}X\sin\frac{k\pi}{2n}-1)(X^2+2\mathrm{i}X\sin\frac{k\pi}{2n}-1)$$

et donc, pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}z^{4k}=\prod_{k=1}^{n-1}(z^2-2\mathrm{i}z\sin\frac{k\pi}{2n}-1)(z^2+2\mathrm{i}z\sin\frac{k\pi}{2n}-1).$$

5 - En choisissant $z=1$ dans cette dernière égalité, on obtient :

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}\left[(-2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2n})(2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2n})\right]=2^{2(n-1)}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n}$$

dont on déduit :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Solution de l'exercice 9

En préambule à cet exercice, bien que cela ne soit pas demandé, on vérifie que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, B_n est un polynôme de degré n, à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et normalisé (son coefficient de plus haut degré vaut 1). Le cas $n=0$ est immédiat car $B_0=1$. Supposons (c'est notre hypothèse de récurrence) que $B_n=\sum_{k=0}^{n}b_kX^k$ avec b_0, b_1, ..., b_n dans $\mathbb{Q}$ et $b_n=1$. Clairement, le polynôme B'_{n+1} est de degré n puisqu'il est égal à $(n+1)B_n$. Le polynôme B_{n+1} est donc de degré $n+1$. Écrivons-le comme suit :

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}a_kX^k.$$

On a alors :

$$B'_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_kkX^{k-1}=\sum_{\ell=0}^{n}a_{\ell+1}(\ell+1)X^\ell$$

où on a effectué le changement d'indice $\ell = k-1$. L'indice étant muet, on peut à présent le remplacer par k. La relation $B'_{n+1} = (n+1)B_n$ s'écrit ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(k+1)X^k = \sum_{k=0}^{n}(n+1)b_k X^k.$$

D'où, par identification des coefficients,

$$\forall k \in \{0,1,\dots,n\} \quad a_{k+1} = \frac{n+1}{k+1} b_k,$$

ce qui montre, d'une part, que les coefficients $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ sont dans $\mathbb{Q}$ puisque, par hypothèse, $b_0, b_1, \dots, b_n$ appartiennent à $\mathbb{Q}$, et, d'autre part, que $a_{n+1} = 1$ car, par hypothèse, $b_n = 1$. Il reste à vérifier que $a_0 \in \mathbb{Q}$. On a :

$$\int_0^1 \widetilde{B}_{n+1}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k\Big]\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n+1}\Big[a_k \int_0^1 x^k \mathrm{d}x\Big] = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{k+1}.$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 \widetilde{B}_{n+1}(x)\mathrm{d}x = 0$. Ainsi, $a_0 = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{k+1}$, ce qui montre que $a_0 \in \mathbb{Q}$.

1 - On trouve :

$$B_1 = X - \frac{1}{2}, \quad B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6},$$

$$B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X, \quad B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}.$$

2 - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. De l'égalité $B'_n = nB_{n-1}$ on déduit[(5)] :

$$\widetilde{B}_n(1) - \widetilde{B}_n(0) = \int_0^1 \widetilde{B}'_n(x)\mathrm{d}x = n\int_0^1 \widetilde{B}_{n-1}(x)\mathrm{d}x.$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 \widetilde{B}_{n-1}(x)\mathrm{d}x = 0$. Donc, $\widetilde{B}_n(1) = \widetilde{B}_n(0)$.

3 - Le cas $n = 1$ est immédiat car $Q_1 = ((X+1) - 1/2) - (X - 1/2) = 1$. Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $Q_n = nX^{n-1}$ (c'est notre hypothèse de récurrence) et déduisons-en que $Q_{n+1} = (n+1)X^n$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{Q}_{n+1}(x) = \widetilde{B}_{n+1}(x+1) - \widetilde{B}_{n+1}(x).$$

D'où, par dérivation :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{Q}'_{n+1}(x) &= \widetilde{B}'_{n+1}(x+1) - \widetilde{B}'_{n+1}(x)\\ &= (n+1)\widetilde{B}_n(x+1) - (n+1)\widetilde{B}_n(x)\\ &= (n+1)\widetilde{Q}_n(x),\end{aligned}$$

[(5)] Pour toute fonction f dérivable sur $[a,b]$ on a : $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$.

c'est-à-dire : $Q'_{n+1} = (n+1)Q_n$. Utilisant alors l'hypothèse de récurrence, on obtient : $Q'_{n+1} = (n+1)nX^{n-1}$, ce qui implique :

$$Q_{n+1} = (n+1)X^n + \beta$$

où β est une constante que l'on détermine facilement en évaluant $\widetilde{Q}_{n+1}$ en 0. On a en effet $\widetilde{Q}_{n+1}(0) = \beta$ et $\widetilde{Q}_{n+1}(0) = \widetilde{B}_{n+1}(1) - \widetilde{B}_{n+1}(0)$. Or, d'après la question précédente, $\widetilde{B}_{n+1}(1) = \widetilde{B}_{n+1}(0)$. On obtient ainsi $\beta = 0$, ce qui montre que $Q_{n+1} = (n+1)X^n$ et termine la récurrence.

4 - Soient k et n deux entiers naturels tels que $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$. D'après la question précédente, $\widetilde{Q}_{n+1}(\ell) = (n+1)\ell^n$ pour tout $\ell \in \{1, \dots, k\}$. D'où :

$$\underbrace{1 + 2^n + \dots + k^n}_{= S_k^{(n)}} = \frac{1}{n+1}\left(\widetilde{Q}_{n+1}(1) + \widetilde{Q}_{n+1}(2) + \dots + \widetilde{Q}_{n+1}(k)\right).$$

Or, $\widetilde{Q}_{n+1}(\ell) = \widetilde{B}_{n+1}(\ell+1) - \widetilde{B}_{n+1}(\ell)$ pour tout $\ell \in \{1, \dots, k\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_k^{(n)} &= \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{k}\widetilde{Q}_{n+1}(\ell) = \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{k}\left(\widetilde{B}_{n+1}(\ell+1) - \widetilde{B}_{n+1}(\ell)\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{\ell=1}^{k}\widetilde{B}_{n+1}(\ell+1) - \sum_{\ell=1}^{k}\widetilde{B}_{n+1}(\ell)\right] \\ &= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{\ell'=2}^{k+1}\widetilde{B}_{n+1}(\ell') - \sum_{\ell=1}^{k}\widetilde{B}_{n+1}(\ell)\right]. \end{aligned}$$

où on a effectué le changement d'indice $\ell' = \ell + 1$. L'indice est muet. On peut finalement le remplacer par ℓ. On obtient alors :

$$S_k^{(n)} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{\ell=2}^{k+1}\widetilde{B}_{n+1}(\ell) - \sum_{\ell=1}^{k}\widetilde{B}_{n+1}(\ell)\right].$$

En isolant le terme d'indice $\ell = k+1$ dans le première somme et celui d'indice $\ell = 1$ dans la seconde, les deux sommes restantes s'annulant alors, on obtient :

$$S_k^{(n)} = \frac{1}{n+1}\left(\widetilde{B}_{n+1}(k+1) - \widetilde{B}_{n+1}(1)\right).$$

5 - Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 1$. En utilisant les expressions des polynômes B_2, B_3 et B_4 (voir question 1), on trouve :

$$S_k^{(1)} = \frac{(k+1)k}{2}, \quad S_k^{(2)} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \text{et} \quad S_k^{(3)} = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

6 - Le résultat s'obtient par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est immédiat puisque $B_0 = 1$ et $(-1)^0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\widetilde{B}_n(1-x) = (-1)^n \widetilde{B}_n(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ (c'est notre hypothèse de récurrence) et montrons que $\widetilde{B}_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1}\widetilde{B}_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Dérivons l'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto \widetilde{B}_{n+1}(1-x)$ par la formule de dérivation des fonctions composées :

$$\left(\widetilde{B}_{n+1}(1-x)\right)' = -\widetilde{B}'_{n+1}(1-x) = -(n+1)\widetilde{B}_n(1-x)$$

où on a utilisé que $B'_{n+1} = (n+1)B_n$ (par définition d'un polynôme de Bernoulli). Utilisons à présent l'hypothèse de récurrence. On obtient :

$$\left(\widetilde{B}_{n+1}(1-x)\right)' = (-1)^{n+1}(n+1)\widetilde{B}_n(x) = (-1)^{n+1}\left(\widetilde{B}_{n+1}(x)\right)'$$

où on a encore utilisé que $B'_{n+1} = (n+1)B_n$. On en déduit alors, par un simple calcul de primitive, que

$$\widetilde{B}_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1}\widetilde{B}_{n+1}(x) + \alpha$$

où α est une constante que l'on détermine en intégrant entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 \widetilde{B}_{n+1}(1-x)\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\int_0^1 \widetilde{B}_{n+1}(x)\mathrm{d}x + \alpha.$$

L'intégrale du membre de droite est nulle (c'est une des propriétés des polynômes de Bernoulli). Celle du membre de gauche est nulle aussi puisqu'en effectuant le changement de variable $y = 1 - x$, on obtient :

$$\int_0^1 \widetilde{B}_{n+1}(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \widetilde{B}_{n+1}(y)\mathrm{d}y = 0.$$

On peut alors conclure que $\alpha = 0$, ce qui termine la récurrence. On vient donc de démontrer que, pour tout entier naturel n, $\widetilde{B}_n(1-x) = (-1)^n\widetilde{B}_n(x)$ et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, en prenant $x = 0$, on a :

$$\widetilde{B}_n(1) = (-1)^n\widetilde{B}_n(0).$$

On a donc $\widetilde{B}_n(1) = \widetilde{B}_n(0)$ si n est pair (c'est-à-dire si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$) et $\widetilde{B}_n(1) = -\widetilde{B}_n(0)$ si n est impair (c'est-à-dire si $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$). En combinant ce résultat avec $\widetilde{B}_n(0) = \widetilde{B}_n(1)$ pour tout $n \geqslant 2$ (résultat démontré à la deuxième question), on en déduit que $b_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geqslant 1$. Attention, $b_1 = \widetilde{B}_1(0) = -1/2 \neq 0$.

7 - Soient x, y dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor, on a :

$$\widetilde{B}_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{B_n^{(k)}}(x)}{k!}y^k.$$

Il suffit alors de vérifier que $\widetilde{B_n^{(k)}}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}\widetilde{B}_{n-k}(x)$, c'est-à-dire :

$$\widetilde{B_n^{(k)}}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)\widetilde{B}_{n-k}(x).$$

Partant de la relation $B'_n = nB_{n-1}$ définissant les polynômes de Bernoulli, on obtient, par dérivation successive :

$$\begin{array}{rcl} B''_n & = & n(n-1)B_{n-2}, \\ B'''_n & = & n(n-1)(n-2)B_{n-3}, \\ & & \\ B_n^{(k)} & = & n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)B_{n-k}, \end{array}$$

ce qui termine la démonstration (il suffit de revenir aux applications polynomiales associées).

8 - La première égalité s'obtient en prenant $x = 0$ dans l'égalité démontrée à la question précédente. La deuxième s'obtient en effectuant un changement d'indice dans la sommation. Par ailleurs,

$$\widetilde{B}_n(1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k + b_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k + \widetilde{B}_n(0).$$

Or, $\widetilde{B}_n(1) = \widetilde{B}_n(0)$ dès que $n \geqslant 2$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

Solution de l'exercice 10

1 - Raisonnons par l'absurde. Considérons dans $\mathbb{R}[X]$ deux polynômes distincts P et Q, de degrés inférieurs ou égaux à n, tels que $\widetilde{P}(x_j) = y_j = \widetilde{Q}(x_j)$ pour tout $j \in \{0,\dots,n\}$. On en déduit que $\widetilde{P}(x_j) - \widetilde{Q}(x_j) = 0$ pour tout $j \in \{0,\dots,n\}$ ou encore, de manière équivalente, que

$$\forall j \in \{0,\dots,n\} \quad (\widetilde{P-Q})(x_j) = 0,$$

ce qui signifie que le polynôme $P-Q$, qui est non nul (puisque, par hypothèse, $P \neq Q$) et de degré inférieur ou égal à n, possède $n+1$ racines, ce qui est impossible. L'unicité est démontrée.

2 - Soit $i \in \{0,1,\dots,n\}$. Le polynôme $L_i \in \mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à n, est défini par $\widetilde{L}_i(x_i) = 1$ et par $\widetilde{L}_i(x_j) = 0$ pour tout $j \neq i$. Il admet ainsi pour racines tous les réels x_j avec $j \in \{0,1,\dots,n\} \setminus \{i\}$. On en dénombre n. Le polynôme L_i se factorise donc sous la forme suivante :

$$L_i = \alpha_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(X - x_j)$$

avec α_i une constante réelle. Déterminons-la. On sait que $\widetilde{L}_i(x_i) = 1$. Ainsi,

$$\alpha_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j) = 1 \quad \text{d'où} \quad \alpha_i = 1/\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)$$

puisque les x_j, $0 \leqslant j \leqslant n$, sont distincts deux à deux. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

3 - Le polynôme d'interpolation de Lagrange des points $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_n$ s'écrit :

$$P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i.$$

C'est en effet un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. De plus, son degré est bien inférieur ou égal à n. Enfin, il interpole bien les $n+1$ points $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_n$ puisqu'il vérifie

$$\forall j \in \{0, \ldots, n\} \quad \widetilde{P}(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \widetilde{L}_i(x_j) = y_j.$$

4 - On vérifie que

$$L_0 = -\frac{X(X-1)(X-2)}{6}, \quad L_1 = \frac{(X+1)(X-1)(X-2)}{2},$$
$$L_2 = -\frac{X(X+1)(X-2)}{2}, \quad L_3 = \frac{X(X-1)(X+1)}{6}.$$

On en déduit :

$$P = \frac{X(X-1)(X-2)}{6} - \frac{X(X+1)(X-2)}{2} = -\frac{X(X^2-4)}{3}.$$

CHAPITRE 7

Le corps des fractions rationnelles

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous avons vu que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ possède une structure d'anneau commutatif. De plus, si le produit de deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est nul alors l'un ou l'autre de ces deux polynômes est nécessairement nul (l'anneau des polynômes est un anneau intègre). Malheureusement, $\mathbb{K}[X]$ ne possède pas une structure de corps car seuls les polynômes constants et non nuls sont inversibles (c'est-à-dire symétrisable pour la multiplication). Nous allons définir dans ce chapitre un nouvel ensemble, que nous noterons $\mathbb{K}(X)$ (remarquer la présence de parenthèses à la place des crochets), qui « englobe » $\mathbb{K}[X]$ et qui possède, lui, une structure de corps (commutatif).

Afin d'alléger les notations, on note par la même lettre un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

7.1 Les fractions rationnelles

7.1.1 Définition d'une fraction rationnelle

On note $\mathbb{K}[X]^*$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ privé du polynôme nul. Autrement dit,

$$\mathbb{K}[X]^* \overset{not.}{=} \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}.$$

On considère sur l'ensemble $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ la relation $\mathcal{R}$ définie comme suit : deux couples (A_1, B_1) et (A_2, B_2) de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ sont en relation par $\mathcal{R}$, et on note $(A_1, B_1)\mathcal{R}(A_2, B_2)$, si

$$A_1 \times B_2 = A_2 \times B_1.$$

La relation $\mathcal{R}$ vérifie les trois propriétés suivantes.

- Elle est réflexive : pour tout $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$, $(A, B)\mathcal{R}(A, B)$. C'est immédiat.
- De plus, elle est symétrique : pour tous $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ appartenant à $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$,

  $$(A_1, B_1)\mathcal{R}(A_2, B_2) \quad \Longrightarrow \quad (A_2, B_2)\mathcal{R}(A_1, B_1).$$

  Cela se déduit de la propriété de symétrie de l'égalité.

– Enfin, elle est transitive. Pour s'en convaincre, prenons (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) trois couples de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ tels que

$$(A_1, B_1)\mathcal{R}(A_2, B_2) \quad \text{et} \quad (A_2, B_2)\mathcal{R}(A_3, B_3),$$

c'est-à-dire tels que

$$A_1 \times B_2 = A_2 \times B_1, \tag{1}$$

$$A_2 \times B_3 = A_3 \times B_2. \tag{2}$$

On vérifie les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(A_1 \times B_3) \times B_2 &= (A_1 \times B_2) \times B_3 &&= (A_2 \times B_1) \times B_3 \quad \text{d'après (1)} \\
&= (A_2 \times B_3) \times B_1 &&= (A_3 \times B_2) \times B_1 \quad \text{d'après (2)} \\
&= (A_3 \times B_1) \times B_2.
\end{aligned}$$

On a donc obtenu l'égalité :

$$\Big((A_1 \times B_3) - (A_3 \times B_1)\Big) \times B_2 = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

Puisque $B_2 \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et puisqu'il n'existe pas de diviseur de zéro dans $\mathbb{K}[X]$, on en déduit :

$$A_1 \times B_3 = A_3 \times B_1,$$

c'est-à-dire :

$$(A_1, B_1)\mathcal{R}(A_3, B_3).$$

La relation $\mathcal{R}$ définit ainsi une *relation d'équivalence* (voir la définition 2.28, page 57) sur $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$.

Cela donne un sens à la définition suivante.

DÉFINITION 7.1 ✗ *Pour tout $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$, on appelle fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$, et on note A/B, la classe d'équivalence du couple (A, B) modulo $\mathcal{R}$. En d'autres termes,*

$$\frac{A}{B} \overset{\text{déf.}}{=} \left\{(C, D) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^* \;\middle|\; A \times D = C \times B\right\}.$$

Le couple (A, B) de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ est alors un représentant de la fraction rationnelle A/B. Le polynôme A se nomme le **numérateur** *et B le* dénominateur.

✗ *On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble quotient de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$. En d'autres termes,*

$$\mathbb{K}(X) \overset{\text{déf.}}{=} \left\{\frac{A}{B} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*\right\}.$$

On déduit des propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité de $\mathcal{R}$ (voir la remarque page 57), qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux fractions rationnelles A/B et C/D soient égales est que l'on ait $A\times D = C\times B$. Autrement dit, pour tous (A, B), (C, D) appartenant à $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$,

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff A \times D = C \times B.$$

On rappelle que tous les éléments d'une même classe d'équivalence sont représentants de la classe à laquelle ils appartiennent. Tout couple (C, D) de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ vérifiant $A \times D = C \times B$ peut donc être considéré comme représentant de la fraction rationnelle A/B. Un représentant de la fraction rationnelle A/B s'écrit sous la forme

$$(P \times A, P \times B)$$

avec P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Par exemple, les deux fractions

$$F_1 = \frac{X^5 - 3X^4 - X^3 + 3X^2}{X^3 - 6X^2 + 11X - 6} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \frac{X^4 - X^2}{X^2 - 3X + 2}$$

sont égales car

$$X^5 - 3X^4 - X^3 + 3X^2 = (X - 3)(X^4 - X^2),$$

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X - 3)(X^2 - 3X + 2).$$

Définition 7.2 *On appelle représentant irréductible (ou forme irréductible) d'une fraction rationnelle non nulle F de $\mathbb{K}(X)$ tout couple (A, B) de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ avec $A \neq 0$, $B \neq 0$ et tel que A et B ne possèdent pas de diviseurs communs.*

Toute fraction rationnelle F non nulle possède un représentant irréductible (ce résultat est admis). Si le couple (A, B) désigne ce représentant alors tout couple de la forme $(\lambda A, \lambda B)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est aussi un représentant irréductible de F. On dit que F admet pour forme irréductible la fraction rationnelle A/B.

Exemple La fraction rationnelle $F = A/B$ de $\mathbb{R}(X)$ avec

$$A = X^4 - X^2 \qquad \text{et} \qquad B = X^2 - 3X + 2$$

admet pour forme irréductible le couple $\big(X^2(X + 1), X - 2\big)$ car

$$\frac{X^4 - X^2}{X^2 - 3X + 2} = \frac{X^2(X - 1)(X + 1)}{(X - 1)(X - 2)} = \frac{X^2(X + 1)}{X - 2}$$

et les polynômes $X^2(X + 1)$ et $X - 2$, tous les deux non nuls, ne possèdent pas de diviseurs communs.

Opérations sur $\mathbb{K}(X)$

On munit l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ de deux lois de composition interne, l'addition et la multiplication, notées respectivement $+$ et $\times$, et définies pour tous A_1/B_1, A_2/B_2 appartenant à $\mathbb{K}(X)$ par :

$$\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} \overset{déf.}{=} \frac{A_1 \times B_2 + B_1 \times A_2}{B_1 \times B_2} \quad \text{et} \quad \frac{A_1}{B_1} \times \frac{A_2}{B_2} \overset{déf.}{=} \frac{A_1 \times A_2}{B_1 \times B_2}.$$

Ces deux lois sont légitimes car elles ne dépendent pas des représentants choisis pour chacune des fractions. Elles vérifient de plus les propriétés suivantes.

- La loi $+$ est associative et commutative sur $\mathbb{K}(X)$. Elle admet pour élément neutre l'élément $0_{\mathbb{K}[X]}/1_{\mathbb{K}[X]}$ car, pour tout $A/B \in \mathbb{K}(X)$,

$$\frac{A}{B} + \frac{0_{\mathbb{K}[X]}}{1_{\mathbb{K}[X]}} = \frac{A \times 1_{\mathbb{K}[X]} + 0_{\mathbb{K}[X]} \times B}{B \times 1_{\mathbb{K}[X]}} = \frac{A \times 1_{\mathbb{K}[X]}}{B \times 1_{\mathbb{K}[X]}} = \frac{A}{B}.$$

  Tout élément A/B de $\mathbb{K}(X)$ admet pour opposé la fraction rationnelle $(-A)/B$ que l'on note $-(A/B)$.
- La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$.
- La loi $\times$ est associative et commutative sur $\mathbb{K}(X)$. La fraction rationnelle $1_{\mathbb{K}[X]}/1_{\mathbb{K}[X]}$ est l'élément neutre pour la loi $\times$ car, pour tout $A/B \in \mathbb{K}(X)$,

$$\frac{A}{B} \times \frac{1_{\mathbb{K}[X]}}{1_{\mathbb{K}[X]}} = \frac{A \times 1_{\mathbb{K}[X]}}{B \times 1_{\mathbb{K}[X]}} = \frac{A}{B}.$$

  Toute fraction rationnelle A/B non nulle admet un inverse. C'est la fraction rationnelle B/A.

Muni de ces deux lois, l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ possède une structure de corps commutatif.

Injection canonique de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$

Considérons l'application Φ définie de l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ dans l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnnelles sur $\mathbb{K}$ par

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \Phi(P) = \frac{P}{1_{\mathbb{K}[X]}}.$$

Cette application est injective puisque, étant donnés deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$, si $\Phi(P) = \Phi(Q)$ alors, par définition de l'application Φ, on a $P/1_{\mathbb{K}[X]} = Q/1_{\mathbb{K}[X]}$, ou, de manière équivalente,

$$P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = Q \times 1_{\mathbb{K}[X]},$$

c'est-à-dire : $P = Q$. On l'appelle l'*injection canonique de* $\mathbb{K}[X]$ *dans* $\mathbb{K}(X)$. Par l'intermédiaire de cette injection, on identifie tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ à la fraction rationnelle $P/1_{\mathbb{K}[X]}$ de $\mathbb{K}(X)$ et on note :

$$\frac{P}{1_{\mathbb{K}[X]}} \overset{not.}{=} P$$

où Φ est sous-entendue, l'écriture correcte étant « $P/1_{\mathbb{K}[X]} = \Phi(P)$ ». On dit que l'on immerge l'ensemble des polynômes dans l'ensemble des fractions rationnelles et on note :

$$\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X).$$

Là encore, nous commettons un abus de notation puisque nous devrions plutôt écrire « $\Phi(\mathbb{K}[X]) \subset \mathbb{K}(X)$ ». Ce faisant, on procède d'une manière analogue à celle utilisée lors de la construction du corps commutatif $\mathbb{Q}$ à partir de l'anneau commutatif intègre $\mathbb{Z}$.

7.1.2 Racines et pôles d'une fraction rationnelle

Commençons par définir les racines d'une fraction rationnelle.

DÉFINITION 7.3 *Soit $F = A/B \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible et non nulle.*

✗ *On appelle racine de la fraction F toute racine du polynôme A dans $\mathbb{K}[X]$.*

✗ *On appelle ordre de multiplicité de la racine α de F l'ordre de multiplicité de α en tant que racine de A dans $\mathbb{K}[X]$.*

Définissons maintenant les pôles d'une fraction rationnelle.

DÉFINITION 7.4 *Soit $F = A/B \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible et non nulle.*

✗ *Le scalaire β de $\mathbb{K}$ est appelé pôle de F s'il est une racine du polynôme B dans $\mathbb{K}[X]$.*

✗ *On appelle ordre de multiplicité du pôle β de F l'ordre de multiplicité de β en tant que racine de B dans $\mathbb{K}[X]$.*

Exemples

1. La fraction $X^2(X+1)/(X-2)$ de $\mathbb{R}(X)$ admet pour racine -1 (racine simple) et 0 (racine double), et pour pôle 2 (pôle simple).

2. La fraction $(X-4)^3/(X^2+X+1)$ de $\mathbb{R}(X)$ admet pour racine 4 (racine triple). Elle n'admet aucun pôle (sous-entendu sur $\mathbb{R}$).

Remarque Comme c'était le cas pour les polynômes, les notions de racine et de pôle d'une fraction rationnelle dépendent du corps $\mathbb{K}$ considéré. Considérons par exemple la fraction rationnelle irréductible suivante :

$$F = \frac{X^2+1}{X^2+X+1}.$$

– Cette fraction rationnelle appartient à $\mathbb{R}(X)$. Elle ne possède aucune racine et aucun pôle sur $\mathbb{R}$.

- Elle peut aussi s'interpréter comme un élément de $\mathbb{C}(X)$. Dans ce cas-là, elle admet pour racine (sur $\mathbb{C}$) les complexes i et $-$i (racines simples) et pour pôle (sur $\mathbb{C}$) les complexes j et $\bar{\mathrm{j}}$ (pôles simples).

DÉFINITION 7.5 *À toute fraction rationnelle $F = A/B$ de $\mathbb{K}(X)$ on associe la fonction $\widetilde{F} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout x appartenant à $\mathbb{K}$ et distinct des pôles de F par*

$$\widetilde{F}(x) = \frac{\widetilde{A}(x)}{\widetilde{B}(x)}.$$

Cette fonction est appelée fonction rationnelle associée à F.

Remarque Contrairement à la fonction polynomiale $\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ associée à un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, qui est définie pour tout $x \in \mathbb{K}$ (on pourrait dans ce cas parler d'application plutôt que de fonction), la fonction rationnelle $\widetilde{F} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ associée à une fraction rationnelle F de $\mathbb{K}(X)$ n'est définie que sur l'ensemble $\mathbb{K}$ privé des pôles de F. Si la fraction rationnelle possède au moins un pôle, alors son ensemble de définition est strictement inclus dans son ensemble de départ.

Comme nous l'avons fait pour les polynômes, et ce afin d'alléger les notations, nous convenons de noter par la même lettre F la fraction rationnelle F de $\mathbb{K}[X]$ et sa fonction rationnelle associée $\widetilde{F} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$.

7.2 Décomposition d'une fraction rationnelle

7.2.1 Partie entière d'une fraction rationnelle

Considérons une fraction rationnelle irréductible A/B de $\mathbb{K}(X)$. Le degré de son numérateur n'est *a priori* pas inférieur strictement à celui de son dénominateur. Il est cependant toujours possible de se ramener à une fraction pour laquelle le degré du numérateur est inférieur strictement à celui du dénominateur. Comment procéder ? La division euclidienne de A par B dans l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$ nous assure l'existence et l'unicité de deux polynômes Q et R de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

On obtient alors, dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$,

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

puisque l'on a :

$$Q + \frac{R}{B} = \frac{Q}{1_{\mathbb{K}[X]}} + \frac{R}{B} = \frac{Q \times B + R \times 1_{\mathbb{K}[X]}}{1_{\mathbb{K}[X]} \times B} = \frac{QB + R}{B} = \frac{A}{B}.$$

La fraction rationnelle A/B étant irréductible, la fraction rationnelle R/B est elle-même irréductible et le degré de son numérateur est maintenant strictement inférieur à celui de son dénominateur. Le polynôme Q se nomme *partie entière de la fraction rationnelle* A/B. Il est nul si $\deg(A) < \deg(B)$.

Exemple Considérons dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle :

$$\frac{A}{B} = \frac{X^7 - X^6 + X^5 - X^4 - X^3 + X^2 + 3X + 1}{X^6 - 2X^5 + 3X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 2X + 1}.$$

Quelle est sa partie entière ? On sait qu'elle est non nulle car le degré de A est supérieur à celui de B. On l'obtient en effectuant la division euclidienne de A par B :

$$A = B \times (X + 1) + 4X.$$

On en déduit :

$$\frac{A}{B} = X + 1 + \frac{4X}{X^6 - 2X^5 + 3X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 2X + 1}. \qquad (3)$$

Le polynôme $X + 1$ est la partie entière de la fraction rationnelle A/B.

7.2.2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$

Commençons par deux résultats préliminaires.

Le premier résultat, qui fait l'objet du lemme 7.1, nous permet de décomposer une fraction rationnelle irréductible R/B telle que $\deg(R) < \deg(B)$, en une somme de fractions rationnelles irréductibles de la forme L/P^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\deg(L) < \deg(P^n)$.

Lemme 7.1 *Soit R/B une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$, irréductible, telle que* $\deg(R) < \deg(B)$. *Si B admet une décomposition en facteurs premiers de $\mathbb{K}[X]$ de la forme $B = P_1^{n_1} \times P_2^{n_2} \times \ldots \times P_m^{n_m}$ avec $n_1, n_2, \ldots, n_m$ des entiers naturels non nuls, alors il existe m polynômes $L_1, L_2, \ldots, L_m$ appartenant à $\mathbb{K}[X]$ tels que*

$$\frac{R}{B} = \frac{L_1}{P_1^{n_1}} + \frac{L_2}{P_2^{n_2}} + \ldots + \frac{L_m}{P_m^{n_m}}$$

avec $\deg(L_k) < \deg\left(P_k^{n_k}\right)$ *pour tout entier k compris entre* 1 *et m. Cette décomposition est unique.*

La démonstration de ce lemme s'effectue en utilisant une récurrence sur m. Elle utilise un résultat puissant d'arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$, le théorème de Bézout, dont l'énoncé et la démonstration dépassent le cadre de cet ouvrage. Le résultat du lemme 7.1 est donc à admettre. Nous l'illustrons toutefois dans l'exemple suivant.

Exemple Considérons dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{R}{B} = \frac{4X}{X^6 - 2X^5 + 3X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 2X + 1}.$$

Décomposons B en produit de facteurs premiers de $\mathbb{R}[X]$. Commençons par chercher des racines évidentes de B. On remarque que B est un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Si α est une racine rationnelle de B alors α est nécessairement un entier relatif à choisir parmi les diviseurs (dans $\mathbb{Z}$) de 1, soit parmi -1 et 1 (voir la méthode en page 243). On a : $B(-1) = 16 \neq 0$ et $B(1) = 0$. Ainsi, -1 n'est pas racine de B. En revanche, 1 l'est. Quelle est sa multiplicité ? On a :

$$B' = 6X^5 - 10X^4 + 12X^3 - 12X^2 + 6X - 2,$$

d'où $B'(1) = 0$, et $B'' = 30X^4 - 40X^3 + 36X^2 - 24X + 6$, d'où $B''(1) = 8 \neq 0$. Par conséquent, 1 est une racine double et le polynôme B est divisible par $(X-1)^2$. La division euclidienne de B par $(X-1)^2$ donne :

$$B = (X-1)^2(X^4 + 2X^2 + 1).$$

Or, $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2$. On obtient ainsi la factorisation suivante :

$$B = (X-1)^2(X^2+1)^2.$$

Cette factorisation est irréductible sur $\mathbb{R}$ car X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$ (ses deux racines complexes, i et $-$i, n'appartiennent pas à $\mathbb{R}$). On a ainsi :

$$B = P_1^2 \times P_2^2 \quad \text{avec} \quad P_1 = X - 1 \quad \text{et} \quad P_2 = X^2 + 1.$$

Dans la fraction R/B, qui est irréductible, le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur. Le lemme 7.1 nous assure l'existence de deux polynômes L_1 et L_2 de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\deg(L_1) < \deg(P_1^2) = 2$ et $\deg(L_2) < \deg(P_2^2) = 4$ et tels que

$$\frac{R}{B} = \frac{L_1}{P_1^2} + \frac{L_2}{P_2^2}.$$

Ces deux polynômes s'écrivent $L_1 = -X + 2$ et $L_2 = X^3 + X - 2$ puisqu'on peut vérifier (en réduisant au même dénominateur) que l'on a :

$$\frac{-X+2}{(X-1)^2} + \frac{X^3 + X - 2}{(X^2+1)^2} = \frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}. \tag{4}$$

Il est à noter que, volontairement, nous n'expliquons pas ici par quels moyens nous avons obtenu les expressions des deux polynômes L_1 et L_2. C'est inutile. En effet, comme nous le verrons, le lemme 7.1 n'est qu'un résultat intermédiaire qui va être utilisé pour établir le théorème 7.1 qui est, lui, d'une portée plus générale et dont le résultat sera utilisé dans les cas pratiques. Ainsi, nous n'utiliserons plus par la suite le lemme 7.1. Aussi, nous nous contentons dans le lemme 7.1 d'énoncer juste l'existence des polynômes $L_1, L_2, \ldots, L_m$ et, dans l'exemple que nous traitons ici, de « parachuter » les expressions de L_1 et L_2.

Le deuxième résultat qui fait l'objet du lemme 7.2, va nous permettre de poursuivre la décomposition.

LEMME 7.2 *Soit* L/P^n *avec* $n \in \mathbb{N}^*$, *une fraction rationnelle irréductible de* $\mathbb{K}(X)$ *telle que* $\deg(L) < \deg(P^n)$. *Il existe* n *polynômes* S_1, S_2, $\ldots$, S_n *appartenant à* $\mathbb{K}[X]$ *tels que*

$$\frac{L}{P^n} = \frac{S_1}{P} + \frac{S_2}{P^2} + \ldots + \frac{S_n}{P^n}$$

avec $\deg(S_k) < \deg(P)$ *pour tout entier* k *compris entre* 1 *et* n. *Cette décomposition est unique.*

Démonstration Utilisons une récurrence sur l'entier naturel n non nul. Le cas $n = 1$ est immédiat ($S_1 = L$). Supposons le résultat vrai pour un entier $n \geqslant 1$ (c'est notre hypothèse de récurrence) et montrons-le pour l'entier $n + 1$. Soit $L/P^{n+1} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction irréductible telle que $\deg(L) < \deg(P^{n+1})$. Effectuons la division euclidienne de L par P. Il existe un unique couple (L_n, S_{n+1}) de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$L = PL_n + S_{n+1} \quad \text{et} \quad \deg(S_{n+1}) < \deg(P).$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{L}{P^{n+1}} = \frac{L_n}{P^n} + \frac{S_{n+1}}{P^{n+1}}.$$

Remarquons que $\deg(L) = \deg(P) + \deg(L_n)$. Cette égalité sur les degrés est une conséquence de la division euclidienne de L par P. Par conséquent, puisque $\deg(L) < \deg(P^{n+1})$, on a : $\deg(P) + \deg(L_n) < \deg(P^{n+1})$, c'est-à-dire :

$$\deg(P) + \deg(L_n) < \deg(P^n) + \deg(P).$$

En simplifiant à gauche et à droite de l'inégalité par $\deg(P)$, on obtient :

$$\deg(L_n) < \deg(P^n).$$

Cela nous autorise à utiliser pour la fraction L_n/P^n notre hypothèse de récurrence : il existe n polynômes S_1, S_2, $\ldots$, S_n de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$\frac{L_n}{P^n} = \frac{S_1}{P} + \frac{S_2}{P^2} + \ldots + \frac{S_n}{P^n}$$

avec $\deg(S_k) < \deg(P)$ pour tout entier k compris entre 1 et n, et cette décomposition est unique. On a ainsi obtenu l'existence de $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}[X]$, qui sont S_1, S_2, $\ldots$, S_n et S_{n+1}, tels que

$$\frac{L}{P^{n+1}} = \frac{S_1}{P} + \frac{S_2}{P^2} + \ldots + \frac{S_n}{P^n} + \frac{S_{n+1}}{P^{n+1}}$$

avec $\deg(S_k) < \deg(P)$ pour tout entier k compris entre 1 et $n+1$. La propriété est donc vérifiée pour $n + 1$, ce qui achève la récurrence. □

Exemple Reprenons l'exemple précédent et appliquons le résultat du lemme 7.2 sur chacune des fractions rationnelles présentes dans le terme de gauche de l'égalité (4). Considérons dans un premier temps la fraction rationnelle :

$$\frac{L_1}{P_1^2} = \frac{-X+2}{(X-1)^2}.$$

D'après le lemme 7.2, il existe deux polynômes $S_{1,1}$ et $S_{1,2}$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\frac{L_1}{P_1^2} = \frac{S_{1,1}}{P_1} + \frac{S_{1,2}}{P_1^2}$$

avec $\deg(S_{1,k}) < \deg(P_1) = 1$ pour $k \in \{1,2\}$. Remarquons que le degré des deux polynômes $S_{1,1}$ et $S_{1,2}$ est nécessairement nul. Ce sont donc des polynômes constants. Effectuant la division euclidienne de $-X+2$ par $X-1$, on obtient : $-X+2 = (X-1)\times(-1)+1$, d'où :

$$\frac{-X+2}{(X-1)^2} = \frac{(X-1)\times(-1)+1}{(X-1)^2},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{-X+2}{(X-1)^2} = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}. \tag{5}$$

On a ainsi obtenu que $S_{1,1} = -1$ et $S_{1,2} = 1$. Nous nous intéressons dans un second temps à la fraction rationnelle :

$$\frac{L_2}{P_2^2} = \frac{X^3+X-2}{(X^2+1)^2}.$$

D'après le lemme 7.2, il existe deux polynômes $S_{2,1}$ et $S_{2,2}$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\frac{L_2}{P_2^2} = \frac{S_{2,1}}{P_2} + \frac{S_{2,2}}{P_2^2}$$

avec $\deg(S_{2,k}) < \deg(P_2) = 2$ pour $k \in \{1,2\}$. Les deux polynômes $S_{2,1}$ et $S_{2,2}$ sont donc des polynômes constants ou de degré 1. Effectuant la division euclidienne de X^3+X-2 par X^2+1, on obtient : $X^3+X-2 = (X^2+1)X-2$, d'où :

$$\frac{X^3+X-2}{(X^2+1)^2} = \frac{(X^2+1)X-2}{(X^2+1)^2},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{X^3+X-2}{(X^2+1)^2} = \frac{X}{X^2+1} + \frac{-2}{(X^2+1)^2}. \tag{6}$$

On a ainsi obtenu que $S_{2,1} = X$ et $S_{2,2} = -2$.

Il est à noter que, contrairement à l'exemple du lemme 7.1, nous avons explicité ici la méthode qui nous a permis de calculer les quatre polynômes $S_{1,1}$, $S_{1,2}$, $S_{2,1}$ et $S_{2,2}$. En effet, cette méthode pourra être utilisée, et elle le sera, pour déterminer la décomposition en éléments simples dans le cas d'une fraction rationnelle irréductible de la forme L/P^n avec $\deg(L) < \deg(P^n)$ et $n \in \mathbb{N}^*$ (voir à ce sujet en page 296).

En regroupant chacune des deux décompositions (5) et (6) dans l'égalité (4), on obtient :

$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2} = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{X}{X^2+1} + \frac{-2}{(X^2+1)^2}.$$

Finalement, en injectant ce résultat dans (3), on a :

$$\begin{aligned}&\frac{X^7 - X^6 + X^5 - X^4 - X^3 + X^2 + 3X + 1}{X^6 - 2X^5 + 3X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 2X + 1}\\ &= X + 1 + \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{X}{X^2+1} + \frac{-2}{(X^2+1)^2}.\end{aligned}$$

D'une manière plus générale, on a le résultat suivant.

Théorème 7.1 *Soit $A/B \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible. Si B admet une décomposition dans $\mathbb{K}[X]$ en produit de polynômes irréductibles de la forme : $B = P_1^{n_1} \times \ldots \times P_m^{n_m}$ avec $n_1, \ldots, n_m$ des entiers naturels non nuls, alors A/B se décompose de manière unique sous la forme :*

$$\frac{A}{B} = Q + \underbrace{\frac{S_{1,1}}{P_1} + \frac{S_{1,2}}{P_1^2} + \ldots + \frac{S_{1,n_1}}{P_1^{n_1}}}_{\textit{somme partielle relative à } P_1} + \ldots + \underbrace{\frac{S_{m,1}}{P_m} + \frac{S_{m,2}}{P_m^2} + \ldots + \frac{S_{m,n_m}}{P_m^{n_m}}}_{\textit{somme partielle relative à } P_m}$$

où le polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ est la partie entière et, pour tout k variant de 1 à m, les polynômes $S_{k,1}, S_{k,2}, \ldots, S_{k,n_k}$ appartiennent à $\mathbb{K}[X]$ et vérifient :

$$\forall k \in \{1, \ldots, m\} \quad \begin{cases} \deg(S_{k,1}) & < & \deg(P_k) \\ \deg(S_{k,2}) & < & \deg(P_k) \\ & \vdots & \\ \deg(S_{k,n_k}) & < & \deg(P_k) \end{cases}$$

Lorsque l'on a déterminé cette somme, on dit que l'on a effectué la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ de la fraction A/B.

Démonstration La division euclidienne de A par B permet d'écrire de manière unique la fraction irréductible A/B de $\mathbb{K}(X)$ sous la forme :

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} \tag{7}$$

où Q et R sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(R) < \deg(B)$ (voir page 278) et où la fraction R/B est irréductible. D'après le lemme 7.1, puisque $B = P_1^{n_1} \times \ldots \times P_m^{n_m}$, il existe m polynômes $L_1, \ldots, L_m$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$\frac{R}{B} = \frac{L_1}{P_1^{n_1}} + \ldots + \frac{L_m}{P_m^{n_m}} \tag{8}$$

avec $\deg(L_k) < \deg(P_k^{n_k})$ pour tout entier k compris entre 1 et m et cette décomposition est unique. En injectant (8) dans (7), on obtient :

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{L_1}{P_1^{n_1}} + \ldots + \frac{L_m}{P_m^{n_m}}. \tag{9}$$

En appliquant alors le lemme 7.2 sur chacune des m fractions rationnelles $L_1/P_1^{n_1}$, ..., $L_m/P_m^{n_m}$ présentes dans le terme de droite de l'égalité (9), on obtient, pour tout entier k compris entre 1 et m, l'existence de n_k polynômes $S_{k,1}$, $S_{k,2}$, ..., S_{k,n_k} de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$\frac{L_k}{P_k^{n_k}} = \frac{S_{k,1}}{P_k} + \frac{S_{k,2}}{P_k^2} + \ldots + \frac{S_{k,n_k}}{P_k^{n_k}} \tag{10}$$

avec $\deg(S_{k,\ell}) < \deg(P_k)$ pour tout $\ell \in \{1, 2, \ldots, n_k\}$, et cette décomposition est unique. En injectant, pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, l'expression (10) dans (9), on obtient :

$$\frac{A}{B} = Q + \left(\frac{S_{1,1}}{P_1} + \frac{S_{1,2}}{P_1^2} + \ldots + \frac{S_{1,n_1}}{P_1^{n_1}}\right) + \ldots + \left(\frac{S_{m,1}}{P_m} + \frac{S_{m,2}}{P_m^2} + \ldots + \frac{S_{m,n_m}}{P_m^{n_m}}\right).$$

Cette dernière décomposition correspond à la décomposition en éléments simples de la fraction A/B sur $\mathbb{K}$, ce qui termine la démonstration. □

Remarques

1. La somme partielle relative au polynôme irréductible P_k est aussi appelée *partie relative au polynôme P_k*. En particulier, lorsque $P_k = X - \alpha$, c'est-à-dire lorsque $\alpha \in \mathbb{K}$ est un pôle, alors la somme partielle est appelée *partie polaire relative à α* ou *partie relative au pôle α*.

2. Le polynôme Q correspond à la partie entière de A/B. Ce polynôme est nul si $\deg(A) < \deg(B)$. Dans le cas contraire, il s'obtient en effectuant la division euclidienne de A par B.

7.2.3 Décomposition sur $\mathbb{C}$

Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Ainsi, tout polynôme

$$B = b_n X^n + \ldots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0 \in \mathbb{C}[X], \quad b_n \neq 0,$$

admet une décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de la forme :

$$B = b_n \prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{h_k}$$

où α_1, α_2, ..., α_m sont les racines distinctes (dans $\mathbb{C}$) de B, de multiplicités respectives h_1, h_2, ..., h_m. Par conséquent, tout élément simple de $\mathbb{C}(X)$ est du type :

$$\frac{\lambda}{(X-\alpha)^\ell} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \alpha) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{et} \quad \ell \in \mathbb{N}^*.$$

La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ d'une fraction rationnelle irréductible A/B de $\mathbb{C}(X)$ s'écrit :

$$\frac{A}{B} = Q + \underbrace{\frac{\lambda_{1,1}}{X-\alpha_1} + \ldots + \frac{\lambda_{1,h_1}}{(X-\alpha_1)^{h_1}}}_{\text{partie relative au pôle } \alpha_1} + \ldots + \underbrace{\frac{\lambda_{m,1}}{X-\alpha_m} + \ldots + \frac{\lambda_{m,h_m}}{(X-\alpha_m)^{h_m}}}_{\text{partie relative au pôle } \alpha_m}$$

où, pour tout entier k compris entre 1 et m, les coefficients $\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,h_k}$ appartiennent à $\mathbb{C}$. Dans la partie relative à chaque pôle, le coefficient correspondant à l'élément simple de plus haut degré est nécessairement non nul. En d'autres termes, $\lambda_{1,h_1} \neq 0 \ldots, \lambda_{m,h_m} \neq 0$.

Exemples

1. Considérons la fraction rationnelle $3/(X^3-1)$. Elle appartient à $\mathbb{R}(X)$. Elle appartient donc aussi à $\mathbb{C}(X)$. Cherchons sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$. Le degré du numérateur étant strictement inférieur à celui du dénominateur, la partie entière de la décomposition en éléments simples est nulle. La factorisation irréductible du dénominateur dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit :

$$X^3 - 1 = (X-1)(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}}) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}.$$

Les pôles 1, j et $\bar{\mathrm{j}}$ étant tous les trois de multiplicité 1, la partie relative à chacun des trois pôles ne contient qu'un seul élément simple. La décomposition de $3/(X^3-1)$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$\frac{3}{X^3-1} = \underbrace{\frac{1}{X-1}}_{\text{partie rel. à } 1} + \overbrace{\frac{\mathrm{j}}{X-\mathrm{j}}}^{\text{partie rel. à j}} + \underbrace{\frac{\bar{\mathrm{j}}}{X-\bar{\mathrm{j}}}}_{\text{partie rel. à } \bar{\mathrm{j}}}.$$

Cette égalité se vérifie en réduisant au même dénominateur les trois dernières fractions rationnelles. Nous verrons au paragraphe 7.3.1 comment déterminer les éléments simples associés à des pôles simples.

2. Considérons à présent la fraction $(X^6+2X^4+X^2+4)/(X^2+1)^2$. Comme dans l'exemple précédent, bien que cette fraction appartienne à $\mathbb{R}(X)$, nous la considérons comme une fraction de $\mathbb{C}(X)$ et nous cherchons sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$. Le degré du numérateur est ici supérieur à celui du dénominateur. La partie entière de la décomposition en éléments simples n'est donc pas nulle. On a :

$$\frac{X^6+2X^4+X^2+4}{(X^2+1)^2} = \frac{X^2(X^2+1)^2+4}{(X^2+1)^2} = X^2 + \frac{4}{(X^2+1)^2}.$$

La décomposition du dénominateur en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit :

$$(X^2+1)^2 = (X+\mathrm{i})^2(X-\mathrm{i})^2.$$

Les pôles i et $-$i sont tous les deux d'ordre 2. La partie relative à chacun des deux pôles contient donc (*a priori*) deux éléments simples. La décomposition de la fraction $(X^6+2X^4+X^2+4)/(X^2+1)^2$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$\frac{X^6+2X^4+X^2+4}{(X^2+1)^2} = X^2 + \underbrace{\frac{-\mathrm{i}}{X-\mathrm{i}} + \frac{-1}{(X-\mathrm{i})^2}}_{\text{partie relative à i}} + \underbrace{\frac{\mathrm{i}}{X+\mathrm{i}} + \frac{-1}{(X+\mathrm{i})^2}}_{\text{partie relative à } -\mathrm{i}} .$$

Nous verrons au paragraphe 7.3.2 une méthode permettant de déterminer séparément les parties relatives à des pôles multiples.

7.2.4 Décomposition sur $\mathbb{R}$

Contrairement à $\mathbb{C}$, le corps $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 ne possédant aucune racine réelle, c'est-à-dire les polynômes de la forme : aX^2+bX+c avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $a\neq 0$ et $b^2-4ac<0$. Dans $\mathbb{R}(X)$, il y a donc deux types d'éléments simples :

- les éléments simples dits de *première espèce* qui sont de la forme :

$$\frac{\lambda}{(X-\alpha)^\ell} \quad \text{avec} \quad (\lambda,\alpha)\in\mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \ell\in\mathbb{N}^*;$$

- les éléments simples dits de *seconde espèce* qui sont de la forme :

$$\frac{\lambda X+\mu}{(aX^2+bX+c)^\ell} \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \ \ell\in\mathbb{N}^*$$

  et $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $a\neq 0$ et $b^2-4ac<0$.

Ainsi, dans la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ d'une fraction irréductible A/B de $\mathbb{R}(X)$, on pourra trouver deux sortes de sommes partielles.

- Dans le cas où la fraction $A/B\in\mathbb{R}(X)$ admet pour pôle de multiplicité h le réel α, on trouvera une somme partielle de la forme :

$$\frac{\lambda_1}{X-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda_h}{(X-\alpha)^h}$$

  avec λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_h appartenant à $\mathbb{R}$.

- Dans le cas où la décomposition de B en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ fait apparaître le facteur $(aX^2+bX+c)^n$ avec aX^2+bX+c un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ (c'est-à-dire tel que $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $a\neq 0$ et $b^2-4ac<0$), on trouvera une somme partielle de la forme :

$$\frac{\lambda_1X+\mu_1}{aX^2+bX+c} + \frac{\lambda_2X+\mu_2}{(aX^2+bX+c)^2} + \ldots + \frac{\lambda_nX+\mu_n}{(aX^2+bX+c)^n}$$

  avec λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n et μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_n appartenant à $\mathbb{R}$.

Exemple Reprenons la fraction rationnelle $4X/\big((X-1)^2(X^2+1)^2\big)$ de $\mathbb{R}(X)$ qui nous a servi d'exemple pour illustrer les lemmes 7.1 et 7.2. Cette fraction est irréductible dans $\mathbb{R}(X)$ et elle n'admet pour pôle (sous-entendu sur $\mathbb{R}$) que le réel 1. Sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2} = \underbrace{\frac{\lambda}{X-1} + \frac{\mu}{(X-1)^2}}_{\text{partie relative au pôle 1}} + \underbrace{\frac{\alpha X+\beta}{X^2+1} + \frac{\gamma X+\delta}{(X^2+1)^2}}_{\text{partie relative à } X^2+1}$$

où la partie entière est nulle et où λ, μ, α, β, γ et δ appartiennent à $\mathbb{R}$. Nous avons appliqué ici directement le théorème 7.1. Il est en effet inutile d'appliquer successivement les deux lemmes 7.1 et 7.2 comme nous l'avons fait au § 7.2.2 puisque le théorème 7.1 en est une synthèse. On vérifie que $\lambda = -1$, $\mu = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ et $\delta = -2$ conviennent. Les calculs permettant de trouver ces valeurs sont détaillés dans l'exemple traité au paragraphe 7.3.2 (voir en page 291). Ainsi,

$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2} = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{X}{X^2+1} + \frac{-2}{(X^2+1)^2}.$$

7.3 Techniques de décomposition

Étant donnée une fraction rationnelle, irréductible, F de $\mathbb{K}(X)$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la forme de la décomposition en éléments simples de F est donnée explicitement par le théorème 7.1. Ainsi, lorsque l'on cherche à déterminer la décomposition en éléments simples de F, que ce soit sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, l'étape préliminaire consiste à écrire, de manière formelle, cette décomposition en appliquant directement le théorème 7.1. Il s'agit alors de calculer chacun des coefficients apparaissant dans cette décomposition. Comment s'y prendre ?

La première idée qui vient naturellement à l'esprit est de réduire au même dénominateur tous les éléments simples (qu'ils soient de première ou de seconde espèce) présents dans la décomposition et d'identifier les coefficients de même degré apparaissant aux numérateurs. Dans la mesure du possible, nous déconseillons fortement d'utiliser à brûle-pourpoint cette méthode car elle conduit inévitablement à la résolution d'un système d'équations dont le nombre d'équations est égal au nombre de coefficients à déterminer. Cette résolution peut, très rapidement, s'avérer être longue, difficile à mener et donc source de multiples erreurs de calcul !

La deuxième idée qui peut aussi venir naturellement à l'esprit est de remplacer X par autant de valeurs autorisées (ce qui exclut évidemment les pôles !) qu'il y a de coefficients à calculer. Cette deuxième manière de procéder conduit, encore une fois, à la résolution d'un système d'équations. Pour les mêmes raisons que celles invoquées précédemment, nous déconseillons encore de procéder ainsi.

Nous présentons dans cette partie plusieurs techniques qui permettent de calculer les parties relatives à des pôles simples, à des pôles multiples, à des polynômes irréductibles de degré 2 (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou de réduire le nombre des coefficients à déterminer lorsque la fraction rationnelle est paire, impaire ou encore lorsqu'elle est à coefficients réels. Bien sûr, lorsque, après avoir appliqué (avec succès) une ou plusieurs des méthodes que nous venons de citer, il ne reste plus qu'un ou deux coefficients à calculer, la méthode qui consiste à remplacer X par une ou deux valeurs particulières devient raisonnable et peut donc être utilisée.

7.3.1 Cas d'un pôle simple

Soit A/B une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$, irréductible, possédant (au moins) un pôle simple $\alpha \in \mathbb{K}$. Le dénominateur B se factorise alors sous la forme :

$$B = (X - \alpha)C \quad \text{avec} \quad C(\alpha) \neq 0.$$

La partie relative au pôle α ne contient qu'un seul élément simple ; elle s'écrit sous la forme $\lambda/(X - \alpha)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\lambda \neq 0$. Calculons λ. La méthode que nous exposons maintenant est qualifiée de *méthode de multiplication et de remplacement*. On a la décomposition suivante :

$$\frac{A}{(X-\alpha)C} = \frac{\lambda}{X-\alpha} + \frac{T}{C}$$

où T désigne un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Multiplions cette égalité par $X - \alpha$:

$$\frac{A}{C} = \lambda + \frac{(X-\alpha)T}{C}.$$

En évaluant la fonction rationnelle en α, on obtient alors :

$$\lambda = \frac{A(\alpha)}{C(\alpha)}$$

car $C(\alpha) \neq 0$. Illustrons cette méthode.

Exemple Soit $X/((X - 1)(X - 2)) \in \mathbb{R}(X)$. Sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)} = \frac{\lambda}{X-1} + \frac{\mu}{X-2}$$

avec λ, μ dans $\mathbb{R}$. Calculons λ. Multiplions pour cela la décomposition en éléments simples par $X - 1$. On obtient :

$$\frac{X}{X-2} = \lambda + \frac{\mu(X-1)}{X-2}.$$

Remplaçons alors X par 1. On obtient : $\lambda = -1$. Calculons à présent μ. Multiplions cette fois-ci la décomposition en éléments simples par $X - 2$. On obtient :

$$\frac{X}{X-1} = \frac{\lambda(X-2)}{X-1} + \mu.$$

Remplaçons cette fois-ci X par 2. On obtient : $\mu = 2$. Finalement,

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)} = \frac{-1}{X-1} + \frac{2}{X-2}.$$

Formule de dérivation

Dérivons chacun des termes présents dans l'égalité $B = (X - \alpha)C$. On a :

$$B' = C + (X - \alpha)C', \quad \text{d'où} \quad B'(\alpha) = C(\alpha)$$

avec $B'(\alpha) \neq 0$ car $C(\alpha) \neq 0$. Ainsi, en remplaçant $C(\alpha)$ par $B'(\alpha)$ dans $\lambda = A(\alpha)/C(\alpha)$ on obtient la formule de *dérivation* :

$$\lambda = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}.$$

Cette formule s'avère très pratique lorsque le dénominateur B est donné sous une forme non factorisée, ce qui est le cas de la fraction $X^4/(X^4 - 1)$ de l'exercice 1 donné ci-après, mais n'est pas le cas de la fraction $X/((X-1)(X-2))$ de l'exemple précédent. Néanmoins, rien n'interdit de l'appliquer. Alors, faisons-le. Dans l'exemple précédent, $A = X$ et $B = (X - 1)(X - 2)$. En développant, on a : $B = X^2 - 3X + 2$, ce qui donne : $B' = 2X - 3$. Ainsi,

$$\lambda = \frac{A(1)}{B'(1)} = \left.\frac{X}{2X - 3}\right|_{X=1} = -1 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{A(2)}{B'(2)} = \left.\frac{X}{2X - 3}\right|_{X=2} = 2.$$

Exercice 1 Décomposer la fraction rationnelle $X^4/(X^4-1)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, puis $\mathbb{R}(X)$.

7.3.2 Cas d'un pôle multiple

Nous nous intéressons ici au cas d'une fraction A_1/B_1 de $\mathbb{K}(X)$, irréductible, possédant (au moins) un pôle $\alpha \in \mathbb{K}$ d'ordre $h \geqslant 2$. Le dénominateur B_1 se factorise alors sous la forme suivante :

$$B_1 = (X - \alpha)^h C_1 \quad \text{avec} \quad C_1(\alpha) \neq 0$$

où C_1 est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Dans la décomposition de A_1/B_1 en éléments simples sur $\mathbb{K}$, la partie relative au pôle α s'écrit :

$$\frac{\lambda_1}{X - \alpha} + \frac{\lambda_2}{(X - \alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda_h}{(X - \alpha)^h}$$

où, parmi les scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_h de $\mathbb{K}$, seul λ_h est nécessairement non nul. Il est à noter que le coefficient λ_1 est appelé *résidu* au pôle α.

Calcul du coefficient λ_h

Le calcul du coefficient λ_h présent dans l'élément simple $\lambda_h/(X - \alpha)^h$ peut être mené indépendamment de celui des autres coefficients λ_1, λ_2, ..., λ_{h-1}. La méthode consiste en une adaptation de la méthode de *multiplication et de* *remplacement* présentée dans le cas d'un pôle simple (voir § 7.3.1). Détaillons-la. On a la décomposition suivante :

$$\frac{A_1}{(X-\alpha)^h C_1} = \frac{\lambda_1}{X-\alpha} + \ldots + \frac{\lambda_{h-1}}{(X-\alpha)^{h-1}} + \frac{\lambda_h}{(X-\alpha)^h} + \frac{T}{C_1}$$

où T désigne un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Multiplions par $(X-\alpha)^h$ cette égalité :

$$\frac{A_1}{C_1} = \lambda_1(X-\alpha)^{h-1} + \ldots + \lambda_{h-1}(X-\alpha) + \lambda_h + \frac{(X-\alpha)^h T}{C_1}.$$

Évaluons alors la fonction fraction rationnelle en α. On obtient :

$$\lambda_h = \frac{A_1(\alpha)}{C_1(\alpha)}$$

car $C_1(\alpha) \neq 0$.

> On prendra garde de ne pas appliquer dans le cas d'un pôle multiple la formule de dérivation obtenue en page 289. Elle est en effet réservée au cas d'un pôle simple.

Calcul simultané des coefficients λ_1, λ_2, ..., λ_h

Il est possible de calculer les h coefficients λ_1, λ_2, ..., λ_h simultanément (il est néanmoins fortement recommandé de procéder au préalable au calcul du coefficient λ_h par la méthode que nous venons d'expliciter). La méthode se décompose en trois étapes.

• Étape 1 : elle consiste en un changement d'indéterminée : $Y = X - \alpha$. On désigne par A_2 (respectivement par C_2) le polynôme de $\mathbb{K}[Y]$ obtenu à partir du polynôme A_1 (resp. du polynôme C_1) de $\mathbb{K}[X]$ en effectuant le changement d'indéterminée ci-dessus, c'est-à-dire en remplaçant X par $Y + \alpha$. On a :

$$\frac{A_1}{(X-\alpha)^h C_1} = \frac{A_2}{Y^h C_2}.$$

• Étape 2 : en effectuant la division selon les puissances croissantes à l'ordre $h-1$ du polynôme A_2 de $\mathbb{K}[Y]$ par le polynôme C_2 de $\mathbb{K}[Y]$ (ce qui est possible car $C_2(0) = C_1(\alpha) \neq 0$), on obtient :

$$A_2 = C_2\left(q_0 + q_1 Y + q_2 Y^2 + \ldots + q_{h-1} Y^{h-1}\right) + Y^h R_2$$

où q_0, q_1, ..., q_{h-1} appartiennent à $\mathbb{K}$ et où R_2 désigne un polynôme de $\mathbb{K}[Y]$.

• Étape 3 : on déduit de l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}
\frac{A_2}{Y^h C_2} &= \frac{C_2\left(q_0 + q_1 Y + q_2 Y^2 + \ldots + q_{h-1} Y^{h-1}\right) + Y^h R_2}{Y^h C_2} \\
&= \frac{q_0 + q_1 Y + q_2 Y^2 + \ldots + q_{h-1} Y^{h-1}}{Y^h} + \frac{R_2}{C_2} \\
&= \frac{q_0}{Y^h} + \frac{q_1}{Y^{h-1}} + \ldots + \frac{q_{h-1}}{Y} + \frac{R_2}{C_2}.
\end{aligned}$$

On revient finalement à l'indéterminée X. En notant R_1 le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ obtenu à partir du polynôme R_2 de $\mathbb{K}[Y]$ en remplaçant Y par $X - \alpha$, on obtient :

$$\frac{A_1}{(X-\alpha)^h C_1} = \underbrace{\frac{q_0}{(X-\alpha)^h} + \frac{q_1}{(X-\alpha)^{h-1}} + \ldots + \frac{q_{h-1}}{X-\alpha}}_{\text{partie relative au pôle } \alpha} + \frac{R_1}{C_1}.$$

Par conséquent, les scalaires $q_0, q_1, \ldots, q_{h-1}$ de $\mathbb{K}$ ainsi déterminés lors de la division selon les puissances croissantes s'avèrent être les coefficients apparaissant dans la somme partielle relative au pôle α de la fraction $A_1/B_1 \in \mathbb{K}(X)$.

On a donc : $\lambda_h = q_0,\ \lambda_{h-1} = q_1,\ \ldots,\ \lambda_1 = q_{h-1}$.

L'ordre dans lequel apparaissent les coefficients dans la division selon les puissances croissantes est inversé par rapport à l'ordre usuel des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ dans l'écriture de la partie relative au pôle α. En effet, le premier coefficient que l'on obtient en effectuant la division est le coefficient λ_h et non pas le coefficient λ_1, le deuxième est le coefficient λ_{h-1} et non pas le coefficient λ_2, etc.

Exemple Appliquons cette méthode pour déterminer la somme partielle relative au pôle $\alpha = 1$ de la fraction irréductible suivante :

$$F = \frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}.$$

Ici, $A_1 = 4X$ et $B_1 = (X-1)^2(X^2+1)^2$. On a donc :

$$B_1 = (X-1)^2 C_1 \qquad \text{avec} \quad C_1 = (X^2+1)^2$$

et $C_1(1) \neq 0$. Effectuons le changement d'indéterminée $Y = X - 1$. Autrement dit, remplaçons X par $Y + 1$. On obtient :

$$A_2 = 4(Y+1) = 4Y + 4,$$

$$C_2 = ((Y+1)^2+1)^2 = 4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4.$$

Procédons à présent au calcul de la division selon les puissances croissantes à l'ordre 1 de A_2 par C_2. Posons la division :

$$\begin{array}{r|l}
A_2 = 4 + 4Y & 4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4 = C_2 \\
\underline{-(4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4)} & \overline{1 - Y} \\
= -4Y - 8Y^2 - 4Y^3 - Y^4 & \\
\underline{-(-4Y - 8Y^2 - 8Y^3 - 4Y^4 - Y^5)} & \\
Y^2 R_2 = 4Y^3 + 3Y^4 + Y^5 &
\end{array}$$

On peut ainsi écrire : $A_2 = C_2(1-Y) + Y^2(4Y + 3Y^2 + Y^3)$. D'où

$$\frac{A_2}{Y^2 C_2} = \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Y} + \frac{4Y + 3Y^2 + Y^3}{C_2}.$$

Revenons enfin à l'indéterminée X. Remplaçons pour cela Y par $X - 1$. On obtient :

$$\frac{A_1}{(X-1)^2 C_1} = \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{X^3+X-2}{(X^2+1)^2}$$

car $4(X-1) + 3(X-1)^2 + (X-1)^3 = X^3 + X - 2$.

Remarquons que la partie relative au polynôme $X^2 + 1$ s'obtient alors très facilement à partir de la dernière fraction rationnelle de l'égalité ci-dessus. On a en effet (c'est immédiat) :

$$X^3 + X - 2 = X(X^2+1) - 2.$$

On en déduit alors :

$$\frac{X^3+X-2}{(X^2+1)^2} = \frac{X(X^2+1)-2}{(X^2+1)^2} = \frac{-2}{(X^2+1)^2} + \frac{X}{X^2+1}.$$

On en déduit alors la décomposition de A_1/B_1 en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2} = \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{-2}{(X^2+1)^2} + \frac{X}{X^2+1}.$$

7.3.3 Cas d'un facteur irréductible du second degré

Considérons une fraction rationnelle $F_1 = A_1/B_1$ de $\mathbb{R}(X)$, irréductible, pour laquelle la décomposition de B_1 en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ fait apparaître le facteur $(aX^2 + bX + c)^n$ avec $aX^2 + bX + c$ un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$.

Notons α et $\overline{\alpha}$ les deux racines complexes (nécessairement conjuguées) du polynôme $aX^2 + bX + c$. Le dénominateur B_1 se factorise alors sous la forme :

$$B_1 = (aX^2 + bX + c)^n C$$

où C désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $C(\alpha) \neq 0$ et donc, nécessairement, $C(\overline{\alpha}) \neq 0$. On a alors la décomposition suivante :

$$F_1 = \underbrace{\frac{\lambda_1 X + \mu_1}{aX^2+bX+c} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}X + \mu_{n-1}}{(aX^2+bX+c)^{n-1}} + \frac{\lambda_n X + \mu_n}{(aX^2+bX+c)^n}}_{\text{partie relative au polynôme irréductible } aX^2+bX+c} + \frac{T}{C} \tag{11}$$

où $T \in \mathbb{R}[X]$. Ici, les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n$ appartiennent tous à $\mathbb{R}$. Il y en a $2n$. Ils s'obtiennent en n étapes successives et, à chaque étape, la méthode utilisée est similaire à la *méthode de multiplication et de remplacement* que nous avons utilisée à plusieurs reprises.

Détaillons la méthode.

On commence par calculer (c'est l'étape 1) les deux coefficients λ_n et μ_n. Pour cela, on multiplie (11) par $(aX^2 + bX + c)^n$, puis on remplace X par α :

$$\lambda_n \alpha + \mu_n = \frac{A_1(\alpha)}{C(\alpha)}.$$

Les coefficients λ_n et μ_n étant réels, ils s'obtiennent alors en identifiant les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles.

La deuxième étape vise à calculer les deux coefficients λ_{n-1} et μ_{n-1}. Pour cela, on commence par faire passer l'élément simple de seconde espèce $(\lambda_n X + \mu_n)/(aX^2 + bX + c)^n$ à gauche de l'égalité dans (11). On obtient :

$$F_2 = \frac{\lambda_1 X + \mu_1}{aX^2 + bX + c} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1} X + \mu_{n-1}}{(aX^2 + bX + c)^{n-1}} + \frac{T}{C} \tag{12}$$

où F_2 désigne la fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$ définie par

$$F_2 = \frac{A_1}{(aX^2 + bX + c)^n C} - \frac{\lambda_n X + \mu_n}{(aX^2 + bX + c)^n}.$$

Simplifions l'écriture de F_2. En réduisant dans un premier temps au même dénominateur, puis en simplifiant par $aX^2 + bX + c$, on obtient :

$$\frac{A_1}{(aX^2 + bX + c)^n C} - \frac{\lambda_n X + \mu_n}{(aX^2 + bX + c)^n} = \frac{A_2}{(aX^2 + bX + c)^{n-1} C}$$

où A_2 désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On remarquera, et c'est là tout l'intérêt de la méthode, la présence du facteur $(aX^2 + bX + c)^{n-1}$ au dénominateur de la nouvelle fraction F_2 que l'on vient d'obtenir. On dit que l'on a diminué le degré. La décomposition (12) s'écrit alors :

$$\frac{A_2}{(aX^2 + bX + c)^{n-1} C} = \frac{\lambda_1 X + \mu_1}{aX^2 + bX + c} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1} X + \mu_{n-1}}{(aX^2 + bX + c)^{n-1}} + \frac{T}{C}. \tag{13}$$

On multiplie alors (13) par $(aX^2 + bX + c)^{n-1}$, puis on remplace X par α :

$$\lambda_{n-1}\alpha + \mu_{n-1} = \frac{A_2(\alpha)}{C(\alpha)}$$

et, comme précédemment, les deux coefficients réels λ_{n-1} et μ_{n-1} s'obtiennent en identifiant les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles.

Il suffit alors de procéder de la même manière pour calculer successivement les coefficients λ_{n-2}, μ_{n-2}, puis les coefficients λ_{n-3}, μ_{n-3}, et ainsi de suite jusqu'aux coefficients λ_1, μ_1.

> Si cette méthode possède l'inconvénient d'être lourde en calcul et donc ... pénible, elle offre cependant l'avantage non négligeable de pouvoir vérifier, à chaque étape, que l'on ne s'est pas trompé. En effet, on doit pouvoir simplifier par $aX^2 + bX + c$ au début de chacune des étapes. Par exemple, après simplication, la fraction F_2 doit comporter $(aX^2 + bX + c)^{n-1}$ au dénominateur au lieu de $(aX^2 + bX + c)^n$, la fraction F_3 doit comporter $(aX^2 + bX + c)^{n-2}$ au dénominateur au lieu de $(aX^2 + bX + c)^{n-1}$, etc.

Illustrons cette méthode sur un exemple.

Exemple Considérons la fraction $F = (X+1)/((X^2+1)^2(X-1))$. Nous cherchons à déterminer sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$. Cette fraction possède un seul pôle sur $\mathbb{R}$ (c'est le réel 1) car X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$. Sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit formellement :

$$\frac{X+1}{(X^2+1)^2(X-1)} = Q + \frac{\gamma}{X-1} + \underbrace{\frac{\lambda_1 X + \mu_1}{X^2+1} + \frac{\lambda_2 X + \mu_2}{(X^2+1)^2}}_{\text{partie relative à } X^2+1} \tag{14}$$

où $Q \in \mathbb{R}[X]$ et γ, λ_1, λ_2, μ_1 et μ_2 désignent des réels. La partie entière Q est nulle car le degré du numérateur est inférieur strictement à celui du dénominateur. Nous laissons volontairement de côté pour l'instant le calcul de γ (calcul qui ne posera d'ailleurs aucune difficulté puisque 1 est un pôle simple) pour nous concentrer uniquement sur celui des coefficients λ_1, μ_1, λ_2 et μ_2. Les racines complexes du polynôme X^2+1 sont i et $-$i. Ainsi, pour déterminer λ_2 et μ_2, nous multiplions dans un premier temps (14) par $(X^2+1)^2$, puis nous remplaçons X par i :

$$\lambda_2 \mathrm{i} + \mu_2 = \left.\frac{X+1}{X-1}\right|_{X=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-1} = -\mathrm{i},$$

d'où, par identification (λ_2 et μ_2 sont réels), $\lambda_2 = -1$ et $\mu_2 = 0$. Ainsi,

$$\frac{X+1}{(X^2+1)^2(X-1)} = \frac{\gamma}{X-1} + \frac{\lambda_1 X + \mu_1}{X^2+1} + \frac{-X}{(X^2+1)^2}.$$

Pour déterminer les coefficients λ_1 et μ_1, il nous suffit de faire passer à gauche de l'égalité l'élément simple de seconde espèce que nous venons de déterminer :

$$\frac{X+1}{(X^2+1)^2(X-1)} + \frac{X}{(X^2+1)^2} = \frac{\gamma}{X-1} + \frac{\lambda_1 X + \mu_1}{X^2+1}. \tag{15}$$

Or, en réduisant dans un premier temps au même dénominateur, puis en simplifiant par X^2+1, on obtient :

$$\frac{X+1}{(X^2+1)^2(X-1)} + \frac{X}{(X^2+1)^2} = \frac{X^2+1}{(X^2+1)^2(X-1)} = \frac{1}{(X^2+1)(X-1)}.$$

L'égalité (15) s'écrit ainsi :

$$\frac{1}{(X^2+1)(X-1)} = \frac{\gamma}{X-1} + \frac{\lambda_1 X + \mu_1}{X^2+1}. \tag{16}$$

Les coefficients λ_1 et μ_1 s'obtiennent alors facilement en multipliant par X^2+1, puis en remplaçant X par i :

$$\lambda_1 \mathrm{i} + \mu_1 = \left.\frac{1}{X-1}\right|_{X=\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}-1} = -\frac{\mathrm{i}}{2} - \frac{1}{2},$$

d'où, par identification ($\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\mu_1 \in \mathbb{R}$), $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ et $\mu_1 = -\frac{1}{2}$. Enfin, le coefficient γ s'obtient en multipliant, au choix, (14) ou (16) par $X-1$, puis en remplaçant X par 1. Par exemple, en choisissant de multiplier (14) par $X-1$, on obtient :

$$\gamma = \left.\frac{X+1}{(X^2+1)^2}\right|_{X=1} = \frac{1}{2}.$$

Finalement, la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$\frac{X+1}{(X^2+1)^2(X-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{X-1} - \frac{\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}}{X^2+1} - \frac{X}{(X^2+1)^2}.$$

Remarque Une alternative à la méthode que nous venons d'exposer est de décomposer la fraction rationnelle non pas sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{C}$, et de regrouper deux à deux les éléments simples (de première espèce) correspondant à un pôle complexe α et à son conjugué $\overline{\alpha}$, ceci dans le but de reconstituer les éléments simples de seconde espèce correspondant au polynôme irréductible du second degré de racines complexes α et $\overline{\alpha}$. Considérons, par exemple, la fraction $F = (X+1)/((X^2+1)^2(X-1))$. Sur $\mathbb{C}$,

$$(X^2+1)^2 = (X-\mathrm{i})^2(X+\mathrm{i})^2.$$

La fraction rationnelle F possède ainsi trois pôles sur $\mathbb{C}$: un pôle simple (le réel 1) et deux pôles doubles (les imaginaires purs i et $-$i). Sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit formellement :

$$\frac{X+1}{(X^2+1)^2(X-1)} = \frac{\gamma}{X-1} + \underbrace{\frac{\gamma_1}{X-\mathrm{i}} + \frac{\gamma_2}{(X-\mathrm{i})^2}}_{\text{partie relative à i}} + \underbrace{\frac{\gamma_1'}{X+\mathrm{i}} + \frac{\gamma_2'}{(X+\mathrm{i})^2}}_{\text{partie relative à } -\mathrm{i}}$$

où γ, γ_1, γ_2, γ_1' et γ_2' désignent des complexes. En appliquant la technique présentée au paragraphe 7.3.2, le coefficient γ_2 s'obtient en multipliant par $(X-\mathrm{i})^2$, puis en remplaçant X par i :

$$\gamma_2 = \left.\frac{X+1}{(X+\mathrm{i})^2(X-1)}\right|_{X=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{4}.$$

De même, le coefficient γ_2' s'obtient en multipliant par $(X+\mathrm{i})^2$, puis en remplaçant X par $-$i :

$$\gamma_2' = \left.\frac{X+1}{(X-\mathrm{i})^2(X-1)}\right|_{X=-\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{4}.$$

En fait, comme on le verra au paragraphe 7.3.4 (voir plus particulièrement en page 298), il est ici inutile de procéder au calcul de γ_2' puisqu'il est égal au conjugué de γ_2 (cela vient du fait que la fraction F est à coefficients réels).

Rassemblons maintenant les deux éléments simples $\dfrac{\mathrm{i}/4}{(X-\mathrm{i})^2}$ et $\dfrac{-\mathrm{i}/4}{(X+\mathrm{i})^2}$:

$$\frac{\mathrm{i}/4}{(X-\mathrm{i})^2} + \frac{-\mathrm{i}/4}{(X+\mathrm{i})^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{i}(X+\mathrm{i})^2 - \mathrm{i}(X-\mathrm{i})^2}{(X^2+1)^2}\right) = \frac{-X}{(X^2+1)^2}$$

et on récupère (fort heureusement !) un des éléments simples de seconde espèce présents dans la partie relative à X^2+1 lorsque nous avions décomposé en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Cas particulier

Si une fraction rationnelle F de $\mathbb{R}(X)$, irréductible, est de la forme :

$$F = \frac{L}{(aX^2 + bX + c)^n}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\deg(L) < \deg((aX^2 + bX + c)^n)$ et $aX^2 + bX + c$ un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$ (remarquer que l'on est ici dans les hypothèses du lemme 7.2) alors sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'obtient simplement en effectuant une succession de divisions euclidiennes par $aX^2 + bX + c$ (voir la démonstration du lemme 7.2). C'est le cas par exemple de la fraction

$$F = \frac{X^5 + 2}{(X^2 + X + 1)^3}.$$

Effectuons la division euclidienne de $X^5 + 2$ par $X^2 + X + 1$. On obtient :

$$X^5 + 2 = (X^2 + X + 1)(X^3 - X^2 + 1) + (-X + 1).$$

On en déduit :

$$\frac{X^5 + 2}{(X^2 + X + 1)^3} = \frac{X^3 - X^2 + 1}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{-X + 1}{(X^2 + X + 1)^3}. \tag{17}$$

Effectuons à présent la division euclidienne de $X^3 - X^2 + 1$ par $X^2 + X + 1$. On obtient :

$$X^3 - X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X - 2) + (X + 3).$$

On en déduit :

$$\frac{X^3 - X^2 + 1}{(X^2 + X + 1)^2} = \frac{X - 2}{X^2 + X + 1} + \frac{X + 3}{(X^2 + X + 1)^2}. \tag{18}$$

Finalement, en regroupant (17) et (18), on obtient la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{X^5 + 2}{(X^2 + X + 1)^3} = \frac{X - 2}{X^2 + X + 1} + \frac{X + 3}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{-X + 1}{(X^2 + X + 1)^3}.$$

7.3.4 Techniques de réduction du nombre des coefficients

Utilisation de la parité

Soit F une fraction rationnelle irréductible de $\mathbb{K}(X)$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, possédant un pôle $\alpha \in \mathbb{K}$ de multiplicité $h \geqslant 1$. Dans la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{K}$, la partie relative au pôle α s'écrit :

$$\frac{\lambda_1}{X - \alpha} + \frac{\lambda_2}{(X - \alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda_h}{(X - \alpha)^h}$$

avec λ_1, λ_2, ..., λ_h dans $\mathbb{K}$. Si, de plus, la fonction rationnelle associée à F, que l'on note encore F, est paire ou impaire alors $-\alpha$ est également un pôle de F, de même multiplicité que α, la partie relative à $-\alpha$ s'écrivant :

$$\frac{\lambda'_1}{X+\alpha} + \frac{\lambda'_2}{(X+\alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda'_h}{(X+\alpha)^h}$$

avec λ'_1, λ'_2, ..., λ'_h dans $\mathbb{K}$.

- Supposons F paire. En remplaçant alors X par $-X$ dans la partie relative au pôle α, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_1}{-X-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(-X-\alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda_h}{(-X-\alpha)^h} \\
&= \frac{-\lambda_1}{X+\alpha} + \frac{\lambda_2}{(X+\alpha)^2} + \ldots + \frac{(-1)^h\lambda_h}{(X+\alpha)^h}
\end{aligned}$$

car $1/(-1)^h = (-1)^h$. D'où, puisque $F(X) = F(-X)$ et par unicité de la décomposition :

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,h\} \quad \lambda'_k = (-1)^k\lambda_k.$$

- En procédant de manière analogue, on vérifie que si F est impaire alors

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,h\} \quad \lambda'_k = (-1)^{k-1}\lambda_k.$$

Exemple Considérons la fraction rationnelle $F = (2X^2+5)/(X^2-1)^3$ de $\mathbb{R}(X)$. La factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ du dénominateur s'écrit :

$$(X^2-1)^3 = (X-1)^3(X+1)^3.$$

La fraction F possède sur $\mathbb{R}$ deux pôles triples (les réels 1 et -1). Sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit ainsi (la partie entière est nulle) :

$$\frac{2X^2+5}{(X^2-1)^3} = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{(X-1)^2} + \frac{\lambda_3}{(X-1)^3} + \frac{\lambda'_1}{X+1} + \frac{\lambda'_2}{(X+1)^2} + \frac{\lambda'_3}{(X+1)^3}$$

avec λ_1, λ_2, λ_3, λ'_1, λ'_2, λ'_3 dans $\mathbb{R}$. La propriété de parité de la fraction impose $\lambda'_1 = -\lambda_1$, $\lambda'_2 = \lambda_2$ et $\lambda'_3 = -\lambda_3$. On a donc :

$$\frac{2X^2+5}{(X^2-1)^3} = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{(X-1)^2} + \frac{\lambda_3}{(X-1)^3} + \frac{-\lambda_1}{X+1} + \frac{\lambda_2}{(X+1)^2} + \frac{-\lambda_3}{(X+1)^3}$$

et il faut calculer seulement trois coefficients (λ_1, λ_2 et λ_3) au lieu des six coefficients initiaux. Le coefficient λ_3 s'obtient en multipliant par $(X-1)^3$ puis en remplaçant X par 1 :

$$\lambda_3 = \left.\frac{2X^2+5}{(X+1)^3}\right|_{X=1} = \frac{7}{8}.$$

Pour obtenir les coefficients λ_1 et λ_2, on peut remplacer X par deux valeurs particulières. Par exemple, en prenant $X = 0$, on obtient assez facilement :

$$-\frac{13}{8} = -\lambda_1 + \lambda_2.$$

En prenant $X = 2$, on obtient (cette fois-ci avec un peu plus de difficulté) :

$$-\frac{13}{4} = 6\lambda_1 + 10\lambda_2.$$

On en déduit alors $\lambda_1 = 13/16$ et $\lambda_2 = -13/16$. D'où

$$\frac{2X^2+5}{(X^2-1)^3} = \frac{\frac{13}{16}}{X-1} + \frac{-\frac{13}{16}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{7}{8}}{(X-1)^3} + \frac{-\frac{13}{16}}{X+1} + \frac{-\frac{13}{16}}{(X+1)^2} + \frac{-\frac{7}{8}}{(X+1)^3}.$$

Remarquons que pour obtenir les coefficients λ_1, λ_2 et λ_3 simultanément, nous aurions pu utiliser la technique basée sur la division selon les puissances croissante ici à l'ordre 2 (voir au paragraphe 7.3.2). Dans le cas présent, effectuer une telle division conduirait à des calculs pénibles, longs et donc sources d'erreurs.

En fait, il n'est pas nécessaire d'effectuer cette division jusqu'à l'ordre 2. Une division à l'ordre 1 est en effet suffisante pour déterminer, dans l'ordre d'apparition, les coefficients λ_3 et λ_2 (ce qui nous permettra de vérifier au passage que l'on ne s'est pas trompé dans le calcul de λ_3), le calcul de λ_1 s'effectuant alors par une autre technique (par exemple, en prenant $X = 0$ comme nous l'avons fait).

Utilisation de la conjugaison

Supposons qu'une fraction rationnelle irréductible F possède pour pôles les complexes conjugués α et $\overline{\alpha}$ et que cette fraction rationnelle soit à coefficients réels. Dans la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{C}$, la partie relative au pôle $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ s'écrit :

$$\frac{\lambda_1}{X-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda_h}{(X-\alpha)^h}$$

avec λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_h dans $\mathbb{C}$, et celle relative au pôle conjugué $\overline{\alpha}$ s'écrit :

$$\frac{\beta_1}{X-\overline{\alpha}} + \frac{\beta_2}{(X-\overline{\alpha})^2} + \ldots + \frac{\beta_h}{(X-\overline{\alpha})^h}$$

avec β_1, β_2, $\ldots$, β_h dans $\mathbb{C}$. Puisque F est à coefficients réels, $\overline{F} = F$. Ainsi, en conjuguant la partie relative au pôle α et par unicité de la décomposition, on obtient :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, h\} \quad \beta_k = \overline{\lambda_k}.$$

Exemple Considérons la fraction rationnelle suivante :

$$F = (X^2+1)/(X^2+X+1)^2.$$

C'est une fraction de $\mathbb{C}(X)$. Cherchons sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$. Ses pôles sur $\mathbb{C}$ sont les deux complexes conjugués j et $\bar{\mathrm{j}}$ (leur ordre de multiplicité est 2) car

$$(X^2+X+1)^2 = (X-\mathrm{j})^2(X-\bar{\mathrm{j}})^2.$$

Sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit ainsi formellement :

$$\frac{X^2+1}{(X^2+X+1)^2} = \frac{\lambda_1}{X-\mathrm{j}} + \frac{\lambda_2}{(X-\mathrm{j})^2} + \frac{\beta_1}{X-\bar{\mathrm{j}}} + \frac{\beta_2}{(X-\bar{\mathrm{j}})^2}$$

où les quatre scalaires λ_1, λ_2, β_1 et β_2 appartiennent à $\mathbb{C}$ (la partie entière est nulle). En conjuguant les deux membres de cette égalité, en prenant en compte que la fraction rationnelle est à coefficients réels, et par unicité de la décomposition, on obtient : $\beta_1 = \overline{\lambda_1}$ et $\beta_2 = \overline{\lambda_2}$. Ainsi,

$$\frac{X^2+1}{(X^2+X+1)^2} = \frac{\lambda_1}{X-\mathrm{j}} + \frac{\lambda_2}{(X-\mathrm{j})^2} + \frac{\overline{\lambda_1}}{X-\bar{\mathrm{j}}} + \frac{\overline{\lambda_2}}{(X-\bar{\mathrm{j}})^2}. \tag{19}$$

Utilisant la technique présentée au paragraphe 7.3.2, le coefficient λ_2 s'obtient facilement en multipliant par $(X-\mathrm{j})^2$ puis en remplaçant X par j :

$$\lambda_2 = \left.\frac{X^2+1}{(X-\bar{\mathrm{j}})^2}\right|_{X=\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{j}^2+1}{(\mathrm{j}-\bar{\mathrm{j}})^2} = \frac{-\mathrm{j}}{(\mathrm{i}\sqrt{3})^2} = \frac{\mathrm{j}}{3}$$

où on a utilisé que $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$ et $\mathrm{j}-\bar{\mathrm{j}} = 2\mathrm{i}\times\mathcal{I}\mathrm{m}(\mathrm{j}) = \mathrm{i}\sqrt{3}$. Calculons à présent le coefficient λ_1. Réduisons pour cela au même dénominateur les éléments simples contenant $\lambda_2 = \mathrm{j}/3$ et $\overline{\lambda_2} = \bar{\mathrm{j}}/3$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{j}/3}{(X-\mathrm{j})^2} + \frac{\bar{\mathrm{j}}/3}{(X-\bar{\mathrm{j}})^2} &= \frac{\mathrm{j}(X^2-2\bar{\mathrm{j}}X+\bar{\mathrm{j}}^2)+\bar{\mathrm{j}}(X^2-2\mathrm{j}X+\mathrm{j}^2)}{3(X^2+X+1)^2}\\ &= -\frac{X^2+4X+1}{3(X^2+X+1)^2}\end{aligned}$$

où on a utilisé que $\mathrm{j}\times\bar{\mathrm{j}} = 1$, $\mathrm{j}\times\bar{\mathrm{j}}^2 = \bar{\mathrm{j}}$, $\bar{\mathrm{j}}\times\mathrm{j}^2 = \mathrm{j}$ et $\mathrm{j}+\bar{\mathrm{j}} = 2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{j}) = -1$. L'égalité (19) s'écrit alors :

$$\underbrace{\frac{X^2+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{X^2+4X+1}{3(X^2+X+1)^2}}_{=\frac{4/3}{X^2+X+1}} = \frac{\lambda_1}{X-\mathrm{j}} + \frac{\overline{\lambda_1}}{X-\bar{\mathrm{j}}}.$$

Noter la diminution du degré au dénominateur. Il suffit alors de multiplier cette égalité par $X-\mathrm{j}$, puis de remplacer X par j :

$$\lambda_1 = \left.\frac{4/3}{X-\bar{\mathrm{j}}}\right|_{X=\mathrm{j}} = \frac{4/3}{\mathrm{j}-\bar{\mathrm{j}}} = \frac{4/3}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{9}.$$

D'où $\overline{\lambda_1} = 4\sqrt{3}\,\mathrm{i}/9$. On obtient finalement :

$$\frac{X^2+1}{(X^2+X+1)^2} = \frac{-4\sqrt{3}\,\mathrm{i}/9}{X-\mathrm{j}} + \frac{\mathrm{j}/3}{(X-\mathrm{j})^2} + \frac{4\sqrt{3}\,\mathrm{i}/9}{X-\bar{\mathrm{j}}} + \frac{\bar{\mathrm{j}}/3}{(X-\bar{\mathrm{j}})^2}.$$

Bien sûr, pour déterminer les coefficients λ_1 et λ_2, nous aurions pu utiliser la méthode utilisant une division selon les puissances croissantes (cette méthode a été exposée au paragraphe 7.3.2).

EXERCICE 2 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions :

$$F_1 = \frac{X}{(X-1)^2(X-2)} \quad \text{et} \quad F_2 = \frac{4}{(X^2-1)^2}.$$

7.4 Exercices de synthèse

EXERCICE 3 *On considère dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme*

$$P = X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2.$$

1 - Vérifier que 1 *est une racine multiple de P, donner sa multiplicité et factoriser P sous forme d'un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.*

2 - Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle :

$$F = \frac{X^2+3}{X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2}.$$

EXERCICE 4

1 - Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{X^3 - X^2 + 2X - 3}{(X^2+X+1)^2}.$$

2 - Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + 8X^2 + 4X + 1.$$

Sans utiliser la factorisation de P donnée ci-dessous, vérifier que -1 est une racine double (dans $\mathbb{R}$) de P et que j *et* $\bar{\mathrm{j}}$ *sont deux racines doubles (dans $\mathbb{C}$) de P. En déduire que $P = (X+1)^2(X^2+X+1)^2$.*

3 - On considère la fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$ suivante :

$$F = \frac{X^2 - 3X - 2}{X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + 8X^2 + 4X + 1}.$$

Vérifier que $F = (X^2 - 3X - 2)/((X - \alpha)^2 C^2)$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $C \in \mathbb{R}[X]$. *En utilisant une division selon les puissances croissantes, calculer* $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ *et* $R \in \mathbb{R}[X]$ *tels que*

$$F = \frac{\lambda_1}{X - \alpha} + \frac{\lambda_2}{(X - \alpha)^2} + \frac{R}{C^2}.$$

Terminer la décomposition en éléments simples de F *sur* $\mathbb{R}$.

EXERCICE 5

1 - Soit n *un entier non nul. Montrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

2 - Soient n *et* p *deux entiers non nuls. Montrer que*

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$

En déduire l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$

7.5 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

Dans $X^4/(X^4 - 1)$, le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur. Dans la décomposition de $X^4/(X^4 - 1)$ en éléments simples (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$), la partie entière n'est donc pas nulle. C'est le polynôme constant 1 puisque $X^4 = (X^4 - 1) \times 1 + 1$, d'où

$$\frac{X^4}{X^4 - 1} = 1 + \frac{1}{X^4 - 1}.$$

Les racines (complexes) du polynôme $X^4 - 1$ sont les nombres 1, i, -1 et $-$i. Ce sont des racines simples. Ainsi, $X^4 - 1 = (X - 1)(X - \mathrm{i})(X + 1)(X + \mathrm{i})$. D'où la décompositon (formelle) de $X^4/(X^4 - 1)$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{X^4}{X^4 - 1} = 1 + \frac{\lambda_1}{X - 1} + \frac{\lambda_2}{X - \mathrm{i}} + \frac{\lambda_3}{X + 1} + \frac{\lambda_4}{X + \mathrm{i}}$$

avec λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 dans $\mathbb{C}$. Les résidus aux quatre pôles s'obtiennent facilement en utilisant la formule de dérivation (à utiliser de préférence lorsque le dénominateur est donné sous une forme non factorisée, ce qui est le cas ici). On a : $(X^4-1)' = 4X^3$, d'où

$$\lambda_1 = \left.\frac{1}{4X^3}\right|_{X=1} = \frac{1}{4}, \qquad \lambda_2 = \left.\frac{1}{4X^3}\right|_{X=\mathrm{i}} = \frac{1}{4\mathrm{i}^3} = -\frac{1}{4\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{4\mathrm{i}^2} = \frac{\mathrm{i}}{4},$$
$$\lambda_3 = \left.\frac{1}{4X^3}\right|_{X=-1} = -\frac{1}{4}, \quad \lambda_4 = \left.\frac{1}{4X^3}\right|_{X=-\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{4}.$$

Finalement, la décompositon de $X^4/(X^4-1)$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$\frac{X^4}{X^4-1} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{\mathrm{i}}{X-\mathrm{i}} - \frac{1}{X+1} - \frac{\mathrm{i}}{X+\mathrm{i}}\right).$$

Remarquons que la fraction $1/(X^4-1)$ est paire. Les deux coefficients λ_1 et λ_3 relatifs respectivement au pôle 1 et à son opposé, le pôle -1, sont donc opposés l'un de l'autre ($\lambda_3 = -\lambda_1$). Pour la même raison, $\lambda_4 = -\lambda_2$. De plus, la fraction $1/(X^4-1)$ est à coefficients réels. Les deux coefficients λ_2 et λ_4 relatifs respectivement au pôle i et à son conjugué, le pôle $-\mathrm{i}$, sont donc conjugués l'un de l'autre ($\lambda_4 = \overline{\lambda_2}$). Ainsi, on a à la fois $\lambda_4 = -\lambda_2$ et $\lambda_4 = \overline{\lambda_2}$, ce qui donne : $\lambda_2 + \overline{\lambda_2} = 0$. Le coefficient λ_2 est donc imaginaire pur. Il en va de même pour λ_4.

Pour obtenir la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, il suffit alors de regrouper les deux éléments simples $\mathrm{i}/(X-\mathrm{i})$ et $-\mathrm{i}/(X+\mathrm{i})$:

$$\frac{\mathrm{i}}{X-\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{i}}{X+\mathrm{i}} = -\frac{2}{X^2+1}.$$

D'où la décomposition de $X^4/(X^4-1)$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{X^4}{X^4-1} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} - \frac{2}{X^2+1}\right).$$

Solution de l'exercice 2

1 - La fraction rationnelle $F_1 = X/((X-1)^2(X-2))$ possède un pôle simple (le réel 2) et un pôle double (le réel 1). Sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit ainsi sous la forme :

$$\frac{X}{(X-1)^2(X-2)} = Q + \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{\lambda}{X-2}$$

avec $Q = 0$ et a, b et λ dans $\mathbb{R}$. Le coefficient λ s'obtient en multipliant par $X-2$ puis en remplaçant X par 2. On obtient : $\lambda = 2$. Le coefficient a s'obtient en multipliant par $(X-1)^2$ puis en remplaçant X par 1. On obtient : $a = -1$. On a donc :

$$\frac{X}{(X-1)^2(X-2)} = -\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{2}{X-2}.$$

Enfin, le coefficient b peut être obtenu en donnant une valeur particulière à X (en prenant soin, néanmoins, d'éviter les valeurs des deux pôles). En prenant par exemple $X = 0$, on obtient facilement $b = -2$. Alternativement, pour calculer le coefficient restant, b, nous aurions pu multiplier par X et travailler sur l'égalité obtenue par passage à la limite ($X \to +\infty$) :

$$\overbrace{\lim_{X\to+\infty} \frac{X^2}{(X-1)^2(X-2)}}^{=0} = \overbrace{\lim_{X\to+\infty}\left(-\frac{X}{(X-1)^2} + \frac{bX}{X-1} + \frac{2X}{X-2}\right)}^{=b+2},$$

d'où $b = -2$. Ainsi,

$$\frac{X}{(X-1)^2(X-2)} = -\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{2}{X-1} + \frac{2}{X-2}.$$

La fraction rationnelle $F_2 = 4/(X^2-1)^2$ possède deux pôles doubles (les réels 1 et -1). En utilisant la parité de F_2, sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{4}{(X^2-1)^2} = Q + \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{-b}{X+1}$$

avec $Q = 0$ et a, b dans $\mathbb{R}$. Le coefficient a s'obtient en multipliant par $(X-1)^2$ puis en remplaçant X par 1. On trouve $a = 1$. On a donc :

$$\frac{4}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{-b}{X+1}.$$

Le coefficient b s'obtient alors facilement en remplaçant X par 0. On trouve : $b = -1$. Ainsi,

$$\frac{4}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+1}.$$

Solution de l'exercice 3

1 - On vérifie que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$. Ainsi, 1 est une racine de P de multiplicité 3 et P est divisible par $(X-1)^3$. Effectuons la division euclidienne de P par $(X-1)^3$ (le reste est nul). On obtient :

$$P = (X-1)^3(X^2+2)$$

et il n'est alors pas utile de poursuivre car X^2+2 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Remarquons que nous aurions pu faire apparaître le polynôme $(X-1)^3$, soit l'expression $X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, directement dans celle de P en procédant comme suit :

$$\begin{aligned}
&X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2\\
&= X^5 - 3X^4 + 3X^3 + 2X^3 - X^2 - 6X^2 + 6X - 2\\
&= X^2(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) + 2(X^3 - 3X^2 + 3X - 1)\\
&= (X^2+2)(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = (X^2+2)(X-1)^3.
\end{aligned}$$

La factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$ s'écrit ainsi : $P = (X-1)^3(X^2+2)$. S'en déduit la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{C}$:

$$P = (X-1)^3(X - \mathrm{i}\sqrt{2})(X + \mathrm{i}\sqrt{2}).$$

2 - Pour décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction F, on se propose de calculer d'abord la somme partielle relative au pôle triple 1. Pour cela, on pose : $Y = X - 1$. On remplace donc X par $Y+1$. On a ainsi :

$$\frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{Y^2+2Y+4}{Y^3(Y^2+2Y+3)}.$$

On effectue ensuite la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 du polynôme $4+2Y+Y^2$ par le polynôme $3+2Y+Y^2$. On obtient :

$$4+2Y+Y^2 = (3+2Y+Y^2)\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{9}Y + \frac{1}{27}Y^2\right) + \frac{1}{27}Y^3\,(4-Y)\,.$$

Ainsi,

$$\frac{Y^2+2Y+4}{Y^3(Y^2+2Y+3)} = \frac{\frac{4}{3}}{Y^3} - \frac{\frac{2}{9}}{Y^2} + \frac{\frac{1}{27}}{Y} + \frac{\frac{1}{27}(4-Y)}{3+2Y+Y^2}.$$

On revient alors à l'indéterminée X en remplaçant Y par $X-1$. Finalement,

$$\frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{\frac{4}{3}}{(X-1)^3} - \frac{\frac{2}{9}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{1}{27}}{X-1} + \frac{\frac{1}{27}(-X+5)}{X^2+2}.$$

Solution de l'exercice 4

1 - La division euclidienne de X^3-X^2+2X-3 par X^2+X+1 permet d'écrire

$$X^3 - X^2 + 2X - 3 = (X^2+X+1)(X-2) + (3X-1).$$

On en déduit :

$$\frac{X^3-X^2+2X-3}{(X^2+X+1)^2} = \frac{X-2}{X^2+X+1} + \frac{3X-1}{(X^2+X+1)^2}.$$

2 - On a : $P(-1) = 0$: -1 est donc une racine de P. De plus, $P' = 6X^5 + 20X^4 + 32X^3 + 30X^2 + 16X + 4$ et $P'(-1) = 0$: -1 est donc une racine de multiplicité au moins 2. Enfin, $P'' = 30X^4 + 80X^3 + 96X^2 + 60X + 16$ et on vérifie que $P''(-1) \neq 0$. Finalement, on peut dire que -1 est une racine double. De même, on vérifie que $P(\mathrm{j}) = P'(\mathrm{j}) = 0$ et $P''(\mathrm{j}) \neq 0$. Il est inutile de faire de même pour $\bar{\mathrm{j}}$ puisque le polynôme P est à coefficients réels. On remarque que

$$(X-\mathrm{j})^2(X-\bar{\mathrm{j}})^2 = (X^2+X+1)^2.$$

Bilan, le polynôme P est factorisable par $(X+1)^2$ (polynôme de degré 2) et par $(X^2+X+1)^2$ (polynôme de degré 4). Puisque P est de degré 6 et puisque $(X+1)^2$ et $(X^2+X+1)^2$ sont premiers entre eux, on obtient :

$$P = \lambda(X+1)^2(X^2+X+1)^2$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque P est unitaire, $\lambda = 1$. Ce résultat se vérifie en développant le terme de droite.

3 - D'après ce qui précède,

$$F = \frac{X^2 - 3X - 2}{(X - \alpha)^2 C^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = -1 \ \text{ et } \ C = X^2 + X + 1.$$

On effectue le changement d'indéterminée suivant : $Y = X + 1$. En remplaçant X par $Y - 1$, le polynôme $X^2 - 3X - 2$ devient $2 - 5Y + Y^2$ et le polynôme $(X^2 + X + 1)^2$ devient $1 - 2Y + 3Y^2 - 2Y^3 + Y^4$. En effectuant une division selon les puissances croissances à l'ordre 1, on obtient :

$$2 - 5Y + Y^2 = (1 - 2Y + 3Y^2 - 2Y^3 + Y^4)(2 - Y) - 7Y^2 + 7Y^3 - 4Y^4 + Y^5.$$

On en déduit :

$$\frac{2 - 5Y + Y^2}{Y^2(1 - 2Y + 3Y^2 - 2Y^3 + Y^4)} = \frac{-1}{Y} + \frac{2}{Y^2} + \frac{-7 + 7Y - 4Y^2 + Y^3}{1 - 2Y + 3Y^2 - 2Y^3 + Y^4}.$$

Revenons à l'indéterminée X. En remplaçant Y par $X + 1$, on obtient :

$$\frac{X^2 - 3X - 2}{(X + 1)^2(X^2 + X + 1)^2} = \frac{-1}{X + 1} + \frac{2}{(X + 1)^2} + \frac{X^3 - X^2 + 2X - 3}{(X^2 + X + 1)^2}.$$

En regroupant ce dernier résultat avec celui de la première question, on obtient finalement :

$$\frac{X^2 - 3X - 2}{(X + 1)^2(X^2 + X + 1)^2} = \frac{-1}{X + 1} + \frac{2}{(X + 1)^2} + \frac{X - 2}{X^2 + X + 1} + \frac{3X - 1}{(X^2 + X + 1)^2}.$$

Solution de l'exercice 5

1 - La décomposition en éléments simples de $1/\big(X(X + 1)(X + 2)\big)$ s'écrit :

$$\frac{1}{X(X + 1)(X + 2)} = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X + 1} + \frac{1}{2(X + 2)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k + 1)(k + 2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + 1}}_{(\star)} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + 2}}_{(\star\star)}.$$

Effectuons les changements d'indice $k' = k + 1$ dans la somme $(\star)$ et $k'' = k + 2$ dans la somme $(\star\star)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + 1} = \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + 2} = \sum_{k''=3}^{n+2} \frac{1}{k''}.$$

Compte tenu que les indices sont muets, on remplace alors k' et k'' par k. On obtient ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\Big) - \Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\Big).$$

Finalement,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

2 - On vérifie facilement que l'on a :

$$\frac{1}{(X-1)X} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1}.$$

Soient n et p deux entiers non nuls. On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} &= \sum_{k=1}^{p}\Big(-\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+k-1}\Big)\\ &= -\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{n+k}+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{n+k-1}.\end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice $k' = k-1$ dans la dernière somme, puis en remplaçant l'indice muet k' par k, on obtient

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = -\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{n+k}+\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{n+k}$$

$$= -\Big(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+p}\Big) + \Big(\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{n+k}\Big) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$

Soit k un entier compris entre 1 et p. On a : $n+k-1 < n+k$ et donc $(n+k-1)(n+k) < (n+k)^2$ car $n+k > 0$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$

Quatrième partie

Algèbre linéaire

CHAPITRE 8

Les espaces vectoriels

En accord avec la notation utilisée dans les chapitres précédents, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, muni de l'addition $+_{\mathbb{K}}$ et de la multiplication $\times_{\mathbb{K}}$. Ce corps peut être $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note 0 et 1 les éléments neutres pour l'addition et pour la multiplication. Il nous arrivera parfois de les noter $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$ pour marquer leur appartenance au corps $\mathbb{K}$.

8.1 Structure d'espace vectoriel

8.1.1 Définition d'un espace vectoriel

On considère un ensemble E muni d'une *loi de composition interne* $+$:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E \times E \longmapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in E,$$

et muni d'une *loi de composition externe* $\cdot$ (sur le corps $\mathbb{K}$) :

$$(\alpha, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{K} \times E \longmapsto \alpha \cdot \boldsymbol{x} \in E.$$

DÉFINITION 8.1 *On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si :*
- *$(E, +)$ est un groupe commutatif,*
- *la loi externe $\cdot$ possède les propriétés suivantes :*

$$\begin{gathered}
\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E^2 \quad \alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}, \\
\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall \boldsymbol{x} \in E \quad (\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}, \\
\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall \boldsymbol{x} \in E \quad \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{x}) = (\alpha \times_{\mathbb{K}} \beta) \cdot \boldsymbol{x}, \\
\forall \boldsymbol{x} \in E \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.
\end{gathered}$$

Les éléments de E sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est aussi appelé $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou encore $\mathbb{K}$-espace.[1]

[1] Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur le corps $\mathbb{K}$, on utilise l'expression d'espace vectoriel au lieu de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

C'est au mathématicien et logicien italien Giuseppe Peano que nous devons la première définition axiomatique d'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

PEANO, Giuseppe (1858, Cuneo - 1932, Turin).

Professeur de mathématiques à l'Université de Turin, il enseigna aussi à l'Académie Militaire. C'est en relisant les travaux abscons de Grassmann qu'il dégagea la notion d'espace vectoriel abstrait (sur $\mathbb{R}$) et en donna le premier, en 1888, une définition axiomatique (et claire !). Nous lui devons aussi la définition formelle d'une application linéaire. Profondément intéressé par la linguistique, il voulut imposer, sans succès, une langue artificielle appelée *Latino sine flexione*, qui se voulait universelle et qui était basée sur le Latin et dont les mots étaient empruntés à l'Anglais, l'Allemand, le Français et le Latin. Il alla même jusqu'à rédiger la dernière édition de son œuvre *Formulario Mathematico* dans cette langue.

Remarques

1. Afin de faciliter la distinction entre les scalaires et les vecteurs, nous avons convenu de noter en gras les vecteurs. Par exemple, les éléments $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ désignent des vecteurs et α, β, γ, a, b, c des scalaires.[2]

2. On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul.[3] C'est un vecteur de E, c'est-à-dire $\mathbf{0}_E \in E$. Il ne faut pas le confondre avec le zéro du corps $\mathbb{K}$.

3. On vérifie que tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De même, tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

8.1.2 Principaux exemples d'espaces vectoriels

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets

Soit n un entier non nul. On munit l'ensemble $\mathbb{K}^n$ défini par

$$\mathbb{K}^n \overset{\textit{déf.}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{K}, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}$$

des deux lois $+$ et $\cdot$ définies pour tous $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ appartenant à $\mathbb{K}^n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ par

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &\overset{\textit{déf.}}{=} (x_1 +_{\mathbb{K}} y_1, \dots, x_n +_{\mathbb{K}} y_n), & \textit{(loi interne)} \\ \alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) &\overset{\textit{déf.}}{=} (\alpha \times_{\mathbb{K}} x_1, \dots, \alpha_n \times_{\mathbb{K}} x_n). & \textit{(loi externe)} \end{aligned}$$

---

[2] Un vecteur se note parfois avec une flèche au dessus, par exemple $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

[3] Remarquons qu'un espace vectoriel n'est jamais vide puisqu'il y a une structure de groupe et qu'un groupe n'est jamais vide. Un espace vectoriel contient au moins l'élément neutre $\mathbf{0}_E$ pour l'addition.

Muni de ces deux lois, l'ensemble produit $\mathbb{K}^n$ possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Il est qualifié d'*espace produit*. Un vecteur de $\mathbb{K}^n$ est un n-uplet et on le note $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. L'élément neutre pour l'addition est le vecteur $\mathbf{0}_{\mathbb{K}^n} = (0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}}) \in \mathbb{K}^n$, que l'on note plus simplement $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. En particulier ($n = 1$), le corps $\mathbb{K}$ est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La loi interne est l'addition définie sur $\mathbb{K}$ et la loi externe est la multiplication définie sur $\mathbb{K}$. On ne peut pas, dans ce cas, faire la distinction entre les vecteurs (de l'espace $\mathbb{K}$) et les scalaires (du corps $\mathbb{K}$).

L'ensemble produit $E_1 \times \ldots \times E_n$

Considérons les espaces $E_1, \ldots, E_n$ sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $+_{E_i}$ et $\cdot_{E_i}$ les deux lois relatives à l'espace E_i. On peut alors enrichir l'ensemble produit $E_1 \times \ldots \times E_n$ défini par

$$E_1 \times \ldots \times E_n \overset{déf.}{=} \{(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \mid \boldsymbol{x}_1 \in E_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in E_n\}$$

d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Il suffit de munir $E_1 \times \ldots \times E_n$ des deux lois $+$ et $\cdot$ définies pour tous $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ et $(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$ appartenant à $E_1 \times \ldots \times E_n$ et pour tout α appartenant à $\mathbb{K}$ par

$$(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) + (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) \overset{déf.}{=} (\boldsymbol{x}_1 +_{E_1} \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n +_{E_n} \boldsymbol{y}_n), \text{ (loi interne)}$$
$$\alpha \cdot (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \overset{déf.}{=} (\alpha \cdot_{E_1} \boldsymbol{x}_1, \ldots, \alpha \cdot_{E_n} \boldsymbol{x}_n). \text{ (loi externe)}$$

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel ainsi défini est alors qualifié d'*espace produit* des $\mathbb{K}$-espaces $E_1, \ldots, E_n$. En notant $\mathbf{0}_{E_i}$ l'élément neutre de E_i pour l'addition $+_{E_i}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'élément $\mathbf{0}_{E_1 \times \ldots \times E_n}$ de $E_1 \times \ldots \times E_n$ défini par

$$\mathbf{0}_{E_1 \times \ldots \times E_n} \overset{déf.}{=} (\mathbf{0}_{E_1}, \ldots, \mathbf{0}_{E_n})$$

est l'élément neutre de $E_1 \times \ldots \times E_n$ pour l'addition $+$.

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La loi de composition interne sur $\mathbb{K}[X]$ est l'addition de polynômes et la loi de compostion externe est la multiplication d'un polynôme par un élément de $\mathbb{K}$. Les vecteurs de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes et les scalaires sont les éléments de $\mathbb{K}$. Le vecteur nul est le polynôme

$$0_{\mathbb{K}[X]} \overset{déf.}{=} (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}}, \ldots) \in \mathbb{K}[X].$$

L'ensemble des applications de $\mathcal{I}$ vers $\mathbb{K}$

Soit $\mathcal{I}$ un ensemble non vide. Considérons l'ensemble des applications de $\mathcal{I}$ vers $\mathbb{K}$, que l'on note $\mathcal{A}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$, muni des deux lois $+$ et $\cdot$.

– La première loi + est une loi de composition interne. À partir des applications $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$, on définit une nouvelle application $f + g : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathcal{I} \quad (f+g)(x) \overset{\text{déf.}}{=} f(x) +_{\mathbb{K}} g(x).$$

– La deuxième loi $\cdot$ est une loi de composition externe sur $\mathbb{K}$. À partir d'une application $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ et d'un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit la nouvelle application $\alpha \cdot f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ comme suit :

$$\forall x \in \mathcal{I} \quad (\alpha \cdot f)(x) \overset{\text{déf.}}{=} \alpha \times_{\mathbb{K}} f(x).$$

L'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (s'en convaincre). Les vecteurs de $\mathcal{A}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$ sont ici les applications de $\mathcal{I}$ vers $\mathbb{K}$ et les scalaires sont les éléments du corps $\mathbb{K}$. Il ne faut pas confondre une application $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ (c'est un vecteur de $\mathcal{A}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$) avec sa valeur $f(x)$ en un élément x de $\mathcal{I}$, qui est un scalaire. Le vecteur nul est l'application qui à tout $x \in \mathcal{I}$ associe $0_{\mathbb{K}}$. On l'appelle l'application nulle.

Plus généralement, considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni des lois $+_E$ (loi interne) et $\cdot_E$ (loi externe). L'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{I}, E)$ des applications de $\mathcal{I}$ vers E muni des deux opérations + et $\cdot$ définies pour tous $f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{I}, E)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ par

$$\forall x \in \mathcal{I} \quad \Big((f+g)(x) \overset{\text{déf.}}{=} f(x) +_E g(x) \ \text{ et } \ (\alpha \cdot f)(x) \overset{\text{déf.}}{=} \alpha \cdot_E f(x) \Big)$$

possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Le vecteur nul est l'application $x \in \mathcal{I} \longmapsto \mathbf{0}_E \in E$.

L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$

L'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ représente l'ensemble des suites à valeurs réelles (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou à valeurs complexes (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On rappelle que l'addition des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{déf.}}{=} (u_n +_{\mathbb{K}} v_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

et la multiplication de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la suite $\alpha \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\alpha \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{déf.}}{=} (\alpha \times_{\mathbb{K}} u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Muni de ces deux lois, l'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un vecteur est ici une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Le vecteur nul est la suite de terme général nul.

Pourquoi parlons-nous d'espaces vectoriels et de vecteurs ?

Les vecteurs de l'espace réel à trois dimensions de la géométrie classique possèdent une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^3$ cet ensemble. De même, l'ensemble des vecteurs du plan réel de la géométrie classique est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On le note $\mathbb{R}^2$. Ce sont là les origines de la terminologie employée (« espaces vectoriels » et « vecteurs »). Les deux opérations (addition de deux vecteurs et multiplication d'un vecteur par un scalaire) sont familières. Elles sont illustrées sur la figure 1.

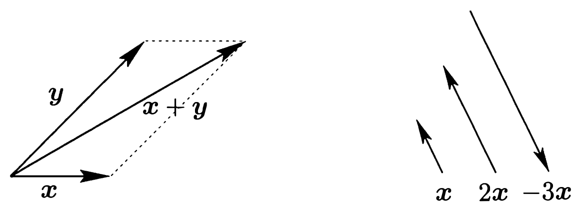


Fig. 1 Illustration de l'addition de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (dessin de gauche) et de la multiplication d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ par un scalaire (dessin de droite).

On rappelle que deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur. Ainsi deux vecteurs sont égaux si on peut passer de l'un à l'autre par une simple translation. Bien que l'ouvrage se veuille d'une portée plus générale, nous utiliserons des illustrations graphiques dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$.

Il ne faut pas confondre les *points* constituant le plan réel (respectivement l'espace réel) de la géométrie classique (on parle d'espaces affines et on les note respectivement $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$) avec les *vecteurs* constituant l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) qui lui est associé. Ce sont deux entités mathématiques distinctes. L'espace affine $\mathcal{E}_2$ (resp. $\mathcal{E}_3$) est un ensemble de points tandis que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) est un ensemble de vecteurs.[4] Il y a en revanche un lien étroit entre ces deux notions puisque le choix d'un repère d'origine O permet d'identifier les points aux vecteurs d'origine O. Par exemple, en rapportant l'espace affine $\mathcal{E}_3$ à un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$, on peut associer à tout point $M \in \mathcal{E}_3$ l'unique vecteur $\overrightarrow{OM} \in \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OI} + y \cdot \overrightarrow{OJ} + z \cdot \overrightarrow{OK}$$

où les scalaires x, y et z appartenant à $\mathbb{R}$ sont appelés coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$.

[4] Rappelons que dans les espaces affines $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$, deux points A et B définissent un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si les points A, B, D et C sont les quatre sommets consécutifs d'un parallélogramme.

8.1.3 Propriétés élémentaires

PROPOSITION 8.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On a :*

- ✗ $\forall \boldsymbol{x} \in E \quad 0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$;
- ✗ $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha \cdot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$;
- ✗ $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall \boldsymbol{x} \in E \quad (-\alpha) \cdot \boldsymbol{x} = -(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot (-\boldsymbol{x})$;
- ✗ $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall \boldsymbol{x} \in E \quad \big(\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E \iff (\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E)\big)$.

Démonstration La démonstration est aisée. On s'attachera à bien comprendre le sens des opérations et notations employées.

⊵ Soit $\boldsymbol{x} \in E$. Montrons que $0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a : $\lambda \cdot \boldsymbol{x} = (0_{\mathbb{K}} +_{\mathbb{K}} \lambda) \cdot \boldsymbol{x}$. Or, $(0_{\mathbb{K}} +_{\mathbb{K}} \lambda) \cdot \boldsymbol{x} = 0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} + \lambda \cdot \boldsymbol{x}$. Ainsi,

$$\lambda \cdot \boldsymbol{x} = 0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} + \lambda \cdot \boldsymbol{x}.$$

En additionnant le vecteur $-(\lambda \cdot \boldsymbol{x})$ à droite et à gauche dans cette égalité, on obtient $\mathbf{0}_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x}$ car $\lambda \cdot \boldsymbol{x} + (-(\lambda \cdot \boldsymbol{x})) = \mathbf{0}_E$.

⊵ Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrons que $\mathbf{0}_E = \alpha \cdot \mathbf{0}_E$. Soit $\boldsymbol{x} \in E$. On a : $\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \mathbf{0}_E)$. Or, $\alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \mathbf{0}_E) = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \mathbf{0}_E$. On a donc :

$$\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \mathbf{0}_E.$$

En additionnant $-(\alpha \cdot \boldsymbol{x})$ à droite et à gauche dans cette dernière égalité, on obtient $\mathbf{0}_E = \alpha \cdot \mathbf{0}_E$ car $-(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) + \alpha \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$.

⊵ Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\boldsymbol{x} \in E$. Montrons que $(-\alpha) \cdot \boldsymbol{x} = -(\alpha \cdot \boldsymbol{x})$. On a :

$$\alpha \cdot \boldsymbol{x} + (-\alpha) \cdot \boldsymbol{x} = (\alpha +_{\mathbb{K}} (-\alpha)) \cdot \boldsymbol{x} = 0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x}$$

car $\alpha +_{\mathbb{K}} (-\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$. Or, d'après la première propriété, $0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$. Ainsi, $\alpha \cdot \boldsymbol{x} + (-\alpha) \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$. Puisque le vecteur $\alpha \cdot \boldsymbol{x}$ admet pour symétrique le vecteur $-(\alpha \cdot \boldsymbol{x})$, on a aussi $\alpha \cdot \boldsymbol{x} + (-(\alpha \cdot \boldsymbol{x})) = \mathbf{0}_E$. On en déduit alors, par unicité du symétrique, que $(-\alpha) \cdot \boldsymbol{x} = -(\alpha \cdot \boldsymbol{x})$. Montrons maintenant que $\alpha \cdot (-\boldsymbol{x}) = -(\alpha \cdot \boldsymbol{x})$. On a :

$$\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot (-\boldsymbol{x}) = \alpha \cdot (\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})) = \alpha \cdot \mathbf{0}_E$$

car $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$. Or, d'après la seconde propriété, $\alpha \cdot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$. Ainsi,

$$\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E.$$

Par unicité du symétrique, on en déduit que $\alpha \cdot (-\boldsymbol{x}) = -(\alpha \cdot \boldsymbol{x})$.

⊵ La réciproque découle directement des deux premières propriétés. Montrons l'implication. Supposons que l'on ait l'égalité $\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$ et considérons dans un premier temps le cas où $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$. Multiplions chacun des membres de cette égalité par α^{-1} (qui existe car $\mathbb{K}$ est un corps). On a :

$$\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = (\alpha^{-1} \times_{\mathbb{K}} \alpha) \cdot \boldsymbol{x} = 1_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \quad \text{et} \quad \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E.$$

Ainsi, de la multiplication de $\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$ par α^{-1} on déduit que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$. Supposons maintenant que $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}_E$. On a nécessairement $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ car sinon on pourrait (comme ci-dessus) multiplier $\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$ par α^{-1}, ce qui impliquerait que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$, et serait contraire à notre hypothèse. □

Afin d'alléger les écritures, nous convenons de l'abus suivant : pour tout scalaire α de $\mathbb{K}$ et pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E, on note $\alpha\boldsymbol{x}$ le vecteur $\alpha \cdot \boldsymbol{x}$ de E.

8.1.4 Combinaison linéaire

Commençons par définir la notion de famille de vecteurs d'un espace vectoriel.

Définition 8.2 *Soient I un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

✗ *On appelle famille de vecteurs indexée par I toute application*

$$i \in I \longmapsto \boldsymbol{v}_i \in E.$$

On la note $(\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$. L'ensemble de départ I est appelé ensemble des indices de la famille.

✗ *Lorsque I est un ensemble fini (respectivement infini) on dit que $(\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ est une famille finie (resp. infinie).*

✗ *Soit J un sous-ensemble de I. La famille $(\boldsymbol{v}_j)_{j \in J}$ est appelée une sous-famille de $(\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$. Réciproquement, la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ est appelée une sur-famille de $(\boldsymbol{v}_j)_{j \in J}$. On note parfois $(\boldsymbol{v}_j)_{j \in J} \subset (\boldsymbol{v}_j)_{j \in I}$.*

Remarquons que l'ensemble des indices d'une famille est un ensemble quelconque. Il peut être fini (par exemple, $I = \{1, \ldots, n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$). Il peut aussi être infini (par exemple $I = \mathbb{N}$ ou encore $I = \mathbb{R}$). En particulier, lorsque $I = \{1, \ldots, n\}$ on note parfois la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ sous la forme $(\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et on la confond avec le n-uplet $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ de l'espace produit E^n (voir la définition page 311). La notion de famille généralise ainsi les notions de n-uplet (cas où $I = \{1, \ldots, n\}$) et de suites (cas où $I = \mathbb{N}$).

Il ne faut pas confondre une famille de vecteurs de E et un ensemble de vecteurs de E. Insistons sur les différences fondamentales entre « famille » et « ensemble ». Pour une famille, l'ordre des éléments est pris en compte alors qu'il n'a aucune importance pour un ensemble. Par exemple, pour $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ trois vecteurs (distincts deux-à-deux) d'un espace vectoriel E,

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) \neq (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1) \quad \text{et} \quad \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} = \{\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1\}.$$

De plus, dans une famille, deux éléments peuvent être égaux. Dans un ensemble, tous les éléments sont distincts. Par exemple, si $\boldsymbol{v}$ désigne un vecteur quelconque d'un espace E,

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \neq (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \neq (\boldsymbol{v}) \quad \text{et} \quad \{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{v}\}.$$

Combinaison linéaire d'une famille finie

DÉFINITION 8.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ des vecteurs de E. On dit qu'un vecteur $\boldsymbol{x}$ de E est combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ s'il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que*

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{v}_i.$$

Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ se nomment coefficients de la combinaison linéaire.

Exemples

1. Tout vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{K}^3$ est combinaison linéaire de la famille finie $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ où $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$, car

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) \\ &= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) \;=\; x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Les coefficients de la combinaison linéaire sont x_1, x_2 et x_3.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ qui est de degré inférieur ou égal à n est combinaison linéaire de la famille finie $\mathcal{F}_n = (X^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$. En effet, $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ se décompose sous la forme (voir page 227) :

$$P = a_0 1_{\mathbb{K}[X]} + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n.$$

Les coefficients de la combinaison linéaire sont $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Combinaison linéaire d'une famille infinie

La définition d'une combinaison linéaire n'a été donnée que dans le cas particulier d'une famille finie de vecteurs de E. Néanmoins, elle se généralise au cas d'une famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E, indexée par un ensemble infini I.

DÉFINITION 8.4 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ une famille infinie de vecteurs de E. On dit qu'un vecteur $\boldsymbol{x}$ de E est combinaison linéaire de $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ s'il existe un ensemble fini J inclus dans I (autrement dit, vérifiant $J \subset I$ et $\operatorname{card}(J) < +\infty$) et $(\alpha_i)_{i \in J} \in \mathbb{K}^{\operatorname{card}(J)}$ tels que*

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i \in J} \alpha_i \boldsymbol{v}_i.$$

Les scalaires α_i, $i \in J$, se nomment coefficients de la combinaison linéaire.[5]

[5] Les coefficients d'une combinaison linéaire sont en nombre fini car $\operatorname{card}(J) < +\infty$.

Exemple Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est combinaison linéaire de la famille infinie $\mathcal{F}_\infty = \left(X^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ (ici $I = \mathbb{N}$). En effet, pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{K}[X]$, il existe $J \subset \mathbb{N}$, $\mathrm{card}(J) < +\infty$, et $(\alpha_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^{\mathrm{card}(J)}$ tels que

$$P = \sum_{i\in J} \alpha_i X^i.$$

Ici, J désigne l'ensemble des entiers j pour lesquels le coefficient de rang j du polynôme P est non nul. Bien évidemment, le sous-ensemble fini J et les coefficients α_i, $i \in J$, dépendent du polynôme P. À titre d'exemple, prenons les deux polynômes réels $P = -X + 12X^{17}$ et $Q = \sqrt{3} + X^3$. Pour P, on peut prendre $J = \{1, 17\}$ et $\alpha_1 = -1$, $\alpha_{17} = 12$ puisque

$$P = \sum_{i\in\{1,17\}} \alpha_i X^i = \alpha_1 X + \alpha_{17} X^{17} = -X + 12X^{17}.$$

Pour Q, on peut prendre $J' = \{0, 3\}$ et $\alpha'_0 = \sqrt{3}$, $\alpha'_3 = 1$ puisque

$$Q = \sum_{i\in\{0,3\}} \alpha'_i X^i = \alpha'_0 + \alpha'_3 X^3 = \sqrt{3} + X^3.$$

Remarques

1. Qu'une famille soit finie ou infinie, une combinaison linéaire de cette famille est, par définition, toujours une somme finie de vecteurs.

2. Tout vecteur extrait d'une famille est lui-même combinaison linéaire de cette famille. Par exemple, étant donnée la famille finie $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\ell \in \{1, \ldots, p\}$, le vecteur $\boldsymbol{v}_\ell$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ puisque

$$\boldsymbol{v}_\ell = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_\ell = 1 \\ \forall i \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{\ell\} \quad \alpha_i = 0 \end{array} \right. .$$

3. Remarquons que le vecteur $\mathbf{0}_E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs $\left(\boldsymbol{v}_i\right)_{i\in I}$ avec I un ensemble fini ou infini. Il suffit de prendre tous les coefficients de la combinaison linéaire égaux à $0_{\mathbb{K}}$.

8.2 Structure de sous-espace vectoriel

8.2.1 Définition d'un sous-espace vectoriel

En pratique, les espaces vectoriels donnés en exemple au paragraphe 8.1.2 sont peu utilisés car trop généraux. Par exemple, l'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré quelconque ou encore l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont des espaces bien trop vastes. Dans la pratique, on est amené à effectuer les calculs en ne manipulant que certains vecteurs de l'espace vectoriel considéré (bien que les calculs soient autorisés pour tous les éléments de l'espace).

C'est le cas lorsqu'on décide de ne travailler qu'avec les polynômes de degré au plus égal à n, c'est-à-dire avec l'ensemble

$$\mathbb{K}_n[X] \overset{déf.}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leqslant n\}$$

où $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ ainsi défini contient le polynôme nul puisqu'il a été convenu que $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$. On constate que si P et Q sont deux éléments du sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ alors $P + Q$ est un élément de ce même sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$ alors αP est encore un élément de $\mathbb{K}_n[X]$. De manière plus générale, on constate que toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{K}_n[X]$ est encore un élément de $\mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, bien que les calculs (loi interne et loi externe) soient définis initialement sur l'espace $\mathbb{K}[X]$ englobant le sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$, le résultat d'un calcul portant sur n'importe quel élément du sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ reste dans $\mathbb{K}_n[X]$. En ce sens, on dit que $\mathbb{K}_n[X]$ est un *sous-espace vectoriel* du $\mathbb{K}$-espace $\mathbb{K}[X]$.

C'est encore le cas lorsque l'on s'intéresse à l'ensemble des suites à valeurs complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant à la relation de double récurrence (on parle alors de *suites de Fibonacci généralisées*) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0 \tag{1}$$

où $(p, q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \end{cases}$$

qualifiée de *suite de Fibonacci*[6], vous est peut-être familière puisqu'elle a été popularisée par le film *Da Vinci Code* avec Tom Hanks et la ravissante Audrey Tautou, film policier adapté du roman éponyme de Dan Brown. Ses premiers termes sont les entiers 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, etc. Ces derniers sont d'ailleurs qualifiés de *nombres de Fibonacci*. Citons aussi les *nombres de Lucas*[7] (les entiers 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, etc) correspondant à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = 2, \quad u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \end{cases}$$

ou encore les *nombres de Pell*[8] (les entiers 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, etc) correspondant à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

---

[6] du nom de Leonardo Fibonacci, un des plus grands mathématiciens italiens de l'époque médiévale, connu aussi sous le nom de Léonard de Pise.

[7] du nom du mathématicien français Édouard Lucas (né en 1842 à Amiens, décédé en 1891), connu pour ses travaux en théorie des nombres.

[8] en l'honneur du mathématicien anglais du XVII-ième siècle John Pell.

Fixons les deux complexes p et q et désignons par $F_{p,q}$ l'ensemble des suites complexes vérifiant la relation de double récurrence (1). L'ensemble $F_{p,q}$ constitue un sous-ensemble du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Il est non vide puisqu'il contient (au moins) la suite nulle.[9] De plus, si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont à la relation de double récurrence (1), il en est de même pour toute suite de la forme $(\alpha u_n+\beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec α et β dans $\mathbb{C}$ puisque, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&(\alpha u_{n+2}+\beta v_{n+2})+p\,(\alpha u_{n+1}+\beta v_{n+1})+q\,(\alpha u_n+\beta v_n)\\&=\alpha\underbrace{(u_{n+2}+pu_{n+1}+qu_n)}_{=0 \text{ car } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F_{p,q}}+\beta\underbrace{(v_{n+2}+pv_{n+1}+qv_n)}_{=0 \text{ car } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F_{p,q}}=0.\end{aligned}$$

Ainsi, $F_{p,q}\neq\emptyset$ et $\alpha(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F_{p,q}$ pour tous $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $F_{p,q}$ et α, β dans $\mathbb{C}$. Pour ces raisons, on dit que l'ensemble $F_{p,q}$ forme un *sous-espace vectoriel* du $\mathbb{C}$-espace $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

La notion de sous-espace vectoriel se généralise au cas d'un espace vectoriel quelconque.

DÉFINITION 8.5 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel*[10] *de E si F est non vide et si*

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2\quad\forall \boldsymbol{x}\in F\quad\forall \boldsymbol{y}\in F\quad \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in F.$$

On vérifie facilement les points suivants.

1. Si un ensemble est un sous-espace vectoriel de E alors il contient nécessairement le vecteur $\mathbf{0}_E$.
2. Les deux ensembles $\{\mathbf{0}_E\}$ et E constituent deux sous-espaces vectoriels de E, appelés sous-espaces triviaux.
3. Si G est un sous-espace de F et F un sous-espace de E alors G est aussi un sous-espace de E.
4. Si F est un sous-espace de E alors le complémentaire de F dans E n'est pas un sous-espace de E. Il suffit de remarquer que $\mathbf{0}_E\notin \complement_E(F)$.

Héritage de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Dire que F est un sous-espace vectoriel de E signifie que F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La loi interne sur F est la restriction à $F\times F$ de la loi interne $+$ et la loi externe est la restriction à $\mathbb{K}\times F$ de la loi externe $\cdot$. On dit alors que F hérite de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E.

Ainsi, pour montrer qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il est souvent plus rapide de vérifier que l'ensemble en question est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace l'englobant.

[9] L'ensemble $F_{-1,-1}$ correspondant à $p=q=-1$, contient aussi les nombres de Fibonacci (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, etc) et les nombres de Lucas (2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, etc).

[10] Au lieu de sous-espace vectoriel, on dit parfois plus simplement sous-espace.

Exemples

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace différent de $\{\mathbf{0}_E\}$ et $\boldsymbol{u}$ un vecteur de E. L'ensemble

$$\mathbb{K}\boldsymbol{u} \overset{déf.}{=} \{\boldsymbol{x} \in E \,|\, \exists \alpha \in \mathbb{K}\ \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{u}\} = \{\alpha \boldsymbol{u} \,|\, \alpha \in \mathbb{K}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E. Si $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E$ alors $\mathbb{K}\boldsymbol{u}$ est le sous-espace trivial $\{\mathbf{0}_E\}$. Si $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}_E$ alors $\mathbb{K}\boldsymbol{u}$ est appelé *droite vectorielle engendrée par le vecteur* $\boldsymbol{u}$.

2. Soit $E = \mathbb{R}$ et $F =]0, 1[$. Il est facile de vérifier que F n'est pas un sous-espace de E. Par exemple pour les éléments $x = 1/2 \in F$ et $y = 3/4 \in F$, on a :$x + y = 1/2 + 3/4 = 5/4 \notin F$. Plus généralement, on peut vérifier que les seuls sous-espaces du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$.

3. Les trois parties F_1, F_2, F_3 définies ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels[11] de l'espace $\mathbb{K}^3$:

$$F_1 = \{0\} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} = \{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid x_2 \in \mathbb{K}, x_3 \in \mathbb{K}\},$$
$$F_2 = \mathbb{K} \times \{0\} \times \mathbb{K} = \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid x_1 \in \mathbb{K}, x_3 \in \mathbb{K}\},$$
$$F_3 = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \{0\} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{K}^3 \mid x_1 \in \mathbb{K}, x_2 \in \mathbb{K}\}.$$

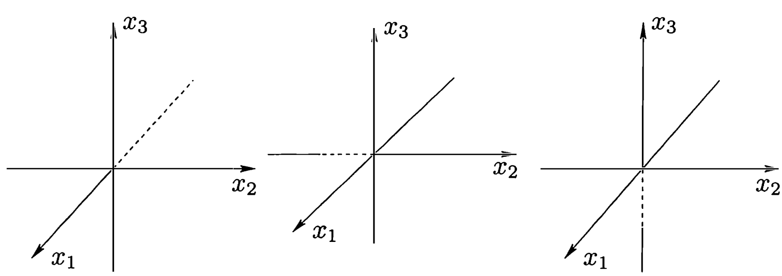


Fig. 2 Représentation de trois sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ - $F_1 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (à gauche), $F_2 = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ (au centre), $F_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ (à droite).

EXERCICE 1

1 - Montrer que $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2 - Montrer que $G = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + x_2) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

[11] Ces trois sous-espaces sont appelés *plans vectoriels triviaux* de $\mathbb{K}^3$.

8.2.2 Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels

On appelle famille de sous-ensembles de E toute application $i \in I \longmapsto F_i \in \mathcal{P}(E)$. Elle se note $(F_i)_{i \in I}$.

PROPOSITION 8.2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration Puisque $\mathbf{0}_E$ appartient à chacun des sous-espaces vectoriels F_i, $i \in I$, il appartient aussi à leur intersection, ce qui prouve que l'ensemble $\bigcap_{i\in I} F_i$ est non vide. Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont deux vecteurs de $\bigcap_{i\in I} F_i$ alors, pour tout $i \in I$, $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ appartiennent à F_i et, pour tous α, $\beta \in \mathbb{K}$, le vecteur $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ appartient aussi à F_i (puisque F_i est un sous-espace de E). Le vecteur $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$ appartient donc à $\bigcap_{i\in I} F_i$. □

Remarquons que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un même $\mathbb{K}$-espace E ne sont jamais disjoints car $\mathbf{0}_E \in F \cap G$.

Exemples

1. Soient $F_1 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $F_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$. Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Supposons que $\boldsymbol{x} \in F_1 \cap F_3$. De $\boldsymbol{x} \in F_1$ il vient $x_1 = 0$ et de $\boldsymbol{x} \in F_3$ il vient $x_3 = 0$, d'où $\boldsymbol{x} = (0, x_2, 0)$. Ainsi,

$$F_1 \cap F_3 = \{(0, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$$

ou encore, puisque $(0, x_2, 0) = x_2(0, 1, 0)$,

$$F_1 \cap F_3 = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_2 \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0).$$

2. Soient F et G les sous-ensembles du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, constitués des applications respectivement paires et impaires :

$$F = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(-x)\},$$
$$G = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = -f(x)\}.$$

On vérifie facilement que F et G sont deux sous-espaces de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $f \in F \cap G$. D'une part, puisque $f \in F$, $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'autre part, puisque $f \in G$, $f(x) = -f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + f(x) = f(-x) - f(-x),$$

d'où $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; f est donc l'application nulle. Ainsi,

$$F \cap G = \{x \in \mathbb{R} \longmapsto 0 \in \mathbb{R}\}.$$

Contrairement à l'intersection, l'union d'une famille (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels de E n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E. Par exemple, considérons les deux sous-espaces F_1 et F_2 de l'espace produit $\mathbb{R}^2$ définis par

$$\begin{aligned} F_1 &= \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}\}, \\ F_2 &= \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

L'ensemble $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ puisque $(1,0) \in F_1$, $(0,1) \in F_2$ et $(1,0)+(0,1) = (1,1) \notin F_1 \cup F_2$.

8.2.3 Sous-espace engendré par une famille finie

Définissons à présent la notion de sous-espace engendré par une famille de vecteurs. Limitons-nous dans un premier temps au cas d'une famille finie $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace E. Remarquons que si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, deux vecteurs de E, sont combinaison linéaire de $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ alors tout vecteur de la forme $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ avec α et β appartenant à $\mathbb{K}$, est aussi combinaison linéaire de $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$. En effet, $\boldsymbol{x}$ étant combinaison linéaire de $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$,

$$\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m \quad \boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{v}_m,$$

et $\boldsymbol{y}$ étant combinaison linéaire de $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$,

$$\exists(\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{K}^m \quad \boldsymbol{y} = \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \beta_m\boldsymbol{v}_m.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} &= \alpha(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{v}_m) + \beta(\beta_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \beta_m\boldsymbol{v}_m) \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + (\alpha\alpha_m + \beta\beta_m)\boldsymbol{v}_m \end{aligned}$$

avec $\alpha\alpha_i + \beta\beta_i \in \mathbb{K}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Le vecteur $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ s'écrit bien comme une combinaison linéaire de la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$. Rappelons que le vecteur nul est combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs. Ainsi, l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ est non vide (il contient le vecteur nul) et il possède une structure de sous-espace vectoriel de l'espace E. La définition suivante a alors un sens.

DÉFINITION 8.6 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle sous-espace engendré par $\mathcal{F}$ et on note* Vect $(\mathcal{F})$ *ou* Vect $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ *l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$. Autrement dit,*

$$\operatorname{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \overset{\text{déf.}}{=} \{\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{v}_m \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m\}.$$

Inversement, la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ est dite génératrice du sous-espace vectoriel Vect $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ *de E.*

Le sous-espace Vect $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ est donc constitué par les vecteurs de E qui se décomposent suivant les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$. En d'autres termes, dire que $\boldsymbol{x}$ appartient à Vect $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ signifie qu'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m.$$

Remarquons que cette décomposition n'est pas forcément unique[12] et que Vect $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ est un sous-espace *a priori* distinct de l'espace E.[13]

Exemples

1. On a : Vect $(\mathbf{0}_E) = \{\mathbf{0}_E\}$.

2. Si $\boldsymbol{u}$ est un vecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors

$$\text{Vect}\,(\boldsymbol{u}) = \{\alpha \boldsymbol{u} \mid \alpha \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}\boldsymbol{u}.$$

On retrouve que Vect $(\mathbf{0}_E) = \{\mathbf{0}_E\}$ (cas où $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E$) et si $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}_E$ alors Vect $(\boldsymbol{u})$ est la droite vectorielle engendrée par $\boldsymbol{u}$. Nous en donnons quelques illustrations dans l'espace $\mathbb{R}^3$ sur la figure 3.

3. Considérons à présent deux vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ de l'espace E. On a :

$$\text{Vect}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \{\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} \mid \alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}\}.$$

En particulier, si les deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont tels que $\boldsymbol{u} \neq \gamma \boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v} \neq \gamma \boldsymbol{u}$ pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$ alors Vect $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est appelé *plan vectoriel* (voir la fig. 3 pour quelques illustrations dans l'espace $\mathbb{R}^3$).

Remarques

1. Les vecteurs générateurs d'un sous-espace sont eux-mêmes des éléments de ce sous-espace. Par conséquent, si parmi les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$, un vecteur est non nul alors Vect $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ est nécessairement non réduit au vecteur nul. Insistons sur le point suivant. Le corps $\mathbb{K}$ étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il y a une infinité d'éléments dans $\mathbb{K}$. Par conséquent, tout sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace non réduit au vecteur nul possède une infinité de vecteurs. En particulier, le sous-espace Vect $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ ne déroge pas à la règle. Il possède une infinité de vecteurs (à la condition, bien sûr, qu'au moins un des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ soit non nul), et ce bien que la famille génératrice $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ ne possède qu'un nombre fini de vecteurs.

2. Soient $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On a :

$$\forall \boldsymbol{w} \in E \quad \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \subset \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w})$$

---

[12] Elle le sera lorsque les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ seront linéairement indépendants. La famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ sera alors qualifiée de base du sous-espace Vect $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$. Nous reviendrons longuement sur ce point au paragraphe 8.3.2.

[13] Comme nous le verrons par la suite, le cas où la famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ est génératrice de l'espace E tout entier est particulièrement intéressant puisque cela autorise l'écriture de tout vecteur de l'espace E comme une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$.

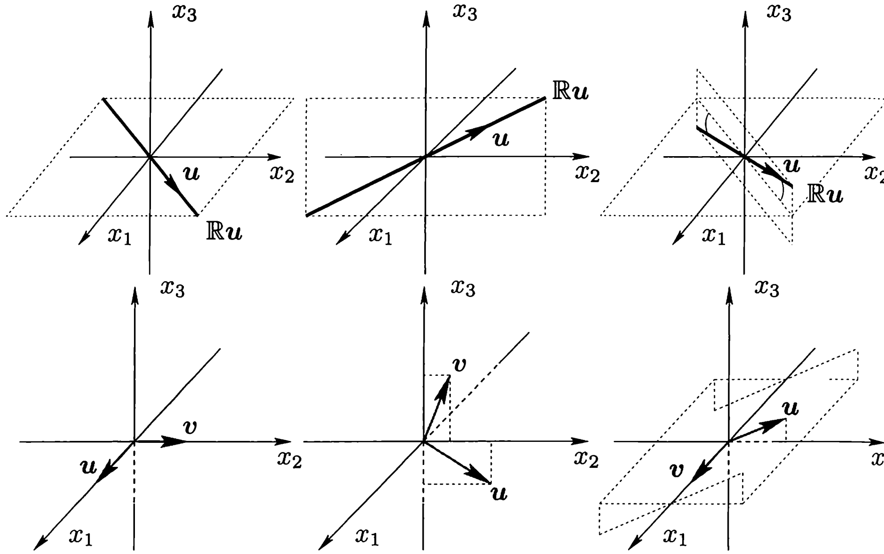


Fig. 3 Sur les trois dessins supérieurs sont représentés par des droites en gras des sous-espaces Vect $(\boldsymbol{u})$ de $\mathbb{R}^3$. Les dessins inférieurs représentent (en grisé) des sous-espaces Vect $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de $\mathbb{R}^3$.

puisque $\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m + 0\boldsymbol{w}$ pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ appartenant à $\mathbb{K}^m$. De plus, pour tout $\boldsymbol{w} \in E$, le sous-espace Vect $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ constitue lui-même un sous-espace vectoriel de Vect $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w})$.

3. Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace E. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, Vect $(\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v})$ constitue un sous-espace de Vect $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. En particulier, en prenant $\lambda = 1$ et $\mu = 0$ (respectivement $\lambda = 0$ et $\mu = 1$) le sous-espace Vect $(\boldsymbol{u})$ (resp. le sous-espace Vect $(\boldsymbol{v})$) constitue un sous-espace de Vect $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

8.2.4 Propriétés

Les propriétés que nous énonçons dans cette partie seront à l'origine de la méthode des « zéros échelonnés » présentée au paragraphe 8.4.4 en page 345.

Proposition 8.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ des vecteurs de E. Pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, m\}$,*

$$\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = \text{Vect}\,\left(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(m)}\right).$$

Autrement dit, le sous-espace engendré par une famille de vecteurs est inchangé lorsqu'on modifie l'ordre des vecteurs de la famille.[14]

Démonstration Cette propriété se déduit du fait que l'ordre des termes est sans influence dans une combinaison linéaire (l'addition de vecteurs est associative et commutative). □

Remarque Puisque le sous-espace engendré par une famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de vecteurs est inchangé lorsqu'on modifie l'ordre des vecteurs de la famille, on dit aussi que les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ (sans nécessairement en préciser l'ordre) sont *générateurs* de Vect $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ ou encore que la *partie* $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ *est génératrice* de Vect $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$.

Proposition 8.4 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}$ des vecteurs de E. Si le vecteur $\boldsymbol{v}_{m+1}$ est combinaison linéaire des m autres vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ alors*

$$\operatorname{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}) = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m).$$

Autrement dit, l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs est inchangé lorsqu'on augmente cette famille d'une combinaison linéaire de ses vecteurs.

En particulier, Vect $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{0}_E) =$ Vect $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$.

Démonstration Montrons l'égalité (ensembliste) Vect $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}) =$ Vect $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$. Il est clair que l'inclusion

$$\operatorname{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m) \subset \operatorname{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1})$$

est vérifiée (*cf.* la deuxième remarque du paragraphe 8.2.3, page 323). Inversement, considérons $\boldsymbol{x}$ dans Vect $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1})$ et montrons que $\boldsymbol{x}$ appartient à Vect $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$. Supposer $\boldsymbol{x}$ dans Vect $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1})$ signifie qu'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}) \in \mathbb{K}^{m+1}$ tel que

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \dots + \alpha_m\boldsymbol{v}_m + \alpha_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1}.$$

Or, par hypothèse, $\boldsymbol{v}_{m+1}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$. Il existe donc $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que $\boldsymbol{v}_{m+1} = \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \dots + \beta_m\boldsymbol{v}_m$. On en déduit que

$$\boldsymbol{x} = (\alpha_1 + \alpha_{m+1}\beta_1)\boldsymbol{v}_1 + \dots + (\alpha_m + \alpha_{m+1}\beta_m)\boldsymbol{v}_m$$

avec $\alpha_i + \alpha_{m+1}\beta_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, ce qui montre l'existence de $(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \mathbb{K}^m$ (prendre $\gamma_i = \alpha_i + \alpha_{m+1}\beta_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$) tel que

$$\boldsymbol{x} = \gamma_1\boldsymbol{v}_1 + \dots + \gamma_m\boldsymbol{v}_m,$$

[14] Par exemple, Vect $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) =$ Vect $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) =$ Vect $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3)$.

autrement dit que $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$. On a donc montré l'inclusion

$$\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}) \subset \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)\,.$$

Finalement, on a : $\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}) = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$.

La deuxième propriété est un cas particulier de la première. Elle se déduit du fait que le vecteur nul peut s'écrire comme une combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs (voir page 317). □

On déduit facilement de la proposition précédente le corollaire suivant (la démonstration est aisée. Sa rédaction est laissée en exercice) :

COROLLAIRE 8.1 ✗ *On ne modifie pas l'espace engendré par une famille de vecteurs lorsqu'on multiplie un des vecteurs par un scalaire non nul.*

✗ *On ne modifie pas l'espace engendré par une famille de vecteurs lorsqu'on additionne à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres (et uniquement des autres) vecteurs.*

Exemple Considérons dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 2, 1, 0)$ et $\boldsymbol{v}_3 = (3, 5, 2, -1)$. On a $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$. Le vecteur $\boldsymbol{v}_3$ est ainsi combinaison linéaire des deux vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$. En utilisant la première propriété de la proposition 8.4, on en déduit que

$$\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2).$$

De manière équivalente, on écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) &= \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2)) \quad \text{d'après le corollaire 8.1} \\ &= \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^4}) \quad \text{car } \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 \\ &= \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \quad \text{d'après la proposition 8.4.} \end{aligned}$$

Remarque L'opération qui consiste à additionner à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs doit être manipulée avec précaution. Considérons par exemple deux vecteurs non nuls $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et supposons $\boldsymbol{v}_1 \neq \gamma \boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_2 \neq \gamma \boldsymbol{v}_1$ pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$. On verra plus loin que cela revient à supposer les deux vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ non colinéaires. D'après le corollaire 8.1, on ne modifie pas l'espace engendré par ces deux vecteurs lorsqu'on retranche le premier vecteur au second (premier cas) ou lorsqu'on retranche le second vecteur au premier (deuxième cas). Autrement dit, on peut écrire :

$$\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1), \quad \text{(premier cas)}$$

$$\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2). \quad \text{(deuxième cas)}$$

En revanche, ces deux opérations ne peuvent pas s'effectuer simultanément. En effet, si on retranche simultanément le premier vecteur au second et le second au premier, on obtient le sous-espace $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$ et on a :

$$\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1).$$

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer d'une part (d'après la proposition 8.4) que $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = \mathbb{K}(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$ et d'autre part que l'inclusion de $\mathbb{K}(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$ dans $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ est stricte puisque ni $\boldsymbol{v}_1$, ni $\boldsymbol{v}_2$ n'appartiennent à la droite vectorielle $\mathbb{K}(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$.

Effectuer plusieurs opérations simultanément n'est cependant pas interdit, à la condition que l'on ait pris soin de vérifier qu'elles pouvaient être réalisées les unes après les autres. Le meilleur moyen d'éviter d'aboutir à un résultat faux est de laisser un vecteur inchangé et de n'utiliser que celui-ci dans les autres combinaisons linéaires. Considérons par exemple trois vecteurs non nuls $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. En laissant le premier vecteur $\boldsymbol{v}_1$ inchangé, on a pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + \alpha\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 + \beta\boldsymbol{v}_1).$$

On peut alors réitérer l'opération en laissant cette fois-ci le second vecteur $\boldsymbol{v}_2 + \alpha\boldsymbol{v}_1$ inchangé. On a, pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$:

$$\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + \alpha\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 + \beta\boldsymbol{v}_1) = \mathrm{Vect}\big(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + \alpha\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 + \beta\boldsymbol{v}_1 + \gamma(\boldsymbol{v}_2 + \alpha\boldsymbol{v}_1)\big).$$

Cette manière de procéder sera reprise de façon systématique dans la méthode des zéros échelonnés (voir page 345).

8.2.5 Sous-espace engendré par une famille infinie

Donnons à présent la définition d'un sous-espace engendré par une famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E, indexée par un ensemble infini I. Motivons cette définition comme nous l'avons fait dans le cas d'une famille finie (voir page 322). Considérons deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de E. Supposons que $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ soient des combinaisons linéaires de la famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$. Il existe $J_1 \subset I$, $\mathrm{card}(J_1) < +\infty$ tel que

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i \in J_1} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in J_1$. De même, il existe $J_2 \subset I$, $\mathrm{card}(J_2) < +\infty$, tel que

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i \in J_2} \beta_i \boldsymbol{v}_i$$

avec $\beta_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in J_2$. Définissons l'ensemble J comme l'union des deux ensembles J_1 et J_2 (J est fini car les deux ensembles J_1 et J_2 le sont) et posons $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in J \setminus J_1$ et $\beta_i = 0$ pour tout $i \in J \setminus J_2$. Cela permet d'écrire les vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ comme suit :

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i \in J} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \quad \text{et} \quad \boldsymbol{y} = \sum_{i \in J} \beta_i \boldsymbol{v}_i.$$

On obtient alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$:

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = \sum_{i \in J} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i)\boldsymbol{v}_i$$

avec $\alpha\alpha_i+\beta\beta_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in J$. Le vecteur $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$ s'écrit donc bien comme une combinaison linéaire de la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$. L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ (qui est non vide puisqu'il contient le vecteur nul) possède ainsi une structure de sous-espace vectoriel de l'espace E. Cela donne un sens à la définition suivante.

DÉFINITION 8.7 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ une famille infinie de vecteurs de E. On appelle sous-espace engendré par $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ le sous-espace de E constitué des combinaisons linéaires de $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$. Autrement dit,*

$$\mathrm{Vect}\Big((\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}\Big) \overset{\text{déf.}}{=} \Big\{\sum_{i\in J}\alpha_i\boldsymbol{v}_i \;\Big|\; J \subset I,\ \mathrm{card}(J) < +\infty,\ \alpha_i \in \mathbb{K}, \forall i \in J\Big\}.$$

La famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ est dite génératrice de $\mathrm{Vect}\left((\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}\right)$.

Remarque Considérons un ensemble A constitué de vecteurs de E, dépourvu *a priori* de toute structure algébrique.[15] Il est possible de construire à partir de A un sous-espace vectoriel de E contenant A. Il suffit pour cela de considérer tous les sous-espaces vectoriels de E contenant le sous-ensemble A. Remarquons qu'il en existe au moins un (à savoir l'espace E lui-même) et que l'intersection de tous les sous-espaces de E contenant A constitue un sous-espace de E (d'après la proposition 8.2). Par conséquent, on définit le *sous-espace engendré par l'ensemble A* et on note $\mathrm{Vect}\,(A)$, l'intersection de tous les sous-espaces de E contenant A. Le sous-espace $\mathrm{Vect}\,(A)$ est ainsi défini comme le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces de E contenant A. En particulier,

$$\mathrm{Vect}\,(\emptyset) = \{\mathbf{0}_E\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Vect}\,(E) = E.$$

On vérifie que, A_1 et A_2 désignant deux sous-ensembles d'un $\mathbb{K}$-espace E, si $A_1 \subset A_2$ alors $\mathrm{Vect}\,(A_1) \subset \mathrm{Vect}\,(A_2)$. Bien sûr, si A est un sous-espace de E alors le plus petit sous-espace de E contenant A est le sous-espace A lui-même et $\mathrm{Vect}(A) = A$.

8.3 Indépendance linéaire

8.3.1 Famille liée et famille libre

Commençons par donner la définition d'une famille liée et celle d'une famille libre dans le cas où la famille est finie. Le cas d'une famille infinie sera traité dans un deuxième temps.

(15) En particulier, l'ensemble A n'est *a priori* pas un sous-espace vectoriel de E.

DÉFINITION 8.8 *Soit $\mathcal{F} = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

✗ *La famille $\mathcal{F}$ est dite liée si l'on peut trouver des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ appartenant à $\mathbb{K}$, dont un au moins est non nul*[16] *tels que*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p = \mathbf{0}_E.$$

On dit également que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sont linéairement dépendants.

✗ *Si la famille n'est pas liée, on dit qu'elle est libre (ou que les vecteurs sont linéairement indépendants).*

En d'autres termes, on dit qu'une famille finie $\mathcal{F} = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est libre si la seule possibilité pour que la combinaison linéaire $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p$ soit nulle, est que les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ soient tous nuls.

En pratique, pour montrer que la famille $\mathcal{F} = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est libre, on montre que la relation (appelée *relation de liaison*)

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p = \mathbf{0}_E$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ appartiennent à $\mathbb{K}$, entraîne que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

Exemples

1. Dans $\mathbb{C}^4$, les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 2\mathrm{i}, 6)$ et $v_3 = (1, \mathrm{i}, 0, 1 + 3\mathrm{i})$ où $\mathrm{i}^2 = -1$, sont liés puisque

$$v_1 + \frac{\mathrm{i}}{2} v_2 - v_3 = \mathbf{0}_{\mathbb{C}^4}.$$

2. Dans $\mathbb{R}^4$, les trois vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 2, 0, 0)$ et $v_3 = (0, 0, 0, 0)$ sont liés puisque $0v_1 + 0v_2 + v_3 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}$.

3. Soit n un entier non nul. Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $\mathcal{F}_n = \left(1_{\mathbb{K}[X]}, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ est libre puisque la relation

$$\alpha_0 1_{\mathbb{K}[X]} + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \ldots + \alpha_n X^n = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ appartiennent à $\mathbb{K}$, entraîne que $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

4. Dans $\mathbb{K}^4$, la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, 0)$ et $v_3 = (0, 0, 1, 0)$ est libre puisque la relation

$$\alpha_1(1, 0, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, 0) + \alpha_3(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ appartiennent à $\mathbb{K}$, s'écrit :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0) = (0, 0, 0, 0),$$

d'où (par identification) : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

---

[16] On dit *non tous nuls* et on écrit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Vecteurs faisant apparaître un système échelonné de zéros

Considérons les quatre vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ de $\mathbb{K}^5$ que nous plaçons en lignes superposées comme suit :

$$\begin{array}{rcll}
\boldsymbol{a} & = & (a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5) & \text{avec } a_1 \neq 0 \\
\boldsymbol{b} & = & (\ 0,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\ ) & \text{avec } b_2 \neq 0 \\
\boldsymbol{c} & = & (\ 0,\ \ 0,\ c_3,\ c_4,\ c_5\ ) & \text{avec } c_3 \neq 0 \\
\boldsymbol{d} & = & (\ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ d_4,\ d_5\ ) & \text{avec } d_4 \neq 0
\end{array}$$

où seuls les scalaires a_1, b_2, c_3 et d_4 sont supposés non nuls, les autres scalaires pouvant être nuls ou non nuls. La relation de liaison (c'est une égalité dans $\mathbb{K}^5$)

$$\alpha_1 \boldsymbol{a} + \alpha_2 \boldsymbol{b} + \alpha_3 \boldsymbol{c} + \alpha_4 \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{K}^5}$$

où α_1, α_2, α_3, α_4 appartiennent à $\mathbb{K}$, s'écrit sous la forme d'un système de 5 équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\alpha_1 a_1 & = & 0 \\
\alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 & = & 0 \\
\alpha_1 a_3 + \alpha_2 b_3 + \alpha_3 c_3 & = & 0 \\
\alpha_1 a_4 + \alpha_2 b_4 + \alpha_3 c_4 + \alpha_4 d_4 & = & 0 \\
\alpha_1 a_5 + \alpha_2 b_5 + \alpha_3 c_5 + \alpha_4 d_5 & = & 0
\end{array}\right. .$$

On déduit de la première équation que $\alpha_1 = 0$ puisque $a_1 \neq 0$, puis, fort de ce résultat, on déduit de la deuxième équation que $\alpha_2 = 0$ puisque $b_2 \neq 0$, et ainsi de suite. Finalement, on obtient (en cascade) que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

La famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ est donc libre.[17]

Plus généralement, considérons p vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ de $\mathbb{K}^n$ avec $p \leqslant n$ et plaçons ces vecteurs en lignes superposées. On obtient ainsi un tableau de p lignes et n colonnes. Si cette disposition fait apparaître un système échelonné de zéros, c'est-à-dire un triangle formé

- de $p-1$ zéros dans la première colonne,
- de $p-2$ zéros dans la deuxième colonne,
- ...
- de 1 zéro dans la $(p-1)$-ième colonne,

et si les éléments appartenant à la diagonale placée directement au-dessus de ce triangle de zéros sont tous non nuls alors les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_p$ forment une famille libre dans $\mathbb{K}^n$. On résume cela dans la proposition suivante.

(17) Remarquons que la dernière équation n'a pas été utilisée.

Proposition 8.5 *Soient $v_1, v_2, \dots, v_p$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ tels que*

$$\begin{cases} v_1 &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, & a_{1,p-1}, & a_{1p}, & \dots, & a_{1n} \;) \\ v_2 &= (\;0, \; a_{22}, a_{23}, \dots, & a_{2,p-1}, & a_{2p}, & \dots, & a_{2n} \;) \\ v_3 &= (\;0, \; 0, \; a_{33}, \dots, & a_{3,p-1}, & a_{3p}, & \dots, & a_{3n} \;) \\ & \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{p-1} &= (\;0, \; 0, \; \dots, \; 0, & a_{p-1,p-1}, & a_{p-1,p}, & \dots, & a_{p-1,n}) \\ v_p &= (\;0, \; 0, \; \dots, \; 0, & 0, & a_{pp}, & \dots, & a_{pn} \;) \end{cases}$$

Si $a_{ii} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2 \dots, p\}$ alors ces vecteurs forment une famille libre dans $\mathbb{K}^n$.

Les définitions de familles libres et liées données ci-avant pour des familles finies se généralisent au cas de *familles infinies.*

Définition 8.9 ✗ *Une famille infinie est libre si toutes ses sous-familles finies sont libres.*

✗ *Une famille infinie est liée si elle n'est pas libre. Autrement dit, une famille infinie est liée s'il existe une sous-famille finie qui est liée.*

Exemple Soient n un entier naturel et $\mathcal{F}_\infty \overset{déf.}{=} \big(1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\big)$. On se convainc facilement que tout famille finie extraite de $\mathcal{F}_\infty$ est nécessairement libre. La famille infinie $\mathcal{F}_\infty$ est donc libre dans $\mathbb{K}[X]$. En revanche la famille infinie $\big(1, X, 1 - X^2, X^2, \dots, X^n, \dots\big)$ possède une sous-famille finie et liée (prendre par exemple la sous-famille finie $\big(1, 1 - X^2, X^2\big)$ pour laquelle on peut écrire la relation : $-1 + (1 - X^2) + X^2 = 0$). Elle est donc liée.

La proposition suivante donne une caractérisation d'une famille liée.

Proposition 8.6 *Une famille est liée si et seulement si, un de ses éléments peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres éléments de la famille. Ainsi, la famille finie $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est liée, si et seulement si, il existe $\ell \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que*

$$v_\ell = \sum_{i=1, i \neq \ell}^{p} \beta_i v_i$$

avec β_i appartenant à $\mathbb{K}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \{\ell\}$.

Démonstration Effectuons la démonstration pour une famille finie. Le cas d'une famille infinie se démontre suivant le même modèle. La rédaction est laissée en exercice. S'il existe un entier ℓ appartenant à $\{1, 2, \dots, p\}$ tel que

$$v_\ell = \sum_{i=1, i \neq \ell}^{p} \beta_i v_i$$

alors il est clair que la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est liée puisque l'on peut trouver p scalaires α_1, α_2, ..., α_p, dont un au moins est non nul, tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}_E.$$

Il suffit pour cela de prendre $\alpha_\ell = 1$ et $\alpha_i = -\beta_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ tel que $i \neq \ell$, et parmi les scalaires α_1, α_2, ..., α_p, il en existe bien un, à savoir $\alpha_\ell = 1$, qui est non nul. Réciproquement, supposons que la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ soit liée. Il existe p scalaires α_1, α_2, ..., α_p, dont un au moins est non nul (notons-le α_ℓ avec $\ell \in \{1, 2, \ldots, p\}$) tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}_E.$$

Il convient alors d'isoler le vecteur $\boldsymbol{v}_\ell$ comme suit ($\alpha_\ell \neq 0$) :

$$\boldsymbol{v}_\ell = -\sum_{i=1, i\neq\ell}^{p} \frac{\alpha_i}{\alpha_\ell} \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1, i\neq\ell}^{p} \beta_i \boldsymbol{v}_i$$

avec $\beta_i = -\alpha_i/\alpha_\ell$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\} \setminus \{\ell\}$. □

Exemple Dans $\mathbb{R}^4$ les trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 2, 1, 0)$ et $\boldsymbol{v}_3 = (3, 5, 2, -1)$ sont liés puisque l'un des vecteurs (à savoir le vecteur $\boldsymbol{v}_3$) s'exprime comme une combinaison linéaire des deux autres vecteurs. En effet,

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2.$$

La méthode qui nous a permis de trouver cette relation sera explicitée ultérieurement (voir la méthode dite « des zéros échelonnés », page 345).

Remarques

1. Pour qu'une famille à un seul élément $\boldsymbol{v} \in E$ soit liée, il faut et il suffit que $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E$. Une famille réduite à un seul élément non nul est libre.

2. Toute famille contenant le vecteur $\mathbf{0}_E$ est liée.

3. Pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$ de E, la famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ est liée. Il en résulte que les vecteurs d'une famille libre sont nécessairement tous distincts.

4. Le fait qu'une famille de vecteurs soit libre ou liée est inchangé si l'on réordonne ses éléments. Autrement dit, si $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille libre et si σ désigne une permutation de $\{1, 2, \ldots, p\}$ alors la nouvelle famille $\mathcal{F}_\sigma = (\boldsymbol{v}_{\sigma(i)})_{1\leqslant i\leqslant p}$ est encore libre. Par exemple, si la famille $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ est libre alors $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ est encore libre. Cette remarque donne un sens à la définition d'une *partie libre* comme étant une famille libre dans E puisque l'ordre des vecteurs, propre à la notion de famille, n'influe pas sur le fait qu'une famille soit libre ou liée.

PROPOSITION 8.7 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille d'éléments de E.*

✗ *Si $\mathcal{F}$ est libre alors toute sous-famille de $\mathcal{F}$ est libre.*

✗ *Si $\mathcal{F}$ est liée alors toute sur-famille de $\mathcal{F}$ est liée.*

Démonstration Montrons la deuxième propriété dans le cas d'une famille finie. Soit $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille liée. Il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, tel que

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{v}_p = \mathbf{0}_E. \tag{2}$$

Étant donné un vecteur $\boldsymbol{v}_{p+1}$ de E, on considère la famille $\mathcal{F}' = (\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p+1}$. C'est une sur-famille de $\mathcal{F}$. Puisque $0\boldsymbol{v}_{p+1} = \mathbf{0}_E$, on déduit de (2) que

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{v}_p + 0\boldsymbol{v}_{p+1} = \mathbf{0}_E$$

avec $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, 0) \in \mathbb{K}^{p+1}$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, 0) \neq (0, 0, \ldots, 0, 0)$ puisque $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, ce qui montre que la sur-famille $\mathcal{F}'$ est liée. Le cas d'une famille infinie est admis. La première propriété se démontre sur le même modèle. □

EXERCICE 2 Soient $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement croissante.
1 - Montrer que la famille infinie $\mathcal{F}_\infty = (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec

$$f_k : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(\alpha_k x) \in \mathbb{R}$$

est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2 - Montrer que $\mathcal{L}_\infty = \Big(x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(\alpha_k x) \in \mathbb{R}\Big)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

DÉFINITION 8.10 *Lorsque deux vecteurs (respectivement trois vecteurs) non nuls d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel sont liés, on dit qu'ils sont colinéaires (resp. coplanaires).*

Lien entre cardinal d'une famille génératrice et indépendance linéaire

Soient $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ trois vecteurs quelconques appartenant à un $\mathbb{K}$-espace E et $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ et $\boldsymbol{x}_4$ quatre vecteurs qui s'écrivent tous comme des combinaisons linéaires des trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$. Par exemple,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{x}_1 & = & 3\boldsymbol{v}_1 & + & \boldsymbol{v}_2 & + & \boldsymbol{v}_3 \\
\boldsymbol{x}_2 & = & \boldsymbol{v}_1 & - & 2\boldsymbol{v}_2 & + & \boldsymbol{v}_3 \\
\boldsymbol{x}_3 & = & -\boldsymbol{v}_1 & - & 2\boldsymbol{v}_2 & + & \boldsymbol{v}_3 \\
\boldsymbol{x}_4 & = & \boldsymbol{v}_1 & - & \boldsymbol{v}_2 & + & \boldsymbol{v}_3
\end{array}\right.$$

Nous allons vérifier que ces quatre vecteurs forment nécessairement une famille liée. Pour obtenir la relation liant les quatre vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$, nous procédons en trois étapes.

Étape 1 : on isole le vecteur $\boldsymbol{v}_3$ à partir de la quatrième relation, c'est-à-dire $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, et on l'injecte dans les trois autres. On obtient alors les trois nouvelles relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcrcrcr} \boldsymbol{x}_1 & = & 2\boldsymbol{v}_1 & + & 2\boldsymbol{v}_2 & + & \boldsymbol{x}_4 \\ \boldsymbol{x}_2 & = & & - & \boldsymbol{v}_2 & + & \boldsymbol{x}_4 \\ \boldsymbol{x}_3 & = & -2\boldsymbol{v}_1 & - & \boldsymbol{v}_2 & + & \boldsymbol{x}_4 \end{array}\right. .$$

Étape 2 : on isole maintenant le vecteur $\boldsymbol{v}_2$ à partir de la troisième et dernière relation, c'est-à-dire $\boldsymbol{v}_2 = -2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4$, on l'injecte dans les deux autres et on obtient les deux nouvelles relations :

$$\left\{\begin{array}{lcrcrcr} \boldsymbol{x}_1 & = & -2\boldsymbol{v}_1 & - & 2\boldsymbol{x}_3 & + & 3\boldsymbol{x}_4 \\ \boldsymbol{x}_2 & = & 2\boldsymbol{v}_1 & + & \boldsymbol{x}_3 & & \end{array}\right.$$

Étape 3 : enfin, on isole le vecteur $\boldsymbol{v}_1$ à partir de la deuxième des deux dernières relations, c'est-à-dire $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_3$ et on l'injecte dans la première. Finalement, on obtient la relation de liaison recherchée :

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 - 3\boldsymbol{x}_4 = \mathbf{0}_E$$

que l'on peut vérifier directement à partir des relations donnant les vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$ en fonction des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

On vient donc de vérifier que les quatre vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ et $\boldsymbol{x}_4$, appartenant tous au sous-espace $\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3)$, forment une famille liée. Ce résultat se généralise au cas de m vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ et en prenant au moins $m+1$ vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{x}_m$, $\boldsymbol{x}_{m+1}$ s'écrivant tous comme des combinaisons linéaires des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$.

PROPOSITION 8.8 *Soient E un espace vectoriel et $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ des vecteurs de E. Toute famille constituée d'au moins $m+1$ vecteurs appartenant à $\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ est liée.*

Démonstration Comme dans l'exemple précédent, la démonstration est basée sur un procédé d'élimination. Elle s'effectue par récurrence sur l'entier naturel m. On l'admet. □

On déduit de la proposition 8.8 le corollaire suivant.

COROLLAIRE 8.2 *Si un espace vectoriel E est engendré par m vecteurs alors toute famille constituée d'au moins $m+1$ vecteurs de E est liée.*

8.3.2 Base algébrique d'un espace vectoriel

Commençons par quelques remarques. Soit $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille génératrice de l'espace E. D'après ce qui est mentionné au paragraphe 8.2.3, dire que la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est génératrice de E signifie que

$$\forall \boldsymbol{x} \in E \quad \exists(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad \boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n.$$

Pour tout vecteur de l'espace E, on est donc assuré de l'existence d'une décomposition de ce vecteur par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$, mais, *a priori*, rien ne nous assure l'unicité d'une telle décomposition.

Cherchons à présent à quelle condition l'unicité est assurée. Supposons qu'à un vecteur $\boldsymbol{x}$ de E correspondent deux ensembles de scalaires, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ et $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, tels que

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \beta_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \beta_n \boldsymbol{v}_n,$$

c'est-à-dire tels que

$$(\alpha_1 - \beta_1)\boldsymbol{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\boldsymbol{v}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_E.$$

Si $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ forment une famille libre dans E alors on en déduit :

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 - \beta_2 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_n - \beta_n = 0,$$

c'est-à-dire : $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ..., $\alpha_n = \beta_n$. Le fait que la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ soit libre nous assure ainsi l'unicité de la décomposition. Réciproquement, de l'égalité

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_E,$$

on déduit, par unicité de la décomposition du vecteur nul par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ...,$\boldsymbol{v}_n$, que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Une famille à la fois génératrice de E et libre est appelée une base algébrique de E.

DÉFINITION 8.11 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une famille d'éléments de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une base* algébrique *(ou plus simplement une* base*) de E si $\mathcal{B}$ est à la fois libre et génératrice de E.*

On a le résultat suivant.

PROPOSITION 8.9 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

✗ *La famille finie $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si et seulement si,*

$$\forall x \in E \quad \exists!\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

✗ *La famille infinie $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ où I est un ensemble infini, est une base de E si et seulement si,*

$$\forall x \in E \quad \exists J \subset I \quad \mathrm{card}(J) < +\infty \quad \exists!\,(\alpha_i)_{i \in J} \subset \mathbb{K}^{\mathrm{card}(J)} \quad x = \sum_{i \in J} \alpha_i e_i.$$

✗ *Les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (cas d'une base finie) ou $(\alpha_i)_{i \in J}$ (cas d'une base infinie) de $\mathbb{K}$ sont appelés coordonnées de x par rapport à la base $\mathcal{B}$.*

Démonstration Considérons dans un premier temps le cas d'une famille finie $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. D'une part, l'existence de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ pour tout vecteur x de E est équivalente au fait que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice de E. D'autre part, l'unicité de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ est équivalente au fait que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre dans E. Le cas d'une famille infinie $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ s'obtient en suivant un raisonnement analogue (la rédaction est laissée en exercice). □

Comme le montrent les exemples suivants, une base algébrique peut être finie ou infinie. En revanche, les coordonnées d'un vecteur par rapport à une base algébrique sont toujours en nombre fini, même si la base considérée est infinie.

Exemples

1. Considérons dans $\mathbb{K}^2$ les vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Ces deux vecteurs forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^2$ puisque tout vecteur (x_1, x_2) appartenant à $\mathbb{K}^2$ se décompose comme suit :

$$(x_1, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

De plus, les deux vecteurs e_1 et e_2 forment un système de zéros échelonnés. Ils constituent ainsi une famille libre. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est donc une base de $\mathbb{K}^2$. Plus généralement, tout vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'espace produit $\mathbb{K}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \end{aligned}$$

où on a noté $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Cette décomposition étant unique, la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. On l'appelle *base canonique de* $\mathbb{K}^n$. Les scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ sont donc les coordonnées du vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ par rapport à la base canonique.

2. Tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}$, s'écrit sous la forme suivante :

$$P = a_0 1_{\mathbb{K}[X]} + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$$

et cette décomposition est unique. Par conséquent, la famille finie

$$\mathcal{B}_n = \left(X^i\right)_{0 \leqslant i \leqslant n} = \left(1_{\mathbb{K}[X]}, X, X^2, \ldots, X^n\right)$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On l'appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Les éléments a_0, a_1, a_2, ..., a_n de $\mathbb{K}$ sont donc les coordonnées de P par rapport à la base canonique. Remarquons que tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit aussi sous la forme[18]

$$P = \widetilde{P}(a) 1_{\mathbb{K}[X]} + \frac{\widetilde{P'}(a)}{1!}(X-a) + \frac{\widetilde{P''}(a)}{2!}(X-a)^2 + \ldots + \frac{\widetilde{P^{(n)}}(a)}{n!}(X-a)^n$$

où, pour tout entier k compris entre 0 et n, $\widetilde{P^{(k)}}$ désigne la fonction polynomiale associée au polynôme $P^{(k)}$, et où a désigne un élément quelconque de $\mathbb{K}$, et cette décomposition est unique (pour tout a fixé). Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille finie

$$\mathcal{B}_n^{(a)} = \left((X-a)^i\right)_{0 \leqslant i \leqslant n} = \left(1_{\mathbb{K}[X]}, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\right)$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Les éléments $\widetilde{P}(a)$, $\widetilde{P'}(a)/1!$, $\widetilde{P''}(a)/2!$, ..., $\widetilde{P^{(n)}}(a)/n!$ de $\mathbb{K}$ sont les coordonnées de P par rapport à $\mathcal{B}_n^{(a)}$.

3. La famille infinie $\mathcal{B}_\infty = \left(X^i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. On l'appelle base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

Il ne faut pas oublier qu'une base est avant tout une famille. L'ordre des éléments y a donc une importance puisque changer l'ordre des éléments d'une base revient à changer de base. Par exemple, si $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace E alors $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c})$ et $\mathcal{B}'' = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ sont aussi des bases de E. Les trois bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont distintes deux à deux.

EXERCICE 3 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on considère les trois vecteurs $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1, 2)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (0, 0, -1)$ et le vecteur $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)$.
1 - Quelles sont les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
2 - Montrer que les vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
3 - Déterminer les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans cette nouvelle base.

[18] C'est la formule de Taylor pour les polynômes (voir le théorème 6.3, page 240).

Tout espace non réduit au vecteur nul possède-t-il une base algébrique ?

Pour répondre à cette question, commençons par énoncer le résultat suivant.

LEMME 8.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $\mathcal{G} = (\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E et $\mathcal{L} = (\boldsymbol{v}_i)_{i \in I'}$ est une famille libre dans E avec $I' \subset I$ alors il existe (au moins) I'' tel que $I' \subset I'' \subset I$ et tel que $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_i)_{i \in I''}$ est une base algébrique de E.*

Un premier corollaire de ce résultat est que tout espace vectoriel non réduit au vecteur nul possède (au moins) une base algébrique. En effet, puisque l'espace E n'est pas réduit à $\mathbf{0}_E$, il possède un vecteur $\boldsymbol{x}$ autre que le vecteur nul. Il suffit alors d'appliquer le lemme 8.1 en prenant la famille libre $\mathcal{L}$ constituée uniquement du vecteur $\boldsymbol{x}$ et la famille génératrice $\mathcal{G}$ constituée de tous les vecteurs appartenant à E.

Un commentaire s'impose. D'un point de vue théorique, ce résultat est intéressant puisqu'il nous assure l'existence d'(au moins) une base algébrique pour tout espace vectoriel non réduit au vecteur nul. En revanche, sa démonstration dans le cas général (I infini), basée sur une version équivalente de l'axiome du choix (on l'admet), ne nous donne aucune stratégie de calcul pour trouver les vecteurs de cette base. Elle est alors qualifiée de non constructive et, en ce sens, le résultat d'existence dans le cas où I est infini est décevant d'un point de vue pratique.

Dans le cas particulier où l'ensemble I est fini, la démonstration est constructive car basée sur un algorithme itératif fini. Donnons-la. Considérons un ensemble fini I, une famille génératrice $\mathcal{G} = (\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ et une famille libre $\mathcal{L} = (\boldsymbol{v}_i)_{i \in I'}$ avec $I' \subset I$. Le but est de montrer qu'il existe un ensemble I'' tel que $I' \subset I'' \subset I$ et $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_i)_{i \in I''}$ base de E. Remarquons que $\mathcal{G}$ constitue une sur-famille finie de $\mathcal{L}$. La famille $\mathcal{L}$ est donc elle-même finie.

Commençons par initialiser l'algorithme comme suit. Pour cela, introduisons la famille $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$. La famille $\mathcal{L}_0$ est libre. Est-elle génératrice de l'espace E ? Si oui alors la base $\mathcal{B} = \mathcal{L}_0$ convient. Intéressons-nous au cas où $\mathcal{L}_0$ n'est pas génératrice de E et procédons comme suit :

- *Étape* 1 : On construit à partir de $\mathcal{L}_0$ et d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ pris dans $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_0$, la sur-famille $\mathcal{L}_1 = (\mathcal{L}_0, \boldsymbol{v})$. Trouver ce vecteur $\boldsymbol{v}$ est toujours possible. En effet, supposer que tous les vecteurs de $\mathcal{G}$ sont combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_0$ signifierait que tous les vecteurs de E, qui sont combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$ (puisque $\mathcal{G}$ est génératrice de E), sont combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_0$ et contredit le fait que la famille $\mathcal{L}_0$ n'est pas génératrice de E. Que pouvons-nous dire de la sur-famille $\mathcal{L}_1$? Ainsi construite, elle est nécessairement libre (puisque le vecteur $\boldsymbol{v}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_0$) mais est-elle génératrice de l'espace E ? Si oui alors la base $\mathcal{B} = \mathcal{L}_1$ convient. Si non, on poursuit la démonstration.
- *Étape* 2 : On construit alors la sur-famille $\mathcal{L}_2 = (\mathcal{L}_1, \boldsymbol{v}')$ où $\boldsymbol{v}'$ désigne un vecteur extrait de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$.

À l'évidence, la sur-famille $\mathcal{L}_2$ est libre. Si, de plus, elle est génératrice de E alors la démonstration est terminée (il suffit de prendre $\mathcal{B} = \mathcal{L}_2$). Si elle ne l'est pas alors il convient de réitéter le processus et passer à l'étape 3.

On comprend donc l'agorithme itératif sur lequel est basée la démonstration : à la k-ième étape, on construit une sur-famille $\mathcal{L}_k$ à partir de la famille $\mathcal{L}_{k-1}$ obtenue à l'étape $k-1$ et d'un vecteur pris dans $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_{k-1}$. L'ensemble I étant fini, cet algorithme s'effectue nécessairement en un nombre fini K d'étapes. Ainsi, à l'issue de la K-ième étape, la sur-famille $\mathcal{L}_K$ est nécessairement libre et génératrice de l'espace E. Il suffit alors de prendre $\mathcal{B} = \mathcal{L}_K$.

Un second corollaire du lemme 8.1 est le théorème suivant, dit de la *base incomplète*, dont la justification est immédiate en considérant la famille $\mathcal{G}$ constituée de tous les vecteurs de E dans le lemme 8.1.

Théorème 8.1 (Théorème de la base incomplète)
Si $\mathcal{L} = (v_i)_{i\in I'}$ est une famille libre dans un espace vectoriel E alors il existe au moins une base algébrique $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I''}$ de E telle que $I' \subset I''$.

8.4 Espace vectoriel de dimension finie

8.4.1 Définition d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 8.12 *On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie s'il possède une famille finie génératrice de E. Dans le cas contraire, on dit que l'espace est de dimension infinie.*

Exemples

1. Il est clair que tout espace vectoriel possédant une base finie (à savoir une famille finie libre et génératrice de E) est nécessairement de dimension finie. Par exemple, $\mathbb{K}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$ sont des $\mathbb{K}$-espaces de dimension finie.

2. Considérons l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il n'existe pas de famille de $\mathbb{K}[X]$ qui soit à la fois finie et génératrice de $\mathbb{K}[X]$. En effet, si $\mathcal{F}$ désigne une famille finie de $\mathbb{K}[X]$, on pourra toujours exhiber un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ qui ne s'écrit pas comme une combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ (prendre par exemple $P = X^{N+1}$ où N désigne le plus haut degré des polynômes appartenant à $\mathcal{F}$). Par conséquent, $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace de dimension infinie.

3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $v_1, v_2, \ldots, v_m$ des vecteurs de E avec $m \in \mathbb{N}^*$. L'espace E n'est pas nécessairement de dimension finie. En revanche, le sous-espace $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ est, lui, par construction, de dimension finie puisque les vecteurs v_1, v_2, $\ldots$, v_m, appartenant tous à F, forment une famille finie génératrice de F.

La proposition suivante exprime que si E est de dimension finie alors de toute famille génératrice de E, on peut extraire une sous-famille qui est d'une part libre (dans E), et d'autre part encore génératrice de E. Elle exprime aussi que toutes les bases d'un même $\mathbb{K}$-espace ont même cardinal. Cela nous sera utile par la suite pour définir la dimension d'un espace vectoriel (voir le § 8.4.2).

PROPOSITION 8.10 *Un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie non réduit au vecteur nul possède au moins une base finie. Toutes les bases d'un même espace de dimension finie ont même cardinal.*

Démonstration $\trianglerighteq$ Commençons par montrer qu'un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie, non réduit au vecteur nul, possède au moins une base finie. Supposer E de dimension finie signifie qu'il possède une famille finie génératrice de E. Notons-la $\mathcal{G}_m = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m)$. Cette famille n'est pas nécessairement libre et ne définit donc pas obligatoirement une base de E. Il faut par conséquent considérer les deux cas suivants. Si la famille $\mathcal{G}_m$ est libre alors le résultat est démontré. En revanche, si la famille $\mathcal{G}_m$ est liée alors cela signifie qu'il existe un vecteur de $\mathcal{G}_m$ qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{G}_m$. Supposons (sans perte de généralité) que ce vecteur soit $\boldsymbol{v}_m$. D'après la proposition 8.4, la sous-famille $\mathcal{G}_{m-1} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_{m-1})$ est encore génératrice de E. On répète alors le même raisonnement sur la famille $\mathcal{G}_{m-1}$ et ainsi de suite jusqu'à l'obtention à un rang $M \leqslant m$ d'une famille $\mathcal{G}_M$ libre et génératrice de E.

$\trianglerighteq$ Montrons maintenant que toutes les bases d'un même espace E de dimension finie ont même cardinal. Considérons pour cela $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ et $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_p)$ deux bases distinctes de E où on a noté $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = n$ et $\mathrm{card}(\mathcal{C}) = p$.

- On ne peut pas avoir $p > n$. En effet, si on avait $p > n$, alors les vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_p$ (ceux de $\mathcal{C}$) constitueraient une famille de p vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs avec n strictement inférieur à p. D'après le corollaire 8.2, ils seraient alors nécessairement liés, ce qui est impossible puisque $\mathcal{C}$ est libre (c'est une base de E).
- De même, on ne peut pas avoir $n > p$. Pour s'en convaincre, il suffit d'utiliser le même raisonnement mais en inversant les rôles joués par les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Ainsi, $n > p$ signifie que les vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ (ceux de $\mathcal{B}$) forment une famille de n vecteurs dans un espace engendré par p vecteurs avec p strictement inférieur à n. Ils sont alors nécessairement liés (cela toujours d'après le corollaire 8.2). C'est bien sûr impossible puisque la famille $\mathcal{B}$ est libre (c'est une base de E).

Par conséquent, la seule possibilité est que l'on ait $n = p$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \mathrm{card}(\mathcal{C}).$$

La démonstration est terminée. $\square$

8.4.2 Dimension d'un espace vectoriel

Puisque toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal, la définition suivante a un sens.

DÉFINITION 8.13 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ non réduit au vecteur nul. On appelle dimension de E et on note* $\dim_{\mathbb{K}}(E)$, *le cardinal d'une base de E, c'est-à-dire :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) \stackrel{déf.}{=} \operatorname{card}(\mathcal{B})$$

où $\mathcal{B}$ désigne une base quelconque de E. On convient que $\dim_{\mathbb{K}}(\{\mathbf{0}_E\}) \stackrel{déf.}{=} 0$.

On rappelle que le cardinal d'une famille finie $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E, indexée par un ensemble (fini) I, est défini comme le cardinal de l'ensemble I, c'est-à-dire : $\operatorname{card}((\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}) = \operatorname{card}(I)$.

Exemples

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille finie $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ avec $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Cette famille est constituée de n éléments. Par conséquent,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = \operatorname{card}((\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)) = n.$$

En particulier, lorsque $n = 1$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$. On a donc : $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = 1$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = \mathcal{R}\mathrm{e}(z) \times 1 + \mathcal{I}\mathrm{m}(z) \times \mathrm{i}$ avec $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(z) \in \mathbb{R}$. Cette décomposition est unique. La famille $(1, \mathrm{i})$, constituée de 2 éléments, est donc une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \operatorname{card}((1, \mathrm{i})) = 2$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille finie $\left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$, constituée de $n+1$ éléments, est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Par conséquent,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = \operatorname{card}(\left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)) = n + 1.$$

Lien entre cardinal d'une famille génératrice ou libre et celui d'une base

Dans un espace de dimension finie, le cardinal de toute famille génératrice (respectivement libre) est minoré (respectivement majoré) par celui d'une base. Cela se vérifie très simplement de la manière suivante.

⊵ D'après la proposition 8.10, on sait que de toute famille génératrice $\mathcal{G}$ d'un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie n, on peut extraire une base $\mathcal{B}$ de E et on a $\operatorname{card}(\mathcal{G}) \geqslant \operatorname{card}(\mathcal{B})$. Toujours d'après cette proposition, toutes les bases de E ont même cardinal. On a donc $n = \operatorname{card}(\mathcal{B})$ et on en déduit :

$$\operatorname{card}(\mathcal{G}) \geqslant n.$$

En particulier, lorsque card $(\mathcal{G}) = n$, la famille $\mathcal{G}$ est elle-même une base de E.

$\trianglerighteq$ Par ailleurs, d'après le corollaire 8.2, on sait que toute famille constituée d'au moins $n+1$ vecteurs dans un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie n est nécessairement liée. Par contraposition, on peut écrire qu'une famille libre $\mathcal{L}$ d'un espace E de dimension finie n est constituée d'au plus n vecteurs. On a donc :

$$\operatorname{card}(\mathcal{L}) \leqslant n.$$

En particulier, lorsque card $(\mathcal{L}) = n$, la famille $\mathcal{L}$ est elle-même une base de E. En effet, si $\mathcal{L}$ n'était pas une base de E alors, d'après le théorème 8.1 de la base incomplète, on pourrait compléter cette famille en une base dont le cardinal serait strictement supérieur à n, ce qui est bien sûr impossible puisque toutes les bases ont le même nombre d'éléments, ici n.

On résume ces résultats dans la proposition suivante.

Proposition 8.11 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie n.*

✗ *Toute famille $\mathcal{G}$ génératrice de E vérifie* card $(\mathcal{G}) \geqslant n$. *En particulier, toute famille génératrice constituée de n vecteurs est une base de E.*

✗ *Toute famille $\mathcal{L}$ libre dans E vérifie nécessairement :* card $(\mathcal{L}) \leqslant n$. *En particulier, toute famille libre constituée de n vecteurs est une base de E.*

Remarque Pour toute famille $\mathcal{L}$ libre et finie d'un espace E de dimension finie non réduit au vecteur nul, il existe une base finie $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$. C'est le thèorème 8.1 de la base incomplète. Dans le cas particulier où E est de dimension n, cela signifie que si $\mathcal{L} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$ est une famille libre avec $p < n$, alors on peut trouver $n - p$ vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-p}$ de E tels que la famille $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_{n-p})$ soit une base de E.

Intéressons-nous maintenant à la dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie.

Proposition 8.12 *Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est lui-même de dimension finie et*

$$\dim_{\mathbb{K}}(F) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

En particulier, si $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ *alors* $F = E$.

Démonstration $\trianglerighteq$ Soit $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. Supposons $F \neq \{\mathbf{0}_E\}$ (le cas $F = \{\mathbf{0}_E\}$ est trivial). Il est clair que toute famille $\mathcal{L}$ libre dans F est nécessairement libre dans E (puisque F est un sous-espace de E), d'où card$(\mathcal{L}) \leqslant n$ (d'après la proposition 8.11). Parmi toutes les familles libres de F, choisissons une famille ayant le nombre maximal d'éléments possibles. Notons $\mathcal{L}_{\max}$ une telle famille libre maximale. On a :

$$\operatorname{card}(\mathcal{L}_{\max}) \leqslant n.$$

Soit $p = \mathrm{card}(\mathcal{L}_{\max})$. Cela signifie qu'une famille constituée de plus de p vecteurs de F est nécessairement liée. Tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de F est alors combinaison linéaire de la famille $\mathcal{L}_{\max}$ car s'il ne l'était pas, la sur-famille $(\mathcal{L}_{\max}, \boldsymbol{x})$ serait libre, ce qui contredirait la propriété de maximalité de $\mathcal{L}_{\max}$. La famille libre $\mathcal{L}_{\max}$ est donc génératrice de F. C'est une base de F. On a ainsi montré que le sous-espace F était de dimension finie et que sa dimension était inférieure ou égale à celle de l'espace E.

$\trianglerighteq$ Supposons maintenant que $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de F. La famille $\mathcal{B}$ est libre dans F, donc dans E, et elle engendre le sous-espace F. C'est aussi une base de E puisque, par hypothèse, le nombre de vecteurs qu'elle contient est égal à $\dim_{\mathbb{K}}(E)$. Par conséquent, elle engendre aussi l'espace E, autrement dit : $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$, ce qui montre que F et E sont égaux puisque on a aussi $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$. □

L'égalité des dimensions de deux sous-espaces d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel ne permet pas de conclure que les deux sous-espaces sont égaux (par exemple, dans $\mathbb{K}^3$, les deux sous-espaces $\mathbb{K}(1,0,1)$ et $\mathbb{K}(0,1,0)$ ne sont pas égaux, bien qu'ils soient tous les deux de dimension 1). En revanche, comme le stipule la proposition 8.12, si l'un des deux sous-espaces est inclus dans l'autre, alors l'égalité des dimensions implique l'égalité des sous-espaces.

Remarque Soient E un $\mathbb{K}$-espace et F, G deux sous-espaces de E tels que $F \subset G$. Alors F est aussi un sous-espace du $\mathbb{K}$-espace G. En particulier,

- si G est de dimension finie alors tous ses sous-espaces sont aussi de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}(F) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(G)$;
- si, de plus, les deux sous-espaces F et G sont de même dimension alors cela signifie nécessairement que ces deux sous-espaces sont identiques.

Droite vectorielle, plan vectoriel et hyperplan vectoriel

DÉFINITION 8.14 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension non nécessairement finie) et F un sous-espace de E.*

✗ *Le sous-espace F est appelé droite vectorielle si* $\dim_{\mathbb{K}}(F) = 1$.

✗ *Le sous-espace F est appelé plan vectoriel si* $\dim_{\mathbb{K}}(F) = 2$.

✗ *En particulier, lorsque E est de dimension $n \geqslant 1$, le sous-espace F est appelé hyperplan vectoriel si* $\dim_{\mathbb{K}}(F) = n - 1$.

Exemples

1. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ défini par[19]

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

[19] Voir l'exercice 1 en page 320.

La représentation de F est dite cartésienne. Soit (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 \in \mathbb{R}$, un vecteur appartenant à F. De $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$, il vient $x_3 = x_1 + x_2$. On en déduit :

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2) = x_1(1, 0, 1) + x_2(0, 1, 1).$$

Tout vecteur de F s'écrit comme une combinaison linéaire des deux vecteurs $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1)$ et $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 1)$, c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$, et les deux vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ forment une famille libre. Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}}(F) = 2$. Le sous-espace F est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. C'est aussi un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit G le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$G = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + x_2) \text{ où } x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

La représentation de G est dite paramétrique. Soit $(x_1, x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + x_2)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, un vecteur appartenant à G. On a :

$$(x_1, x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + x_2) = x_1(1, 0, 1, 2) + x_2(0, 1, 1, 1).$$

Ainsi $G = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ avec $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 1, 2)$ et $\boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 1, 1)$, et les deux vecteurs $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ forment une famille libre. Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}}(G) = 2$. Le sous-espace G est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$, mais ce n'est pas un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

8.4.3 Rang d'une famille finie de vecteurs

DÉFINITION 8.15 *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{F}$ une famille finie constituée de p vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ de E. On appelle rang de $\mathcal{F}$, et l'on note* $\mathrm{rg}\,(\mathcal{F})$ *ou* $\mathrm{rg}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$, *la dimension du sous-espace de E engendré par $\mathcal{F}$. En d'autres termes,*

$$\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) \overset{déf.}{=} \dim_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})\big).$$

La définition du rang d'une famille n'a de sens que pour une famille finie de vecteurs. Comme l'illustre l'exemple donné ci-après, déterminer le rang d'une famille finie $\mathcal{F}$ revient à extraire de $\mathcal{F}$ la plus grande (au sens de l'inclusion) sous-famille libre dans E. Le rang de $\mathcal{F}$ est alors le cardinal de cette sous-famille libre maximale. La famille $\mathcal{F}$ n'étant elle-même pas nécessairement libre, on a :

$$\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) \leqslant \mathrm{card}\,(\mathcal{F})\,.$$

En particulier, si l'espace E est de dimension finie alors tout sous-espace vectoriel de E (*a fortiori* le sous-espace engendré par la famille $\mathcal{F}$) est nécessairement de dimension inférieure ou égale à $\dim_{\mathbb{K}}(E)$. Ainsi,

$$\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) \leqslant \min\big\{\dim_{\mathbb{K}}(E), \mathrm{card}\,(\mathcal{F})\big\}.$$

On résume ces résultats dans la proposition suivante.

PROPOSITION 8.13 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si v_1, v_2, ..., v_p désignent des vecteurs de E alors*

$$\operatorname{rg}(v_1, v_2, \dots, v_p) \leqslant p.$$

De plus, si E est de dimension finie avec $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$, alors

$$\operatorname{rg}(v_1, v_2, \dots, v_p) \leqslant \min\{n, p\}.$$

Exemple Dans $\mathbb{R}^4$, la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 2, 1, 0)$ et $v_3 = (3, 5, 2, -1)$ est liée puisque $v_3 = v_1 + 2v_2$. D'après la proposition 8.4, on a :

$$\operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \operatorname{Vect}(v_1, v_2).$$

Il est facile de vérifier que la sous-famille $\mathcal{F}' = (v_1, v_2)$ est libre. C'est donc une base du sous-espace $\operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. D'où $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{card}(\mathcal{F}') = 2$.

8.4.4 La méthode des zéros échelonnés

La méthode des « zéros échelonnés » est une méthode qui permet de calculer le rang d'une famille de vecteurs d'un espace de dimension finie, et de fournir une base du sous-espace vectoriel engendré par cette famille de vecteurs.

Commençons par énoncer le résultat suivant qui est une généralisation du résultat de la proposition 8.5 (sa démonstration est laissée en exercice).

PROPOSITION 8.14 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et u_1, u_2, ..., u_r des vecteurs de E où $r \leqslant n$, tels que*

$$\left\{\begin{array}{lllllll}
u_1 = & a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 & + \dots + & a_{1r}e_r & + \dots + & a_{1n}e_n \\
u_2 = & \qquad\quad a_{22}e_2 + a_{23}e_3 & + \dots + & a_{2r}e_r & + \dots + & a_{2n}e_n \\
u_3 = & \qquad\qquad\qquad\quad a_{33}e_3 & + \dots + & a_{3r}e_r & + \dots + & a_{3n}e_n \\
\vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
u_r = & & & a_{rr}e_r & + \dots + & a_{rn}e_n
\end{array}\right. .$$

Si $a_{ii} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, \dots, r\}$, alors les vecteurs u_1, u_2, u_3, ..., u_r forment une famille libre dans E et $\operatorname{rg}(u_1, u_2, u_3, \dots, u_r) = r$.

La méthode des « zéros échelonnés » est basée sur le fait que le sous-espace engendré par une famille finie $\mathcal{F}$ est inchangé, et par voie de conséquence que sa dimension est inchangée, si l'on effectue sur les vecteurs de $\mathcal{F}$ les opérations suivantes :

- si l'on échange l'ordre des vecteurs,
- si l'on multiplie un vecteur par un scalaire non nul,
- si l'on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs.

La méthode consiste alors à effectuer ces opérations sur les vecteurs de $\mathcal{F}$ de telle sorte que l'on obtienne une nouvelle famille dont les vecteurs non nuls possèdent la propriété de la proposition 8.14. Cette nouvelle famille se prête ainsi mieux au calcul du rang puisqu'elle fait apparaître un système de zéros échelonnés.

Illustrons la méthode sur l'exemple suivant.

Exemple Considérons la famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ de $\mathbb{R}^4$ avec $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,2,1,0)$ et $\boldsymbol{v}_3 = (3,5,2,-1)$. Commençons par disposer ces vecteurs en lignes superposées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{v}_1 & = & (1,\ 1,\ 0,\ -1) \\ \boldsymbol{v}_2 & = & (1,\ 2,\ 1,\ \ \ 0) \\ \boldsymbol{v}_3 & = & (3,\ 5,\ 2,\ -1) \end{array}\right. .$$

Intéressons-nous d'abord à la première colonne, le but étant de faire apparaître des zéros au-dessous du premier élément de la première colonne. On définit les trois vecteurs $\boldsymbol{v}'_1$, $\boldsymbol{v}'_2$, $\boldsymbol{v}'_3$ comme suit :

$$\left\{\begin{array}{lcrcl} \boldsymbol{v}'_1 & = & \boldsymbol{v}_1 & = & (1,\ 1,\ 0,\ -1) \\ \boldsymbol{v}'_2 & = & \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 & = & (0,\ 1,\ 1,\ \ \ 1) \\ \boldsymbol{v}'_3 & = & \boldsymbol{v}_3 - 3\boldsymbol{v}_1 & = & (0,\ 2,\ 2,\ \ \ 2) \end{array}\right. .$$

Le sous-espace F engendré par les trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ est aussi engendré par les trois vecteurs $\boldsymbol{v}'_1$, $\boldsymbol{v}'_2$ et $\boldsymbol{v}'_3$. En effet,

$$F = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 - 3\boldsymbol{v}_1) = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \boldsymbol{v}'_3)\,.$$

Intéressons-nous maintenant à la deuxième colonne et faisons apparaître un zéro au-dessous du deuxième élément. On obtient

$$\left\{\begin{array}{lcrcl} \boldsymbol{v}''_1 & = & \boldsymbol{v}'_1 & = & (1,\ 1,\ 0,\ -1) \\ \boldsymbol{v}''_2 & = & \boldsymbol{v}'_2 & = & (0,\ 1,\ 1,\ \ \ 1) \\ \boldsymbol{v}''_3 & = & \boldsymbol{v}'_3 - 2\boldsymbol{v}'_2 & = & (0,\ 0,\ 0,\ \ \ 0) \end{array}\right. .$$

Là encore, le sous-espace engendré par les trois vecteurs $\boldsymbol{v}''_1$, $\boldsymbol{v}''_2$ et $\boldsymbol{v}''_3$ est identique à celui engendré par les trois vecteurs $\boldsymbol{v}'_1$, $\boldsymbol{v}'_2$ et $\boldsymbol{v}'_3$:

$$\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \boldsymbol{v}'_3) = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \boldsymbol{v}'_3 - 2\boldsymbol{v}'_2) = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}''_1, \boldsymbol{v}''_2, \boldsymbol{v}''_3) = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}''_1, \boldsymbol{v}''_2)$$

car $\boldsymbol{v}''_3 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}$. On a donc : $F = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}''_1, \boldsymbol{v}''_2)$. Les deux vecteurs $\boldsymbol{v}''_1$ et $\boldsymbol{v}''_2$ engendrent le sous-espace F et ils forment une famille libre puisqu'ils possèdent la propriété de la proposition 8.14. Ils constituent donc une base de F. On a :

$$\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{R}}\,(\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}''_1, \boldsymbol{v}''_2)) = \mathrm{card}((\boldsymbol{v}''_1, \boldsymbol{v}''_2)) = 2.$$

La famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ se révèle ainsi être une famille liée. De plus, la relation de liaison entre les trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ nous est donnée explicitement par la méthode. Elle s'obtient en effectuant à l'envers les opérations utilisées. De $\boldsymbol{v}''_3 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}$ il vient

$$\boldsymbol{v}'_3 - 2\boldsymbol{v}'_2 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}$$

puisque $v_3'' = v_3' - 2v_2'$. Or, $v_3' = v_3 - 3v_1$ et $v_2' = v_2 - v_1$. On obtient ainsi :

$$v_3 - v_1 - 2v_2 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}$$

c'est-à-dire : $v_3 = v_1 + 2v_2$.

Disposition pratique et méthode systématique

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille constituée de p vecteurs appartenant à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Décomposons chacun des vecteurs v_1, v_2, ..., v_p dans une base (quelconque) $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E :

$$\begin{cases} v_1 &= a_{11}\, e_1 + a_{12}\, e_2 + \ldots + a_{1n}\, e_n \\ v_2 &= a_{21}\, e_1 + a_{22}\, e_2 + \ldots + a_{2n}\, e_n \\ \vdots & \\ v_p &= a_{p1}\, e_1 + a_{p2}\, e_2 + \ldots + a_{pn}\, e_n \end{cases}$$

et disposons les coordonnées de ces p vecteurs v_1, v_2, ..., v_p en lignes superposées. On obtient ainsi un tableau à p lignes et n colonnes. Notons $\mathcal{T}_0$ ce tableau :

$$\mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & a_{p4} & & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Par commodité, on convient de noter chacune des trois opérations élémentaires que l'on effectue sur les lignes d'un même tableau comme suit :

- lorsque l'on échange les lignes L_k et $\mathrm{L}_{k'}$, on note : $\mathrm{L}_k \longleftrightarrow \mathrm{L}_{k'}$;
- lorsque l'on multiplie la ligne L_k par le scalaire $\alpha \neq 0$, on note : $\mathrm{L}_k \longleftarrow \alpha\mathrm{L}_k$;
- lorsque l'on additionne la ligne $\beta\mathrm{L}_{k'}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$, à la ligne L_k, on note : $\mathrm{L}_k \longleftarrow \mathrm{L}_k + \beta\mathrm{L}_{k'}$.

Il est clair que l'écriture du tableau $\mathcal{T}_0$ dépend du choix de la base $\mathcal{B}$ et que ce choix est arbitraire. En effet, au lieu de $\mathcal{B}$, nous pourrions choisir toute autre base obtenue à partir de $\mathcal{B}$ par permutation de ses vecteurs. Un tel choix aurait pour effet une permutation de colonnes dans le tableau $\mathcal{T}_0$. Nous nous autorisons ainsi d'éventuelles permutations de colonnes et pour signifier que l'on échange les colonnes C_k et $\mathrm{C}_{k'}$, on note : $\mathrm{C}_k \longleftrightarrow \mathrm{C}_{k'}$.

Lorsque tous les coefficients du tableau $\mathcal{T}_0$ sont nuls, cela signifie que tous les vecteurs v_1, v_2, ..., v_p sont nuls. On en déduit alors que le rang de la famille $\mathcal{F}$ est nul. Supposons à présent que les coefficients de $\mathcal{T}_0$ ne sont pas tous nuls. Supposons en particulier $a_{11} \neq 0$, ce qui est toujours possible en permutant les lignes entre elles et/ou les colonnes entre elles. La première étape consiste, en utilisant les trois opérations élémentaires sur les lignes données ci-dessus, à faire apparaître $p - 1$ zéros dans la première colonne au-dessous de a_{11}. On peut procéder à l'élimination simultanée des coefficients a_{21}, a_{31}, ..., a_{p1} en effectuant sur les lignes L_2, L_3, ..., L_p de $\mathcal{T}_0$ les opérations suivantes :[20]

$$\forall \ell \in \{2, \dots, p\} \quad L_\ell \longleftarrow L_\ell - \frac{a_{\ell 1}}{a_{11}} L_1$$

puisque $a_{11} \neq 0$, et on dit que l'on a utilisé le coefficient a_{11} comme pivot. À l'issue de cette première étape, on obtient le tableau suivant :

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{p2} & a'_{p3} & a'_{p4} & & a'_{pn} \end{pmatrix}.$$

Si tous les coefficients a'_{ij}, $i \in \{2, \dots, p\}$, $j \in \{2, \dots, n\}$, sont nuls alors on peut conclure directement que $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 1$. Dans le cas contraire, on doit poursuivre. Supposons $a'_{22} \neq 0$.[21] La deuxième étape consiste à éliminer les $p-2$ coefficients a'_{32}, ..., a'_{p2} situés dans la deuxième colonne au-dessous du coefficient a'_{22}, ce qui s'obtient en effectuant sur les lignes L_3, L_4, ..., L_p du tableau $\mathcal{T}_1$ les opérations suivantes

$$\forall \ell \in \{3, \dots, p\} \quad L_\ell \longleftarrow L_\ell - \frac{a'_{\ell 2}}{a'_{22}} L_2$$

puisque $a'_{22} \neq 0$. Cette fois-ci, c'est le coefficient a'_{22} qui a été utilisé comme pivot. À l'issue de cette deuxième étape, on obtient le tableau suivant :

$$\mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} & & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{p3} & a''_{p4} & & a''_{pn} \end{pmatrix}.$$

La discussion porte alors sur les coefficients a''_{ij}, $i \in \{3, \dots, p\}$, $j \in \{3, \dots, n\}$. S'ils sont tous nuls, on conclut que $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$. Sinon, on réitère le processus. Et ainsi de suite jusqu'à l'obtention à l'issue de l'étape r d'un tableau $\mathcal{T}_r$ de la

---

[20] Effectuer de telles opérations simultanément est légitime puisque toute ligne modifiée n'est pas utilisée pour modifier une autre ligne.

[21] ce qui est bien sûr toujours possible par permutation des lignes entre elles et/ou des colonnes entre elles.

forme

$$\mathcal{T}_r = \begin{pmatrix} a_{11} & * & & * & * \\ 0 & a'_{22} & & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & * \\ 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les coefficients a_{11}, a'_{22}, ..., $a_{rr}^{(r-1)}$ sont tous non nuls. Ce sont les pivots. Les coefficients matérialisés par le symbole $*$ sont quelconques. En procédant ainsi, on dit que l'on a écrit le tableau $\mathcal{T}_0$ sous une forme échelonnée (celle du tableau $\mathcal{T}_r$). D'après la proposition 8.14, on déduit du tableau $\mathcal{T}_r$ que $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = r$.

Exemple Considérons la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ de $\mathbb{R}_4[X]$ où

$$\begin{cases} P_1 &= 1 - X + X^2 + X^3 - X^4 \\ P_2 &= 2 - 2X + 3X^2 + X^4 \\ P_3 &= -1 + X + X^2 + 2X^3 + X^4 \\ P_4 &= -3 + 3X + 2X^2 + X^4 \end{cases}.$$

Pour calculer le rang de cette famille, commençons par disposer les coordonnées de chacun des polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4 relativement à une base de $\mathbb{R}_4[X]$ (la base canonique $\mathcal{B} = \big(1, X, X^2, X^3, X^4\big)$ semble tout indiquée ici) dans le tableau 4×5 suivant :

$$\mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant sur le tableau $\mathcal{T}_0$ les trois opérations élémentaires $\mathrm{L}_2 \longleftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1$, $\mathrm{L}_3 \longleftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1$ et $\mathrm{L}_4 \longleftarrow \mathrm{L}_4 + 3\mathrm{L}_1$, on obtient le tableau $\mathcal{T}_1^{\mathrm{int}}$, et en permutant la deuxième et la troisième colonne de $\mathcal{T}_1^{\mathrm{int}}$, on obtient le tableau $\mathcal{T}_1$:

$$\mathcal{T}_1^{\mathrm{int}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Puis en effectuant sur le tableau $\mathcal{T}_1$ les deux opérations élémentaires $\mathrm{L}_3 \longleftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_2$ et $\mathrm{L}_4 \longleftarrow \mathrm{L}_4 - 5\mathrm{L}_2$, on obtient le tableau $\mathcal{T}_2^{\mathrm{int}}$, et en effectuant l'opération $\mathrm{C}_3 \longleftrightarrow \mathrm{C}_4$ sur $\mathcal{T}_2^{\mathrm{int}}$, on obtient le tableau $\mathcal{T}_2$:

$$\mathcal{T}_2^{\mathrm{int}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -17 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -17 \end{pmatrix}.$$

Enfin, en effectuant l'unique opération élémentaire $L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{13}{7}L_3$ sur $\mathcal{T}_2$, on obtient le tableau $\mathcal{T}_3^{\text{int}}$, et en effectuant l'opération élémentaire $C_4 \longleftrightarrow C_5$ sur $\mathcal{T}_3^{\text{int}}$, on obtient le tableau $\mathcal{T}_3$:

$$\mathcal{T}_3^{\text{int}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{41}{7} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{41}{7} & 0 \end{pmatrix}.$$

La forme échelonnée du dernier tableau, $\mathcal{T}_3$, permet alors de conclure que $\text{rg}\big(P_1, P_2, P_3, P_4\big) = 4$.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, quel est le rang des familles suivantes ?
1 - $\mathcal{F}_1 = \big((1,-1,-1),(1,0,-1),(1,1,0)\big)$;
2 - $\mathcal{F}_2 = \big((1,1,0),(3,2,1),(2,-1,3)\big)$;
3 - $\mathcal{F}_3 = \big((-2,1,1,0,2),(1,3,-2,4,4),(-3,2,2,0,0)\big)$;
4 - $\mathcal{F}_4 = \big((b,a,a),(-a,-b,-a),(-a,-a,b)\big)$ avec a et b deux réels.

8.5 Somme de sous-espaces vectoriels

Dans certaines situations, il arrive que l'on cherche à décomposer un vecteur x d'un espace vectoriel E non pas par rapport à une base algébrique (c'est-à-dire par rapport à un ensemble *ad'hoc* de vecteurs de E choisis indépendamment du vecteur x considéré) mais plutôt par rapport à certaines catégories de vecteurs. Par exemple, considérons l'ensemble E des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $E = \mathcal{A}\big(\mathbb{R},\mathbb{R}\big)$. Il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Désignons par F l'ensemble des applications paires et par G celui des applications impaires :

$$F = \big\{f \in \mathcal{A}\big(\mathbb{R},\mathbb{R}\big) \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(-x)\big\},$$
$$G = \big\{f \in \mathcal{A}\big(\mathbb{R},\mathbb{R}\big) \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = -f(x)\big\}.$$

Il est facile de vérifier que F et G sont tous deux des sous-espaces de E. Il est possible d'écrire toute application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ comme la somme d'une application paire $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et d'une application impaire $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \underbrace{\big(f(x) + f(-x)\big)/2}_{= g(x)} + \underbrace{\big(f(x) - f(-x)\big)/2}_{= h(x)}$$

où g est une application paire (puisque $g(x) = g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et h est une application impaire (puisque $h(-x) = -h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). On dit que l'espace E est la somme des deux sous-espaces F et G et on note $E = F + G$. Cela nous amène à définir de façon plus générale la somme de deux sous-espaces vectoriels.

8.5.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

DÉFINITION 8.16 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace et F, G deux sous-espaces de E.*

✗ *La somme de F et G est le sous-espace de E, noté $F+G$, défini par*[22]

$$F+G \overset{\text{déf.}}{=} \{x_F + x_G \mid x_F \in F, x_G \in G\}.$$

✗ *En particulier, la somme de F et G est dite directe si*

$$\forall x \in F+G \quad \exists!\, x_F \in F \quad \exists!\, x_G \in G \quad x = x_F + x_G.$$

Les vecteurs x_F et x_G sont alors appelés les composants du vecteur x respectivement dans F et dans G et le sous-espace $F+G$ se note $F \oplus G$.

✗ *Enfin, on dit que F et G sont supplémentaires dans E si $F \oplus G = E$.*

Pour apprécier pleinement la portée de ces nouvelles définitions, quelques commentaires s'imposent. Effectuer la somme de deux sous-espaces F et G, c'est construire un nouveau sous-espace (que l'on a noté $F+G$) tel que, pour tout vecteur x appartenant à $F+G$, il existe deux vecteurs, x_F et x_G, le premier dans F et le second dans G, tels que

$$x = x_F + x_G.$$

Bien entendu, les deux vecteurs x_F et x_G dépendent[23] du vecteur x considéré. Ainsi, pour n'importe quel vecteur x appartenant à $F+G$, l'existence d'une telle décomposition est assurée. En revanche, rien n'est dit sur son unicité. On apprécie maintenant pleinement

- la définition d'une somme directe (qui nous assure l'unicité) ;
- et celle de deux sous-espaces supplémentaires dans E (qui nous assure l'existence et l'unicité pour n'importe quel vecteur de l'espace E tout entier).

Les définitions de somme, somme directe et sous-espaces supplémentaires se généralisent au cas de plus de deux sous-espaces (*cf.* chapitre 12).

Remarques

1. Les deux sous-espaces F et G de E constituent deux sous-espaces évidents du sous-espace $F+G$. De plus, si F et G sont de dimensions finies (non nécessairement égales) alors le sous-espace $F+G$ est lui-même de dimension finie et ce, même si l'espace E est de dimension infinie ! En effet, si F (respectivement G)

---

(22) On vérifie sans peine que l'ensemble $F+G$ est bien un sous-espace vectoriel de E. Cela se déduit du fait que F et G sont eux-mêmes des sous-espaces de E. Remarquons que le sous-espace $F+G$ n'a aucune raison d'être l'espace E tout entier.

(23) À ce propos, remarquons que lorsqu'on décompose un vecteur x par rapport à une base algébrique de E, disons $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, ce sont les coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ qui dépendent du vecteur x et non pas les vecteurs de la base (ceux-ci ayant été choisis indépendamment du vecteur x considéré).

est de dimension finie alors il existe une famille $\mathcal{G}_F$ (resp. $\mathcal{G}_G$) génératrice de F (resp. de G) et finie. La famille $\mathcal{G}_{F+G}$, constituée des vecteurs de $\mathcal{G}_F$ et de ceux de $\mathcal{G}_G$, est alors génératrice de $F+G$ et elle est finie, ce qui montre que le sous-espace $F+G$ est de dimension finie. Bien sûr, la famille génératrice $\mathcal{G}_{F+G}$ ainsi construite n'est pas nécessairement libre. Ce n'est donc pas obligatoirement une base de $F+G$. On a ainsi :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F+G) \leqslant \mathrm{card}(\mathcal{G}_{F+G}) = \mathrm{card}(\mathcal{G}_F) + \mathrm{card}(\mathcal{G}_G).$$

En particulier, si $\mathcal{G}_F$ et $\mathcal{G}_G$ sont des bases respectives de F et G, on obtient :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F+G) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G).$$

2. Tout sous-espace d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E possède au moins un supplémentaire dans E. Ce dernier résultat est une conséquence directe du théorème 8.1 de la base incomplète.

Si l'espace E est de dimension finie alors on a le résultat suivant.

Proposition 8.15 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. Si F et G sont supplémentaires dans E alors*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G).$$

Démonstration Puisque E est de dimension finie, ses deux sous-espaces F et G le sont aussi. Notons $p = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ et $q = \dim_{\mathbb{K}}(G)$. Considérons $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{f}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (\boldsymbol{g}_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ une base de G. Les deux sous-espaces F et G étant supplémentaires dans E, pour tout $\boldsymbol{x}$ appartenant à E,

$$\exists!\,\boldsymbol{x}_F \in F \quad \exists!\,\boldsymbol{x}_G \in G \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G.$$

Le vecteur $\boldsymbol{x}_F$ appartenant à F, il existe $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\boldsymbol{x}_F = \alpha_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + \alpha_p\boldsymbol{f}_p$. De même, $\boldsymbol{x}_G$ appartenant à G, il existe $(\beta_1,\ldots,\beta_q) \in \mathbb{K}^q$ tel que $\boldsymbol{x}_G = \beta_1\boldsymbol{g}_1 + \ldots + \beta_q\boldsymbol{g}_q$. On a ainsi obtenu, pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, l'existence et l'unicité d'un $(p+q)$-uplet $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\beta_1,\ldots,\beta_q)$ de $\mathbb{K}^{p+q}$ tel que

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + \alpha_p\boldsymbol{f}_p + \beta_1\boldsymbol{g}_1 + \ldots + \beta_q\boldsymbol{g}_q.$$

On en déduit, d'après la proposition 8.9, que la famille $\mathcal{B} = \big(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G\big)$ constitue une base de l'espace E, et donc que

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$$

puisque $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \mathrm{card}(\mathcal{B}_F) + \mathrm{card}(\mathcal{B}_G)$. □

Lorsque deux sous-espaces F et G sont supplémentaires dans un espace E, on ne peut en général pas extraire une base de F et une base de G d'une base quelconque de E. En revanche, la base $\mathcal{B} = \big(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G\big)$ considérée dans la démonstration de la proposition 8.15 a précisément été construite à partir d'une base $\mathcal{B}_F$ de F et d'une base $\mathcal{B}_G$ de G. En ce sens, elle est dite *adaptée* à la décomposition $E = F \oplus G$.

Remarques

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Il vient immédiatement de la proposition 8.15 qu'un supplémentaire d'un hyperplan vectoriel est nécessairement une droite vectorielle.

2. On vérifie que tout sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$ contient nécessairement $F + G$. Ainsi, la somme $F + G$ s'avère être le plus petit sous-espace (au sens de l'inclusion) contenant $F \cup G$. En d'autres termes :

$$\text{Vect}\,(F \cup G) = F + G.$$

De cette caractérisation, on en déduit que si $F \subset G$ alors $F + G = G$. De plus, l'union de deux ensembles étant commutative, la somme est commutative : $F + G = G + F$.

Quelle(s) condition(s) deux sous-espaces doivent-ils remplir pour que leur somme soit directe ?

Pour répondre à cette question, considérons deux sous-espaces F et G d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $\boldsymbol{x} \in F + G$. Supposons d'une part qu'il existe $(\boldsymbol{x}_F, \boldsymbol{x}_G) \in F \times G$ tel que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G$, et supposons d'autre part qu'il existe $(\boldsymbol{x}'_F, \boldsymbol{x}'_G) \in F \times G$ tel que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'_F + \boldsymbol{x}'_G$. On a ainsi $\boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G = \boldsymbol{x}'_F + \boldsymbol{x}'_G$. D'où

$$\underbrace{\boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{x}'_F}_{\in F} = \underbrace{\boldsymbol{x}'_G - \boldsymbol{x}_G}_{\in G}.$$

Remarquons que le vecteur $\boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{x}'_F$ appartient à F puisque F est un sous-espace de E. De même, le vecteur $\boldsymbol{x}'_G - \boldsymbol{x}_G$ appartient à G puisque G est un sous-espace de E. L'égalité entre les deux éléments $\boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{x}'_F$ et $\boldsymbol{x}'_G - \boldsymbol{x}_G$, le premier appartenant à F, le second à G, implique nécessairement que ces deux éléments appartiennent à l'intersection de F et G :

$$\boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{x}'_F \in F \cap G \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{x}'_G - \boldsymbol{x}_G \in F \cap G.$$

Il s'en déduit l'unicité de la décomposition (c'est-à-dire $\boldsymbol{x}_F = \boldsymbol{x}'_F$ et $\boldsymbol{x}_G = \boldsymbol{x}'_G$) lorsque l'intersection des deux sous-espaces F et G est réduite au vecteur nul.

La condition $F \cap G = \{\boldsymbol{0}_E\}$ apparaît ainsi comme une condition suffisante assurant l'unicité. Elle est également nécessaire. Pour le prouver, on utilise un raisonnement par contraposée : on suppose que $F \cap G \neq \{\boldsymbol{0}_E\}$ et on montre que la décomposition d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ de $F + G$ n'est alors pas unique. Soient $\boldsymbol{x}_F \in F$ et $\boldsymbol{x}_G \in G$ tels que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G$. Puisque $F \cap G \neq \{\boldsymbol{0}_E\}$, il existe un vecteur non nul, que l'on note $\boldsymbol{w}$, appartenant à $F \cap G$ et on peut écrire :

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{w}}_{\in F} + \underbrace{\boldsymbol{x}_G - \boldsymbol{w}}_{\in G}$$

avec $\boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{w}$ appartenant à F et $\boldsymbol{x}_G - \boldsymbol{w}$ appartenant à G car F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, et $(\boldsymbol{x}_F, \boldsymbol{x}_G) \neq (\boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}_G - \boldsymbol{w})$ car $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}_E$, ce qui montre que tout vecteur de $F+G$ peut se décomposer sur F et G de deux manières distinctes.

On a ainsi trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que la somme des deux sous-espaces F et G soit directe. On peut énoncer la proposition suivante.

Proposition 8.16 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace et F, G deux sous-espaces de E. Une condition nécessaire et suffisante pour que la somme de F et G soit directe est que leur intersection soit réduite au vecteur nul, c'est-à-dire :*

$$F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}.$$

On déduit de la proposition 8.16 le corollaire suivant.

Corollaire 8.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace et F, G deux sous-espaces de E. Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux sous-espaces F et G soient supplémentaires dans E est que, d'une part, la somme de F et G soit égale à E et que, d'autre part, l'intersection de F et G soit réduite au vecteur nul. Autrement dit, on a l'équivalence suivante :*

$$E = F \oplus G \iff \Big(E = F + G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{\mathbf{0}_E\} \Big).$$

Illustrons ces résultats par quelques exemples.

Exemples

1. La seule application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire est l'application nulle (voir page 321). En notant F l'ensemble des applications paires et G celui des applications impaires, cela signifie que

$$F \cap G = \big\{x \in \mathbb{R} \longmapsto 0 \in \mathbb{R}\big\}.$$

De plus, il a été établi que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pouvait s'écrire comme la somme d'une application paire et d'une application impaire. D'après le corollaire 8.3, on en déduit que les deux sous-espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ce que l'on note :

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G.$$

2. Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les plans vectoriels F et G définis par

$$F = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R}\},$$
$$G = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} = \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Déterminons le sous-espace $F+G$. Soient $(x_1, x_2, 0)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ un vecteur de F et $(y_1, 0, y_3)$ avec $y_1 \in \mathbb{R}$ et $y_3 \in \mathbb{R}$ un vecteur de G. On a :

$$(x_1, x_2, 0) + (y_1, 0, y_3) = (x_1 + y_1, x_2, y_3).$$

En particulier, lorsque $y_1 = 0$ et lorsque x_1, x_2 et y_3 parcourent $\mathbb{R}$, le vecteur $(x_1 + y_1, x_2, y_3)$ décrit tout l'espace $\mathbb{R}^3$. On a donc :

$$F + G = \mathbb{R}^3.$$

De plus, on vérifie facilement que $F \cap G = \mathbb{R}(1,0,0)$. Ainsi, la somme de F et G n'est pas directe et, *a fortiori*, les deux sous-espaces F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3. Toujours dans $\mathbb{R}^3$, considérons les droites vectorielles $F = \mathbb{R}(1,0,0)$ et $G = \mathbb{R}(0,1,0)$. Clairement, $F \cap G = \{(0,0,0)\}$. La somme de F et G est donc directe. On la note alors $F \oplus G$ au lieu de $F + G$. Soient $(x_1, 0, 0)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ un vecteur de F et $(0, y_2, 0)$ avec $y_2 \in \mathbb{R}$ un vecteur de G. On a :

$$(x_1, 0, 0) + (0, y_2, 0) = (x_1, y_2, 0).$$

Ainsi, lorsque x_1 et y_2 parcourent $\mathbb{R}$, le vecteur $(x_1, y_2, 0)$ décrit tout le plan vectoriel $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$, d'où

$$F \oplus G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Remarquons que le sous-espace $F \oplus G$ n'est pas égal à l'espace $\mathbb{R}^3$. Les deux sous-espaces F et G ne sont donc pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

8.5.2 Cas de sous-espaces de dimensions finies

Théorème 8.2 (de Grassmann)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E. Si F et G sont de dimensions finies alors

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G).$$

Démonstration Les deux sous-espaces F et G étant de dimensions finies (mais non nécessairement égales), $F + G$ et $F \cap G$ le sont aussi. Afin d'alléger les écritures, notons H la somme des deux sous-espaces F et G. Soit S un supplémentaire de $F \cap G$ dans G.

⊵ Montrons que F et S sont supplémentaires dans H. Commençons par montrer que $H = F + S$. Soit $\boldsymbol{x} \in H$. Puisque $H = F + G$, il existe $(\boldsymbol{x}_F, \boldsymbol{x}_G) \in F \times G$ tel que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G$. Or, G est la somme (directe) de $F \cap G$ et S. Il existe donc $(\boldsymbol{x}_{F\cap G}, \boldsymbol{x}_S) \in (F \cap G) \times S$ tel que $\boldsymbol{x}_G = \boldsymbol{x}_{F\cap G} + \boldsymbol{x}_S$ (cette décomposition est d'ailleurs unique car la somme de $F \cap G$ et S est directe). On a donc :

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_{F\cap G}}_{\in F} + \boldsymbol{x}_S$$

avec, comme indiqué sous l'accolade, $\boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_{F\cap G} \in F$ car $F \cap G \subset F$ et F sous-espace vectoriel de E. Le vecteur $\boldsymbol{x}$ se décompose ainsi comme la somme d'un vecteur appartenant à F et d'un vecteur appartenant à S. Il appartient donc à $F+S$, montrant ainsi l'inclusion $H \subset F+S$. Réciproquement, de $S \subset G$ (puisque S est un supplémentaire de $F \cap G$ dans G) il vient $F+S \subset F+G$. Or, $F+G=H$. On a donc l'inclusion $F+S \subset H$. De la double inclusion on déduit $F+S=H$. Montrons à présent que $F \cap S = \{\mathbf{0}_E\}$. On a :

$$\begin{aligned} F \cap S &= F \cap (G \cap S) \quad \text{car } S \subset G \\ &= (F \cap G) \cap S \end{aligned}$$

car l'intersection est associative. Or, la somme des deux sous-espaces $F \cap G$ et S est directe puisque S est le supplémentaire de $F \cap G$ dans G. On a donc $(F \cap G) \cap S = \{\mathbf{0}_E\}$, d'où

$$F \cap S = \{\mathbf{0}_E\}.$$

On a donc obtenu que $F+S=H$ et $F \cap S = \{\mathbf{0}_E\}$, c'est-à-dire (d'après le corollaire 8.3) que $F \oplus S = H$.

⊵ Passons à présent aux dimensions. Les deux sous-espaces F et S étant supplémentaires dans H, on a, d'après la proposition 8.15 :

$$\dim_{\mathbb{K}}(H) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(S). \tag{3}$$

Les deux sous-espaces $F \cap G$ et S étant supplémentaires dans G, on a aussi, d'après la proposition 8.15 :

$$\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) + \dim_{\mathbb{K}}(S). \tag{4}$$

On en déduit alors, en combinant (3) et (4), que

$$\dim_{\mathbb{K}}(H) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G),$$

ce qui termine la démonstration puisque $H \overset{not.}{=} F+G$. □

Une conséquence immédiate du thèorème de Grassmann est que si F et G sont deux sous-espaces de dimensions finies d'un même $\mathbb{K}$-espace E tels que $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$ alors :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G).$$

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les deux plans vectoriels $F = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ et $G = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$. On a vu que $F+G=\mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \mathbb{R}(1,0,0)$. On a :

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F+G)}_{=3} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F)}_{=2} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(G)}_{=2} - \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F \cap G)}_{=1}.$$

2. Considérons les deux droites vectorielles $F = \mathbb{R}(1,0,0)$ et $G = \mathbb{R}(0,1,0)$ dans $\mathbb{R}^3$. On a vu que $F \cap G = \{(0,0,0)\}$ (la somme est donc directe ; on la note alors $F \oplus G$) et $F \oplus G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ et on vérifie que

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F \oplus G)}_{=2} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F)}_{=1} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(G)}_{=1}.$$

GRASSMANN, Hermann Günther (1809, Stettin en Prusse - 1877, Stettin).

Mathématicien autodidacte, c'est en s'intéressant au phénomène des marées qu'il a développé le calcul vectoriel et défini le concept (nouveau pour l'époque) d'espace vectoriel de dimension supérieure à 3. Publiés pour la première fois en 1844 dans un premier traité intitulé *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, puis dans un second traité en 1862, ses travaux eurent en fait peu de succès car trop confus, et il faudra attendre Giuseppe Peano pour formaliser plus clairement la notion d'espace vectoriel. C'est à l'âge de 53 ans, déçu par le manque d'intérêt que portait la communauté mathématique de son temps à ses idées pourtant novatrices, que Grassmann se consacra à l'étude du Sanskrit.

Le résultat suivant donne une condition suffisante qui s'avère très pratique pour montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires dans un espace vectoriel dans le cas où cet espace est de dimension finie.

COROLLAIRE 8.4 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. On a alors l'implication suivante :*

$$\Big(\dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) \quad \text{et} \quad F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}\Big) \Longrightarrow F \oplus G = E.$$

Démonstration L'espace E étant de dimension finie, tous ses sous-espaces sont aussi de dimensions finies. C'est en particulier le cas de F, G, $F \cap G$ et $F + G$. En appliquant le théorème de Grassmann, de la première hypothèse, $\dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$, il vient :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) + \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) = \dim_{\mathbb{K}}(E). \tag{5}$$

Utilisons à présent la deuxième hypothèse, $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$. On en déduit que $\dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) = 0$. De plus, d'après la proposition 8.16, du fait que $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$ il vient que la somme des deux sous-espaces F et G est directe. Le sous-espace $F + G$ se note ainsi $F \oplus G$. L'égalité (5) s'écrit alors :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

D'après la proposition 8.12, puisque $F \oplus G$ est un sous-espace de E, de l'égalité des dimensions on peut déduire l'égalité ensembliste $F \oplus G = E$. □

Remarque D'après la démonstration donnée ci-dessus, il est clair que l'on a aussi l'implication suivante :

$$\Big(\dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) \quad \text{et} \quad F + G = E\Big) \Longrightarrow F \oplus G = E.$$

Exemple Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la droite vectorielle $\mathbb{R}\boldsymbol{u}$ et le plan vectoriel $\text{Vect}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$.[24] On suppose que $\boldsymbol{u} \notin \text{Vect}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$. On vérifie facilement que $\mathbb{R}\boldsymbol{u} \cap \text{Vect}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \{\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^3}\}$. De plus,

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\boldsymbol{u})}_{=1} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\text{Vect}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}))}_{=2} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)}_{=3}.$$

Utilisant alors le corollaire 8.4, on en déduit que les sous-espaces $\mathbb{R}\boldsymbol{u}$ et $\text{Vect}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, ce que l'on note $\mathbb{R}\boldsymbol{u} \oplus \text{Vect}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on considère les deux sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \text{Vect}\big((1,2,0,1),(2,1,3,1),(2,4,0,2)\big),$$
$$G = \text{Vect}\big((1,2,1,0),(-1,1,1,1),(2,-1,0,1)\big).$$

1 - Calculer $\dim_{\mathbb{R}}(F)$. Trouver une base de F. Donner une représentation paramétrique de F.
2 - Montrer que G constitue un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Expliciter une base de G. Donner une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de G.
3 - Déterminer une base de $F+G$ et une base de $F \cap G$.

8.6 Exercices de synthèse

Exercice 6 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies (non nécessairement égales) munis, respectivement, de la base $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ et de la base $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{f}_1,\ldots,\boldsymbol{f}_m)$.*

1 - Montrer que la famille $\mathcal{B}_{E\times F}$ définie par

$$\mathcal{B}_{E\times F} \overset{\text{déf.}}{=} \Big((\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{0}_F),\ldots,(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{0}_F),(\boldsymbol{0}_E,\boldsymbol{f}_1),\ldots,(\boldsymbol{0}_E,\boldsymbol{f}_m)\Big)$$

est une base de l'espace produit $E \times F$.

2 - En déduire que $\dim_{\mathbb{K}}(E\times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

[24] Rappelons qu'une droite vectorielle est, par définition, un sous-espace vectoriel de dimension 1 et qu'un plan vectoriel est, par définition, un sous-espace de dimension 2. Ainsi, dire que $\mathbb{R}\boldsymbol{u}$ est une droite vectorielle, c'est supposer implicitement que le vecteur $\boldsymbol{u}$ est non nul. De même, dire que $\text{Vect}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ est un plan vectoriel, revient à supposer que les deux vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ forment une famille libre.

EXERCICE 7 *Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts.*
1 - On considère les polynômes L_0, L_1, ..., L_n de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par :

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\} \quad \left(\forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

Ces polynômes s'appellent polynômes caractéristiques (de Lagrange) *associés aux nœuds x_0, x_1, ..., x_n. Montrer que L_0, L_1, ..., L_n forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Étant donnée une application $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, on note Π_f l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\widetilde{\Pi}_f(x_0) = f(x_0)$, ..., $\widetilde{\Pi}_f(x_n) = f(x_n)$. Le polynôme Π_f s'appelle le* polynôme d'interpolation (de Lagrange) *de f aux nœuds x_0, x_1, ..., x_n.*
2 - Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On désigne par F l'ensemble des applications $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \ldots = \varphi(x_n) = 0,$$

et par G l'ensemble des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. Montrer que F et G sont deux sous-espaces de E, puis montrer que $E = F \oplus G$.

8.7 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - Clairement, F est non vide puisqu'il contient $(0, 0, 0)$. Soient $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_1)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_1)$ deux vecteurs de F et α, β deux réels. Montrons que le vecteur $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ appartient aussi à F. On a : $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = (z_1, z_2, z_3)$ avec $z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1$, $z_2 = \alpha x_2 + \beta y_2$ et $z_3 = \alpha x_3 + \beta y_3$. De plus,

$$\begin{aligned} -z_1 - z_2 + z_3 &= -(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) \\ &= \alpha(-x_1 - x_2 + x_3) + \beta(-y_1 - y_2 + y_3) \ = \ 0 \end{aligned}$$

car $-x_1 - x_2 + x_3 = 0 = -y_1 - y_2 + y_3$ (les deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ appartiennent en effet à F). Le vecteur $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ appartient donc à F.

2 - Le sous-ensemble G est non vide puisque $(0, 0, 0, 0) \in G$. Soient $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de G et α, β deux réels. Puisque $\boldsymbol{x} \in G$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + x_2)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$. De même, puisque $\boldsymbol{y} \in G$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_1 + y_2, 2y_1 + y_2)$ avec $y_1 \in \mathbb{R}$ et $y_2 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} &\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = \alpha(x_1, x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + x_2) + \beta(y_1, y_2, y_1 + y_2, 2y_1 + y_2) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, 2(\alpha x_1 + \beta y_1) + \alpha x_2 + \beta y_2) \\ &= (z_1, z_2, z_1 + z_2, 2z_1 + z_2) \end{aligned}$$

avec $z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 \in \mathbb{R}$ et $z_2 = \alpha x_2 + \beta y_2 \in \mathbb{R}$, ce qui montre que le vecteur $\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}$ appartient à G.

Solution de l'exercice 2

Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les applications $x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(\alpha_k x) \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(\alpha_k x) \in \mathbb{R}$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles appartiennent ainsi bien à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

1 - On procède en deux étapes.

- La première étape consiste à montrer que les sous-familles finies de $\mathcal{F}_\infty$ de la forme $\mathcal{F}_n = (f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ avec $n \in \mathbb{N}$, sont libres. On procède pour cela par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est immédiat. En effet, de l'égalité $\lambda_0 f_0 = 0$, c'est-à-dire de $\lambda_0 \exp(\alpha_0 x) = 0$ où x désigne un réel quelconque, on en déduit $\lambda_0 = 0$. Supposons à présent la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$, autrement dit, λ_1, λ_2, ..., λ_{n+1} désignant des réels, montrons l'implication suivante :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \exp(\alpha_k x) = 0 \right) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_0 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0.$$

De

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \exp(\alpha_k x) = 0, \tag{6}$$

il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda_{n+1} = - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \exp\Big((\alpha_k - \alpha_{n+1}) x \Big). \tag{7}$$

Or, par hypothèse, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. On a donc $\alpha_k < \alpha_{n+1}$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et donc $\lim_{x \to +\infty} \exp\big((\alpha_k - \alpha_{n+1})x\big) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. On déduit alors de (7) que $\lambda_{n+1} = 0$ par passage à la limite. Ainsi, (6) se simplifie comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \exp(\alpha_k x) = 0.$$

On en déduit alors que $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$ grâce à l'hypothèse de récurrence.

- La deuxième étape consiste à montrer que toutes les sous-familles finies de $\mathcal{F}_\infty$ sont libres. Il suffit pour cela de remarquer que si $\mathcal{F}$ est une sous-famille finie de $\mathcal{F}_\infty$, il existe nécessairement une sur-famille finie de $\mathcal{F}$ de la forme de $\mathcal{F}_n$. Or, nous venons de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{F}_n$ était libre. Ainsi, toute famille finie $\mathcal{F}$ est sous-famille d'une famille libre. Toute sous-famille d'une famille libre étant elle-même libre (voir proposition 8.7), on en déduit que $\mathcal{F}$ est libre.

En résumé, nous avons montré que la famille infinie $\mathcal{F}_\infty$ est libre puisque toutes ses sous-familles finies sont libres.

2 - Comme pour la question précédente, on procède en deux étapes. Seule la première étape est présentée. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ des réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \sin(\alpha_k x) = 0. \tag{8}$$

En dérivant deux fois on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \alpha_k^2 \sin(\alpha_k x) = 0. \tag{9}$$

Multiplions l'égalité (8) par α_{n+1}^2, puis additionnons avec l'égalité (9) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (\alpha_{n+1}^2 - \alpha_k^2) \sin(\alpha_k x) = 0.$$

Il est à noter qu'en procédant ainsi, on a fait disparaître de la somme le terme d'inde $n+1$. En utilisant alors l'hypothèse de récurrence, on en déduit :

$$\lambda_0(\alpha_{n+1}^2 - \alpha_0^2) = \ldots = \lambda_n(\alpha_{n+1}^2 - \alpha_n^2) = 0,$$

puis $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$ car $\alpha_{n+1} \neq \alpha_k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. Finalement, en injectant ces résultats dans (8), on obtient que $\lambda_{n+1} \sin(\alpha_{n+1} x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où $\lambda_{n+1} = 0$ (il suffit de choisir x de telle manière que $\sin(\alpha_{n+1} x)$ soit non nul).

Solution de l'exercice 3

1 - Soient $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ les trois vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées x_1, x_2, x_3 du vecteur $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 1$ car

$$(1, 1, 1) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

2 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3, il suffit de vérifier que la famille $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ est libre, autrement dit que la relation de liaison $\alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2 + \gamma \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^3}$ où α, β et γ désignent trois réels, implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Soient α, β et γ trois réels. La relation de liaison s'écrit :

$$\alpha(1, 1, 2) + \beta(1, -1, 0) + \gamma(0, 0, -1) = (0, 0, 0),$$

ou encore $(\alpha + \beta, \alpha - \beta, 2\alpha - \gamma) = (0, 0, 0)$ d'où, par identification,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \beta & & & = & 0 \\ \alpha & - & \beta & & & = & 0 \\ 2\alpha & & & - & \gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

dont on déduit facilement $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

3 - Notons x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans la nouvelle base $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$. On a : $\boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2 + x'_3\boldsymbol{u}_3$. D'après la question 1, on a aussi : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$. Exprimons les vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ en fonction des vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$. Puisque $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,2)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,-1,0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (0,0,-1)$, on a :

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{e}_3.$$

On en déduit :

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{u}_3 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2), \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{u}_3 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{u}_3.$$

On obtient ainsi $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$. Puisque $\boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2 + x'_3\boldsymbol{u}_3$, par identification, on trouve $x'_1 = 1$, $x'_2 = 0$ et $x'_3 = 1$.

> On se gardera d'écrire que le vecteur $\boldsymbol{x}$ est égal au vecteur $(1,0,1)$. Il n'en est rien. Les scalaires 1, 0 et 1 sont simplement les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans la nouvelle base $\mathcal{C}$. D'ailleurs, le vecteur $\boldsymbol{x}$ ne peut pas être égal au vecteur $(1,0,1)$ puisque, tel qu'il a été défini, le vecteur $\boldsymbol{x}$ est le vecteur $(1,1,1)$.

Solution de l'exercice 4

1 - Soit $\mathcal{F}_1 = \big((1,-1,-1),(1,0,-1),(1,1,0)\big)$. En effectuant successivement à partir du tableau $\mathcal{T}_0$ les opérations $\mathrm{L}_2 \longleftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$, $\mathrm{L}_3 \longleftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1$ (étape 1), puis $\mathrm{L}_3 \longleftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_2$ (étape 2), on obtient les tableaux $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ suivants :

$$\mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

On déduit de $\mathcal{T}_2$ que $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_1) = 3$.

2 - Soit $\mathcal{F}_2 = \big((1,1,0),(3,2,1),(2,-1,3)\big)$. En effectuant successivement à partir du tableau $\mathcal{T}_0$ les opérations $\mathrm{L}_2 \longleftarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_1$, $\mathrm{L}_3 \longleftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1$ (étape 1), puis $\mathrm{L}_3 \longleftarrow \mathrm{L}_3 - 3\mathrm{L}_2$ (étape 2), on obtient les tableaux $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ suivants :

$$\mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On déduit de $\mathcal{T}_2$ que $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_2) = 2$. Remarquons que la dernière ligne de $\mathcal{T}_2$ est nulle. Il s'en déduit la relation liant les trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,2,1)$ et $\boldsymbol{v}_3 = (2,-1,3)$, en effectuant à l'envers les opérations utilisées pour aboutir à ce résultat. En effet, en effectuant à partir de l'égalité :

$$\mathrm{L}_3 = 0$$

l'opération $\mathrm{L}_3 \longrightarrow \mathrm{L}_3 - 3\mathrm{L}_2$ (opération inverse de celle effectuée à l'étape 2), on obtient : $\mathrm{L}_3 - 3\mathrm{L}_2 = 0$, puis en effectuant à partir de cette égalité les deux opérations $\mathrm{L}_2 \longrightarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_1$ et $\mathrm{L}_3 \longrightarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1$ (opérations inverses de celles effectuées à l'étape 1), on obtient :

$$(\mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1) - 3(\mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_1) = 0,$$

c'est-à-dire : $L_3 = -7L_1 + 3L_2$. On obtient ainsi la relation de liaison :

$$\boldsymbol{v}_3 = -7\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2.$$

3 - Soit $\mathcal{F}_3 = \big((-2,1,1,0,2),(1,3,-2,4,4),(-3,2,2,0,0)\big)$. En effectuant successivement à partir du tableau $\mathcal{T}_0$ (où nous avons choisi de permuter directement les deux premiers vecteurs)

$$\mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_1$ (étape 1), puis l'opération $L_3 \longleftarrow 7L_3 - 11L_2$ (étape 2), on obtient les tableaux

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & 8 & 10 \\ 0 & 11 & -4 & 12 & 12 \end{pmatrix}, \ \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & \boxed{7} & -3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & -4 & -26 \end{pmatrix}.$$

On déduit de $\mathcal{T}_2$ que $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_3) = 3$.

4 - Soit $\mathcal{F}_4 = \big((b,a,a),(-a,-b,-a),(-a,-a,b)\big)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Il est clair que si $a = 0$ alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_4) = 3$ si $b \neq 0$ et $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_4) = 0$ si $b = 0$. Supposons à présent $a \neq 0$. Par commodité, commençons par multiplier la deuxième ligne et la troisième ligne du tableau $\mathcal{T}_0^{\text{int}}$ par -1, puis permutons la première ligne et la troisième ligne. On obtient le tableau $\mathcal{T}_0$:

$$\mathcal{T}_0^{\text{int}} = \begin{pmatrix} b & a & a \\ -a & -b & -a \\ -a & -a & b \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} a & a & -b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{pmatrix}.$$

En effectuant successivement à partir de $\mathcal{T}_0$ les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \longleftarrow aL_3 - bL_1$ (cette opération est permise puisque l'on a supposé a non nul) ; puis $L_3 \longleftarrow L_3 + aL_2$ (étape 2), on obtient les tableaux suivants :

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} a & a & -b \\ 0 & b-a & a+b \\ 0 & a^2 - ba & a^2 + b^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} a & a & -b \\ 0 & b-a & a+b \\ 0 & 0 & 2a^2 + ab + b^2 \end{pmatrix}.$$

Le discriminant Δ du trinôme $P(b) = b^2 + ab + 2a^2$ est strictement négatif puisque $\Delta = -7a^2$ avec $a \neq 0$. On en déduit $P(b) \neq 0$ pour tout $b \in \mathbb{R}$. On déduit alors du tableau $\mathcal{T}_2$ que si $a \neq 0$ alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_4) = 3$ si $b \neq a$, et $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_4) = 2$ si $b = a$.

Solution de l'exercice 5

1 - On note $\boldsymbol{u}_1 = (1,2,0,1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (2,1,3,1)$ et $\boldsymbol{u}_3 = (2,4,0,2)$. Remarquons que $\boldsymbol{u}_3 = 2\boldsymbol{u}_1$, ce qui montre que les trois vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ sont liés. On a donc $F = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$. Clairement, les deux vecteurs restants, $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$, forment une famille libre. Une base de F est donc la famille $\mathcal{B}_F$ définie par

$$\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \big((1,2,0,1),(2,1,3,1)\big),$$

d'où $\dim_{\mathbb{R}}(F) = 2$. Le sous-espace F est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Il se peut que l'on n'ait pas remarqué la relation liant $\boldsymbol{u}_3$ et $\boldsymbol{u}_1$. Dans ce cas, pour connaître le rang des trois vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, et donc la dimension du sous-espace F, on peut utiliser la méthode des zéros échelonnés. Pour cela, on commence par ranger dans un tableau $\mathcal{T}_0$ les coordonnées (par rapport à une base de $\mathbb{R}^4$; prenons pour simplifier la base canonique) de $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$. En effectuant alors à partir de $\mathcal{T}_0$ les deux opérations $\mathrm{L}_2 \longleftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1$, $\mathrm{L}_3 \longleftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1$, on obtient le tableau $\mathcal{T}_1$ suivant :

$$\mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On déduit alors du tableau $\mathcal{T}_1$ que $\mathrm{rg}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 2$, ce qui nous indique que $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ sont liés. De plus, la dernière ligne de $\mathcal{T}_1$ étant nulle, on en déduit que $\boldsymbol{u}_3 = 2\boldsymbol{u}_1$ (il suffit pour cela d'effectuer l'opération $\mathrm{L}_3 \longrightarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1$ correspondant à l'inverse de celle que l'on a effectuée). Le tableau $\mathcal{T}_1$ nous offre d'ailleurs une nouvelle base $\mathcal{B}'_F$ du sous-espace F :

$$\mathcal{B}'_F = \big(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 - 2\boldsymbol{u}_1\big) = \big((1,2,0,1), (0,-3,3,-1)\big).$$

Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) un vecteur de F. Puisque $\mathcal{B}_F$ est une base de F, il existe un unique couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 = a(1,2,0,1) + b(2,1,3,1) \\ &= (a + 2b, 2a + b, 3b, a + b). \end{aligned}$$

On en déduit une représentation paramétrique de F :

$$F = \big\{(a + 2b, 2a + b, 3b, a + b) \text{ où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\big\}.$$

Cette représentation n'est bien sûr pas unique. En effet, en utilisant cette fois-ci que $\mathcal{B}'_F$ est une base de F, on peut aussi écrire qu'il existe un unique couple (a', b') de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = a'(1,2,0,1) + b'(0,-3,3,-1) = (a', 2a' - 3b', 3b', a' - b').$$

D'où $F = \big\{(a', 2a' - 3b', 3b', a' - b') \text{ où } a' \in \mathbb{R}, b' \in \mathbb{R}\big\}$.

2 - On note $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,1,1,1)$ et $\boldsymbol{v}_3 = (2,-1,0,1)$. On vérifie facilement que les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ sont libres. Une base de G est alors donnée par la famille

$$\mathcal{B}_G = \big(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\big) = \big((1,2,1,0), (-1,1,1,1), (2,-1,0,1)\big),$$

d'où $\dim_{\mathbb{R}}(G) = 3$, ce qui montre que G constitue un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) un vecteur appartenant à G. Puisque $\mathcal{B}_G$ est une base de G, il existe un unique triplet $(c, d, e) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= c\boldsymbol{v}_1 + d\boldsymbol{v}_2 + e\boldsymbol{v}_3 \\ &= c(1,2,1,0) + d(-1,1,1,1) + e(2,-1,0,1) \\ &= (c - d + 2e, 2c + d - e, c + d, d + e). \end{aligned}$$

Une représentation paramétrique de G s'écrit alors :

$$G = \{(c-d+2e, 2c+d-e, c+d, d+e) \text{ où } c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}, e \in \mathbb{R}\}.$$

Déterminer la représentation cartésienne de G, c'est trouver quatre réels λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 (dont un au moins est non nul) tels que $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3+\lambda_4 x_4 = 0$ pour tout (x_1, x_2, x_3, x_4) appartenant à G. Pour les obtenir, il suffit de considérer en particulier les trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ (ces vecteurs appartiennent à G puisqu'ils engendrent G). On obtient ainsi le système (S) constitué de trois équations à quatre inconnues :

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \end{cases}.$$

Traitons λ_4 comme un paramètre. De (S) il vient $\lambda_1 = 0$ (il suffit d'additionner la première équation et la troisième équation, et de retrancher la deuxième équation), puis $\lambda_2 = \lambda_4$ et enfin $\lambda_3 = -2\lambda_4$. D'où, en prenant $\lambda_4 = 1$,

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}.$$

Nous aurions pu obtenir la représentation cartésienne de G directement à partir de sa représentation paramétrique en remarquant que

$$\underbrace{(2c+d-e)}_{=x_2} - 2\underbrace{(c+d)}_{=x_3} + \underbrace{(d+e)}_{=x_4} = 0.$$

3 - Par définition, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ engendrent F et $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ engendrent G. Il s'en déduit que $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ engendrent $F+G$, soit $F+G = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$. Remarquons que le sous-espace $F+G$ est nécessairement de dimension inférieure ou égale à 4 car c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$. Ainsi, parmi les six vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, au moins deux sont liés aux autres. Il convient donc d'en enlever au moins deux. Mais lesquels ? D'après ce qui précède, on peut enlever directement le vecteur $\boldsymbol{u}_3$ puisqu'il est colinéaire à $\boldsymbol{u}_1$. Il convient à présent d'en enlever un autre, disons $\boldsymbol{v}_3$, choix tout à fait arbitraire ici mais heureux car il s'avère que les vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ forment une famille libre (cela se vérifie facilement en utilisant la méthode des zéros échelonnés). On en déduit que $\dim_{\mathbb{R}}(F+G) = 4$. Or, le $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}^4$ est lui même de dimension 4. On a donc : $F+G = \mathbb{R}^4$. Une base de $F+G$ est, par exemple,

$$\mathcal{B}_{F+G} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \big((1,2,0,1), (2,1,3,1), (1,2,1,0), (-1,1,1,1)\big).$$

Bien sûr, toute base de $\mathbb{R}^4$ est aussi une base de $F+G$. C'est le cas en particulier de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. D'après le théorème de Grassmann,

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F+G)}_{=4} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F)}_{=2} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(G)}_{=3} - \dim_{\mathbb{R}}(F \cap G),$$

d'où $\dim_{\mathbb{R}}(F \cap G) = 1$. Le sous-espace $F \cap G$ est donc une droite vectorielle de $\mathbb{R}^4$. Pour obtenir une représentation paramétrique de $F \cap G$, la méthode consiste à injecter une représentation paramétrique de F dans la représentation cartésienne de G. Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) un vecteur appartenant à $F \cap G$: il appartient ainsi à la fois à F et à G. Puisqu'il appartient à F, on a : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a + 2b, 2a + b, 3b, a + b)$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. De même, puisqu'il appartient à G, il vérifie aussi : $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$. On a ainsi :

$$(2a + b) - 2(3b) + (a + b) = 0,$$

c'est-à-dire : $3a - 4b = 0$ ou encore : $b = 3a/4$. On en déduit :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5a/2, 11a/4, 9a/4, 7a/4).$$

La représentation paramétrique de $F \cap G$ s'écrit alors :

$$F \cap G = \big\{(5a/2, 11a/4, 9a/4, 7a/4) \text{ où } a \in \mathbb{R}\big\}$$

et une base de $F \cap G$ est, par exemple, $\mathcal{B}_{F \cap G} = (\boldsymbol{w})$ avec $\boldsymbol{w} = (10, 11, 9, 7)$ que l'on obtient en prenant $a = 4$. On écrit alors : $F \cap G = \mathbb{R}\boldsymbol{w}$.

Solution de l'exercice 6

1 - Montrons dans un premier temps que le famille $\mathcal{B}_{E \times F}$ est libre dans $E \times F$. Soient $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\mu_i \in \mathbb{K}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Écrivons la relation de liaison

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{0}_F) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\boldsymbol{0}_E, \boldsymbol{f}_i) = (\boldsymbol{0}_E, \boldsymbol{0}_F)$$

qui s'écrit aussi :

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{f}_i\Big) = (\boldsymbol{0}_E, \boldsymbol{0}_F).$$

Par identification, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}_E \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{0}_F.$$

On déduit de l'égalité de gauche que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ car la famille $\mathcal{B}_E$ est libre dans E (puisque c'est une base de E). De même, on déduit de l'égalité de droite que $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$ car la famille $\mathcal{B}_F$ est libre dans F (puisque c'est une base de F). Montrons maintenant que la famille $\mathcal{B}_{E \times F}$ est génératrice du $\mathbb{K}$-espace produit $E \times F$. Soit $(\boldsymbol{x}_E, \boldsymbol{x}_F)$ un élément de $E \times F$. Puisque la famille $\mathcal{B}_E$ est une base de E, elle engendre E. Ainsi, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\boldsymbol{x}_E = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n$. De même, puisque $\mathcal{B}_F$ est une base de F, elle engendre F. Ainsi, il existe $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que $\boldsymbol{x}_F = \mu_1 \boldsymbol{f}_1 + \mu_2 \boldsymbol{f}_2 + \ldots + \mu_m \boldsymbol{f}_m$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}_E, \boldsymbol{x}_F) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{f}_i\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{0}_F\Big) + \Big(\boldsymbol{0}_E, \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{f}_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{0}_F) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\boldsymbol{0}_E, \boldsymbol{f}_i),
\end{aligned}$$

ce qui montre que tout vecteur de $E \times F$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_{E\times F}$; la famille $\mathcal{B}_{E\times F}$ est donc génératrice de $E \times F$.

2 - On a $\operatorname{card}(\mathcal{B}_{E\times F}) = \operatorname{card}(\mathcal{B}_E) + \operatorname{card}(\mathcal{B}_F) = n + m$. Nous avons montré à la question précédente que la famille $\mathcal{B}_{E\times F}$ était une base de $E \times F$. On a donc :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \operatorname{card}(\mathcal{B}_{E\times F}) = n + m,$$

d'où $\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$ puisque $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ et $m = \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

Solution de l'exercice 7

1 - Rappelons que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n + 1$. Ainsi, pour montrer que les polynômes L_0, L_1, …, L_n forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ il suffit de vérifier qu'ils forment une famille libre dans $\mathbb{R}_n[X]$, autrement dit que la relation de liaison $\alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_n L_n = 0$ où α_0, α_1, …, α_n désignent des réels, implique que $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Considérons donc α_0, α_1, …, α_n dans $\mathbb{R}$ et supposons que

$$\alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_n L_n = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha_0 \widetilde{L}_0(x) + \alpha_1 \widetilde{L}_1(x) + \ldots + \alpha_n \widetilde{L}_n(x) = 0. \tag{10}$$

Soit $\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Considérons en particulier $x = x_\ell$. On a $\widetilde{L}_i(x_\ell) = 0$ pour tout entier $i \in \{0, 1, \ldots, n\} \setminus \{\ell\}$ et $\widetilde{L}_\ell(x_\ell) = 1$. Par conséquent, en prenant $x = x_\ell$ dans (10) on obtient $\alpha_\ell = 0$. En répétant ce raisonnement pour tout $\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on obtient $\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0$.

2 - Il est clair que G est un sous-espace de E puisque $G = \mathbb{R}_n[X]$. Montrons à présent que F est aussi un sous-espace de E. De manière évidente, F est non vide puisqu'il contient l'application nulle. Considérons φ, ψ deux éléments de F, α, β deux réels et montrons que $\alpha\varphi + \beta\psi$ appartient à F. Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)(x_i) = \alpha\varphi(x_i) + \beta\psi(x_i) = 0$$

car $\varphi(x_i) = 0 = \psi(x_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n$ ($\varphi \in F$ et $\psi \in F$), ce qui montre bien que F est un sous-espace de E. Commençons par montrer que $E = F + G$. Soit $f \in E$. On sait, d'après la question 1, qu'il existe un unique polynôme $\widetilde{\Pi}_f \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\widetilde{\Pi}_f(x_0) = f(x_0)$, …, $\widetilde{\Pi}_f(x_n) = f(x_n)$. C'est le polynôme de Lagrange associé aux nœuds x_0, x_1, …, x_n. On peut donc écrire :

$$f = (f - \widetilde{\Pi}_f) + \widetilde{\Pi}_f$$

et on vérifie que $f - \widetilde{\Pi}_f \in F$ puisque

$$(f - \widetilde{\Pi}_f)(x_0) = 0, \quad (f - \widetilde{\Pi}_f)(x_1) = 0, \quad \ldots, \quad (f - \widetilde{\Pi}_f)(x_n) = 0.$$

Ainsi, f s'écrit comme la somme d'un élément (l'application $f - \widetilde{\Pi}_f$) appartenant à F et d'un élément (le polynôme d'interpolation $\widetilde{\Pi}_f$) appartenant à G. On a donc $E = F+G$. Montrons à présent que la somme est directe, c'est-à-dire que l'ensemble $F \cap G$ est réduit à l'application nulle. Considérons un élément de $F \cap G$. Notons P cet élément. Dire que P appartient à $F \cap G$ signifie que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n (puisqu'il appartient à G) et qui s'annule en $n+1$ points (puisqu'il appartient à F). Or, tout polynôme non nul de degré au plus n possède au plus n racines distinctes. Le polynôme P en possède $n + 1$; c'est donc nécessairement le polynôme nul.

CHAPITRE 9

Les applications linéaires

9.1 Application linéaire

9.1.1 Définition d'une application linéaire

Dans cette partie, E et F désignent deux espaces vectoriels sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Ces deux espaces ont des dimensions quelconques (finies ou infinies) et non nécessairement égales.

- On note $+_E$ la loi interne et $\cdot_E$ la loi externe définies sur E.
- De même, on note $+_F$ la loi interne et $\cdot_F$ la loi externe définies sur F.

Lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté sur les espaces sur lequels ces lois opèrent, nous les noterons plus simplement $+$ et $\cdot$ afin d'alléger les écritures.

Commençons par une définition.

DÉFINITION 9.1 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle* application linéaire *de E vers F toute application $f : E \longrightarrow F$ vérifiant*

- $\forall \boldsymbol{x} \in E \quad \forall \boldsymbol{x}' \in E \quad f(\boldsymbol{x} +_E \boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) +_F f(\boldsymbol{x}')$,
- $\forall \boldsymbol{x} \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x})$.

Une application linéaire est encore appelée morphisme d'espaces vectoriels. *On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*[1] *On appelle* forme linéaire *une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace E dans $\mathbb{K}$.*

Remarque La première relation traduit le fait que f est un morphisme de groupe additif de $(E, +_E)$ dans $(F, +_F)$.[2] En particulier,

$$f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$$

et on dit que f transporte le neutre. Pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E,

$$f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$$

et on dit que f transporte le symétrique (voir à ce propos l'exercice 7, page 83). La seconde relation traduit la compatibilité de l'application f avec les deux lois externes $\cdot_E$ et $\cdot_F$.

---

[1] On note cet ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ s'il n'y a aucune ambiguïté sur le corps $\mathbb{K}$. Une application linéaire est aussi appelée homomorphisme d'espaces vectoriels.

[2] Voir à ce sujet la définition 2.33 d'un morphisme d'ensembles structurés en page 62.

Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel[3] puisque pour tous $f,g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $\alpha f+\beta g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. En effet, pour tout $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \in E^2$,

$$\begin{aligned}
(\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{x}+_E\boldsymbol{x}') &= \alpha\cdot_F f(\boldsymbol{x}+_E\boldsymbol{x}')+_F\beta\cdot_F g(\boldsymbol{x}+_E\boldsymbol{x}')\\
&= \alpha\cdot_F\big(f(\boldsymbol{x})+_F f(\boldsymbol{x}')\big)+_F\beta\cdot_F\big(g(\boldsymbol{x})+_F g(\boldsymbol{x}')\big)\\
&= \alpha\cdot_F f(\boldsymbol{x})+_F\beta\cdot_F g(\boldsymbol{x})+_F\alpha\cdot_F f(\boldsymbol{x}')+_F\beta\cdot_F g(\boldsymbol{x}')\\
&= (\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{x})+_F(\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{x}').
\end{aligned}$$

Pour tout $\boldsymbol{x}\in E$ et pour tout $\gamma\in\mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
(\alpha f+\beta g)(\gamma\cdot_E\boldsymbol{x}) &= \alpha\cdot_F f(\gamma\cdot_E\boldsymbol{x})+_F\beta\cdot_F g(\gamma\cdot_E\boldsymbol{x})\\
&= \alpha\cdot_F\big(\gamma\cdot_F f(\boldsymbol{x})\big)+_F\beta\cdot_F\big(\gamma\cdot_F g(\boldsymbol{x})\big)\\
&= \gamma\cdot_F\big(\alpha\cdot_F f(\boldsymbol{x})+_F\beta\cdot_F g(\boldsymbol{x})\big)\\
&= \gamma\cdot_F\big((\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{x})\big).
\end{aligned}$$

Si E et F sont de dimensions finies alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ est aussi de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}\big(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)\big)=\dim_{\mathbb{K}}(E)\times\dim_{\mathbb{K}}(F)$. Nous admettons pour l'instant ce résultat. Il sera démontré au chapitre suivant (voir page 439).

Composition d'applications linéaires

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tout $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et pour tout $g\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,G)$, $g\circ f\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,G)$. En effet, pour tout $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\in E^2$,

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(\boldsymbol{x}+_E\boldsymbol{x}') &= g\big(f(\boldsymbol{x}+_E\boldsymbol{x}')\big)\\
&= g\big(f(\boldsymbol{x})+_F f(\boldsymbol{x}')\big) && \text{par linéarité de } f\\
&= g\big(f(\boldsymbol{x})\big)+_G g\big(f(\boldsymbol{x}')\big) && \text{par linéarité de } g\\
&= (g\circ f)(\boldsymbol{x})+_G(g\circ f)(\boldsymbol{x}').
\end{aligned}$$

Pour tout $\boldsymbol{x}\in E$ et pour tout $\alpha\in\mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(\alpha\cdot_E\boldsymbol{x}) &= g\big(f(\alpha\cdot_E\boldsymbol{x})\big)\\
&= g\big(\alpha\cdot_F f(\boldsymbol{x})\big) && \text{par linéarité de } f\\
&= \alpha\cdot_G g\big(f(\boldsymbol{x})\big) && \text{par linéarité de } g\\
&= \alpha\cdot_G(g\circ f)(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

On a la caractérisation suivante.

---

[3] Rappelons que l'ensemble des applications de E vers F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (voir page 312). L'ensemble des applications linéaires de E vers F en constitue un sous-espace vectoriel. Il possède ainsi lui-même une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

PROPOSITION 9.1 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E vers F. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit une application linéaire est que, pour tous vecteurs $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ de E et pour tous scalaires α, β de $\mathbb{K}$,*

$$f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E \beta \cdot_E \boldsymbol{x}') = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x}) +_F \beta \cdot_F f(\boldsymbol{x}').$$

Démonstration Supposons f linéaire. Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ deux vecteurs de E et α, β deux scalaires de $\mathbb{K}$. On a :

$$f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E \beta \cdot_E \boldsymbol{x}') = f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x}) +_F f(\beta \cdot_E \boldsymbol{x}') = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x}) +_F \beta \cdot_F f(\boldsymbol{x}').$$

Réciproquement, en prenant $\alpha = \beta = 1_{\mathbb{K}}$ et $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \in E^2$ et en utilisant que $\boldsymbol{x} = 1_{\mathbb{K}} \cdot_E \boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}' = 1_{\mathbb{K}} \cdot_E \boldsymbol{x}'$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} +_E \boldsymbol{x}') &= f(1_{\mathbb{K}} \cdot_E \boldsymbol{x} + 1_{\mathbb{K}} \cdot_E \boldsymbol{x}') \\ &= 1_{\mathbb{K}} \cdot_F f(\boldsymbol{x}) +_F 1_{\mathbb{K}} \cdot_F f(\boldsymbol{x}') \; = \; f(\boldsymbol{x}) +_F f(\boldsymbol{x}') \end{aligned}$$

car $1_{\mathbb{K}} \cdot_F f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ et $1_{\mathbb{K}} \cdot_F f(\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}')$. En prenant $\beta = 0_{\mathbb{K}}$, on a

$$f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E 0_{\mathbb{K}} \cdot_E \boldsymbol{x}') = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x}) +_F 0_{\mathbb{K}} \cdot_F f(\boldsymbol{x}') = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x}) + \mathbf{0}_F = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x})$$

car $0_{\mathbb{K}} \cdot_F f(\boldsymbol{x}') = \mathbf{0}_F$. Or, puisque $0_{\mathbb{K}} \cdot_E \boldsymbol{x}' = \mathbf{0}_E$,

$$f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E 0_{\mathbb{K}} \cdot_E \boldsymbol{x}') = f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} + \mathbf{0}_E) = f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x}).$$

On a ainsi montré que $f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x})$. □

Exemples

1. L'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ associe son polynôme dérivé $P' \in \mathbb{K}[X]$ est un morphisme de l'espace $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même puisque pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$(\alpha \cdot P + \beta \cdot Q)' = \alpha \cdot P' + \beta \cdot Q'.$$

2. Soit $a \in \mathbb{K}$. L'application $f : x \in \mathbb{K} \longmapsto ax \in \mathbb{K}$ est une application linéaire[4] car pour tous $x, x' \in \mathbb{K}$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$f(\alpha x + \beta x') = a(\alpha x + \beta x') = \alpha(ax) + \beta(ax') = \alpha f(x) + \beta f(x').$$

En revanche, l'application $f : x \in \mathbb{K} \longmapsto x^2 \in \mathbb{K}$ n'est pas linéaire car

$$f(x + x') = (x + x')^2 = x^2 + (x')^2 + 2xx' \neq f(x) + f(x') \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } x' \neq 0.$$

[4] On peut d'ailleurs montrer que toute application linéaire de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est nécessairement de la forme $x \longmapsto ax$ avec a un élément de $\mathbb{K}$.

DÉFINITION 9.2 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

✗ *Soit f une application linéaire de E dans F. Si f est bijective alors on dit que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels et que E et F sont isomorphes par f.*

✗ *On appelle endomorphisme de E une application linéaire de l'espace E dans lui-même. On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.*

✗ *En particulier, si un endomorphisme f est bijectif alors on dit que f est un automorphisme de l'espace E. On note $\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.*

Exemple L'application Ψ qui à un couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe le scalaire $x+\mathrm{i}y$ de $\mathbb{C}$ est un morphisme du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}^2$ dans le $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$[(5)] puisque d'une part, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(x',y') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\Psi\big((x,y) +_{\mathbb{R}^2} (x',y')\big) &= \Psi\big((x+x', y+y')\big) \\ &= (x+x') + \mathrm{i}(y+y') \;=\; x + \mathrm{i}y + x' + \mathrm{i}y' \\ &= \Psi\big((x,y)\big) +_{\mathbb{C}} \Psi\big((x',y')\big),\end{aligned}$$

et d'autre part, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Psi\big(\alpha \cdot_{\mathbb{R}^2} (x,y)\big) &= \Psi\big((\alpha x, \alpha y)\big) \\ &= \alpha x + \mathrm{i}(\alpha y) \;=\; \alpha(x+\mathrm{i}y) \\ &= \alpha \times_{\mathbb{C}} \Psi\big((x,y)\big).\end{aligned}$$

Remarquons que l'application $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est injective. En effet, de

$$\Psi\big((x,y)\big) = \Psi\big((x',y')\big),$$

c'est-à-dire de $x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y'$, il vient immédiatement $x = x'$ et $y = y'$, c'est-à-dire $(x,y) = (x',y')$. L'application $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est aussi surjective puisqu'à tout $z \in \mathbb{C}$ on peut associer le couple $(\mathcal{R}\mathrm{e}(z), \mathcal{I}\mathrm{m}(z)) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\Psi\big((\mathcal{R}\mathrm{e}(z), \mathcal{I}\mathrm{m}(z))\big) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z) + \mathrm{i} \times \mathcal{I}\mathrm{m}(z) = z.$$

L'application $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est donc bijective. C'est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$. Les deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont donc isomorphes.

Structure d'anneau sur $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Muni de l'addition, l'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ possède une structure de groupe commutatif. Il possède la loi $\circ$ comme seconde loi de composition interne : $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ pour tous $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. On vérifie les propriétés suivantes :

[(5)] On rappelle que $\mathbb{C}$, qui est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, possède aussi une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Nous avons privilégié ici la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel car, d'après la définition 9.1, les espaces de départ et d'arrivée doivent être définis sur le même corps.

- la loi $\circ$ est associative : pour tous $f, g, h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$,

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h);$$

- la loi $\circ$ est distributive par rapport à la loi $+$: pour tous $f, g, h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$,

$$f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h) \quad \text{et} \quad (g + h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f);$$

- l'application id_E appartient à $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. C'est l'élément neutre de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ pour la loi $\circ$ car $f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ f = f$ pour tout $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

En revanche, la loi $\circ$ n'est en général pas commutative (sauf si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = 1$). L'ensemble structuré $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ est donc un anneau en général non commutatif. Remarquons que la composée de deux endomorphismes peut être nulle sans que l'un des deux endomorphismes le soit. Considérons par exemple un espace E de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ et f, g deux endomorphismes de E définis par

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 \quad \text{et} \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \mathbf{0}_E \\ g(\boldsymbol{e}_1) = \mathbf{0}_E \quad \text{et} \quad g(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

On a $(g \circ f)(\boldsymbol{e}_1) = (g \circ f)(\boldsymbol{e}_2) = \mathbf{0}_E$ et on en déduit que $(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$. En effet, pour tout $\boldsymbol{x} \in E$,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\boldsymbol{x}) &= g(f(\boldsymbol{x})) = g(f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)) \\ &= x_1 g(f(\boldsymbol{e}_1)) + x_2 g(f(\boldsymbol{e}_2)) = \mathbf{0}_E. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'anneau $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ possède des diviseurs de zéros. Ainsi, $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ est un anneau non commutatif et non intègre pour $\dim_{\mathbb{K}}(E) \geqslant 2$

Isomorphisme réciproque

Proposition 9.2 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F. Si f est bijective alors son application réciproque f^{-1} est une application linéaire de F vers E, autrement dit, pour tous vecteurs $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$ de F et pour tous scalaires α, β de $\mathbb{K}$*

$$f^{-1}(\alpha \cdot_F \boldsymbol{y} +_F \beta \cdot_F \boldsymbol{y}') = \alpha \cdot_E f^{-1}(\boldsymbol{y}) +_E \beta \cdot_E f^{-1}(\boldsymbol{y}').$$

Démonstration Soit $\boldsymbol{y}$ (respectivement $\boldsymbol{y}'$) un vecteur de F. Il existe un unique vecteur $\boldsymbol{x}$ (resp. $\boldsymbol{x}'$) de E tel que $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ (resp. $f(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{y}'$) ou de manière équivalente tel que $\boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{y})$ (resp. $\boldsymbol{x}' = f^{-1}(\boldsymbol{y}')$). On a

$$\begin{aligned} \alpha \cdot_F \boldsymbol{y} +_F \beta \cdot_F \boldsymbol{y}' &= \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x}) +_F \beta \cdot_F f(\boldsymbol{x}') \\ &= f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E \beta \cdot_E \boldsymbol{x}') \quad \text{car } f \text{ est linéaire.} \end{aligned}$$

Le vecteur $\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E \beta \cdot_E \boldsymbol{x}'$ de E est donc un antécédent par l'application f du vecteur $\alpha \cdot_F \boldsymbol{y} +_F \beta \cdot_F \boldsymbol{y}'$ de F. La propriété de bijectivité de f nous assure l'unicité d'un tel antécédent. Par conséquent, on peut écrire

$$f^{-1}(\alpha \cdot_F \boldsymbol{y} +_F \beta \cdot_F \boldsymbol{y}') = \alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E \beta \cdot_E \boldsymbol{x}'.$$

On en déduit que

$$f^{-1}(\alpha \cdot_F \boldsymbol{y} +_F \beta \cdot_F \boldsymbol{y}') = \alpha \cdot_E f^{-1}(\boldsymbol{y}) +_E \beta \cdot_E f^{-1}(\boldsymbol{y}')$$

puisque $\boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{y})$ et $\boldsymbol{x}' = f^{-1}(\boldsymbol{y}')$. $\square$

Remarque Considérons le cas où $F = E$. Alors, muni de la loi de composition interne $\circ$, l'ensemble $\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E)$ possède une structure de groupe (en général non commutatif, sauf si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = 1$). L'ensemble structuré $(\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ s'appelle *groupe linéaire* de E, d'où les initiales.

Application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

✗ Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. L'application $f : \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \longmapsto ax_1 + bx_2 \in \mathbb{K}$ est une application linéaire. En effet, pour tous $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2')$ appartenant à $\mathbb{K}^2$ et pour tous α, β appartenant à $\mathbb{K}$, $\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}' = (\alpha x_1 + \beta x_1', \alpha x_2 + \beta x_2')$, d'où

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}') &= a(\alpha x_1 + \beta x_1') + b(\alpha x_2 + \beta x_2') \\ &= \alpha(ax_1 + bx_2) + \beta(ax_1' + bx_2') \;=\; \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{x}'). \end{aligned}$$

✗ Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. L'application $f : x \in \mathbb{K} \longmapsto (ax, bx) \in \mathbb{K}^2$ est une application linéaire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{K}$ et pour tout $x' \in \mathbb{K}$,

$$f(x + x') = (a(x + x'), b(x + x')) = (ax, bx) + (ax', bx') = f(x) + f(x'),$$

et pour tous $x \in \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$f(\alpha x) = (a(\alpha x), b(\alpha x)) = \alpha \cdot (ax, bx) = \alpha \cdot f(x).$$

✗ Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Considérons l'application

$$f : \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \longmapsto (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) \in \mathbb{K}^2.$$

C'est une application linéaire. En effet, d'une part, pour tous vecteurs $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2')$ de $\mathbb{K}^2$ on a $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = (x_1 + x_1', x_2 + x_2')$, d'où

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') &= (a(x_1 + x_1') + b(x_2 + x_2'), c(x_1 + x_1') + d(x_2 + x_2')) \\ &= (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) + (ax_1' + bx_2', cx_1' + dx_2') \\ &= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}'). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ on a $\alpha \cdot \boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2)$, d'où

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) &= (a(\alpha x_1) + b(\alpha x_2), c(\alpha x_1) + d(\alpha x_2)) \\ &= \alpha \cdot (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) \;=\; \alpha \cdot f(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

On vérifie sur le même principe le résultat suivant.

Proposition 9.3 *Considérons l'application f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ qui au vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$ associe le vecteur $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{K}^n$ avec*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\ & \vdots & \\ y_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p \end{array}\right.$$

où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Alors, f est une application linéaire. On note $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

9.1.2 Propriétés

Proposition 9.4 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Pour tous vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{v}_k$ de E et pour tous scalaires α_1, α_2, $\ldots$, α_k de $\mathbb{K}$,*

$$f(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \ldots + \alpha_k f(\boldsymbol{v}_k).$$

Démonstration Elle s'effectue par récurrence sur k. La rédaction est laissée en exercice. □

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 9.1 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On suppose E de dimension finie et on désigne par $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de E. Pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E,*

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_p f(\boldsymbol{e}_p)$$

où x_1, x_2, $\ldots$, x_p appartenant à $\mathbb{K}$ sont les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de E se décomposant dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ comme suit : $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_p\boldsymbol{e}_p$. En appliquant f, on obtient

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_p\boldsymbol{e}_p) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_p f(\boldsymbol{e}_p) \end{aligned}$$

où on a utilisé le résultat de la proposition 9.4 □

Détermination d'une application linéaire par son action sur une base

Une conséquence du corollaire 9.1 est qu'une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base. Pour s'en convaincre, considérons deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F, avec E de dimension finie[(6)] muni d'une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, et deux applications linéaires f, g de E dans F telles que

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad f(e_i) = g(e_i). \tag{1}$$

Montrons que f et g sont alors identiques, c'est-à-dire montrons que $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de E de coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_p$ dans $\mathcal{B}$. D'après le corollaire 9.1,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_p f(e_p), \\ g(\boldsymbol{x}) &= x_1 g(e_1) + x_2 g(e_2) + \ldots + x_p g(e_p), \end{aligned}$$

On déduit alors de (1) que

$$f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}).$$

Autrement dit, si deux applications linéaires agissent de la même manière sur les vecteurs d'une base alors elles sont nécessairement identiques. Il est clair que la réciproque est vraie. On a donc l'équivalence suivante

$$\big(\,\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad f(e_i) = g(e_i)\,\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\,\forall \boldsymbol{x} \in E \quad f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\,\big).$$

Ainsi, pour connaître une application linéaire, il est nécessaire et suffisant de connaître son action sur une base (quelconque) de l'ensemble de départ.

9.1.3 Endomorphismes particuliers

Étant donné un endomorphisme f de E, on convient de noter, pour tout entier k non nul,

$$f^k \overset{\text{not.}}{=} \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

On convient que $f^0 = \mathrm{id}_E$ où id_E désigne l'application identité de E

> **Définition 9.3** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe un entier naturel non nul k tel que $f^k = 0$.*

Ainsi, un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace E est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_E$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$. Bien évidemment, si $f^k = 0$ alors, en composant par f, on en déduit $f^{k+1} = 0$, et plus généralement,

$$\forall k' \geqslant k \quad f^{k'} = 0.$$

L'entier k n'est donc pas le plus grand indice pour lequel $f^k = 0$. Il n'est d'ailleurs pas nécessairement le plus petit. On définit l'*indice de nilpotence de f* comme suit :

$$p \overset{\text{déf.}}{=} \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^k = 0\}.$$

---

(6) Le cas où E est de dimension infinie se démontre sur le même modèle.

Si l'espace E est de dimension finie alors on peut montrer que l'indice de nilpotence d'un endomorphisme de E est nécessairement inférieur ou égal à la dimension de l'espace E. C'est le but de l'exercice suivant.

EXERCICE 1 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme nilpotent de E, d'indice de nilpotence p.
1 - Montrer qu'il existe $\tilde{\boldsymbol{x}} \in E$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \neq \mathbf{0}_E$, tel que $f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \neq \mathbf{0}_E$.
2 - Montrer que la famille $\mathcal{F} = \big(\tilde{\boldsymbol{x}}, f(\tilde{\boldsymbol{x}}), \dots, f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})\big)$ est libre dans E.
3 - En déduire que l'indice de nilpotence p est inférieur ou égal à n.

Exemple Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur $\boldsymbol{y} = (2x_1 + x_2, -3x_1 - x_2 + x_3, x_1 - x_3)$. Pour montrer que f possède la propriété de nilpotence, il suffit de trouver un entier k (nécessairement compris entre 1 et 3 d'après l'exercice 1) tel que

$$f^k(\boldsymbol{e}_1) = f^k(\boldsymbol{e}_2) = f^k(\boldsymbol{e}_3) = (0,0,0)$$

où $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$ désignent trois vecteurs d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. En effet, si la propriété est vraie pour les trois vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$, elle est nécessairement vraie pour n'importe quel vecteur $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^3$ puisque, en notant α_1, α_2, α_3 les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la base $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} f^k(\boldsymbol{x}) &= f^k(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= \alpha_1 f^k(\boldsymbol{e}_1) + \alpha_2 f^k(\boldsymbol{e}_2) + \alpha_3 f^k(\boldsymbol{e}_3) = (0,0,0) \end{aligned}$$

où on a utilisé que $f^k(\boldsymbol{e}_1) = f^k(\boldsymbol{e}_2) = f^k(\boldsymbol{e}_3) = (0,0,0)$. Comme nous avons le choix de la base, prenons la base canonique. On a :

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{e}_1) = (2,-3,1), \quad f^2(\boldsymbol{e}_1) = (1,-2,1), \quad f^3(\boldsymbol{e}_1) = (0,0,0), \\ &f(\boldsymbol{e}_2) = (1,-1,0), \quad f^2(\boldsymbol{e}_2) = (1,-2,1), \quad f^3(\boldsymbol{e}_2) = (0,0,0), \\ &f(\boldsymbol{e}_3) = (0,1,-1), \quad f^2(\boldsymbol{e}_3) = (1,-2,1). \quad f^3(\boldsymbol{e}_3) = (0,0,0). \end{aligned}$$

L'indice de nilpotence de f est 3.

Projections et symétries vectorielles

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E (c'est-à-dire : $E = F \oplus G$). Ainsi, pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E, il existe un unique couple $(\boldsymbol{x}_F, \boldsymbol{x}_G)$ de $F \times G$ tel que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G$.

Considérons alors l'application qui au vecteur $\boldsymbol{x}$ de E associe le vecteur $\boldsymbol{x}_F$ de F. Notons p cette application. Montrons qu'elle est linéaire. Considérons pour cela deux vecteurs $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ de E et deux scalaires α, β de $\mathbb{K}$. Le vecteur $\boldsymbol{x}$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G \tag{2}$$

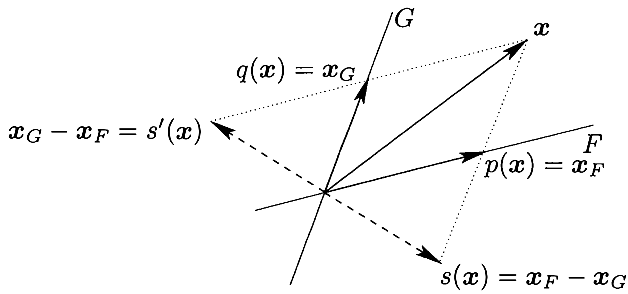


Fig. 1 Illustration des projections et symétries vectorielles.

où $(\boldsymbol{x}_F, \boldsymbol{x}_G) \in F \times G$. De même, le vecteur $\boldsymbol{x}'$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'_F + \boldsymbol{x}'_G \tag{3}$$

où $(\boldsymbol{x}'_F, \boldsymbol{x}'_G) \in F \times G$. On a donc, par définition de p, $p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_F$ et $p(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}'_F$. Déterminons à présent l'image par p du vecteur $\boldsymbol{x}'' = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}'$. Utilisant (2) et (3), on a :

$$\boldsymbol{x}'' = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}' = \alpha(\boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G) + \beta(\boldsymbol{x}'_F + \boldsymbol{x}'_G) = \boldsymbol{x}''_F + \boldsymbol{x}''_G$$

où les deux vecteurs $\boldsymbol{x}''_F = \alpha\boldsymbol{x}_F + \beta\boldsymbol{x}'_F$ et $\boldsymbol{x}''_G = \alpha\boldsymbol{x}_G + \beta\boldsymbol{x}'_G$ appartiennent respectivement à F et à G, précisément car F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Par définition de p, l'image par p du vecteur $\boldsymbol{x}''$ de E est donc le vecteur $\boldsymbol{x}''_F$ de F, c'est-à-dire : $p(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}') = \alpha\boldsymbol{x}_F + \beta\boldsymbol{x}'_F$. D'où, puisque $\boldsymbol{x}_F = p(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{x}'_F = p(\boldsymbol{x}')$,

$$p(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}') = \alpha p(\boldsymbol{x}) + \beta p(\boldsymbol{x}),$$

ce qui montre que p est linéaire. C'est donc un endomorphisme de E. On l'appelle *projection vectorielle sur F parallèlement à G*[7] et on a immédiatement la propriété suivante :

$$p \circ p = p.$$

Montrons-la. Soit $\boldsymbol{x} \in E$. Par définition de p, si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G$ avec $\boldsymbol{x}_F \in F$ et $\boldsymbol{x}_G \in G$ alors $p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_F$. Quelle est l'image par p du vecteur $p(\boldsymbol{x})$? Il suffit de remarquer que $p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_F + \mathbf{0}_E$ avec $\boldsymbol{x}_F \in F$ et $\mathbf{0}_E \in G$. Par définition de p, l'image par p du vecteur $p(\boldsymbol{x})$ est donc le vecteur $\boldsymbol{x}_F$, c'est-à-dire :

$$p(p(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}_F.$$

On a donc : $p(p(\boldsymbol{x})) = p(\boldsymbol{x})$ car $\boldsymbol{x}_F = p(\boldsymbol{x})$, ce qui montre que $p \circ p = p$.

---

[7] On dit aussi *projection vectorielle de base F et de direction G*.

En procédant de façon analogue, on montre que l'application qui au vecteur $\boldsymbol{x}$ de E associe le vecteur $\boldsymbol{x}_G$ de G constitue aussi un endomorphisme de E. Notons-la q. On l'appelle *projection vectorielle sur G parallèlement à F*. Elle se déduit de la projection vectorielle p. En effet, par définition de p et q, on a :

$$\forall \boldsymbol{x} \in E \quad \boldsymbol{x} = p(\boldsymbol{x}) + q(\boldsymbol{x}), \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \mathrm{id}_E = p + q.$$

On en déduit :

$$q = \mathrm{id}_E - p. \tag{4}$$

On a aussi la propriété suivante : $q \circ q = q$, qui se démontre en mimant la démonstration de la propriété $p \circ p = p$ donnée plus haut.[8] De plus,

$$p \circ q = q \circ p = 0.$$

Pour montrer cette propriété, il suffit de remplacer q par $\mathrm{id}_E - p$. Par exemple,

$$p \circ q = p \circ (\mathrm{id}_E - p) = p \circ \mathrm{id}_E - p \circ p = p - p = 0$$

où on a utilisé que $p \circ p = p$. On dit que p et q sont les projections vectorielles associées à la décomposition $E = F \oplus G$.

L'application notée s qui à $\boldsymbol{x}$ de E associe $\boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{x}_G$ constitue aussi un endomorphisme de E. On l'appelle *symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G*.[9] Déterminons $s \circ s$. Soit $\boldsymbol{x} \in E$. Puisque $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G$ avec $\boldsymbol{x}_F \in F$ et $\boldsymbol{x}_G \in G$, on a, par définition de s, $s(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{x}_G$. Décomposons à présent le vecteur $s(\boldsymbol{x})$ sur F et G. D'après l'égalité ci-dessus, $s(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_F + (-\boldsymbol{x}_G)$ avec $\boldsymbol{x}_F \in F$ et $-\boldsymbol{x}_G \in G$. Ainsi, par définition de s,

$$s(s(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}_F - (-\boldsymbol{x}_G) = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G.$$

Or, $\boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G = \boldsymbol{x}$. On a donc : $s(s(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$, montrant ainsi que :

$$s \circ s = \mathrm{id}_E.$$

La symétrie vectorielle s se déduit de la projection vectorielle p. Vérifions-le. Soit $\boldsymbol{x} \in E$. Utilisant (4), on a :

$$s(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{x}_G = p(\boldsymbol{x}) - q(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}) - (\mathrm{id}_E - p)(\boldsymbol{x}) = 2p(\boldsymbol{x}) - \mathrm{id}_E(\boldsymbol{x}).$$

On a ainsi obtenu :

$$s = 2p - \mathrm{id}_E.$$

De même, l'application notée s' qui à $\boldsymbol{x}$ de E associe $\boldsymbol{x}_G - \boldsymbol{x}_F$ constitue aussi un endomorphisme de E. On l'appelle *symétrie vectorielle par rapport à G parallèlement à F*. Elle vérifie $s' \circ s' = \mathrm{id}_E$ et $s' = 2q - \mathrm{id}_E = -s$.

---

[8] Elle se démontre aussi en utilisant que $q = \mathrm{id}_E - p$. En effet,

$$q \circ q = (\mathrm{id}_E - p) \circ (\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E - \mathrm{id}_E \circ p - p \circ \mathrm{id}_E + p \circ p.$$

Or, $\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$, $\mathrm{id}_E \circ p = p \circ \mathrm{id}_E = p$ et $p \circ p = p$. Ainsi, $q \circ q = \mathrm{id}_E - p = q$.

[9] On dit aussi *symétrie vectorielle de base F et de direction G*.

Plus généralement, la définition suivante permet de définir les notions de projections et symétries vectorielles indépendamment de toute décomposition en somme directe comme nous venons de le faire à l'instant.

DÉFINITION 9.4 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

✗ *Un endomorphisme p de E est un projecteur de E si $p \circ p = p$, autrement dit si $p(p(\boldsymbol{x})) = p(\boldsymbol{x})$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$.*

✗ *Un endomorphisme s de E est une involution linéaire de E si $s \circ s = \mathrm{id}_E$, autrement dit si $s(s(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$.*

✗ *Soit $k \in \mathbb{K}^*$. Un endomorphisme h de E est une homothétie vectorielle de rapport k si $h = k\,\mathrm{id}_E$, autrement dit si $h(\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$.*

Étant donnés E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces supplémentaires dans E, il est clair que la projection vectorielle sur F (respectivement sur G) parallèlement à G (resp. à F) est un projecteur de E. Réciproquement, nous verrons (ceci fait l'objet de l'exercice 2, page 385) qu'un projecteur p de E est une projection vectorielle sur $\mathrm{Im}\,p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,p$. Les deux sous-espaces $\mathrm{Im}\,p$ et $\mathrm{Ker}\,p$ font l'objet de la section 9.2.

De même, il est clair que la symétrie vectorielle par rapport à F (respectivement à G) parallèlement à G (resp. à F) est une involution linéaire de E et, réciproquement, nous verrons à l'exercice 2 donné en page 385, qu'une involution linéaire s de E est une symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Inv}\,s$ parallèlement à $\mathrm{Opp}\,s$. Les deux sous-espaces $\mathrm{Inv}\,s$ et $\mathrm{Opp}\,s$ seront définis en page 384.

De part leurs définitions, une involution linéaire s de E et une homothétie vectorielle h (de E dans E) de rapport $k \in \mathbb{K}^*$ constituent des bijections de E. Ce sont des automorphismes de E, ce que l'on note $s, h \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E)$ et on a :

$$s^{-1} = s \quad \text{et} \quad h^{-1} = \frac{1}{k}\,\mathrm{id}_E.$$

Remarque Il est à noter que si p est un projecteur de E alors $s = 2p - \mathrm{id}_E$ est une involution linéaire de E. En effet,

$$\begin{aligned} s \circ s &= (2p - \mathrm{id}_E) \circ (2p - \mathrm{id}_E) \\ &= 2p \circ 2p - 2p \circ \mathrm{id}_E - \mathrm{id}_E \circ 2p + \mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E \\ &= 4(p \circ p) - 2p - 2p + \mathrm{id}_E \;=\; 4p - 4p + \mathrm{id}_E \;=\; \mathrm{id}_E \end{aligned}$$

où on a utilisé que $p \circ p = p$ car p est un projecteur de E. Réciproquement, si s est une involution linéaire de E alors les deux endomorphismes

$$p = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + s) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E - s)$$

sont des projecteurs de E. Par exemple,

$$p \circ p = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + s) \circ \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + s) = \frac{1}{4}(\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E + \mathrm{id}_E \circ s + s \circ \mathrm{id}_E + s \circ s).$$

Or, $\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$, $\mathrm{id}_E \circ s = s \circ \mathrm{id}_E = s$ et $s \circ s = \mathrm{id}_E$ car s est une involution linéaire de E. Ainsi,

$$p \circ p = \frac{1}{4}(\mathrm{id}_E + s + s + \mathrm{id}_E) = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E) = p.$$

On vérifie de la même manière que $q \circ q = q$.

9.2 Image et noyau

9.2.1 Image d'une application linéaire

Soient f une application de E dans F et A un sous-ensemble de E. On rappelle (voir la définition 2.15, page 36) que l'image (directe) par f de A, que l'on note $f(A)$, est le sous-ensemble de F défini comme suit :

$$f(A) \overset{déf.}{=} \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in A\}.$$

Si l'ensemble A ne possède aucune structure algébrique particulière et si f est une application quelconque alors, *a priori*, l'ensemble $f(A)$ ne possède lui non plus aucune structure algébrique remarquable. En revanche, la situation est différente si A possède une structure de sous-espace vectoriel et si f est une application linéaire. On a le résultat suivant.

PROPOSITION 9.5 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si A est un sous-espace vectoriel de E et si f est une application linéaire de E dans F alors $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration L'ensemble $f(A)$ est non vide puisque le sous-espace vectoriel A est non vide (par définition d'un sous-espace vectoriel). Soient $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ deux vecteurs de $f(A)$ et α, β deux scalaires. Montrons que le vecteur $\alpha\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2$ appartient à $f(A)$. Puisque $\boldsymbol{y}_1 \in f(A)$, il existe $\boldsymbol{x}_1 \in A$ tel que $\boldsymbol{y}_1 = f(\boldsymbol{x}_1)$. De même, puisque $\boldsymbol{y}_2 \in f(A)$, il existe $\boldsymbol{x}_2 \in A$ tel que $\boldsymbol{y}_2 = f(\boldsymbol{x}_2)$. On a alors :

$$\alpha\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2 = \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + \beta f(\boldsymbol{x}_2) = f(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2)$$

car f est linéaire. De plus, le vecteur $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ appartient à A puisque A est un sous-espace vectoriel de E. On a ainsi trouvé un vecteur appartenant à A, à savoir le vecteur $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$, qui a pour image le vecteur $\alpha\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2$ par f, ce qui montre que $\alpha\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2 \in f(A)$. □

On rappelle que l'*image de f* est le sous-ensemble $f(E)$ de F défini par :

$$f(E) \overset{déf.}{=} \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in E\}.$$

Lorsque f est linéaire, nous particularisons la notation comme suit :

$$\operatorname{Im} f \overset{not.}{=} f(E).$$

En appliquant la proposition précédente avec $A = E$, on obtient le résultat suivant.

COROLLAIRE 9.2 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F alors* $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

9.2.2 Noyau d'une application linéaire

Définissons à présent le noyau d'une application linéaire.

DÉFINITION 9.5 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. L'ensemble des vecteurs de E qui ont pour image $\mathbf{0}_F$ par f est appelé* noyau de f *et se note* $\operatorname{Ker} f$. *En d'autres termes,*

$$\operatorname{Ker} f \overset{\textit{déf.}}{=} \{\boldsymbol{x} \in E \mid f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_F\}.$$

D'après la définition 2.15 (voir page 36), le noyau de f est l'image réciproque par f du singleton $\{\mathbf{0}_F\}$, c'est-à-dire :

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{\mathbf{0}_F\}),$$

ce qui, rappelons-le, ne suppose en aucun cas que f soit bijective.

La propriété de linéarité de l'application f nous assure que l'ensemble $\operatorname{Ker} f$ n'est jamais vide. En effet, $\mathbf{0}_E \in \operatorname{Ker} f$.

De la linéarité de f, on déduit également la propriété suivante.

PROPOSITION 9.6 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F alors* $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration D'après la remarque précédente, le noyau est non vide. Soient $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ deux vecteurs de $\operatorname{Ker} f$ et α, β deux scalaires. Montrons que le vecteur $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ appartient à $\operatorname{Ker} f$. Utilisant la linéarité de f, on a :

$$f(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2) = \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + \beta f(\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0}_F$$

car $f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0}_F$ (les vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ appartiennent en effet à $\operatorname{Ker} f$). Le vecteur $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ a ainsi pour image par f le vecteur nul. Il appartient donc à $\operatorname{Ker} f$. □

Remarques

1. Si le noyau et l'image d'une application linéaire f de E dans F ont en commun la propriété de posséder une structure de sous-espace vectoriel, ils sont contenus en revanche dans des espaces différents :

- le noyau est contenu dans l'espace de départ (ici E),

- l'image est contenu dans l'espace d'arrivée (ici F).

Bien sûr, pour un endormorphisme f de E, noyau et image de f vivent dans le même espace (ici E).

2. Étant donnés trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F, G, une application linéaire f de E dans F et une application linéaire g de F dans G, on a l'inclusion suivante :

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f).$$

Montrons ce résultat. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur appartenant au noyau de f. On a donc $\boldsymbol{x} \in E$ et $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_F$, d'où, en appliquant g, $g(f(\boldsymbol{x})) = g(\mathbf{0}_F)$, c'est-à-dire : $(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_G$ car $g(\mathbf{0}_F) = \mathbf{0}_G$. L'image par $g \circ f$ du vecteur $\boldsymbol{x}$ est le vecteur nul de G. Cela signifie que le vecteur $\boldsymbol{x}$ appartient au noyau de $g \circ f$. L'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ s'en trouve démontrée. À toutes fins utiles, rappelons (voir page 41) que pour les images, l'inclusion est renversée :

$$\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g.$$

Exemples

1. Soit f un endomorphisme de E. Si f est nilpotent d'indice p alors

$$\operatorname{Ker} f^p = E \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f^p = \{\mathbf{0}_E\}.$$

2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces supplémentaires dans E. Si p désigne la projection vectorielle sur F parallèlement à G alors

$$\operatorname{Im} p = F \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} p = G.$$

Vérifions ces résultats. Commençons par montrer que $\operatorname{Im} p = F$.

- À l'évidence, $\operatorname{Im} p \subset F$. En effet, l'image par p d'un vecteur de E est son composant sur F. C'est donc un vecteur de F.
- Réciproquement, tout vecteur $\boldsymbol{x}_F$ de F est sa propre image par p (c'est-à-dire : $p(\boldsymbol{x}_F) = \boldsymbol{x}_F$) puisque $\boldsymbol{x}_F = \boldsymbol{x}_F + \mathbf{0}_E$ avec $\mathbf{0}_E \in G$, ce qui montre que $\boldsymbol{x}_F \in \operatorname{Im} p$. L'inclusion $F \subset \operatorname{Im} p$ s'en trouve démontrée. On a donc montré, par double inclusion, que $\operatorname{Im} p = F$.

Montrons à présent que $\operatorname{Ker} p = G$.

- Soit $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} p$. Le vecteur $\boldsymbol{x}$, qui appartient aussi à E, se décompose de manière unique sous la forme : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G$ avec $(\boldsymbol{x}_F, \boldsymbol{x}_G) \in F \times G$. On a donc : $p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_F$. Or, $p(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$ puisque $\boldsymbol{x}$ appartient au noyau de p. On a donc : $\boldsymbol{x}_F = \mathbf{0}_E$, d'où $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E + \boldsymbol{x}_G$, c'est-à-dire : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_G$, ce qui montre que $\boldsymbol{x}$ appartient à G puisqu'il est égal à un vecteur de G. L'inclusion $\operatorname{Ker} p \subset G$ est donc démontrée.
- Réciproquement, considérons un vecteur $\boldsymbol{x}_G$ dans G. On a alors : $\boldsymbol{x}_G = \mathbf{0}_E + \boldsymbol{x}_G$ avec $\mathbf{0}_E \in F$, ce qui signifie que $p(\boldsymbol{x}_G) = \mathbf{0}_E$, autrement dit que $\boldsymbol{x}_G \in \operatorname{Ker} p$ et montre que G est inclus dans $\operatorname{Ker} p$. Par double inclusion, on a montré que $\operatorname{Ker} p = G$.

De même, si q désigne la projection vectorielle sur G parallèlement à F alors

$$\operatorname{Im} q = G \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} q = F.$$

Invariants et opposés

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Alors l'ensemble noté $\operatorname{Inv} f$ appelé ensemble des *invariants* de f et l'ensemble noté $\operatorname{Opp} f$ appelé ensemble des *opposés* de f définis par

$$\operatorname{Inv} f \overset{\text{déf.}}{=} \{\boldsymbol{x} \in E \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Opp} f \overset{\text{déf.}}{=} \{\boldsymbol{x} \in E \mid f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}\}$$

sont des sous-espaces de E. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que $\operatorname{Inv} f = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ puisque, pour tout $\boldsymbol{x} \in E$,

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \iff f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E \iff (f - \mathrm{id}_E)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E.$$

En procédant de même, on vérifie que $\operatorname{Opp} f = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$. D'après la proposition 9.6, $\operatorname{Inv} f$ et $\operatorname{Opp} f$ sont bien deux sous-espaces de E.

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces supplémentaires dans E. Si s désigne la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G alors

$$\operatorname{Inv} s = F \quad \text{et} \quad \operatorname{Opp} s = G.$$

Commençons par vérifier la première égalité (ensembliste) $\operatorname{Inv} s = F$.

- Soit $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Inv} s$. Le vecteur $\boldsymbol{x}$ appartient à E et vérifie $s(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Puisque $E = F \oplus G$, $\boldsymbol{x}$ se décompose de manière unique sous la forme $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G$ avec $\boldsymbol{x}_F \in F$ et $\boldsymbol{x}_G \in G$. Par définition de s, on a : $s(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{x}_G$. L'égalité $s(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ s'écrit ainsi :

  $$\boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{x}_G = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G.$$

  D'où, après simplification par $\boldsymbol{x}_F$ de part et d'autre de l'égalité, $\boldsymbol{x}_G = \mathbf{0}_E$. Ainsi, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \mathbf{0}_E = \boldsymbol{x}_F$. Le vecteur $\boldsymbol{x}$ appartient donc à F puisqu'il est égal à un vecteur de F, ce qui montre l'inclusion $\operatorname{Inv} s \subset F$.
- Réciproquement, soit $\boldsymbol{x}_F$ un vecteur de F. On a : $\boldsymbol{x}_F = \boldsymbol{x}_F + \mathbf{0}_E$ avec $\mathbf{0}_E \in G$. Par définition de s, on a alors : $s(\boldsymbol{x}_F) = \boldsymbol{x}_F - \mathbf{0}_E = \boldsymbol{x}_F$, autrement dit : $\boldsymbol{x}_F \in \operatorname{Inv} s$. L'inclusion $F \subset \operatorname{Inv} s$ est donc démontrée. On a donc montré l'égalité ensembliste $\operatorname{Inv} s = F$.

Vérifions maintenant la deuxième égalité (ensembliste) $\operatorname{Opp} s = G$. la démonstration est très proche de la démonstration précédente.

- Soit $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Opp} s$. Ainsi, $\boldsymbol{x} \in E$ et $s(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$. Puisque $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G$ avec $\boldsymbol{x}_F \in F$ et $\boldsymbol{x}_G \in G$, et par définition de s, l'égalité $s(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$ s'écrit :

  $$\boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{x}_G = -(\boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G).$$

  D'où, en simplifiant cette fois-ci par $-\boldsymbol{x}_G$ à gauche et à droite de l'égalité, $\boldsymbol{x}_F = \mathbf{0}_E$. Ainsi, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E + \boldsymbol{x}_G = \boldsymbol{x}_G$. Le vecteur $\boldsymbol{x}$ est égal à un vecteur de G. Il appartient donc à G. L'inclusion $\operatorname{Opp} s \subset G$ est démontrée.

- Soit $\boldsymbol{x}_G \in G$. À l'évidence, $\boldsymbol{x}_G = \mathbf{0}_E + \boldsymbol{x}_G$ avec $\mathbf{0}_E \in F$. Ainsi, $s(\boldsymbol{x}_G) = \mathbf{0}_E - \boldsymbol{x}_G$ (par définition de s). On a donc : $s(\boldsymbol{x}_G) = -\boldsymbol{x}_G$, ce qui montre que $\boldsymbol{x}_G \in \operatorname{Opp} s$, l'inclusion $G \subset \operatorname{Opp} s$ s'en trouve démontrée.

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
1 - Soit p un projecteur de E. Montrer que

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p.$$

En déduire que p est la projection vectorielle sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.
2 - Soit s une involution linéaire de E. Montrer que

$$E = \operatorname{Inv} s \oplus \operatorname{Opp} s.$$

En déduire que s est la symétrie vectorielle par rapport à $\operatorname{Inv} s$ parallèlement à $\operatorname{Opp} s$.

Énonçons à présent une première caractérisation d'une application linéaire injective.

Proposition 9.7 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour qu'une application linéaire f de E dans F soit injective, il faut et il suffit que*

$$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}.$$

Démonstration Supposons f injective et montrons que $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur appartenant au noyau de f. Le vecteur $\boldsymbol{x}$ appartient ainsi à E et vérifie $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_F$. Remarquons que le vecteur $\mathbf{0}_F$ est l'image par f du vecteur $\mathbf{0}_E$. Ainsi, $f(\boldsymbol{x}) = f(\mathbf{0}_E)$ et on en déduit que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$ car f est injective, montrant ainsi que l'unique élément du noyau est le vecteur nul. Réciproquement, supposons $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$ et déduisons-en que f est injective. Considérons deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de E tels que $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ et montrons que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. On a les équivalences :

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) \quad \Longleftrightarrow \quad f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_F \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} f.$$

Le noyau $\operatorname{Ker} f$ étant réduit au vecteur nul, on a nécessairement $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{0}_E$, c'est-à-dire $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. □

Remarque Soit f une application quelconque (en particulier non nécessairement linéaire) de E dans F. Alors, f est surjective si et seulement si, $\operatorname{Im} f = F$. Cette caractérisation est vraie même si f n'est pas linéaire. Par contre, il n'y a équivalence entre « f est injective » et « $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$ » que lorsque f est linéaire.

L'exemple suivant illustre les notions de noyau et d'image pour un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exemple On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur

$$\boldsymbol{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3).$$

Cherchons le noyau et l'image de f. Commençons par chercher le noyau. Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{Ker} f$. On a :

$$f(\boldsymbol{x}) = (0,0,0).$$

Autrement dit, x_1, x_2, x_3 vérifient :

$$\begin{cases} 0 = x_1 + x_2 \\ 0 = x_2 + x_3 \\ 0 = x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases}.$$

Remarquons que la dernière équation est la somme des deux premières. On peut ainsi l'éliminer. On se ramène à un système de deux équations à trois inconnues (qui sont x_1, x_2 et x_3). Pour résoudre ce système, on doit privilégier deux inconnues (disons x_1 et x_2) et exprimer la solution en fonction de la troisième. On obtient $x_1 = x_3$ et $x_2 = -x_3$. Un vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ appartenant à $\operatorname{Ker} f$ s'écrit ainsi sous la forme générale :

$$\boldsymbol{x} = (x_3, -x_3, x_3) = x_3(1, -1, 1)$$

avec $x_3 \in \mathbb{R}$. Le noyau de f est donc la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur (non nul) $\boldsymbol{u} = (1, -1, 1)$, ce que l'on note :

$$\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}\boldsymbol{u} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{u} = (1, -1, 1).$$

C'est un sous-espace de dimension 1. Déterminons maintenant l'image de f. Soit $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ avec y_1, y_2, y_3 des réels, un vecteur appartenant à $\operatorname{Im} f$. Ses coordonnées vérifient la relation $y_3 - y_1 - y_2 = 0$ puisque

$$(x_1 + 2x_2 + x_3) - (x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) = 0.$$

C'est l'équation d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On a donc :

$$\operatorname{Im} f \subset \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 - y_1 - y_2 = 0\right\}, \tag{5}$$

ce qui signifie en particulier que l'image de f est un sous-espace de dimension au plus égale à 2. Remarquons que $\operatorname{Im} f$ contient les vecteurs $\boldsymbol{c}_1 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{c}_2 = (1,1,2)$ et $\boldsymbol{c}_3 = (0,1,1)$ qui sont les images des trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{c}_1 = f((1,0,0)), \quad \boldsymbol{c}_2 = f((0,1,0)) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c}_3 = f((0,0,1)).$$

Les trois vecteurs $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$ sont liés puisque $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_3$. Les deux vecteurs $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_3$ ne sont pas colinéaires ; ils forment ainsi une famille libre. On a donc :

$$\operatorname{Vect}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_3) \subset \operatorname{Im} f. \tag{6}$$

L'image de f est un sous-espace de dimension au moins égale à 2. En combinant (5) et (6) on en déduit que l'image de f est un sous-espace de dimension 2 et

$$\operatorname{Im} f = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 - y_1 - y_2 = 0\} = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_3).$$

L'application f n'est ni injective puisque $\operatorname{Ker} f \neq \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$, ni surjective puisque l'ensemble $\operatorname{Im} f$ est strictement inclus dans F.

Exercice 3 On considère l'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
1 - Montrer que $\mathcal{C} = (1, X-1, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2 - Soit f l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ lui associe

$$f(P) = 2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P'$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

9.3 Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

9.3.1 Image d'une famille génératrice

Soit f une application linéaire de E dans F. Considérons une famille $\mathcal{G}$ génératrice de l'espace de départ E. Son image par f, la famille $f(\mathcal{G})$, est génératrice de $\operatorname{Vect}(f(\mathcal{G}))$ qui est un sous-espace de l'espace d'arrivée F. Cet espace est en fait remarquable puisqu'il est égal à $\operatorname{Im} f$. On a en effet le résultat suivant.

Proposition 9.8 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E alors l'image par f de $\mathcal{G}$ est génératrice du sous-espace* $\operatorname{Im} f$ *de F. En d'autres termes,*

$$E = \operatorname{Vect}(\mathcal{G}) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{G})).$$

Démonstration Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de l'espace E. Supposons cette famille finie. La démonstration dans le cas d'une famille infinie ne pose pas de difficulté. Sa rédaction est laissée en exercice. Supposons $\mathcal{G} = (\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$. Montrons que tout vecteur de $\operatorname{Im} f$ s'écrit comme une combinaison linéaire de la famille $f(\mathcal{G}) = (f(\boldsymbol{v}_i))_{1 \leqslant i \leqslant m}$. Soit $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} f$. Il existe $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$. Or, E étant engendré par $\mathcal{G}$, il existe un m-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m.$$

On en déduit alors, en appliquant f, l'égalité suivante :

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m).$$

Par linéarité de f et puisque $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$, on obtient :

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + \alpha_m f(\boldsymbol{v}_m),$$

ce qui montre que $\boldsymbol{y}$ est combinaison linéaire des vecteurs $f(\boldsymbol{v}_1)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_m)$ et termine donc la démonstration. □

Exemple Reprenons l'exemple de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur (x_1, x_2, x_3) associe le vecteur

$$(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)\,.$$

En utilisant la proposition 9.8, il est maintenant facile de trouver une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Il suffit de calculer les images des vecteurs d'une famille génératrice de l'espace de départ $\mathbb{R}^3$. Naturellement, la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ vient à l'esprit, $\mathcal{B}_c = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. En notant

$$\boldsymbol{c}_1 = f((1,0,0)), \quad \boldsymbol{c}_2 = f((0,1,0)) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c}_3 = f((0,0,1)),$$

on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\big(f(\mathcal{B}_c)\big) = \operatorname{Vect}\big(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1))\big) \\ &= \operatorname{Vect}\big(\underbrace{(1,0,1)}_{=\boldsymbol{c}_1}, \underbrace{(1,1,2)}_{=\boldsymbol{c}_2}, \underbrace{(0,1,1)}_{=\boldsymbol{c}_3}\big) = \operatorname{Vect}\big(\underbrace{(1,0,1)}_{=\boldsymbol{c}_1}, \underbrace{(0,1,1)}_{=\boldsymbol{c}_3}\big) \end{aligned}$$

car $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_3$. On en déduit que $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} f) = 2$ car $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_3$ forment une famille libre.

Cas d'un espace de départ de dimension finie

Considérons un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie égale à p, F un $\mathbb{K}$-espace non nécessairement de dimension finie et f une application linéaire de E vers F. Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ une base de E. La famille $\mathcal{B}$ étant génératrice de E (puisque c'est une base), son image par f est génératrice de $\operatorname{Im} f$. On a donc :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)\big).$$

On en déduit l'égalité des dimensions :

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) = \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Vect}\left(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)\right)\big).$$

Bien évidemment, les p vecteurs $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)$ de l'espace d'arrivée F ne constituent pas nécessairement une famille libre dans F. Ainsi, la dimension du sous-espace $\operatorname{Im} f$ qu'ils engendrent est inférieure ou égale à p. Autrement dit,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) \leqslant p = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

On a ainsi démontré le corollaire suivant.

COROLLAIRE 9.3 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie alors* $\operatorname{Im} f$ *est de dimension finie et*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

Insistons sur le résultat de ce corollaire. Il stipule que si l'espace de départ E est de dimension finie alors le sous-espace $\operatorname{Im} f$ de l'espace d'arrivée F est non seulement un sous-espace de dimension finie (et ce indépendamment de la dimension de l'espace d'arrivée F, qui peut être finie ou infinie), mais de plus, sa dimension est inférieure ou égale à celle de l'espace de départ E. En résumé, on dit qu'une application linéaire ne peut pas « augmenter » la dimension.

9.3.2 Image d'une famille libre

Cherchons maintenant à répondre à la question suivante : l'image par une application linéaire d'une famille libre est-elle encore une famille libre ? Considérons pour cela une application linéaire f de E dans F et $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Par souci de simplification, supposons cette famille finie : $\mathcal{L} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_q)$. La famille $f(\mathcal{L}) = (f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_q))$ est-elle libre ? Bien sûr, si deux vecteurs de $\mathcal{L}$ ont même image par f alors, clairement, la famille $f(\mathcal{L})$ n'est pas libre puisqu'elle contient deux vecteurs identiques. Remarquons que cette situation n'arrive pas si f est injective. Revenons au cas général et essayons de voir à quelle condition les vecteurs de $f(\mathcal{L})$ forment une famille libre dans F. Partons de la relation de liaison :

$$\alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \ldots + \alpha_q f(\boldsymbol{v}_q) = \mathbf{0}_F$$

où α_1, α_2, ..., α_q appartiennent à $\mathbb{K}$. Remarquant que $\mathbf{0}_F = f(\mathbf{0}_E)$ et utilisant la linéarité de f, cette relation de liaison s'écrit :

$$f(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_q \boldsymbol{v}_q) = f(\mathbf{0}_E). \tag{7}$$

Sans aucune hypothèse supplémentaire sur l'application f, on ne peut rien en déduire. Si maintenant on suppose que f est injective alors de (7) il vient

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_q \boldsymbol{v}_q = \mathbf{0}_E,$$

d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_q = 0$ puisque $\mathcal{L}$ est précisément une famille libre dans E. On a ainsi démontré (dans le cas d'une famille finie libre) la proposition suivante.

PROPOSITION 9.9 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire injective de E dans F. Si $\mathcal{L}$ est une famille libre dans E alors $f(\mathcal{L})$ est une famille libre dans F.*

Démonstration Il reste à démontrer ce résultat dans le cas d'une famille $\mathcal{L}$ infinie libre dans E. C'est immédiat en appliquant le raisonnement précédent pour chaque famille finie extraite de $f(\mathcal{L})$. $\square$

Étant donnée une application linéaire f de E dans F, le fait que l'image par f d'une famille libre $\mathcal{L}$ de E soit libre dans F ne permet pas de conclure que f est injective. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^3$ qui à (x_1, x_2, x_3) associe $(x_1, x_2, 0)$. La famille $\mathcal{L} = \big((1,0,1),(0,1,1)\big)$ est libre dans $\mathbb{K}^3$ (c'est immédiat). Son image par f, la famille $f(\mathcal{L}) = \big((1,0,0),(0,1,0)\big)$, est libre aussi dans $\mathbb{K}^3$ et pourtant f n'est pas injective car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul :

$$f((0,0,1)) = (0,0,0).$$

En revanche, si l'image de toute famille libre de E est libre dans F alors, cette fois-ci, on peut en déduire que f est injective. Montrons-le. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur appartenant au noyau de f. On a donc $\boldsymbol{x} \in E$ et $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_F$. Considérons alors la famille notée $\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}$ constituée de l'unique vecteur $\boldsymbol{x}$. Autrement dit,

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}).$$

L'image par f de $\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}$ est la famille

$$f(\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}) = (f(\boldsymbol{x})) = (\mathbf{0}_F)$$

puisque $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f$. Utilisons à présent notre hypothèse, à savoir que l'image par f de toute famille libre dans E est libre dans F. Clairement, la famille $\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}$ ne peut pas être libre dans E car sinon son image par f serait elle-même libre dans F, ce qui n'est pas le cas. Si $\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}$ n'est pas libre, c'est qu'elle est liée. Comme elle est constituée d'un seul vecteur, cela signifie que ce vecteur est nécessairement nul. En d'autres termes, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$. Le noyau de f étant réduit au vecteur nul, f est donc injective.

L'image par une application linéaire d'une famille liée est-elle encore liée ?

Pour répondre à cette question, considérons une application linéaire f de E dans F, avec E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $\mathcal{L} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_q)$ une famille (finie) liée. D'après la définition 8.8 (voir en page 329), cela signifie qu'il existe q scalaires α_1, α_2, …, α_q appartenant à $\mathbb{K}$, dont un au moins est non nul, tels que $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_q\boldsymbol{v}_q = \mathbf{0}_E$ et donc, en appliquant f et en utilisant la linéarité de f, tels que

$$\alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \ldots + \alpha_q f(\boldsymbol{v}_q) = \mathbf{0}_F.$$

La famille $f(\mathcal{L}) = (f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_q))$ est donc liée dans F. Par conséquent, à la question « L'image par une application linéaire d'une famille liée est-elle encore liée ? » on peut répondre par l'affirmative, et ce sans supposer que l'application f soit injective (il lui suffit d'être linéaire). Par contraposition, si $f(\mathcal{L})$ est une famille libre dans F alors la famille $\mathcal{L}$ est libre dans E.

En particulier, si en plus d'être linéaire, l'application f est injective alors, d'après la proposition 9.9, si $\mathcal{L}$ est une famille libre dans E alors $f(\mathcal{L})$ est une famille libre dans F. Nous venons de montrer que la réciproque était toujours vraie. Ainsi, si f est injective alors $\mathcal{L}$ est libre dans E si et seulement si, $f(\mathcal{L})$ est libre dans F.

9.3.3 Image d'une base

Après s'être intéressé à l'image d'une famille génératrice à la proposition 9.8, puis à celle d'une famille libre à la proposition 9.9, il est à présent naturel de s'intéresser à l'image d'une famille qui est à la fois libre et génératrice, autrement dit à l'image d'une base. Se pose alors la question suivante : l'image par une application linéaire f de E dans F d'une base de E constitue-t-elle une base de F ?

Pour y répondre, considérons une application linéaire f de E dans F, avec E, F deux $\mathbb{K}$-espaces, et $\mathcal{B}$ une base de E, et examinons les deux questions suivantes.

- De quel sous-espace de l'espace d'arrivée F la famille $f(\mathcal{B})$ est-elle génératrice ? D'après la proposition 9.8, on sait que la famille $f(\mathcal{B})$ est génératrice du sous-espace $\operatorname{Im} f$ puisque $\mathcal{B}$ est génératrice de E.
- La famille $f(\mathcal{B})$ est-elle libre dans F ? La famille $\mathcal{B}$ étant libre dans E, on a vu que pour que $f(\mathcal{B})$ soit libre dans F, il suffit que f soit injective (voir la proposition 9.9).

Par conséquent, on peut donner un premier élément de réponse : si l'application linéaire f est injective alors l'image par f d'une base de E est une base, non pas de tout l'espace d'arrivée F, mais seulement de son sous-espace $\operatorname{Im} f$. La proposition suivante complète cette réponse. Elle fournit une seconde caractérisation d'une application linéaire injective.

PROPOSITION 9.10 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et $\mathcal{B}$ une base de E. L'application f est injective si et seulement si, $f(\mathcal{B})$ est une base de* $\operatorname{Im} f$.

Démonstration Nous avons déjà établi en préambule que si f est injective alors l'image par f de $\mathcal{B}$ est une base du sous-espace $\operatorname{Im} f$. Réciproquement, supposons que $f(\mathcal{B})$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et déduisons-en que le noyau de f est réduit au vecteur nul. Intéressons-nous en particulier au cas où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ (la rédaction dans le cas d'une base infinie est laissée en exercice). Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Puisque x appartient à E, nous pouvons le décomposer dans la base $\mathcal{B}$. Notant x_1, x_2, $\ldots$, x_n ses coordonnées par rapport à $\mathcal{B}$, on a :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

D'où, en appliquant f, en utilisant la linéarité de f et le fait que $f(x) = \mathbf{0}_F$ (puisque $x \in \operatorname{Ker} f$) :

$$\mathbf{0}_F = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n).$$

Or, par hypothèse, les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$, $\ldots$, $f(e_n)$ sont libres dans F (puisqu'ils forment une base de F). On déduit de la relation précédente que

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ et donc que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$. On a ainsi montré que $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$. L'application f est injective. □

Si en plus d'être injective, l'application linéaire f de E dans F est surjective (c'est-à-dire si $\operatorname{Im} f = F$) alors l'image de la base $\mathcal{B}$ par f est une base de l'espace F tout entier.

On a donc aussi le résultat suivant qui fournit une caractérisation d'une application linéaire bijective.

COROLLAIRE 9.4 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B}$ une base de E et f une application linéaire de E dans F. L'application f est bijective si et seulement si, $f(\mathcal{B})$ est une base de F.*

Le résultat du corollaire 9.4 peut nous aider à trouver la dimension d'un espace F, et par la même occasion à en construire une base. La méthode consiste à trouver un isomorphisme f de E dans F où E est un espace de notre choix dont on connaît à la fois la dimension et une base. Si l'espace de départ E est de dimension finie alors l'espace d'arrivée F est lui aussi de dimension finie. De plus, et c'est là tout l'intérêt de la méthode, on connaît la dimension de F puisque $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. Enfin, on sait comment obtenir une base de F. Il suffit de calculer l'image d'une base (quelconque) de E. Illustrons ces propos avec l'exemple des suites de Fibonacci généralisées.

Exemple (Suites de Fibonacci généralisées) Soit $(p,q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. On sait que l'ensemble $F_{p,q}$ constitué des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de double récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0 \tag{8}$$

est un sous-espace de l'espace vectoriel $E = \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ (voir page 318). On sait aussi que l'espace E est de dimension infinie mais qu'en est-il du sous-espace $F_{p,q}$? Est-il de dimension finie ou infinie ? On remarque que toute suite de Fibonacci généralisée est entièrement caractérisée par la donnée de ses deux premiers termes. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de $F_{p,q}$ telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ alors on vérifie, par récurrence sur n, que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc identiques. On a ainsi identifié une application de $\mathbb{C}^2$ dans $F_{p,q}$, qui au couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ associe l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $F_{p,q}$ caractérisée par ses deux premiers termes $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$. Notons $\Phi_{p,q}$ cette application.

Nous allons vérifier que $\Phi_{p,q}$ définit bien un isomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dans $F_{p,q}$.

- Commençons par vérifier que $\Phi_{p,q}$ est linéaire. Soient (α,β), (α',β') deux couples de $\mathbb{C}^2$ et λ, λ' deux complexes. L'image par $\Phi_{p,q}$ du couple (α,β) est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F_{p,q}$ caractérisée par $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$. De même, l'image par $\Phi_{p,q}$ du couple (α',β') est la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F_{p,q}$ caractérisée par $v_0 = \alpha'$ et $v_1 = \beta'$. Ainsi, $\lambda\Phi_{p,q}((\alpha,\beta)) + \lambda'\Phi_{p,q}((\alpha',\beta')) = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F_{p,q}$

où $w_n = \lambda u_n + \lambda' v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, en prenant $n = 0$ et $n = 1$, on a :

$$w_0 = \lambda u_0 + \lambda' v_0 \quad \text{et} \quad w_1 = \lambda u_1 + \lambda' v_1.$$

Intéressons-nous à présent à l'image par $\Phi_{p,q}$ de $\lambda(\alpha, \beta) + \lambda'(\alpha', \beta')$. On a :

$$\lambda(\alpha, \beta) + \lambda'(\alpha', \beta') = (\lambda\alpha + \lambda'\alpha', \lambda\beta + \lambda'\beta').$$

Ainsi, l'image par $\Phi_{p,q}$ de $\lambda(\alpha, \beta) + \lambda'(\alpha', \beta')$ est la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F_{p,q}$ caractérisée par $t_0 = \lambda\alpha + \lambda'\alpha'$ et $t_1 = \lambda\beta + \lambda'\beta'$. Or, $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$ d'une part, et $v_0 = \alpha'$ et $v_1 = \beta'$ d'autre part. On a donc :

$$t_0 = \lambda u_0 + \lambda' v_0 \quad \text{et} \quad t_1 = \lambda u_1 + \lambda' v_1.$$

Les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toutes les deux dans $F_{p,q}$, coïncident pour $n = 0$ et $n = 1$. Elles sont donc identiques, établissant ainsi que

$$\Phi_{p,q}(\lambda(\alpha, \beta) + \lambda'(\alpha', \beta')) = \lambda\Phi_{p,q}((\alpha, \beta)) + \lambda'\Phi_{p,q}((\alpha', \beta')).$$

L'application $\Phi_{p,q}$ est donc linéaire.

- Elle est surjective puisque toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $F_{p,q}$ possède au moins un antécédent par $\Phi_{p,q}$ (il suffit de prendre $\alpha = u_0$ et $\beta = u_1$).
- Enfin, elle est injective. Pour s'en convaincre, prenons un élément (α, β) de $\operatorname{Ker} \Phi_{p,q}$. Son image par $\Phi_{p,q}$ est la suite nulle. En particulier, ses deux premiers termes sont nuls, autrement dit : $\alpha = \beta = 0$.

Comme nous l'avions annoncé, l'application $\Phi_{p,q}$ ainsi construite définit bien un isomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dans $F_{p,q}$. L'espace $\mathbb{C}^2$ étant de dimension 2, l'espace d'arrivée, $F_{p,q}$, est alors lui-même de dimension 2. On en obtient une base en calculant l'image par $\Phi_{p,q}$ d'une base de l'espace de départ $\mathbb{C}^2$. Choisissons la base canonique $\mathcal{B}_c = \big((1,0), (0,1)\big)$ de $\mathbb{C}^2$. L'image de $(1,0)$ par $\Phi_{p,q}$ est la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F_{p,q}$ caractérisée par $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. De (8), il vient : $a_2 = -q$, $a_3 = pq, a_4 = -p^2q + q^2$, etc. On a donc :

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Phi_{p,q}((1,0)) = (1, 0, -q, pq, -p^2q + q^2, \ldots).$$

L'image de $(0,1)$ par $\Phi_{p,q}$ est la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F_{p,q}$ caractérisée par $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$. De (8), il vient : $b_2 = -p$, $b_3 = p^2 - q$, $b_4 = 2pq - p^3$, etc. On a donc :

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Phi_{p,q}((0,1)) = (0, 1, -p, p^2 - q, 2pq - p^3, \ldots).$$

Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites sont en pratique peu utilisées car peu maniables. On leur préfèrera d'autres bases. La recherche de ces nouvelles bases fait l'objet de l'exercice 7 donné en fin de chapitre.

PROPOSITION 9.11 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Une condition nécessaire et suffisante pour que E et F soient isomorphes est que*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F).$$

Démonstration Supposons E et F isomorphes. Il existe donc un isomorphisme Φ de E vers F. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On a $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. D'après le corollaire 9.4, $\Phi(\mathcal{B})$ est une base de F. On a donc $\operatorname{card}(\Phi(\mathcal{B})) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$. Or, $\mathcal{B}$ et $\Phi(\mathcal{B})$ sont deux familles de même cardinal. On en déduit que $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$. Réciproquement, supposons les deux espaces E et F de même dimension p. Soient $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de F. Considérons l'application Φ qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$, définie par :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\} \quad \Phi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}'_i.$$

On en déduit que les deux espaces E et F sont isomorphes puisque l'application Φ définit un isomorphisme de E vers F (cela se justifie en utilisant le corollaire 9.4). □

Remarque D'après la proposition 9.11, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. L'application Φ de $\mathbb{K}^n$ dans l'espace E muni de la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$, définie par

$$\Phi : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{u}_n \in E$$

constitue un isomorhisme entre $\mathbb{K}^n$ et E. Elle transforme la base canonique de $\mathbb{K}^n$ en $\mathcal{B}$. En effet, $\Phi((1, 0, \ldots, 0)) = \boldsymbol{u}_1, \ldots, \Phi((0, 0, \ldots, 1)) = \boldsymbol{u}_n$.

EXERCICE 4 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ et m un réel. On considère l'endomorphisme f_m de E défini par :

$$\begin{cases} f_m(\boldsymbol{u}) = m\boldsymbol{u} + (m+1)\boldsymbol{v} \\ f_m(\boldsymbol{v}) = (m-1)\boldsymbol{u} + (m-2)\boldsymbol{v} \end{cases}$$

1 - Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f_m est-il bijectif ?
2 - Déterminer $\operatorname{Ker} f_m$ et $\operatorname{Im} f_m$ suivant m.
3 - Rechercher les invariants[10] de f_m.

9.4 Rang d'une application linéaire

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de *dimension finie*. Tout sous-espace vectoriel de E est nécessairement de dimension finie.

9.4.1 Rang d'une application linéaire

Comme on l'a vu au corollaire 9.3, si E est un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et si f est une application linéaire de E dans F alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie. La définition suivante a donc un sens.

[10] On rappelle (voir en page 384) que l'ensemble des invariants de f_m est l'ensemble noté $\operatorname{Inv} f_m$ constitué des vecteurs $\boldsymbol{x}$ de E vérifiant $f_m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

DÉFINITION 9.6 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie). Le rang d'une application linéaire f de E dans F est la dimension de l'image de f. On le note* $\operatorname{rg} f$. *Autrement dit,*

$$\operatorname{rg} f \overset{\text{déf.}}{=} \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f).$$

Insistons sur le fait que cette définition est indépendante de la dimension de l'espace d'arrivée F, ce dernier pouvant être de dimension finie ou infinie.

Rappelons que si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = p$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base de E alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))$, d'où en passant aux dimensions,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) = \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))\big).$$

On a donc :

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)).$$

D'après le corollaire 9.3, $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E)$. On a donc :

$$\operatorname{rg} f \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E). \tag{9}$$

De plus, si l'espace d'arrivée F est de dimension finie alors, $\operatorname{Im} f$ étant un sous-espace vectoriel de F, on a aussi : $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(F)$, c'est-à-dire :

$$\operatorname{rg} f \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(F). \tag{10}$$

En combinant (9) et (10), on obtient $\operatorname{rg} f \leqslant \min\{\dim_{\mathbb{K}}(E), \dim_{\mathbb{K}}(F)\}$. On résume ces résultats dans la proposition suivante.

PROPOSITION 9.12 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie et F de dimension quelconque, et f une application linéaire de E dans F. Alors* $\operatorname{rg} f \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E)$. *De plus, si F est de dimension finie alors* $\operatorname{rg} f \leqslant \min\{\dim_{\mathbb{K}}(E), \dim_{\mathbb{K}}(F)\}$.

9.4.2 Théorème du rang

Le théorème suivant est fondamental en algèbre linéaire. Nous l'utiliserons à de multiples reprises.

THÉORÈME 9.1 (du rang)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nécessairement de dimension finie. Pour toute application linéaire f de E dans F, on a :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \operatorname{rg} f + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f).$$

Démonstration Supposons l'application f non nulle (la démonstration est immédiate lorsque f est nulle). Puisque E est de dimension finie, $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont aussi de dimensions finies. Notons $q = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f)$ et $r = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f)$. Soient $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_q)$ une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = (\boldsymbol{\ell}_1, \dots, \boldsymbol{\ell}_r)$ une base de $\operatorname{Im} f$. Notons que $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f}$ et $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$ sont constitués de vecteurs n'appartenant pas au même espace vectoriel : les vecteurs de $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f}$ sont contenus dans l'espace de départ et ceux de $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$ dans l'espace d'arrivée. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ il existe un vecteur $\boldsymbol{u}_i$ appartenant à E tel que $f(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{\ell}_i$. La démonstration consiste à montrer que la famille $\mathcal{B}$ constituée des q vecteurs $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_q$ augmentés des r vecteurs $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$ constitue une base de E.

$\trianglerighteq$ Montrons que les $q+r$ vecteurs $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_q, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$ sont libres dans E. Considérons la relation de liaison :

$$\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \dots + \alpha_q \boldsymbol{w}_q + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + \beta_r \boldsymbol{u}_r = \mathbf{0}_E \tag{11}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_r$ appartiennent à $\mathbb{K}$. En appliquant f à (11) et en utilisant le fait que f est linéaire, on obtient :

$$\alpha_1 f(\boldsymbol{w}_1) + \dots + \alpha_q f(\boldsymbol{w}_q) + \beta_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \dots + \beta_r f(\boldsymbol{u}_r) = \mathbf{0}_F.$$

Or $f(\boldsymbol{w}_1) = \dots = f(\boldsymbol{w}_q) = \mathbf{0}_F$ puisque $\boldsymbol{w}_i \in \operatorname{Ker} f$ pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ et $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{\ell}_1, \dots, f(\boldsymbol{u}_r) = \boldsymbol{\ell}_r$. L'égalité précédente s'écrit ainsi :

$$\beta_1 \boldsymbol{\ell}_1 + \dots + \beta_r \boldsymbol{\ell}_r = \mathbf{0}_F.$$

On en déduit $\beta_1 = \dots = \beta_r = 0$ puisque $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = (\boldsymbol{\ell}_1, \dots, \boldsymbol{\ell}_r)$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et donc, *a fortiori*, une famille libre dans F. La relation de liaison (11) s'écrit maintenant :

$$\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \dots + \alpha_q \boldsymbol{w}_q = \mathbf{0}_E.$$

Il en résulte que $\alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0$ car $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_q)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ et donc, *a fortiori*, une famille libre dans E.

$\trianglerighteq$ Montrons à présent que les $q+r$ vecteurs $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_q, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$ sont générateurs de l'espace E. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur appartenant à E. Son image par f appartient à $\operatorname{Im} f$. Les vecteurs $\boldsymbol{\ell}_1, \dots, \boldsymbol{\ell}_r$ étant générateurs de l'image de f (puisqu'ils en constituent une base), il existe un r-uplet $(\beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que

$$f(\boldsymbol{x}) = \beta_1 \boldsymbol{\ell}_1 + \dots + \beta_r \boldsymbol{\ell}_r = \beta_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \dots + \beta_r f(\boldsymbol{u}_r).$$

Par linéarité de f, on en déduit :

$$f\left(\boldsymbol{x} - (\beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + \beta_r \boldsymbol{u}_r)\right) = \mathbf{0}_F,$$

ce qui montre que le vecteur $\boldsymbol{x} - (\beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + \beta_r \boldsymbol{u}_r)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$. Or, les vecteurs $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_q$ sont générateurs du noyau de f (puisqu'ils en constituent une base). Il existe donc un q-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{K}^q$ tel que

$$\boldsymbol{x} - (\beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + \beta_r \boldsymbol{u}_r) = \alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \dots + \alpha_q \boldsymbol{w}_q.$$

On a ainsi montré l'existence d'un $(q+r)$-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_r) \in \mathbb{K}^{q+r}$ tel que

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \ldots + \alpha_q \boldsymbol{w}_q + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \beta_r \boldsymbol{u}_r.$$

Tout vecteur de E peut ainsi s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_q, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$. Ces derniers engendrent donc E.

$\trianglerighteq$ La famille $\mathcal{B}$ étant libre dans E et génératrice de E, c'est une base de E. On a donc $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \operatorname{card}(\mathcal{B}) = q + r$, autrement $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f)$ car $q = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f)$ et $r = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f)$. □

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire. Il est facile de vérifier que si f n'est pas identiquement nulle alors son noyau est un hyperplan vectoriel de E. En effet, rappelons que les seuls sous-espaces du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$. L'image de f étant non réduite à 0 puisque f n'est pas identiquement nulle, elle est nécessairement égale à $\mathbb{K}$. On a donc :

$$\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1.$$

En appliquant le théorème du rang à la forme linéaire f, on obtient :

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(E)}_{=n} = \underbrace{\operatorname{rg} f}_{=1} + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f), \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = n - 1.$$

Nous avons ainsi vérifié que le noyau de f était de dimension $n-1$. C'est donc un hyperplan vectoriel de E.

Exercice 5 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ et p un endomorphisme de E défini par

$$p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \quad p(\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}), \quad p(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}).$$

Montrer que p est un projecteur de E, puis caractériser $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$.

9.4.3 Conséquences du théorème du rang

La relation donnée par le théorème 9.1 est indépendante de la dimension de l'espace d'arrivée F, ce dernier pouvant être de dimension finie ou infinie. Considérons en particulier le cas où l'espace F est lui aussi de dimension finie.

Proposition 9.13 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions finies (non nécessairement identiques) et f une application linéaire de E dans F. On a alors les équivalences suivantes :*

✗ *f est surjective si et seulement si,* $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(F)$;

✗ *f est injective si et seulement si,* $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(E)$;

✗ *f est bijective si et seulement si,* $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

Démonstration Montrons les trois propriétés.

- La propriété de surjectivité de f est équivalente à la propriété « $\operatorname{Im} f = F$ » qui est elle-même équivalente à la propriété « $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ ».
- La propriété d'injectivité de f est équivalente à la propriété « $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$ » qui est elle-même équivalente, d'après le théorème du rang, à la propriété « $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \operatorname{rg} f$ ».
- La troisième propriété est immédiate d'après ce qui précède.

□

On vérifie facilement les trois points suivants.

- Supposons f surjective (c'est-à-dire $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(F)$). On a alors grâce au théorème du rang,

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) \geqslant \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

  puisque $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) \geqslant 0$. On a ainsi l'implication suivante :

$$f \text{ est surjective} \quad \Longrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}}(E) \geqslant \dim_{\mathbb{K}}(F). \tag{12}$$

- Supposons f injective (c'est-à-dire $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$ ou encore $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = 0$). Grâce au théorème du rang,

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

  puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace de F. On a ainsi l'implication suivante :

$$f \text{ est injective} \quad \Longrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}}(E) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(F). \tag{13}$$

- En combinant les deux résultats précédents, on obtient

$$f \text{ est bijective} \quad \Longrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F). \tag{14}$$

En général, les réciproques des implications (12), (13) et (14) sont fausses. Par exemple, on ne peut pas déduire de l'égalité $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ qu'une application f de E dans F est bijective (voir page 386 pour un contre-exemple).

On déduit de la proposition 9.13 le résultat suivant.

Corollaire 9.5 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F. Si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ alors il y a équivalence entre les propriétés d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité de f :*

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Démonstration D'après la proposition 9.13, lorsque les deux espaces E et F sont de même dimension, les propriétés de bijectivité, d'injectivité et de surjectivité de f sont toutes les trois équivalentes à la propriété « $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ ». Elles sont donc toutes les trois équivalentes entre elles. □

Le résultat suivant stipule, entre autres, que l'on ne change pas le rang d'une application linéaire lorsque l'on compose celle-ci à droite par une application linéaire surjective ou à gauche par une application linéaire injective.

PROPOSITION 9.14 *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, f une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de F vers G. Alors,*

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\}.$$

En particulier,

- *Si f est surjective alors* $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.
- *Si g est injective alors* $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.

Démonstration Rappelons que, par définition, $\operatorname{rg}(g\circ f) = \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Im}(g\circ f)\big)$ et $\operatorname{Im}(g\circ f) = g(f(E))$. Commençons par montrer que $\operatorname{rg}(g\circ f) \leqslant \min\{\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\}$. On sait que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g\circ f)$ (voir en page 383). Passant aux dimensions,

$$\dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Ker} f\big) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Ker}(g \circ f)\big). \tag{15}$$

Appliquant le théorème du rang à f et $g \circ f$, on obtient :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \operatorname{rg} f + \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Ker} f\big),$$
$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \operatorname{rg}(g \circ f) + \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Ker}(g \circ f)\big).$$

L'inégalité (15) devient alors :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) - \operatorname{rg} f \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E) - \operatorname{rg}(g \circ f),$$

c'est-à-dire : $\operatorname{rg}(g\circ f) \leqslant \operatorname{rg} f$. Or, $\operatorname{rg}(g\circ f) \leqslant \operatorname{rg} g$. C'est immédiat en remarquant que $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(f(E)) \subset g(F) = \operatorname{Im} g$ (voir en page 41 ou en page 383) et en passant aux dimensions. Finalement, on a obtenu que $\operatorname{rg}(g \circ f)$ était inférieur ou égal à la fois à $\operatorname{rg} f$ et à $\operatorname{rg} g$, ce qui montre que $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\}$.

Intéressons-nous à présent aux deux cas particuliers suivants.

Supposons f surjective (et g quelconque) et montrons alors que $\operatorname{rg}(g\circ f) = \operatorname{rg} g$. L'application f étant surjective, $f(E) = F$. Ainsi,

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}}\big(g(f(E))\big) = \dim_{\mathbb{K}}\big(g(F)\big) = \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Im} g\big) = \operatorname{rg} g.$$

Supposons g injective (et f quelconque) et déduisons-en que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$. L'injectivité de g conduit à l'égalité ensembliste :

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f.$$

Vérifions-le. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur appartenant au noyau de $g\circ f$. On a donc $\boldsymbol{x} \in E$ et $g(f(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}_G$. Or, $\mathbf{0}_G = g(\mathbf{0}_F)$. Ainsi, $g(f(\boldsymbol{x})) = g(\mathbf{0}_F)$ et on en déduit que $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_F$ car g est injective. Le vecteur $\boldsymbol{x}$ appartient donc au noyau de f, ce qui montre l'inclusion $\operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$. L'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$

est toujours vraie (voir en page 383). De la double inclusion on déduit que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$. En passant aux dimensions, $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$ devient :

$$\dim_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{Ker}(g \circ f)\big) = \dim_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{Ker}\, f\big).$$

Utilisant alors le théorème du rang pour f et $g \circ f$ séparément (comme nous l'avons fait plus haut), on obtient :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) - \mathrm{rg}\, f = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \mathrm{rg}(g \circ f),$$

c'est-à-dire : $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f$. □

Remarque On déduit de la proposition 9.14 que si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$ et $h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(G, H)$ avec E, F, G et H quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, f surjective et h injective alors

$$\mathrm{rg}(h \circ g \circ f) = \mathrm{rg}\, g.$$

9.5 Exercices de synthèse

Exercice 6 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant*

$$f^2 \neq 0 \quad et \quad f^3 = 0$$

où on a noté $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$.

1 - Montrer les deux séries d'inclusion

$$\{\mathbf{0}_E\} = \mathrm{Im}\, f^3 \subset \mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f \subset E,$$

$$\{\mathbf{0}_E\} \subset \mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f^3 = E.$$

2 - Montrer que $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f$ et en déduire que $\mathrm{rg}\, f^2 \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}\, f^2)$.

3 - Justifier que $2 \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}\, f^2) \leqslant 3$. Le cas $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}\, f^2) = 3$ est-il possible ? En déduire $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}\, f^2)$ puis $\mathrm{rg}\, f^2$.

4 - Justifier que $1 \leqslant \mathrm{rg}\, f \leqslant 3$. Montrer que $\mathrm{Im}\, f^2 \neq \mathrm{Im}\, f$. En déduire que $\mathrm{rg}\, f \neq 1$. Le cas $\mathrm{rg}\, f = 3$ est-il possible ? En déduire $\mathrm{rg}\, f$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}\, f)$.

Exercice 7 *(Suites de Fibonacci généralisées) Soit $(p, q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. On désigne par $F_{p,q}$ l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0.$$

1 - On suppose dans un premier temps $p^2 - 4q \neq 0$. Soient r_1 et r_2 les deux racines de l'équation caractéristique $r^2 + pr + q = 0$.

a) Montrer que les deux suites géométriques $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *appartiennent à* $F_{p,q}$ *et qu'elles en forment une base.*

b) En déduire les coordonnées d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $F_{p,q}$ *dans cette base.*

c) En déduire l'expression en fonction de n *de la suite* $(\widetilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant* $\widetilde{u}_0 = 0$, $\widetilde{u}_1 = 1$ *et* $\widetilde{u}_{n+2} = \widetilde{u}_{n+1} + \widetilde{u}_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

2 - On suppose à présent $p^2 - 4q = 0$ *et* $q \neq 0$. *Soit* s *la racine double de l'équation caractéristique* $r^2 + pr + q = 0$.

a) Montrer que les deux suites $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(ns^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *appartiennent à* $F_{p,q}$.

b) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F_{p,q}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant* $u_n = s^n v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *En déduire que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(\frac{u_1}{s} - u_0\right) ns^n + u_0 s^n.$$

c) Les deux suites $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(ns^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *forment-elles une base de* $F_{p,q}$ *? Si oui, quelles sont les coordonnées de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F_{p,q}$ *dans cette base ?*

EXERCICE 8 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension quelconque et* f *un endomorphisme de* E *vérifiant*

$$\text{(E)} \quad f^2 = -f$$

où on a noté $f^2 = f \circ f$. *On rappelle que* $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$ *désigne l'application identité de* E.

1 - Montrer que $f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f$ *pour tout* $\boldsymbol{x} \in E$.

2 - L'application $-\mathrm{id}_E$ *est-elle solution de* (E) *? Si oui, est-elle bijective ?*

3 - En supposant que $f \neq -\mathrm{id}_E$, *montrer qu'il existe* $\boldsymbol{x}_0 \in E$ *tel que* $f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}_E$. *En déduire que* f *n'est pas bijective.*

4 - Déduire de la question 1 *que* $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. *Montrer que*

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}_E\}.$$

En déduire que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

9.6 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - Cette question est immédiate. En effet, par définition de l'indice de nilpotence p, pour tout entier ℓ inférieur strictement à p, et donc en particulier pour $\ell = p - 1$, l'application f^ℓ n'est pas identiquement nulle. On est donc assuré de l'existence d'au moins un vecteur $\tilde{\boldsymbol{x}}$ appartenant à E (ce vecteur n'est pas nécessairement unique) tel que $f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \neq \mathbf{0}_E$. Le vecteur $\tilde{\boldsymbol{x}}$ est nécessairement non nul car sinon, l'application f^{p-1} étant linéaire (puisque f l'est), son image par f^{p-1} serait nulle.

2 - Considérons à présent la famille $\mathcal{F} = \big(\tilde{\boldsymbol{x}}, f(\tilde{\boldsymbol{x}}), \ldots, f^{p-2}(\tilde{\boldsymbol{x}}), f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})\big)$. Remarquons que tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont nécessairement non nuls. En effet, pour tout $\ell \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, $f^{\ell-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})$ est l'antécédent de $f^{\ell}(\tilde{\boldsymbol{x}})$ par f (on rappelle que, par convention, $f^0 = \mathrm{id}_E$; on a donc $f^0(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \tilde{\boldsymbol{x}}$). Ainsi, de $f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \neq \mathbf{0}_E$ on déduit successivement que $f^{p-2}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \neq \mathbf{0}_E$, puis $f^{p-3}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \neq \mathbf{0}_E$ et ainsi de suite jusqu'à $f(\tilde{\boldsymbol{x}}) \neq \mathbf{0}_E$ et enfin $\tilde{\boldsymbol{x}} \neq \mathbf{0}_E$, ce dernier résultat ayant déjà été établi à la première question. Bien sûr, le fait que tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ soient non nuls est une condition nécessaire mais nullement suffisante pour que $\mathcal{F}$ soit une famille libre dans E. Ainsi, pour montrer que $\mathcal{F}$ est libre, il convient d'écrire la relation de liaison :

$$\alpha_0 \tilde{\boldsymbol{x}} + \alpha_1 f(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \ldots + \alpha_{p-2} f^{p-2}(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \alpha_{p-1} f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E \tag{16}$$

où α_0, α_1, …, α_{p-2}, α_{p-1} appartiennent à $\mathbb{K}$, et d'en déduire que $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{p-2} = \alpha_{p-1} = 0$. Appliquons dans un premier temps f^{p-1} à l'égalité (16). On obtient :

$$\alpha_0 f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \alpha_1 f^{p}(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \ldots + \alpha_{p-2} f^{2p-3}(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \alpha_{p-1} f^{2p-2}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E. \tag{17}$$

Or, f étant nilpotente d'indice p, $f^{\ell}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E$ pour tout entier $\ell \geqslant p$. On a donc $f^p(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \ldots = f^{2p-3}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = f^{2p-2}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E$, et (17) se simplifie sous la forme : $\alpha_0 f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E$. On en déduit que $\alpha_0 = 0$ car $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a précisément été choisi de telle sorte que $f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \neq \mathbf{0}_E$. Utilisant alors que $\alpha_0 = 0$, la relation de liaison (16) s'écrit maintenant :

$$\alpha_1 f(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \ldots + \alpha_{p-2} f^{p-2}(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \alpha_{p-1} f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E.$$

La méthode consiste alors à réitérer le processus en composant par f^{p-2} pour obtenir $\alpha_1 = 0$, puis en composant par f^{p-3} pour obtenir $\alpha_2 = 0$, …, et enfin en composant par f pour obtenir $\alpha_{p-2} = 0$. On obtient alors, à l'issue de la dernière étape, que $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{p-2} = 0$. La relation de liaison (16) s'écrit alors $\alpha_{p-1} f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E$ et impose que $\alpha_{p-1} = 0$ puisque $f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \neq \mathbf{0}_E$.

3 - D'aprés la proposition 8.11 (voir en page 342), la famille $\mathcal{F}$ étant libre, son cardinal (l'entier p) ne peut excéder la dimension de l'espace E, c'est-à-dire n. On a donc nécessairement $p \leqslant n$.

Solution de l'exercice 2

1 - Soit p un projecteur de E. Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux sous-espaces $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ soient supplémentaires dans E est que l'on ait, à la fois, $E = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, p = \{\mathbf{0}_E\}$.

– Commençons par vérifier que $E = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, p$. Soit $\boldsymbol{x} \in E$. On a :

$$\boldsymbol{x} = p(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x})).$$

De manière évidente, $p(\boldsymbol{x})$ appartient à $\mathrm{Im}\, p$. De plus, $\boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x})$ appartient à $\mathrm{Ker}\, p$ puisque

$$p(\boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x})) = p(\boldsymbol{x}) - (p \circ p)(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$$

où on a utilisé que $p \circ p = p$ puisque p est un projecteur de E. On a ainsi vérifié que tout vecteur de E pouvait s'écrire comme la somme d'un vecteur de $\operatorname{Im} p$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker} p$, montrant ainsi que $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p$.

- Vérifions à présent que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{\mathbf{0}_E\}$. Soit $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$. Puisque $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} p$, $p(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_E$. De même, puisque $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} p$, il existe $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $\boldsymbol{y} = p(\boldsymbol{x})$. On en déduit que

$$p(p(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}_E,$$

d'où $p(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$ puisque $p \circ p = p$, c'est-à-dire $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}_E$ car $\boldsymbol{y} = p(\boldsymbol{x})$.

On a donc montré que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.

Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de E. On a : $\boldsymbol{x} = p(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x}))$ avec $p(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im} p$ et $\boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Ker} p$ et cette décomposition est unique. Par définition, l'image de $\boldsymbol{x}$ par la projection vectorielle sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$ est donc le vecteur $p(\boldsymbol{x})$, ce qui montre que le projecteur p coïncide avec la projection vectorielle sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

2 - Soit s une involution linéaire de E. Procédons comme ci-dessus en deux étapes.

- Commençons par vérifier que $E = \operatorname{Inv} s + \operatorname{Opp} s$. Utilisons cette fois-ci un mode de raisonnement par analyse-synthèse. Soit $\boldsymbol{x} \in E$. L'étape d'« analyse » consiste à supposer qu'il existe un vecteur $\boldsymbol{x}' \in \operatorname{Inv} s$ et un vecteur $\boldsymbol{x}'' \in \operatorname{Opp} s$ tels que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}''$. Appliquons s à cette égalité. On obtient :

$$s(\boldsymbol{x}) = s(\boldsymbol{x}') + s(\boldsymbol{x}'') = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''$$

car $s(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}'$ (puisque $\boldsymbol{x}' \in \operatorname{Inv} s$) et $s(\boldsymbol{x}'') = -\boldsymbol{x}''$ (puisque $\boldsymbol{x}'' \in \operatorname{Opp} s$). On est donc en présence d'un système de deux équations à deux inconnues (qui sont $\boldsymbol{x}'$ et $\boldsymbol{x}''$) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'' \\ s(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'' \end{cases}.$$

Un tel système impose pour $\boldsymbol{x}'$ et $\boldsymbol{x}''$ les expressions suivantes :

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{x})) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}'' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - s(\boldsymbol{x})).$$

L'étape de « synthèse » (étape indispensable pour que notre raisonnement soit complet) consiste maintenant à vérifier que les deux vecteurs $\boldsymbol{x}'$ et $\boldsymbol{x}''$ que l'on vient d'obtenir conviennent. Utilisant la linéarité de s, on a :

$$s\Big(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{x}))\Big) = \frac{1}{2}(s(\boldsymbol{x}) + (s \circ s)(\boldsymbol{x})) = \frac{1}{2}(s(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x})$$

car $s \circ s = \mathrm{id}_E$ puisque s est une involution linéaire de E, ce qui montre que $s(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}'$, autrement dit que $\boldsymbol{x}'$ appartient à $\operatorname{Inv} s$. De même,

$$s\Big(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - s(\boldsymbol{x}))\Big) = \frac{1}{2}(s(\boldsymbol{x}) - (s \circ s)(\boldsymbol{x})) = \frac{1}{2}(s(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - s(\boldsymbol{x}))$$

où on a encore utilisé que $s \circ s = \mathrm{id}_E$, ce qui montre que $s(\boldsymbol{x}'') = -\boldsymbol{x}''$, autrement dit que $\boldsymbol{x}''$ appartient à $\operatorname{Opp} s$. Enfin, on a :

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{x})) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - s(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x},$$

ce qui montre que $\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}$. En conclusion, on a montré que tout vecteur de E pouvait s'écrire comme la somme d'un vecteur de $\operatorname{Inv} s$ et d'un vecteur de $\operatorname{Opp} s$, montrant ainsi que $E = \operatorname{Inv} s + \operatorname{Opp} s$.

– Vérifions à présent que $\operatorname{Inv} s \cap \operatorname{Opp} s = \{\mathbf{0}_E\}$. Soit $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Inv} s \cap \operatorname{Opp} s$. De $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Inv} s$ il vient $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Opp} s$ il vient $f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$. On en déduit que $2\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$, c'est-à-dire $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$.

On a donc montré que $E = \operatorname{Inv} s \oplus \operatorname{Opp} s$.

Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de E. On a : $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{x})) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - s(\boldsymbol{x}))$ avec $\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{x})) \in \operatorname{Inv} s$ et $\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - s(\boldsymbol{x})) \in \operatorname{Opp} s$. Cette décomposition est unique. Par définition, l'image du vecteur $\boldsymbol{x}$ par la symétrie vectorielle par rapport à $\operatorname{Inv} s$ parallèlement à $\operatorname{Opp} s$ est donc le vecteur $\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{x})) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - s(\boldsymbol{x}))$. Or,

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{x})) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - s(\boldsymbol{x})) = s(\boldsymbol{x}).$$

Ainsi, l'involution linéaire s est précisément la symétrie vectorielle par rapport à $\operatorname{Inv} s$ parallèlement à $\operatorname{Opp} s$.

Solution de l'exercice 3

Rappelons que $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension finie : $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}[X]$ (de dimension infinie).

1 - Le fait que $\mathcal{C} = \big(1, X-1, (X+1)^2\big)$ soit une base de $\mathbb{R}_2[X]$ se déduit du fait que la famille $(1, X, X^2)$ est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$ (c'est d'ailleurs sa base canonique). En effet, de la relation de liaison : $\alpha + \beta(X-1) + \gamma(X+1)^2 = 0_{\mathbb{R}[X]}$ où α, β, γ appartiennent à $\mathbb{R}$, qui s'écrit aussi :

$$(\alpha - \beta + \gamma) + (\beta + 2\gamma)X + \gamma X^2 = 0_{\mathbb{R}[X]},$$

on déduit (puisque les trois polynômes 1, X et X^2 forment une famille libre) le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & & \beta & + & 2\gamma & = & 0 \\ & & & & \gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

qui admet pour solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\mathcal{C}$, qui est de cardinal égal à 3, est libre dans l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3. Elle définit donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 - La linéarité de f ne présente aucune difficulté. En effet, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et pour tous $\alpha, \gamma \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= 2(X+1)(\alpha P + \beta Q) - (X^2 - 2X + 1)(\alpha P + \beta Q)' \\ &= \alpha\big[2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P'\big] + \beta\big[2(X+1)Q - (X^2 - 2X + 1)Q'\big] \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q). \end{aligned}$$

Il faut maintenant s'assurer que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec a, b, c trois réels, un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. De manière évidente, $f(P) \in \mathbb{R}[X]$. Il reste à vérifier que $\deg(f(P)) \leqslant 2$. On a :

$$f(P) = 2(X+1)(aX^2+bX+c) - (X^2-2X+1)(2aX+b).$$

En développant, les monômes de degré 3 se simplifient. On obtient :

$$f(P) = (6a+b)X^2 + (-2a+4b+2c)X - b + 2c. \tag{18}$$

On a bien $\deg(f(P)) \leqslant 2$. Déterminons à présent l'image de f. Puisque la famille $\mathcal{C} = \big(1, X-1, (X+1)^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{C}))$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\big(f(1), f(X-1), (f(X+1)^2)\big) \\ &= \operatorname{Vect}\left(2(X+1), (X-1)(X+3), 8X(X+1)\right). \end{aligned}$$

Pour montrer que la famille $f(\mathcal{C})$ est libre, il faut vérifier que la relation

$$\alpha 2(X+1) + \beta(X-1)(X+3) + \gamma 8X(X+1) = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

où α, β, γ appartiennent à $\mathbb{R}$, implique que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Cela se vérifie sans aucune difficulté et se déduit encore du fait que $(1, X, X^2)$ est une famille libre dans $\mathbb{R}_2[X]$. Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} f) = 3$ et la famille $f(\mathcal{C})$ constitue une base de $\operatorname{Im} f$.(11) Déterminons le noyau de f. Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. D'après (18),

$$f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \iff (6a+b)X^2 + (-2a+4b+2c)X - b + 2c = 0_{\mathbb{R}[X]},$$

c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6a & + & b & & & = & 0 \\ -2a & + & 4b & + & 2c & = & 0 \\ & & -b & + & 2c & = & 0 \end{array}\right.$$

dont on déduit $a = b = c = 0$. On a donc $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

Solution de l'exercice 4

1 - L'endomorphisme f_m est bijectif si et seulement si, $f_m(\mathcal{B})$ est une base de E. Cherchons pour quelle(s) valeur(s) de m la famille $f_m(\mathcal{B}) = \big(f_m(\boldsymbol{u}), f_m(\boldsymbol{v})\big)$ est libre (ce sera alors nécessairement une base de E puisque $\operatorname{card}(f_m(\mathcal{B})) = \dim_{\mathbb{R}}(E)$). Partons de la relation de liaison $\alpha f_m(\boldsymbol{u}) + \beta f_m(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E$ où α et β désignent deux réels, qui s'écrit encore :

$$\alpha\big[m\boldsymbol{u} + (m+1)\boldsymbol{v}\big] + \beta\big[(m-1)\boldsymbol{u} + (m-2)\boldsymbol{v}\big] = \mathbf{0}_E.$$

(11) À titre indicatif, les images des vecteurs de la base canonique sont :

$$f(1) = 2(X+1), \quad f(X) = X^2 + 4X - 1 \text{ et } f(X^2) = 2X(3X-1)$$

et la famille $f(\mathcal{B}) = \big(2(X+1), X^2+4X-1, 2X(3X-1)\big)$ est aussi une base de $\operatorname{Im} f$.

Réarrangeons cette expression comme suit :

$$\big[m\alpha + (m-1)\beta\big]\boldsymbol{u} + \big[(m+1)\alpha + (m-2)\beta\big]\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ étant libres entre eux (puisqu'ils forment une base de E), cette égalité vectorielle est alors équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} m\alpha + (m-1)\beta = 0 \\ (m+1)\alpha + (m-2)\beta = 0 \end{cases}.$$

En multipliant la première équation par $m+1$, la deuxième équation par $-m$ et en additionnant le tout, on obtient la relation :

$$(-1+2m)\beta = 0.$$

Si $m \neq \frac{1}{2}$ alors on peut en déduire que $\beta = 0$, puis, en injectant cette valeur dans les deux équations du système, que $\alpha = 0$. L'endomorphisme f_m est donc bijectif pour tout réel $m \neq \frac{1}{2}$. Que pouvons-nous dire pour $f_{\frac{1}{2}}$? On a :

$$f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{3}{2}\boldsymbol{v} \quad \text{et} \quad f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{u} - \frac{3}{2}\boldsymbol{v}.$$

On remarque que $f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{v}) = -f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u})$. Les deux vecteurs $f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u})$ et $f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{v})$ sont donc liés. La famille $f_{\frac{1}{2}}(\mathcal{B})$ n'étant pas libre, l'endomorphisme $f_{\frac{1}{2}}$ n'est pas bijectif.

2 - D'après ce qui précède, si $m \neq \frac{1}{2}$ alors f_m est bijectif. Il est donc à la fois surjectif (son image est alors égale à l'ensemble d'arrivée, ici E puisque f_m est un endomorphisme de E) et injectif (son noyau est réduit au vecteur nul de E). En résumé, si $m \neq \frac{1}{2}$ alors

$$\operatorname{Im} f_m = E \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} f_m = \{\mathbf{0}_E\}.$$

Supposons à présent $m = \frac{1}{2}$. Commençons par déterminer l'image de $f_{\frac{1}{2}}$. Les deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ engendrent E. D'où

$$\operatorname{Im} f_{\frac{1}{2}} = \operatorname{Vect}\Big(f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u}), f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{v})\Big) = \operatorname{Vect}\Big(f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u})\Big)$$

car $f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u})$ et $f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{v})$ sont liés. Le vecteur $f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v})$ engendre donc $\operatorname{Im} f_{\frac{1}{2}}$. Il est non nul. Il constitue une base de $\operatorname{Im} f_{\frac{1}{2}}$. On peut donc écrire que $\operatorname{Im} f_{\frac{1}{2}} = \mathbb{R}(\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v})$. D'après le théorème du rang, le noyau est de dimension 1. On a ainsi $\operatorname{Ker} f_{\frac{1}{2}} = \mathbb{R}\boldsymbol{w}$ avec un $\boldsymbol{w}$ vecteur non nul. Cherchons un vecteur non nul appartenant au noyau de $f_{\frac{1}{2}}$. On a :

$$f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u}) = -f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{v}) \iff f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u}) + f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E \iff f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E.$$

Le vecteur $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ appartient ainsi au noyau de $f_{\frac{1}{2}}$ et il est non nul. On a donc :

$$\operatorname{Ker} f_{\frac{1}{2}} = \mathbb{R}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}).$$

3 - Les invariants de f_m sont les vecteurs $\boldsymbol{x}$ de E qui vérifient $f_m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Soit $\boldsymbol{x}$ un invariant de f_m et x_1, x_2 ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$f_m(\boldsymbol{x}) = \big[mx_1 + (m-1)x_2\big]\boldsymbol{u} + \big[(m+1)x_1 + (m-2)x_2\big]\boldsymbol{v}.$$

Ainsi, l'égalité $f_m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ est équivalente au système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} (m-1)x_1 & + & (m-1)x_2 & = & 0 \\ (m+1)x_1 & + & (m-3)x_2 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Si $m = 1$ alors le système impose $x_2 = x_1$. L'ensemble des invariants est donc égal à l'ensemble des vecteurs de la forme $x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} = x_1(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$. C'est $\mathbb{R}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$. Si $m \neq 1$ alors du système il vient $x_1 = x_2 = 0$. Cette fois-ci, seul le vecteur nul est invariant.

Solution de l'exercice 5

Pour montrer que $(p \circ p)(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, il est nécessaire et suffisant de montrer que $(p \circ p)(\boldsymbol{u}) = p(\boldsymbol{u})$, $(p \circ p)(\boldsymbol{v}) = p(\boldsymbol{v})$ et $(p \circ p)(\boldsymbol{w}) = p(\boldsymbol{w})$. Par exemple,

$$(p \circ p)(\boldsymbol{u}) = p(p(\boldsymbol{u})) = p(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = p(\boldsymbol{u}) + p(\boldsymbol{v}) + p(\boldsymbol{w}) = p(\boldsymbol{u})$$

car $p(\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{2}p(\boldsymbol{u})$ et $p(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}p(\boldsymbol{u})$. L'image de p est le sous-espace engendré par $p(\boldsymbol{u})$, $p(\boldsymbol{v})$ et $p(\boldsymbol{w})$). Les deux vecteurs $p(\boldsymbol{v})$ et $p(\boldsymbol{w})$ étant colinéaires au vecteur $p(\boldsymbol{u})$, on a :

$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}(p(\boldsymbol{u}), p(\boldsymbol{v}), p(\boldsymbol{w})) = \operatorname{Vect}(p(\boldsymbol{u}))$$

avec $p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ non nul (puisque $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sont les trois vecteurs d'une base de E). Ainsi, $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} p) = 1$. Comme base de l'image de p, on peut prendre la famille

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} p} = \big(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\big).$$

D'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} p) = 2$. Il reste à identifier une base de $\operatorname{Ker} p$. On sait déjà que son cardinal est égal à 2. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de $\operatorname{Ker} p$. C'est un vecteur de E d'image nulle par p. Décomposons-le dans la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ de E. Il existe un unique triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w}$. Utilisant la linéarité de p, l'égalité $p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_E$ s'écrit :

$$x_1 p(\boldsymbol{u}) + x_2 p(\boldsymbol{v}) + x_3 p(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}_E$$

ou encore, puisque $p(\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{2}p(\boldsymbol{u})$ et $p(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}p(\boldsymbol{u})$,

$$(x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2})p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_E.$$

Le vecteur $p(\boldsymbol{u})$ n'étant pas nul, on a nécessairement : $x_1 = (x_2 - x_3)/2$. Ainsi, un vecteur $\boldsymbol{x}$ de $\operatorname{Ker} p$ s'écrit :

$$\boldsymbol{x} = \frac{x_2 - x_3}{2}\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w} = x_2(\frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + x_3(-\frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}),$$

ce qui montre que les deux vecteurs $\frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ et $-\frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ engendrent $\operatorname{Ker} p$. Ils sont nécessairement linéairement indépendants puisque le sous-espace qu'ils engendrent est de dimension 2. Une base du noyau de p est donc la famille

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} p} = \big(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}, -\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{w}\big).$$

Solution de l'exercice 6

Rappelons que l'espace E étant de dimension finie, tout sous-espace F de E est lui-même de dimension finie et sa dimension est nécessairement inférieure ou égale à celle de E (voir la proposition 8.12, page 342). On a donc $\dim_{\mathbb{K}}(F) = 0$, 1, 2 ou 3 puisque $\dim_{\mathbb{K}}(E) = 3$. En préambule à cet exercice, traduisons en termes de quantificateurs les deux hypothèses faites sur l'endomorphisme f :

- $\forall \boldsymbol{x} \in E \; f^3(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$ (traduction de « $f^3 = 0$ »),
- $\exists \boldsymbol{x} \in E \; f^2(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}_E$ (traduction de « $f^2 \neq 0$ »).

1 - Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Commençons par montrer l'inclusion $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$. Considérons pour cela un vecteur $\boldsymbol{z}$ de $\operatorname{Im} f^{k+1}$. Cela signifie qu'il existe $\boldsymbol{x} \in E$ tel que

$$\boldsymbol{z} = f^{k+1}(\boldsymbol{x}) = f^k(f(\boldsymbol{x})).$$

  Il existe donc un vecteur $\boldsymbol{y}$ appartenant à E, à savoir $f(\boldsymbol{x})$, tel que $\boldsymbol{z} = f^k(\boldsymbol{y})$, montrant ainsi que $\boldsymbol{z} \in \operatorname{Im} f^k$. L'inclusion $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$ est donc vérifiée. Cette inclusion est valable aussi pour $k = 0$ puisque, par convention, $f^0 = \mathrm{id}_E$ (d'où $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_E) = E$) et $\operatorname{Im} f \subset E$.

- Montrons à présent que $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de $\operatorname{Ker} f^k$. On a : $f^k(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$. D'où, en appliquant f,

$$f^{k+1}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$$

  car $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_E$, ce qui montre que le vecteur $\boldsymbol{x}$ appartient à $\operatorname{Ker} f^{k+1}$. L'inclusion $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$ est donc vérifiée.

Enfin, puisque tout vecteur de E a pour image par f^3 le vecteur nul, on a $\operatorname{Ker} f^3 = E$ et $\operatorname{Im} f^3 = \{\mathbf{0}_E\}$.

2 - Montrons l'inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$. Soit $\boldsymbol{x}'' \in \operatorname{Im} f^2$. Il existe $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $\boldsymbol{x}'' = f^2(\boldsymbol{x})$. En appliquant f, on obtient : $f(\boldsymbol{x}'') = f^3(\boldsymbol{x})$. Or, $f^3(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$. On a donc : $f(\boldsymbol{x}'') = \mathbf{0}_E$, ce qui signifie que $\boldsymbol{x}'' \in \operatorname{Ker} f$. Passant aux dimensions, on déduit de l'inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ l'inégalité :

$$\operatorname{rg} f^2 \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f).$$

D'après la question précédente $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. On a donc aussi :

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2).$$

On déduit alors des deux inégalités précédentes que $\operatorname{rg} f^2 \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2)$.

3 - Grâce au théorème du rang, on peut écrire :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \operatorname{rg} f^2 + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2)$$

d'où, en tenant compte de $\operatorname{rg} f^2 \leqslant \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker} f^2)$ (*cf.* question précédente),

$$3 \leqslant 2 \times \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2).$$

Or $\operatorname{Ker} f^2$ étant un sous-espace de E, $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2) = 0$, 1, 2 ou 3. On a donc pour $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2)$ les deux seules possibilités : $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2) = 2$ ou 3. Le cas $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2) = 3$ est impossible. Pour le montrer, raisonnons par l'absurde. Supposons que l'on ait $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2) = 3$. Cela signifierait que $\operatorname{Ker} f^2 = E$ ou, de manière équivalente, que $f^2 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $f^2 \neq 0$. Par conséquent, $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2) = 2$, ce qui implique $\operatorname{rg} f^2 = 1$ (grâce au théorème du rang).

4 - De $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ il vient $\operatorname{rg} f^2 \leqslant \operatorname{rg} f$. Or, d'après la question précédente, $\operatorname{rg} f^2 = 1$. On a donc $\operatorname{rg} f = 1$, 2 ou 3. Pour montrer que $\operatorname{Im} f^2 \neq \operatorname{Im} f$, raisonnons par l'absurde. Supposons que l'on ait $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$. Cela signifierait que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ (on a en effet établi plus haut que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$), soit que $f^2(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$,[12] ce qui serait contraire aux hypothèses.

- Le cas $\operatorname{rg} f = 1$ est par conséquent impossible car il signifierait que l'on ait $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ (puisque $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} f = 1$), ce qui est impossible.
- Vérifions maintenant que le cas $\operatorname{rg} f = 3$ est aussi à exclure. Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'on ait $\operatorname{rg} f = 3$. Cela équivaudrait à f bijective et impliquerait f^3 bijective, ce qui est impossible puisque $f^3 = 0$.

Ainsi, le seul cas possible est $\operatorname{rg} f = 2$, ce qui implique $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = 1$ (grâce au théorème du rang).

En résumé, nous avons obtenu successivement les résultats suivants :
- $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^3) = 3$ et $\operatorname{rg} f^3 = 0$ (première question),
- $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2) = 2$ et $\operatorname{rg} f^2 = 1$ (troisième question),
- $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = 1$ et $\operatorname{rg} f = 2$ (quatrième question).

Solution de l'exercice 7

On rappelle que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{C}^2$, l'ensemble $F_{p,q}$ constitue un sous-espace de dimension finie du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites à valeurs complexes qui, lui, est de dimension infinie. On a vu (voir page 393) que $\dim_{\mathbb{C}}(F_{p,q}) = 2$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{C}^2$.

1 - Soit $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ tel que $p^2 - 4q \neq 0$.

[12] Pour s'en convaincre, considérons un vecteur $\boldsymbol{x} \in E$. Son image par f appartient à $\operatorname{Im} f$. Or, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Ainsi, l'image par f du vecteur $f(\boldsymbol{x})$ est donc le vecteur nul, autrement dit $f^2(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$.

a) Les deux racines complexes r_1 et r_2 sont distinctes l'une de l'autre car $p^2 - 4q \neq 0$. De $r_1^2 + pr_1 + q = 0$ et $r_2^2 + pr_2 + q = 0$ il vient (en multipliant respectivement par r_1^n et r_2^n) :

$$r_1^{n+2} + pr_1^{n+1} + qr_1^n = 0 \quad \text{et} \quad r_2^{n+2} + pr_2^{n+1} + qr_2^n = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que les deux suites géométriques $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $F_{p,q}$. Pour montrer que ces deux suites forment une base de $F_{p,q}$, il est suffisant de montrer qu'elles sont linéairement indépendantes. Écrivons pour cela la relation de liaison : $\alpha(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$ avec α et β dans $\mathbb{C}$, et déduisons-en que $\alpha = \beta = 0$. La relation de liaison exprime que $\alpha r_1^n + \beta r_2^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, en prenant $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccll} \alpha & + & \beta & = & 0 & (n=0) \\ \alpha r_1 & + & \beta r_2 & = & 0 & (n=1) \end{array}\right. .$$

De la première équation, il vient $\alpha = -\beta$. La deuxième équation s'écrit alors $\beta(r_2 - r_1) = 0$ et impose $\beta = 0$ puisque $r_1 \neq r_2$, et donc $\alpha = 0$. Les deux suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituent ainsi une famille libre. Elles forment donc une base de $F_{p,q}$.

b) D'après la question précédente, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $F_{p,q}$, il existe un unique couple (a, b) de $\mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a\,r_1^n + b\,r_2^n.$$

Les scalaires a et b, qui appartiennent à $\mathbb{C}$, sont les coordonnées de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base $\big((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$. Déterminons-les. Comme nous l'avons déjà fait plus haut, la méthode consiste à écrire l'égalité $u_n = a\,r_1^n + b\,r_2^n$ pour deux valeurs particulières parmi toutes les valeurs autorisées de n (on a l'embarras du choix puisque $n \in \mathbb{N}$). Ainsi, en prenant $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccll} u_0 & = & a & + & b & (n=0) \\ u_1 & = & ar_1 & + & br_2 & (n=1) \end{array}\right. .$$

On en déduit les expressions de a et b suivantes :

$$a = \frac{u_1 - u_0 r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{et} \quad b = \frac{u_0 r_1 - u_1}{r_1 - r_2}.$$

Remarquons que a et b dépendent de u_0, u_1, r_1 et r_2.

c) Ici, $p = q = -1$. Les racines de l'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ sont $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ (c'est le nombre d'or, la notation en lettre grecque faisant référence au sculpteur grec Phidias qui participa à la décoration du Parthénon de l'Acropole d'Athènes) et $\varphi' = (1-\sqrt{5})/2$. La suite $(\widetilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\widetilde{u}_0 = 0$, $\widetilde{u}_1 = 1$ et $\widetilde{u}_{n+2} = \widetilde{u}_{n+1} + \widetilde{u}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, appartient au sous-espace $F_{-1,-1}$. D'après les questions précédentes, les deux suites géométriques $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varphi'^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $F_{-1,-1}$; les coordonnées de la suite $(\widetilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est la suite de Fibonacci) dans cette base sont $a = 1/(\varphi - \varphi')$ et $b = -1/(\varphi - \varphi')$. Or, $\varphi - \varphi' = \sqrt{5}$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \widetilde{u}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Cette expression est connue sous le nom de *formule de Binet*, du nom du mathématicien et astronome français Jacques Binet (né à Rennes en 1786, décédé à Paris en 1856).

2 - Supposons à présent $p^2 - 4q = 0$ et $q \neq 0$.

a) La racine double $s = -p/2$ est non nulle puisque $p^2 = 4q \neq 0$. Clairement, la suite géométrique $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $F_{p,q}$ (pour le justifier, il suffit de procéder comme à la question précédente ; c'est immédiat). La suite $(ns^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient aussi à $F_{p,q}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&(n+2)s^{n+2} + p(n+1)s^{n+1} + qns^n\\ &= n\underbrace{(s^{n+2} + ps^{n+1} + qs^n)}_{=0} + s^{n+1}\underbrace{(2s+p)}_{=0} = 0\end{aligned}$$

où, comme indiqué sous les accolades, on a utilisé que $s^{n+2} + ps^{n+1} + qs^n = 0$ (puisque $(s^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F_{p,q}$) et $2s + p = 0$ (puisque $s = -p/2$).

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $F_{p,q}$, $u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (s^n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc : $s^{n+2}v_{n+2} + ps^{n+1}v_{n+1} + qs^n v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où, en simplifiant par s^n,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s^2 v_{n+2} + psv_{n+1} + qv_n = 0.$$

Remplaçons alors s par $-p/2$ et q par $p^2/4$ (puisque $p^2 - 4q = 0$). On obtient après simplification par $p^2/4$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0$$

qui s'écrit aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n.$$

Il vient alors que $v_{n+1} - v_n = v_n - v_{n-1} = \ldots = v_1 - v_0$, établissant ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + r$ avec $r = v_1 - v_0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmétique de raison $r = v_1 - v_0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 + n\,(v_1 - v_0)\,. \tag{19}$$

Revenons maintenant à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = s^n v_n$. Multiplions pour cela (19) par s^n et remplaçons v_0 par u_0 et v_1 par u_1/s. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 s^n + \left(\frac{u_1}{s} - u_0\right) n s^n.$$

c) Comme précédemment, pour montrer que les deux suites $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(ns^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $F_{p,q}$, il suffit de montrer qu'elles forment une famille libre. La relation de liaison : $\alpha(s^n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(ns^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$ où α et β désignent deux nombres complexes, s'écrit : $\alpha s^n + \beta n s^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, en choisissant $n = 0$, on obtient $\alpha = 0$; en choisissant $n = 1$, on obtient $\alpha s + \beta s = 0$, c'est-à-dire $\beta s = 0$ puisque $\alpha = 0$, et donc $\beta = 0$ car $s \neq 0$, ce qui montre que $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(ns^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre. Ainsi, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $F_{p,q}$, il existe un unique couple (a', b') de $\mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a' s^n + b' n s^n.$$

Les scalaires a' et b' sont les coordonnées de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base $\big((s^n)_{n\in\mathbb{N}}, (ns^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$. Nous les avons obtenus plus haut :

$$a' = u_0 \quad \text{et} \quad b' = \frac{u_1}{s} - u_0.$$

Remarquons a' et b' dépendent de u_0, u_1 et s.

Solution de l'exercice 8

1 - On vérifie facilement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f^2 = -f \quad &\iff \quad \forall \boldsymbol{x} \in E \quad f^2(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}) \\ &\iff \quad \forall \boldsymbol{x} \in E \quad f^2(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E \\ &\iff \quad \forall \boldsymbol{x} \in E \quad f(f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E \\ &\iff \quad \forall \boldsymbol{x} \in E \quad f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f. \end{aligned}$$

2 - On vérifie que $(-\mathrm{id}_E) \circ (-\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E = -(-\mathrm{id}_E)$. Ainsi, $-\mathrm{id}_E$ vérifie (E). L'application $-\mathrm{id}_E$ est bien évidemmment bijective puisque l'application identité est elle-même bijective.

3 - Supposons $f \neq -\mathrm{id}_E$. Cela signifie qu'il existe $\boldsymbol{x}_0 \in E$ tel que $f(\boldsymbol{x}_0) \neq (-\mathrm{id}_E)(\boldsymbol{x}_0)$, c'est-à-dire tel que $f(\boldsymbol{x}_0) \neq -\boldsymbol{x}_0$. Autrement dit,

$$\exists \boldsymbol{x}_0 \in E \quad f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}_E.$$

D'après la question 1, tout vecteur de la forme $f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}$ avec $\boldsymbol{x}$ un vecteur quelconque de E, appartient au noyau de f. C'est donc *a fortiori* vrai pour le vecteur $\boldsymbol{x}_0$. Remarquons que l'existence d'un vecteur $\boldsymbol{x}_0$ vérifiant $f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}_E$ nous assure que le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul. Par conséquent, f n'est pas injective. Puisque la propriété de bijectivité entraîne celle d'injectivité, on en déduit (par contraposition) que f n'est pas bijective.

4 - Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de E. Pour montrer que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$, il faut montrer qu'il existe $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} f$ et qu'il existe $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f$ tels que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. D'après la question 1, c'est immédiat puisque tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E peut se décomposer comme suit :

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{x} + f(\boldsymbol{x})}_{= \boldsymbol{u}} + \underbrace{(-f(\boldsymbol{x}))}_{= \boldsymbol{v}}$$

avec $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + f(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Ker} f$ et $\boldsymbol{v} = -f(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im} f$. Si $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, on a d'une part $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$ puisque $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f$, et d'autre part il existe un vecteur $\boldsymbol{z} \in E$ tel que $f(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}$ puisque $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} f$. Ainsi,

$$\mathbf{0}_E = f(\boldsymbol{x}) = f(f(\boldsymbol{z})) = -f(\boldsymbol{z}) = -\boldsymbol{x}$$

où on a utilisé $f^2 = -f$. On a donc obtenu que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$. Finalement, puisque l'on a à la fois $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}_E\}$, les deux sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E, ce que l'on note : $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

CHAPITRE 10

Les matrices

Dans cette partie, tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces de dimensions finies sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.[1]

10.1 Calcul matriciel

10.1.1 Définition d'une matrice

DÉFINITION 10.1 *Soient n et p deux entiers naturels non nuls.*

✗ *Une matrice* A *de type (n,p) sur $\mathbb{K}$ est un tableau à n lignes et p colonnes constitué d'éléments appartenant au corps $\mathbb{K}$:*

$$\mathrm{A} \overset{déf.}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{np} \end{pmatrix}.$$

On la note aussi $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$ où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ est l'élément correspondant à la i-ième ligne et à la j-ième colonne du tableau. Cet élément s'appelle un terme *(ou un* coefficient*) de la matrice* A.

✗ *On note* $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices rectangulaires à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

✗ *On appelle* rangée de A *toute ligne ou toute colonne de* A.

Le mot « matrice » (*matrix* en anglais) a été introduit par James Sylvester en 1850 pour désigner des tableaux de nombres.

Au lieu de « A est une matrice de type (n,p) », on dit parfois « A est une matrice $n \times p$ ».

[1] On note $+_{\mathbb{K}}$ et $\times_{\mathbb{K}}$ l'addition et la multiplication sur $\mathbb{K}$. Nous les noterons aussi $+$ et $\times$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté avec d'autres lois.

SYLVESTER, James Joseph (1814, Londres - 1897, Londres).

Avocat et ami intime de Cayley, Sylvester se consacra très vite aux mathématiques. Une part importante de ses travaux, en collaboration avec Cayley, portent sur le calcul matriciel et, en particulier, sur son utilisation qu'il juge relativement pratique pour le calcul des déterminants. En 1877 il accepta une chaire à l'Université Johns Hopkins (États-Unis d'Amérique) et fonda *the American Journal of Mathematics*, le premier journal de mathématiques des États-Unis. Il enseigna aussi les mathématiques à l'Université d'Oxford en Angleterre.

Lorsqu'on écrit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$, la notation indicielle a la signification suivante : le premier indice (ici i) est l'indice correspondant aux lignes et le second indice (ici j) est celui correspondant aux colonnes. La notation indicielle a la même signification pour la notation « $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ». On a :

$$\begin{array}{cc} & \textit{colonne } j \\ & \downarrow \\ \textit{ligne } i \longrightarrow & \left(\begin{array}{c} \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \end{array} \right) \end{array}$$

On a les définitions suivantes.

DÉFINITION 10.2 *Soit* A *une matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$.

✗ *Si* $n = p$ *alors* A *est dite carrée d'ordre* n *et on note* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. *On appelle diagonale principale d'une matrice carrée* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *d'ordre* n *le* n*-uplet :*

$$(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{K}^n.$$

✗ *Si* $p = 1$ *alors* A *appartient à* $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *et est appelée matrice-colonne.*

✗ *Si* $n = 1$ *alors* A *appartient à* $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ *et est appelée matrice-ligne.*

Une matrice-colonne (respectivement une matrice-ligne) est appelée parfois abusivement un vecteur-colonne (resp. un vecteur-ligne).

Exemples

1. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\mathrm{i} & 1 \\ 3 & -\mathrm{i} & 1/2 + 5\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{C})$. C'est une matrice rectangulaire.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. C'est une matrice carrée, d'ordre 2 et de diagonale principale $(2, -1) \in \mathbb{R}^2$.

3. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. C'est une matrice-colonne.

4. $\begin{pmatrix} -2 & 1/2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{1,3}(\mathbb{R})$. C'est une matrice-ligne.

DÉFINITION 10.3 *Soient* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ *et* $\mathrm{B} = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ *deux matrices de même type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$. *Les matrices* A *et* B *sont égales, et on note* $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, *si*

$$a_{ij} = b_{ij}$$

pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ *et pour tout* $j \in \{1,\dots,p\}$.

DÉFINITION 10.4 ✗ *On note* $0_{n,p}$ *la matrice rectangulaire de type* (n,p) *dont tous les coefficients sont nuls. On l'appelle* matrice nulle *de* $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

✗ *On note* I_n *la matrice carrée d'ordre* n *dont les coefficients diagonaux sont égaux à* 1 *et les autres coefficients égaux à* 0. *On l'appelle* matrice identité *(ou* unité*) d'ordre* n.

Autrement dit,

$$0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que, contrairement à la matrice I_n qui est carrée, la matrice $0_{n,p}$ est rectangulaire si $n \neq p$. Si $n = p$, on la note plus simplement 0_n. Pour alléger les écritures, les matrices $0_{n,p}$ et I_n sont parfois notées respectivement 0 et I. On écrit aussi :

$$\mathrm{I}_n = (\delta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

où δ_{ij} est le *symbole de Kronecker* défini, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

DÉFINITION 10.5 *Soit* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *une matrice carrée d'ordre* n *à coefficients dans* $\mathbb{K}$. *On dit que* A *est* diagonale *si tous ses coefficients situés en dehors de la diagonale principale sont nuls, c'est-à-dire si*

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \quad (\, i \neq j \implies a_{ij} = 0\,).$$

On la note parfois $\operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. *En particulier, on dit que* A *est une* matrice-scalaire *si* $\mathrm{A} = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 10.6 *Soit* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *une matrice carrée d'ordre* n *à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

✗ *On dit que* A *est triangulaire supérieure si tous ses coefficients situés au-dessous de la diagonale principale sont nuls, c'est-à-dire si*

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \quad (\, i > j \implies a_{ij} = 0\,).$$

✗ *On dit que* A *est triangulaire inférieure si tous ses coefficients situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls, c'est-à-dire si*

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \quad (\, i < j \implies a_{ij} = 0\,).$$

Une matrice triangulaire supérieure $\mathrm{T_{sup}} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et une matrice triangulaire inférieure $\mathrm{T_{inf}} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ s'écrivent :

$$\mathrm{T_{sup}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{T_{inf}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En particulier, une matrice diagonale $\mathrm{D} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. Elle s'écrit :

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{not.}}{=} \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

10.1.2 Opérations sur les matrices

Addition de matrices et multiplication d'une matrice par un scalaire

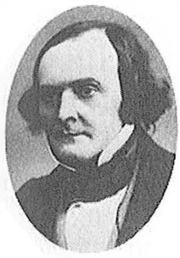
Définition 10.7 ✗ *Soient* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ *et* $\mathrm{B} = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ *deux matrices de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$. *On appelle* somme de A et B, *et on note* $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, *la matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$ *définie par*

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} \overset{\text{déf.}}{=} (a_{ij} +_{\mathbb{K}} b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}.$$

✗ *Soient* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ *une matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$. *On appelle* produit de A par α, *et on note* $\alpha \cdot \mathrm{A}$ *ou* $\alpha\mathrm{A}$, *la matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$ *définie par*

$$\alpha \cdot \mathrm{A} \overset{\text{déf.}}{=} (\alpha \times_{\mathbb{K}} a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}.$$

CAYLEY, Arthur (1821, Richmond (Angleterre) - 1895, Cambridge).



Avocat de formation, il fut Professeur de mathématiques à l'Université de Cambridge et membre de la Royal Society of London (l'équivalent anglais de l'Académie des Sciences). Il publie en 1858 un article intitulé *Memoir on the Theory of Matrices*, jugé comme fondateur, sur le calcul matriciel. Dans cet article, sont exposées formellement les différentes opérations algébriques définies sur l'ensemble des matrices, comme la somme et le produit de deux matrices, l'inverse et la puissance d'une matrice.

On ne somme que des matrices de même type.

Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

L'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition possède une structure de groupe commutatif. En effet, l'addition définit une loi de composition interne sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (car l'addition de deux matrices de type (n,p) sur $\mathbb{K}$ est encore une matrice de type (n,p) sur $\mathbb{K}$) et on peut vérifier que

- l'addition est associative puisque, pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{A} + (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = (\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{C},$$

- l'élément neutre pour l'addition est la matrice $0_{n,p}$ car

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \mathrm{A} + 0_{n,p} = 0_{n,p} + \mathrm{A} = \mathrm{A},$$

- l'opposé de $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ est $-\mathrm{A} = (-a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ car

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \mathrm{A} + (-\mathrm{A}) = (-\mathrm{A}) + \mathrm{A} = 0_{n,p}.$$

De plus $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{B} + \mathrm{A}$ pour toutes matrices A et B appartenant à $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'addition est donc commutative. La multiplication d'une matrice de type (n, p) par un élément de $\mathbb{K}$ est une loi de composition externe sur $\mathbb{K}$. On vérifie que la loi externe $\cdot$ possède les propriétés suivantes :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \forall \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \alpha \cdot (\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \alpha \cdot \mathrm{A} + \alpha \cdot \mathrm{B},$$
$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad (\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \cdot \mathrm{A} = \alpha \cdot \mathrm{A} + \beta \cdot \mathrm{A},$$
$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \alpha \cdot (\beta \cdot \mathrm{A}) = (\alpha \times_{\mathbb{K}} \beta) \cdot \mathrm{A},$$
$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A}.$$

Par conséquent, l'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition et de la multiplication par un élément de $\mathbb{K}$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Remarquons que toute matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ appartenant à $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut se décomposer sous la forme :

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \mathrm{E}^{(i,j)}$$

où la matrice $\mathrm{E}^{(i,j)}$, qualifiée de *matrice élémentaire*, désigne la matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls à l'exception du terme placé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne, qui vaut 1. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $\mathrm{E}^{(i,j)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$, engendrent ainsi $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Forment-elles une famille libre ? De la relation de liaison $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \mathrm{E}^{(i,j)} = 0_{n,p}$ avec α_{ij} dans $\mathbb{K}$ pour tous $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, qui s'écrit aussi :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

il vient, par identification, que $\alpha_{ij} = 0$ pour tous $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Les $n \times p$ matrices élémentaires sont libres dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Elles forment donc une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il y a $n \times p$ matrices élémentaires. Par conséquent, $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})\big) = n \times p$. Pour tous $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, le coefficient a_{ij} est donc la coordonnée de A par rapport à $\mathrm{E}^{(i,j)}$.

Multiplication de matrices

Définissons à présent le produit de deux matrices.

Définition 10.8 *Soient* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}$ *une matrice de type* (n, p) *sur* $\mathbb{K}$ *et* $\mathrm{B} = (b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p,\, 1 \leqslant j \leqslant q}$ *une matrice de type* (p, q) *sur* $\mathbb{K}$. *On appelle produit de* A *et* B, *et on note* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *ou* AB, *la matrice de type* (n, q) *sur* $\mathbb{K}$ *définie par* $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = (c_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant q}$ *où*

$$c_{ij} \overset{\textit{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj}$$

pour tous $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *et* $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$.

Le produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ n'est défini que si le nombre de colonnes de la première matrice (ici A) est égal au nombre de lignes de la deuxième matrice (ici B). On retiendra le schéma suivant :

$$\text{matrice de type } (n, p) \times \text{matrice de type } (p, q) = \text{matrice de type } (n, q).$$

Comme l'illustre l'exemple suivant, le produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ peut exister sans que le produit $\mathrm{B} \times \mathrm{A}$ existe :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ 1 & 2 \\ -\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} & \mathrm{i}+4 \\ \mathrm{i} & 7 \end{pmatrix}.$$

En revanche, le produit $\mathrm{B} \times \mathrm{A}$ n'est pas défini car le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de A.

Disposition pratique

En pratique, pour effectuer le produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$, on utilise la disposition suivante :

$$\begin{array}{rcc} & & j\text{-ième colonne de } \mathrm{B} \\ & & \downarrow \\ & p \text{ lignes} \left\{ \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right. & \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} \\ i\text{-ième ligne de } \mathrm{A} \rightarrow & \overbrace{\begin{pmatrix} & \cdots\cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ip} \\ & \cdots\cdots & \end{pmatrix}}^{p \text{ colonnes}} & \begin{pmatrix} \cdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \\ \cdots \end{pmatrix} \end{array}$$

qui permet de repérer visuellement les sommes et produits à effectuer pour calculer le coefficient c_{ij}.

Proposition 10.1 *Soient n, p, q, m quatre entiers naturels non nuls.*

✗ *Pour tout* A *de* $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et pour tous* B, C *de* $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{A} \times (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \mathrm{A} \times \mathrm{B} + \mathrm{A} \times \mathrm{C}.$$

✗ *Pour tous* B, C *de* $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et pour tout* A *de* $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,

$$(\mathrm{B} + \mathrm{C}) \times \mathrm{A} = \mathrm{B} \times \mathrm{A} + \mathrm{C} \times \mathrm{A}.$$

✗ *Pour tout* A *de* $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *pour tout* B *de* $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *et pour tout* C *de* $\mathrm{M}_{q,m}(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{A} \times (\mathrm{B} \times \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \times \mathrm{C}.$$

Démonstration Chacune des démonstrations est longue mais ne présente pas de difficulté. Il suffit de revenir à la définition des lois + et × et de travailler sur les éléments des matrices. On s'attachera à bien justifier chacune des sommes matricielles et chacun des produits matriciels que l'on écrit. □

On vérifie facilement que le produit de deux matrices diagonales d'ordre n est une matrice diagonale d'ordre n et on a :

$$\operatorname{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn}) \times \operatorname{diag}(b_{11},\ldots,b_{nn}) = \operatorname{diag}(a_{11}\times b_{11},\ldots,a_{nn}\times b_{nn}).$$

10.1.3 Transposition de matrices

DÉFINITION 10.9 *Soit* A *une matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$. *On appelle matrice transposée de* A *et on note* A^T *(ou parfois* ${}^t\mathrm{A}$*), la matrice de type* (p,n) *sur* $\mathbb{K}$ *obtenue à partir de* A *en échangeant les lignes et les colonnes.*

Si A est une une matrice de type (n,p) alors sa transposée, la matrice A^T, est une matrice rectangulaire dont le type (p,n) est *a priori* différent de celui de A, sauf si $n=p$. Par exemple,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 1/2 & 3\mathrm{i} \\ 4 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 4 \\ \sqrt{2} & 3\mathrm{i} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

La matrice A est de type $(3,2)$ et sa transposée est de type $(2,3)$. En particulier, si A est une matrice carrée d'ordre n alors A^T est aussi une matrice carrée d'ordre n. Toute matrice diagonale est sa propre matrice transposée. C'est le cas de la matrice identité : $\mathrm{I}_n^T = \mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si A est une matrice-ligne alors A^T est une matrice-colonne. Réciproquement, si A est une matrice-colonne alors A^T est une matrice-ligne. Par exemple,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^T = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque Soit A une matrice de type (n,p). Pour tout entier k compris entre 1 et p, la matrice-ligne formée de la k-ième ligne extraite de A^T est égale à la transposée de la matrice-colonne formée de la k-ième colonne extraite de A. Schématiquement,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathrm{C}_1 & \mathrm{C}_2 & & \mathrm{C}_p \\ | & | & & | \end{pmatrix} \implies \mathrm{A}^T = \begin{pmatrix} — & \mathrm{C}_1^T & — \\ — & \mathrm{C}_2^T & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & \mathrm{C}_p^T & — \end{pmatrix}.$$

De même, pour tout entier ℓ compris entre 1 et n, la matrice-colonne formée de la ℓ-ième colonne extraite de A^T est égale à la transposée de la matrice-ligne formée de ℓ-ième ligne extraite de A. Schématiquement,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} — & \mathrm{L}_1 & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & \mathrm{L}_n & — \end{pmatrix} \implies \mathrm{A}^T = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathrm{L}_1^T & \cdots & \mathrm{L}_n^T \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

On a les propriétés suivantes.

PROPOSITION 10.2 *Soient n, p, q trois entiers naturels non nuls.*

✗ $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad (\mathrm{A}^T)^T = \mathrm{A}$.

✗ $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad (\mathrm{A}+\mathrm{B})^T = \mathrm{A}^T + \mathrm{B}^T$.

✗ $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad (\alpha \cdot \mathrm{A})^T = \alpha \cdot \mathrm{A}^T$.

✗ $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \quad \forall \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \quad (\mathrm{A} \times \mathrm{B})^T = \mathrm{B}^T \times \mathrm{A}^T$.

Démonstration Il suffit de revenir à la définition de la transposée d'une matrice. La démonstration pour chacune des trois premières propriétés est aisée (la rédaction est laissée en exercice). Montrons la quatrième propriété. Soient A une matrice de type (n, q) et B une matrice de type (q, p). Le produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ a un sens puisque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. C'est une matrice de type (n, p). En notant $\mathrm{A} = (a_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant q}$ et $\mathrm{B} = (b_{kj})_{1 \leqslant k \leqslant q,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$, on a : $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \left(c_{ij}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$ avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$$

pour tous $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$. La matrice $(\mathrm{A} \times \mathrm{B})^T$ est donc de type (p, n) et $(\mathrm{A} \times \mathrm{B})^T = \left(c'_{ij}\right)_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$ avec

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{q} a_{jk} b_{ki} \tag{1}$$

pour tous $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$. La matrice B^T est de type (p, q) et la matrice A^T de type (q, n). Le nombre de colonnes de B^T est égal au nombre de lignes de A^T. Le produit $\mathrm{B}^T \times \mathrm{A}^T$ a donc un sens. C'est une matrice de type (p, n). En notant $\mathrm{B}^T = (b'_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant k \leqslant q}$ et $\mathrm{A}^T = (a'_{kj})_{1 \leqslant k \leqslant q,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$, on a alors : $\mathrm{B}^T \times \mathrm{A}^T = \left(d_{ij}\right)_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$ avec, pour tous $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{q} b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^{q} b_{ki} a_{jk} \tag{2}$$

puisque

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \quad \forall k \in \{1, \ldots, q\} \quad b'_{ik} = b_{ki},$$

$$\forall k \in \{1, \ldots, q\} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad a'_{kj} = a_{jk}.$$

En comparant (1) et (2), on en déduit que $d_{ij} = c'_{ij}$ pour tous $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$. On a ainsi vérifié l'égalité matricielle $\mathrm{B}^T \times \mathrm{A}^T = (\mathrm{A} \times \mathrm{B})^T$. $\square$

DÉFINITION 10.10 *Soit* A *une matrice carrée*[2] *sur* $\mathbb{K}$.

✗ *On dit que* A *est une matrice symétrique si* $A^T = A$.

✗ *On dit que* A *est une matrice antisymétrique si* $A^T = -A$.

Autrement dit, la matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique lorsque

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \quad a_{ji} = a_{ij}.$$

De même, la matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est antisymétrique lorsque

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \quad a_{ji} = -a_{ij}.$$

On se convainc facilement (prendre $i = j$) que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nécessairement tous nuls.

Exemples

1. La matrice $\begin{pmatrix} 2+3\mathrm{i} & 3 & -\mathrm{i} \\ 3 & \sqrt{2} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{C})$ est symétrique.

2. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1-\mathrm{i} & 0 \\ -1+\mathrm{i} & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{C})$ est antisymétrique.

Sous-espaces supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$

Toute matrice carrée peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. En effet, pour toute matrice M appartenant à $M_n(\mathbb{K})$,

$$M = \underbrace{\tfrac{1}{2}(M + M^T)}_{=S} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(M - M^T)}_{=A} \tag{3}$$

Comme indiqué sous les accolades, posons $S = \frac{1}{2}(M+M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. La matrice S est symétrique et A est antisymétrique puisque, utilisant les propriétés de la proposition 10.2, on a :

$$S^T = \left(\tfrac{1}{2}(M + M^T)\right)^T = \tfrac{1}{2}(M^T + (M^T)^T) = \tfrac{1}{2}(M^T + M) = S,$$
$$A^T = \left(\tfrac{1}{2}(M - M^T)\right)^T = \tfrac{1}{2}(M^T - (M^T)^T) = \tfrac{1}{2}(M^T - M) = -A.$$

On a, par exemple, dans $M_3(\mathbb{R})$ la décomposition suivante

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

[2] Il est clair que cela n'a pas de sens de parler de matrice symétrique (ou de matrice antisymétrique) pour des matrices non carrées.

Désignons par $S_n(\mathbb{K})$ (respectivement par $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Ces deux ensembles constituent deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace $M_n(\mathbb{K})$ (c'est immédiat en utilisant les propriétés de la transposition). On vérifie facilement que la seule matrice qui est à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice nulle d'ordre n. On a donc :

$$S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) = \{0_n\}. \tag{4}$$

Les deux propriétés (3) et (4) suffisent à montrer que les deux sous-espaces $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$, ce que l'on note :

$$S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K}).$$

10.1.4 Cas particulier des matrices carrées

Intéressons-nous à présent à l'ensemble des matrices carrées.

Structure d'anneau sur $M_n(\mathbb{K})$

Vérifions que $M_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, muni de l'addition et de la multiplication possède une structure d'anneau. D'après ce que nous avons dit pour $M_{n,p}(\mathbb{K})$ (voir la remarque page 419), $M_n(\mathbb{K})$ muni de l'addition est un groupe commutatif. Contrairement au cas des matrices rectangulaires de type (n, p) pour lesquelles la multiplication n'est pas définie si $n \neq p$, la multiplication de deux matrices carrées du même ordre est toujours définie. Le produit de deux matrices carrées d'ordre n étant encore une matrice carrée d'ordre n, la multiplication définit une seconde loi de composition interne sur $M_n(\mathbb{K})$. De plus, on vérifie les points suivants.

- La multiplication est distributive par rapport à l'addition : pour tous A, B, C appartenant à $M_n(\mathbb{K})$,

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad \text{et} \quad (B + C) \times A = B \times A + C \times A.$$

- La multiplication est associative : pour tous A, B, C appartenant à $M_n(\mathbb{K})$,

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

- La matrice I_n est l'élément neutre pour la multiplication :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad I_n \times A = A \times I_n = A.$$

Contrairement à l'addition, la multiplication de deux matrices carrées n'est pas commutative pour $n \geqslant 2$. Par exemple, considérons les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $A \times B \neq B \times A$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble structuré $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est donc pas un anneau commutatif (sauf si $n = 1$). On veillera donc à manipuler le produit matriciel avec précaution. Bien sûr, le fait que la multiplication dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ne soit pas commutative lorsque $n \geqslant 2$ n'exclut pas l'existence de matrices qui permutent entre elles. Par exemple, une matrice-scalaire permute avec n'importe quelle matrice carrée du même ordre. Autrement dit,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \quad \left(\lambda \cdot \mathrm{I}_n\right) \times \mathrm{A} = \mathrm{A} \times \left(\lambda \cdot \mathrm{I}_n\right).$$

De plus, lorsque $n \geqslant 2$, le produit de deux matrices peut être nul sans que l'une des deux matrices soit nulle. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, lorsque $n \geqslant 2$, l'anneau $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ possède des diviseurs de zéro. Ce n'est donc pas un anneau intègre.

Puissance k-ième d'une matrice

Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{A}^k \overset{\text{not.}}{=} \overbrace{\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \ldots \times \mathrm{A}}^{k \text{ fois}}.$$

La matrice A^k s'appelle *puissance k-ième de* A. On vérifie facilement les trois propriétés suivantes (il suffit de revenir à la définition de la puissance k-ième d'une matrice. La démonstration est laissée en exercice).

Proposition 10.3 *Soit* A *une matrice carrée à coefficients dans* $\mathbb{K}$.
- ✗ $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall k' \in \mathbb{N} \quad \mathrm{A}^k \times \mathrm{A}^{k'} = \mathrm{A}^{k+k'}$;
- ✗ $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall k' \in \mathbb{N} \quad \left(\mathrm{A}^k\right)^{k'} = \mathrm{A}^{k \times k'}$;
- ✗ $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \left(\alpha \cdot \mathrm{A}\right)^k = \alpha^k \cdot \mathrm{A}^k$.

Il est à noter qu'en général, lorsque la matrice A est d'ordre n avec $n \geqslant 2$, il n'y a pas de lien immédiat entre les coefficients de A^k et ceux de A (sauf pour $k = 1$ bien sûr). Ainsi, les coefficients de A^k ne s'obtiennent pas en élevant à la puissance k les coefficients de A. C'est pourtant ce qui se produit pour les matrices diagonales. En effet, on vérifie, par récurrence sur l'entier naturel k, que si $\mathrm{A} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}^k = \operatorname{diag}\left(a_{11}^k, a_{22}^k, \ldots, a_{nn}^k\right).$$

Si A et B désignent deux matrices carrées du même ordre, alors, *a priori*, les matrices $(A \times B)^2$ et $A^2 \times B^2$ ne sont pas égales. En effet,

$$(A \times B)^2 = (A \times B) \times (A \times B).$$

La multiplication n'étant pas commutative, $(A \times B) \times (A \times B)$ n'est pas obligatoirement égal à $A^2 \times B^2$. Plus généralement, pour tout entier $k \geqslant 2$, $(A\times B)^k$ n'est pas obligatoirement égal à $A^k \times B^k$. En revanche, il est clair que si le produit des deux matrices A et B commute, c'est-à-dire si $A\times B = B\times A$, alors $(A \times B)^2 = A^2 \times B^2$, ou, plus généralement, $(A \times B)^k = A^k \times B^k$ pour tout entier k.

Matrice nilpotente

La définition suivante est cohérente avec celle donnée pour une application linéaire (voir la définition 9.3, page 376).

DÉFINITION 10.11 *Une matrice carrée* A *d'ordre* n *est* **nilpotente** *s'il existe un entier naturel non nul* k *tel que* $A^k = 0$. *L'indice de nilpotence de la matrice* A *est l'entier non nul* p *défini par*

$$p \overset{déf.}{=} \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid A^k = 0\}.$$

Par exemple, la matrice A définie ci-dessous est nilpotente et son indice de nilpotence est 3 car

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \text{et} \ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Formule du binôme de Newton dans $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Considérons deux matrices carrées A et B, toutes les deux d'ordre n. Commençons par développer l'expression $(A+B)^2$. On a :

$$(A + B)^2 = (A + B) \times (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Si on suppose que les matrices A et B commutent alors

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Poursuivons en développant l'expression $(A + B)^3$. On a :

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B) \times (A+B)^2 \\ &= (A+B) \times \left(A^2 + AB + BA + B^2\right) \\ &= A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3.\end{aligned}$$

Si on suppose que les matrices A et B commutent alors

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^3 = \mathrm{A}^3 + 3\mathrm{A}^2\mathrm{B} + 3\mathrm{A}\mathrm{B}^2 + \mathrm{B}^3.$$

Plus généralement, on a le résultat suivant qui se démontre par récurrence sur le même principe (voir la démonstration de la proposition 2.12, page 77).

PROPOSITION 10.4 (Formule du binôme de Newton)
Soient A, B *deux matrices du même ordre. Si* AB = BA *alors, pour tout* $m \in \mathbb{N}$,

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{m-k}$$

où, pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$, *le coefficient binomial est défini par*

$$\binom{m}{k} \overset{déf.}{=} \frac{m!}{(m-k)!\,k!}.$$

Comme l'illustre l'exercice suivant, la formule du binôme de Newton peut s'avérer utile pour calculer les puissances d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dès lors que celle-ci s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathrm{A} = \alpha \cdot \mathrm{I}_n + \beta \cdot \mathrm{B}$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, où les puissances de la matrice B s'obtiennent facilement (par exemple, B est nilpotente), puisque pour tous α, β appartenant à $\mathbb{K}$,

$$(\alpha \cdot \mathrm{I}_n) \times (\beta \cdot \mathrm{B}) = (\beta \cdot \mathrm{B}) \times (\alpha \cdot \mathrm{I}_n).$$

EXERCICE 1 Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ et $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \mathrm{I}$.

1 - Calculer B, B^2, B^3. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2 - Montrer que A^3 est combinaison linéaire de A^2, A et I.
3 - En déduire que A^n est combinaison linéaire de A^{n-1}, A^{n-2}, A^{n-3} si $n \geqslant 3$.

10.2 Matrices et applications linéaires

10.2.1 Matrice associée à une application linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une application linéaire de E dans F. On suppose que $\dim_{\mathbb{K}}(E) = p$ et $\dim_{\mathbb{K}}(F) = n$. Munissons l'espace E d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et l'espace F d'une base $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Puisque la base $\mathcal{B}_E$ (respectivement $\mathcal{B}_F$) est constituée de vecteurs appartenant à l'espace de départ E (resp. l'espace d'arrivée F), on la qualifie parfois de *base de départ* (resp. *base d'arrivée*). Décomposons chacun des vecteurs $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, ..., $\varphi(e_p)$ de F dans la base d'arrivée $\mathcal{B}_F$. Pour j variant de 1 à p, on désigne par a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj} les coordonnées du vecteur $\varphi(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$, autrement dit :

$$\begin{cases} \varphi(e_1) &= a_{11}\, f_1 + a_{21}\, f_2 + \ldots + a_{n1}\, f_n \\ \varphi(e_2) &= a_{12}\, f_1 + a_{22}\, f_2 + \ldots + a_{n2}\, f_n \\ \quad\vdots & \\ \varphi(e_p) &= a_{1p}\, f_1 + a_{2p}\, f_2 + \ldots + a_{np}\, f_n \end{cases}$$

On rappelle qu'une application linéaire est entièrement déterminée dès que l'on connaît les images des vecteurs d'une base. Il apparaît ainsi judicieux de regrouper chacun des vecteurs $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, ..., $\varphi(e_p)$ (ou plutôt leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}_F$) dans un même tableau, ce dernier caractérisant complètement l'application linéaire φ.

Cela nous conduit à la définition suivante.

DÉFINITION 10.12 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}_E$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}_F$ et φ une application linéaire de E dans F.*

✗ *On appelle matrice associée à φ relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice de type (n,p) sur $\mathbb{K}$ dont la j-ième colonne est constituée par les coordonnées de l'image par φ du j-ième vecteur de la base de départ $\mathcal{B}_E$ par rapport à la base d'arrivée $\mathcal{B}_F$. On la note :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) \quad \textit{ou} \quad \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$$

et on dit que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$ représente φ dans les bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$.

✗ *En particulier, lorsque $E = F$ on peut choisir $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \overset{not.}{=} \mathcal{B}$. Soit φ un endomorphisme de E. On appelle matrice associée à φ relativement à $\mathcal{B}$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. On la note plus simplement*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \quad \textit{ou} \quad \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}).$$

Avec les notations utilisées, on a de façon symbolique :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) \overset{déf.}{=} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & & \varphi(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} .$$

Remarque Pour signifier que la représentation matricielle d'une application linéaire φ de E dans F s'effectue par rapport aux deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, nous avons convenu de noter en indice ces deux bases dans « $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$ ». Il est à remarquer l'ordre des deux bases dans cette notation. La première base désigne toujours la base de départ (ici $\mathcal{B}_E$) et la seconde toujours la base d'arrivée (ici $\mathcal{B}_F$). Il faut toujours respecter cet ordre. On pourra retenir le schéma suivant :

$$(E,\mathcal{B}_E) \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)} (F,\mathcal{B}_F).$$

En revanche, lorsqu'on note « $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ », l'ordre des deux indices n et p dans « $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ » est inversé par rapport à l'ordre des deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ dans « $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$ ». Le premier indice (ici n) correspond à la dimension de l'espace d'arrivée (ici F) et le second (ici p) à la dimension de l'espace de départ (ici E). Cette notation est, certes, malheureuse mais il s'agit de la notation usuelle.

Exemples

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 muni de la base $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni de la base $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, f_3)$. Soit φ une application linéaire de E dans F définie par son action sur les deux vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$:

$$\varphi(e_1) = 2f_1 + 3f_2 - f_3, \qquad \varphi(e_2) = f_1 - f_2 + 4f_3.$$

La matrice associée à φ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est une matrice 3×2 et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{K})$. Elle s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}.$$

Inversons à présent l'ordre des vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$ de l'espace de départ. On obtient la nouvelle base $\mathcal{C}_E = (e_2, e_1)$. Rappelons que l'ordre des vecteurs a une importance dans la définition d'une famille. Les deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$, bien qu'appartenant au même espace vectoriel, sont donc distinctes. De même, inversons l'ordre des vecteurs de la base $\mathcal{B}_F$ de l'espace d'arrivée. On obtient la nouvelle base $\mathcal{C}_F = (f_3, f_2, f_1)$. Écrivons alors la matrice associée à φ relativement à ces deux nouvelles bases. C'est bien sûr encore une matrice 3×2. Elle s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{C}_F}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \varphi(e_2) & \varphi(e_1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_3 \\ f_2 \\ f_1 \end{array}.$$

2. Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension $n + 1$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}_{\mathbb{K}_n[X]} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$, on considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$ qui au polynôme P associe son polynôme dérivé P'. La matrice associée

à φ relativement à $\mathcal{B}_{\mathbb{K}_n[X]}$ est une matrice carrée d'ordre $n+1$ et on note $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_{\mathbb{K}_n[X]}) \in \text{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} \varphi(1) & = & (1)' & = & 0, \\ \varphi(X) & = & (X)' & = & 1, \\ \varphi(X^2) & = & (X^2)' & = & 2X, \\ & \vdots & & & \\ \varphi(X^n) & = & (X^n)' & = & nX^{n-1}. \end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_{\mathbb{K}_n[X]}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \ldots & \varphi(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & n \\ 0 & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ X \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}$$

Comme l'illustre l'exercice 2 ci-après, la représentation matricielle d'un endomorphisme dépend non seulement du choix, mais aussi de l'ordre des deux bases de départ et d'arrivée.

Exercice 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur (x_1, x_2, x_3) associe le vecteur (y_1, y_2, y_3) où

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1 & = & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 & = & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_3 & = & x_1 + x_2 + 2x_3 \end{array}\right. .$$

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux bases $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ et $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ avec

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0), \quad \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1),$$

$$\boldsymbol{u}_1 = (1,0,-1), \quad \boldsymbol{u}_2 = (1,-1,0), \quad \boldsymbol{u}_3 = (1,1,1).$$

Expliciter les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$.

Remarques

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On vérifie (c'est immédiat) que la matrice associée à l'application identité relativement à n'importe quelle base de E est la matrice identité d'ordre n. Autrement dit, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) = \text{I}_n$ pour toute base $\mathcal{B}$ de E.

2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et φ un endomorphisme de E. Si, relativement à $\mathcal{B}$, la matrice représentative de φ est triangulaire supérieure, alors, relativement à la base $\mathcal{C}$ obtenue à partir de $\mathcal{B}$ en

inversant l'ordre des vecteurs, la matrice représentative de φ est triangulaire inférieure. Par exemple, avec $n = 4$, si

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ 0 & 0 & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} \end{pmatrix}$$

avec $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} t_{44} & 0 & 0 & 0 \\ t_{34} & t_{33} & 0 & 0 \\ t_{24} & t_{23} & t_{22} & 0 \\ t_{14} & t_{13} & t_{12} & t_{11} \end{pmatrix}$$

avec $\mathcal{C} = (\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)$.

Matrices associées à des projections et symétries vectorielles

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces supplémentaires dans E, c'est-à-dire : $E = F \oplus G$. Supposons l'espace E de dimension finie et notons $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. Les deux sous-espaces F et G sont nécessairement de dimensions finies. Notons $r = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ d'où $\dim_{\mathbb{K}}(G) = n - r$. Soient $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r)$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-r})$ une base de G. Il est clair que la famille $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-r})$ constitue une base de E. Elle est dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

- Désignons par p la projection vectorielle sur F parallèlement à G. La matrice P associée à p relativement à la base $\mathcal{B}_E$ ainsi construite s'écrit :

$$\mathrm{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{array}\right).$$

  On a en effet d'une part, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $p(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{u}_k$ puisque $\boldsymbol{u}_k \in F = \operatorname{Im} p$, et d'autre part, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$, $p(\boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{0}_E$ puisque $\boldsymbol{v}_k \in G = \operatorname{Ker} p$ (voir au chapitre 9, page 383).
- Si s désigne la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G alors la matrice S associée à s relativement à $\mathcal{B}_E$ s'écrit :

$$\mathrm{S} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & -\mathrm{I}_{n-r} \end{array}\right).$$

  En effet, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $s(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{u}_k$ puisque $\boldsymbol{u}_k \in F = \operatorname{Inv} s$, et d'autre part, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$, $s(\boldsymbol{v}_k) = -\boldsymbol{v}_k$ puisque $\boldsymbol{v}_k \in G = \operatorname{Opp} s$ (voir au chapitre 9, page 384).

10.2.2 Écriture matricielle d'une égalité vectorielle

L'intérêt de connaître la matrice associée à une application linéaire φ (relativement à deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$) est de pouvoir réécrire une égalité vectorielle de la forme $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$ sous la forme d'une égalité matricielle. C'est ce que nous allons voir dans ce paragraphe. Considérons la matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}$ associée à l'application linéaire φ relativement aux bases $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{e}_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ et $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{f}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Décomposons le vecteur $\boldsymbol{x}$ de E dans $\mathcal{B}_E$:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j \boldsymbol{e}_j.$$

Décomposons à présent son image $\boldsymbol{y}$ par φ (c'est un vecteur de F) dans $\mathcal{B}_F$:

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{f}_i \tag{5}$$

et cherchons à exprimer chacune des coordonnées y_1, y_2,..., y_n du vecteur $\boldsymbol{y}$ en fonction des coordonnées x_1, x_2, ..., x_p du vecteur $\boldsymbol{x}$. Pour cela, commençons par calculer $\varphi(\boldsymbol{x})$. Utilisant la linéarité de φ, on a :

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^{p} x_j \boldsymbol{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{p} x_j \varphi(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^{p} \Big[x_j \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{f}_i\Big)\Big]$$

puisque $\varphi(\boldsymbol{e}_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{f}_i$ pour $j = 1, 2, \ldots, p$. Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} \Big[x_j \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{f}_i\Big)\Big] &= \sum_{j=1}^{p} \Big[\sum_{i=1}^{n} x_j a_{ij} \boldsymbol{f}_i\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij} \boldsymbol{f}_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \Big[\Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\Big) \boldsymbol{f}_i\Big]
\end{aligned}$$

où on a, dans un premier temps, fait passer le scalaire x_j à l'intérieur de la deuxième somme (puisqu'il ne dépend pas de l'indice i), interverti dans un second temps les deux sommes, et enfin fait sortir le vecteur $\boldsymbol{f}_i$ de la deuxième somme (puisqu'il ne dépend pas de l'indice j). On a donc obtenu :

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \Big[\Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\Big) \boldsymbol{f}_i\Big]. \tag{6}$$

De (5) et (6) il vient l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{f}_i = \sum_{i=1}^{n} \Big[\Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\Big) \boldsymbol{f}_i\Big].$$

Par identification des coordonnées (la décomposition d'un vecteur dans une base étant unique), on obtient :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p \end{cases}$$

Ces relations se nomment *équations (ou représentation analytique) de φ relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$*. Regroupons-les sous une forme matricielle plus compacte. Introduisons pour cela les deux matrices-colonnes X et Y.

- La matrice-colonne X est constituée des coordonnées x_1, x_2, $\ldots$, x_p du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la base $\mathcal{B}_E$. On la note ainsi parfois $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\boldsymbol{x})$ ou $\mathrm{Mat}(\boldsymbol{x}, \mathcal{B}_E)$. La matrice-colonne X appartient à $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
- La matrice-colonne Y est constituée des coordonnées y_1, y_2, $\ldots$, y_n du vecteur $\boldsymbol{y}$ dans la base $\mathcal{B}_F$. On la note aussi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\boldsymbol{y})$ ou $\mathrm{Mat}(\boldsymbol{y}, \mathcal{B}_F)$. La matrice-colonne Y appartient à $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Le système d'équations précédent s'écrit aussi sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

On a donc l'égalité matricielle :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\boldsymbol{y})}_{=\mathrm{Y}} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)}_{=\mathrm{A}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\boldsymbol{x})}_{=\mathrm{X}}.$$

On a établi la proposition suivante.

PROPOSITION 10.5 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}_E$, F un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}_F$ et φ une application linéaire de E dans F. Si $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$ alors l'égalité vectorielle :*

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$$

s'écrit, relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, sous la forme matricielle :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A}\,\mathrm{X}$$

où la matrice-colonne X de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est constituée des coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{B}_E$, ce que l'on note $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\boldsymbol{x})$ ou $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}(\boldsymbol{x}, \mathcal{B}_E)$, et où la matrice-colonne Y de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est constituée des coordonnées du vecteur $\boldsymbol{y}$ dans $\mathcal{B}_F$, ce que l'on note $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\boldsymbol{y})$ ou $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}(\boldsymbol{y}, \mathcal{B}_F)$.

Remarques

1. Remarquons que lorsqu'on écrit Y = A X, l'égalité matricielle n'a de sens que dans l'ensemble des matrices de type $(n, 1)$. En effet, à gauche de l'égalité, on trouve la matrice Y qui est une matrice de type $(n, 1)$. À droite de l'égalité, on trouve le produit matriciel A X, c'est-à-dire le produit de la matrice A de type (n, p) et de la matrice X de type $(p, 1)$. Le résultat de ce produit matriciel est une matrice de type $(n, 1)$. C'est donc une matrice-colonne de type identique à celui de Y.

2. Si $n \neq p$ alors les deux matrices-colonnes X et Y ne sont pas du même type puisque leurs nombres de lignes diffèrent.

Exemple Reprenons l'exemple de l'application linéaire φ de E dans F, avec E, F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions respectives 2 et 3, définie par

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2 - \boldsymbol{f}_3, \qquad \varphi(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2 + 4\boldsymbol{f}_3$$

où $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ est une base de E et $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ une base de F. Soient $\boldsymbol{x}$ un vecteur de E et $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$. Décomposons $\boldsymbol{x}$ dans la base de départ $\mathcal{B}_E$ et $\boldsymbol{y}$ dans la base d'arrivée $\mathcal{B}_F$. On a :

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + y_3\boldsymbol{f}_3.$$

Puisque φ est linéaire, on a :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) & = & x_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + x_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) \\ & = & x_1(2\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2 - \boldsymbol{f}_3) + x_2(\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2 + 4\boldsymbol{f}_3) \\ & = & (2x_1 + x_2)\boldsymbol{f}_1 + (3x_1 - x_2)\boldsymbol{f}_2 + (-x_1 + 4x_2)\boldsymbol{f}_3. \end{array}$$

L'égalité vectorielle $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$ se réécrit alors :

$$y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + y_3\boldsymbol{f}_3 = (2x_1 + x_2)\boldsymbol{f}_1 + (3x_1 - x_2)\boldsymbol{f}_2 + (-x_1 + 4x_2)\boldsymbol{f}_3.$$

En procédant à l'identification des coordonnées, on en déduit les expressions de y_1, y_2, y_3 en fonction de x_1, x_2 :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & 2x_1 + x_2 \\ y_2 & = & 3x_1 - x_2 \\ y_3 & = & -x_1 + 4x_2 \end{array} \right.$$

Ce sont les équations de φ relativement aux deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Ce système s'écrit aussi sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

10.2.3 Application canoniquement associée à une matrice

Faisons le point.

- Nous venons de voir que toute application linéaire peut être représentée, relativement à deux bases, sous forme matricielle (à condition, bien sûr, que les espaces de départ et d'arrivée soient tous deux de dimensions finies !).
- Inversement, pouvons-nous affirmer qu'une matrice rectangulaire est toujours la représentation d'une application linéaire ? Le cas échéant, quelle est cette application linéaire ? Quels sont les espaces vectoriels mis en jeu ? Quelles en sont les bases ?

La proposition suivante donne une réponse à ces interrogations.

PROPOSITION 10.6 *Soit* A *une matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$. *Il existe une unique application linéaire de* $\mathbb{K}^p$ *dans* $\mathbb{K}^n$ *admettant* A *pour matrice associée relativement aux bases canoniques. On dit qu'une telle application linéaire est canoniquement associée à la matrice* A.

Démonstration Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ une matrice de type (n,p) sur $\mathbb{K}$. Montrons dans un premier temps l'existence d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ admettant A pour matrice associée relativement aux bases canoniques. Considérons l'application φ_c de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ qui au vecteur $(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ associe le vecteur $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ où

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\ & \vdots & \\ y_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p \end{array}\right.$$

avec a_{ij} appartenant à $\mathbb{K}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$. On a déjà vu (voir la proposition 9.3, page 375) que φ_c était linéaire. On note alors $\varphi_c \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$. Soient $\mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^p} = (e_1,e_2,\ldots,e_p)$ et $\mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^n} = (f_1,f_2,\ldots,f_n)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Exprimons $\varphi_c(e_1)$, …, $\varphi_c(e_p)$ dans $\mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^n}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_c(e_1) & = & \varphi_c((1,0,\ldots,0)) \;=\; (a_{11},a_{21},\ldots,a_{n1}) \\ & = & a_{11}(1,0,\ldots,0) + a_{21}(0,1,\ldots,0) + \ldots + a_{n1}(0,0,\ldots,1) \\ & = & a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \ldots + a_{n1}f_n, \\[2ex] \varphi_c(e_2) & = & \varphi_c((0,1,\ldots,0)) \;=\; (a_{12},a_{22},\ldots,a_{n2}) \\ & = & a_{12}(1,0,\ldots,0) + a_{22}(0,1,\ldots,0) + \ldots + a_{n2}(0,0,\ldots,1) \\ & = & a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \ldots + a_{n2}f_n, \\[6ex] \varphi_c(e_p) & = & \varphi_c((0,0,\ldots,1)) \;=\; (a_{1p},a_{2p},\ldots,a_{np}) \\ & = & a_{1p}(1,0,\ldots,0) + a_{2p}(0,1,\ldots,0) + \ldots + a_{np}(0,0,\ldots,1) \\ & = & a_{1p}f_1 + a_{2p}f_2 + \ldots + a_{np}f_n. \end{array}$$

On en déduit :

$$\mathrm{Mat}(\varphi_c, \mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^p}, \mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^n}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi_c(\boldsymbol{e}_1) & \varphi_c(\boldsymbol{e}_2) & & \varphi_c(\boldsymbol{e}_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_n \end{array}.$$

On retrouve précisément la matrice A, vérifiant ainsi que $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}(\varphi_c, \mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^p}, \mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^n})$. Montrons à présent l'unicité d'une telle application linéaire. Supposons qu'il existe deux applications linéaires φ_1 et φ_2 de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ admettant A pour matrice associée relativement aux bases canoniques. De l'égalité matricielle :

$$\mathrm{Mat}(\varphi_1, \mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^p}, \mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^n}) = \mathrm{Mat}(\varphi_2, \mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^p}, \mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^n}),$$

il vient immédiatement :

$$\forall j \in \{1, \ldots, p\} \quad \varphi_1(\boldsymbol{e}_j) = \varphi_2(\boldsymbol{e}_j),$$

c'est-à-dire :[3] $\varphi_1(\boldsymbol{x}) = \varphi_2(\boldsymbol{x})$ pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{K}^p$. Les deux applications φ_1 et φ_2 sont donc identiques. L'unicité est démontrée. □

Exemple Reprenons l'exemple de la matrice A, matrice carrée d'ordre $n+1$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, définie par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & n \\ 0 & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons vu (voir page 431) que A est la matrice associée à l'endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P'$ pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. La matrice A est aussi la matrice associée à l'endomorphisme φ_c de $\mathbb{K}^{n+1}$ qui à $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ associe $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ avec

$$\begin{cases} y_k = k\, x_{k+1} \text{ pour } k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ y_{n+1} = 0, \end{cases}$$

et ce relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. Les deux applications linéaires $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$ et $\varphi_c : \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ sont toutes les deux associées à la même matrice A. En revanche, seule l'application φ_c est qualifiée d'application canoniquement associée à A.

(3) Rappelons qu'une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ.

10.2.4 Propriétés

PROPOSITION 10.7 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Si φ_1 et φ_2 sont deux applications linéaires de E vers F, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$, alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi_1) + \beta \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi_2).$$

En particulier, si $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \overset{not.}{=} \mathcal{B}$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1) + \beta \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_2).$$

Démonstration Il suffit de revenir à la définition d'une matrice associée à une application linéaire. Rappelons que l'ensemble des applications linéaires de E dans F possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel (voir en page 370). Par conséquent, $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ puisque φ_1 et φ_2 appartiennent à $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. Soient $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ une base de F. Notons $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ (resp. $\mathrm{B} = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$) la matrice de type (n,p) sur $\mathbb{K}$ représentant φ_1 (resp. φ_2) dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Ainsi, par définition, on a :

$$\varphi_1(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{f}_i \quad \text{et} \quad \varphi_2(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{f}_i \tag{7}$$

pour tout $j \in \{1,2,\ldots,p\}$. Puisque $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, la matrice représentative de $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est de type (n,p). Notons $\mathrm{C} = (c_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ cette matrice. Par définition de C, on a :

$$(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{f}_i \tag{8}$$

pour tout $j \in \{1,2,\ldots,p\}$. Pour déterminer C, calculons $(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(\boldsymbol{e}_j)$ pour $j \in \{1,2,\ldots,p\}$. Soit j un entier compris entre 1 et p. On a :

$$(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(\boldsymbol{e}_j) = \alpha\varphi_1(\boldsymbol{e}_j) + \beta\varphi_2(\boldsymbol{e}_j) = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{f}_i + \beta\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{f}_i$$

où nous avons utilisé (7), c'est-à-dire :

$$(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})\boldsymbol{f}_i. \tag{9}$$

De (8) et (9), on déduit l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{f}_i = \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})\boldsymbol{f}_i,$$

d'où, par identification des coordonnées, $c_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}$ pour tous $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $j \in \{1,\ldots,p\}$, c'est-à-dire $\mathrm{C} = \alpha \cdot \mathrm{A} + \beta \cdot \mathrm{B}$, ce qui termine la démonstration. □

Isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Si E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n alors il existe une bijection entre l'ensemble des applications linéaires de E dans F et l'ensemble des matrices rectangulaires de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$. C'est l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}$ qui à toute application linéaire de E dans F fait correspondre sa matrice représentative relativement à une base fixée $\mathcal{B}_E=(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_p)$ de E et une base fixée $\mathcal{B}_F=(\boldsymbol{f}_1,\ldots,\boldsymbol{f}_n)$ de F :

$$\begin{array}{rccl}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}: & \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) & \longrightarrow & \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & \varphi & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)\end{array}.$$

Cette application est en effet injective puisque de l'égalité matricielle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi_1)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi_2)$$

où φ_1 et φ_2 désignent deux applications linéaires de E dans F, il vient immédiatement $\varphi_1(\boldsymbol{e}_j)=\varphi_2(\boldsymbol{e}_j)$ pour tout $j\in\{1,\ldots,p\}$, et donc $\varphi_1(\boldsymbol{x})=\varphi_2(\boldsymbol{x})$ pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E. Il est clair qu'elle est aussi surjective puisque pour tout $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe $\varphi\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)=\mathrm{A}$. Il suffit en effet de considérer l'application linéaire φ définie par

$$\forall j\in\{1,\ldots,p\}\quad \varphi(\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{f}_i.$$

De plus, d'après la proposition 10.7, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}$ définit un morphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. C'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. Cet isomorphisme est subordonné au choix des deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Il n'est donc pas unique.

Remarquons que les deux espaces vectoriels $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ étant isomorphes, ils ont nécessairement la même dimension. Nous avons établi plus haut que $\dim_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})\big)=n\times p$ (voir page 420). Or, $p=\dim_{\mathbb{K}}(E)$ et $n=\dim_{\mathbb{K}}(F)$. Par conséquent, lorsque E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions finies,

$$\dim_{\mathbb{K}}\big(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)\big)=\dim_{\mathbb{K}}(E)\times\dim_{\mathbb{K}}(F).$$

Nous avions déjà énoncé ce résultat au chapitre 9, page 370, sans le démontrer.

PROPOSITION 10.8 *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. Si φ est une application linéaire de E vers F et ψ une application linéaire de F vers G, alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(\psi\circ\varphi)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(\psi)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi).$$

En particulier, si $E=F=G$ et $\mathcal{B}_E=\mathcal{B}_F=\mathcal{B}_G\overset{not.}{=}\mathcal{B}$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi\circ\varphi)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi).$$

Démonstration Comme pour la démonstration de la proposition 10.7, il suffit encore de revenir à la définition d'une matrice associée à une application linéaire. La composée d'applications linéaires étant elle-même linéaire (voir en page 370), $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$ car $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$. Soient $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ une base de E, $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_q)$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n)$ une base de G. Notons $\mathrm{A} = (a_{kj})_{1 \leqslant k \leqslant q, 1 \leqslant j \leqslant p}$ la matrice représentant φ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ (c'est une matrice de type (q, p)). On a alors, par définition de A :

$$\varphi(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{k=1}^{q} a_{kj} \boldsymbol{f}_k \tag{10}$$

pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Notons $\mathrm{B} = (b_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant q}$ la matrice représentant ψ dans les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ (la matrice B est de type (n, q)). Par définition de la matrice B, on a, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$:

$$\psi(\boldsymbol{f}_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \boldsymbol{g}_i. \tag{11}$$

Puisque $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$, la matrice représentative de $\psi \circ \varphi$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$ est de type (n, p). Notons-la $\mathrm{C} = (c_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$. Ainsi, par définition de C, on a, pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$:

$$\psi(\varphi(\boldsymbol{e}_j)) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \boldsymbol{g}_i. \tag{12}$$

Pour expliciter C, calculons $(\psi \circ \varphi)(\boldsymbol{e}_j)$ pour $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Soit j un entier compris entre 1 et p. Utilisant successivement (10), la linéarité de ψ et (11),

$$\psi(\varphi(\boldsymbol{e}_j)) = \psi\Big(\sum_{k=1}^{q} a_{kj} \boldsymbol{f}_k\Big) = \sum_{k=1}^{q} a_{kj} \psi(\boldsymbol{f}_k) = \sum_{k=1}^{q} \Big[a_{kj} \Big(\sum_{i=1}^{n} b_{ik} \boldsymbol{g}_i\Big)\Big].$$

Faisons alors entrer sous la deuxième somme le scalaire a_{kj} (puisqu'il ne dépend pas de l'indice i), puis intervertissons les deux sommes, et enfin sortons de la deuxième somme le vecteur $\boldsymbol{g}_i$ (puisqu'il ne dépend pas de l'indice k). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{q} \Big[a_{kj} \Big(\sum_{i=1}^{n} b_{ik} \boldsymbol{g}_i\Big)\Big] &= \sum_{k=1}^{q} \Big[\sum_{i=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \boldsymbol{g}_i\Big] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{k=1}^{q} b_{ik} a_{kj} \boldsymbol{g}_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \Big[\Big(\sum_{k=1}^{q} b_{ik} a_{kj}\Big) \boldsymbol{g}_i\Big]. \end{aligned}$$

Nous obtenons, pour $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$,

$$\psi(\varphi(\boldsymbol{e}_j)) = \sum_{i=1}^{n} \Big[\Big(\sum_{k=1}^{q} b_{ik} a_{kj}\Big) \boldsymbol{g}_i\Big]. \tag{13}$$

De (12) et (13), on déduit l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{g}_i = \sum_{i=1}^{n}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{q} b_{ik}a_{kj}\Big)\boldsymbol{g}_i\Big],$$

d'où, par identification des coordonnées, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} b_{ik}a_{kj}$ pour tous $i \in \{1,\dots,n\}$ et $j \in \{1,\dots,p\}$, c'est-à-dire $\mathrm{C} = \mathrm{B} \times \mathrm{A}$, ce qui termine la démonstration. □

Remarque De manière symbolique, si $E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G$ alors $E \xrightarrow{\psi\circ\varphi} G$. De la même manière, en munissant chacun des trois espaces d'une base et en remplaçant chacune des deux applications (linéaires) par sa représentation matricielle relativement aux bases choisies, si

$$(E,\mathcal{B}_E) \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)} (F,\mathcal{B}_F) \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(\psi)} (G,\mathcal{B}_G)$$

alors

$$(E,\mathcal{B}_E) \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(\psi\circ\varphi)} (G,\mathcal{B}_G).$$

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 muni de la base $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)$, F un $\mathbb{K}$-espace de dimension 3 muni de la base $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ et G un $\mathbb{K}$-espace de dimension 2 muni de la base $\mathcal{B}_G = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2)$. On considère l'application linéaire φ de E dans F définie par

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{f}_1 - 5\boldsymbol{f}_2 + 7\boldsymbol{f}_3, \quad \varphi(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{f}_1 - 2\boldsymbol{f}_2 + 3\boldsymbol{f}_3,$$
$$\varphi(\boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{f}_1 - 3\boldsymbol{f}_2 - 4\boldsymbol{f}_3, \quad \varphi(\boldsymbol{e}_4) = 6\boldsymbol{f}_1 - 2\boldsymbol{f}_2 - 3\boldsymbol{f}_3.$$

On considère l'application linéaire ψ de F dans G définie par

$$\psi(\boldsymbol{f}_1) = 2\boldsymbol{g}_1 + 3\boldsymbol{g}_2, \quad \psi(\boldsymbol{f}_2) = 2\boldsymbol{g}_1 - 2\boldsymbol{g}_2, \quad \psi(\boldsymbol{f}_3) = \boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{g}_2.$$

Le but est ici de déterminer les équations de $\psi \circ \varphi$ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$. Soient $\boldsymbol{x}$ un vecteur de E et $\boldsymbol{z}$ son image par l'application composée $\psi\circ\varphi$. Notons x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{B}_E$ et z_1, z_2 celles de $\boldsymbol{z}$ dans $\mathcal{B}_G$. Relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$, l'égalité vectorielle $\boldsymbol{z} = (\psi\circ\varphi)(\boldsymbol{x})$ s'écrit sous la forme matricielle (voir la proposition 10.5, page 434) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(\psi\circ\varphi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\boldsymbol{x}).$$

Il convient donc de déterminer la matrice représentative de $\psi\circ\varphi$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$. D'après la proposition 10.12,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(\psi\circ\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi).$$

On déduit facilement des définitions de φ et ψ que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ -5 & -2 & -3 & -2 \\ 7 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(\psi) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que l'on a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ -5 & -2 & -3 & -2 \\ 7 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 5 \\ 23 & 10 & 8 & 19 \end{pmatrix}.$$

Relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$, $\boldsymbol{z} = (\psi \circ \varphi)(\boldsymbol{x})$ s'écrit ainsi :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 5 \\ 23 & 10 & 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors les équations de $\psi \circ \varphi$ relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + x_2 - 6x_3 + 5x_4 \\ z_2 = 23x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 19x_4 \end{cases}$$

Conséquence

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, φ un endomorphisme de E et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On vérifie, par récurrence sur k, que si A est la matrice associée à φ relativement à $\mathcal{B}$ alors A^k avec $k \in \mathbb{N}^*$ est la matrice associée à l'application composée φ^k relativement à $\mathcal{B}$ où on a noté :

$$\mathrm{A}^k = \underbrace{\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \ldots \times \mathrm{A}}_{k \text{ fois}} \quad \text{et} \quad \varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k \text{ fois}}.$$

Rappelons d'une part que, par convention,

$$\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad \varphi^0 = \mathrm{id}_E,$$

et d'autre part que $\mathrm{I}_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$ pour toute base $\mathcal{B}$ de E. Par conséquent, si $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}^k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k).$$

En particulier, si l'endomorphisme φ est nilpotent alors la matrice carrée A est nilpotente et de même indice de nilpotence que φ.

Exercice 3 Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
1 - Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice p alors $p \leqslant n$.
2 - Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dite triangulaire supérieure stricte si :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \quad (\, i \geqslant j \implies a_{ij} = 0\,).$$

Montrer que si A est triangulaire supérieure stricte alors A est nilpotente.
Indication : utiliser un endomorphisme φ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dont la matrice représentative par rapport à une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ de E est A et montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{cases} \varphi^k(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{0}_E \text{ pour tout } j \in \{1, 2, \ldots, k\}, \\ \varphi^k(\boldsymbol{e}_j) \in \operatorname{Vect}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{j-k}) \text{ pour tout } j \in \{k+1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

3 - Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer A^m avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10.3 Rang d'une matrice rectangulaire

10.3.1 Définition du rang d'une matrice

La notion de rang a déjà été définie pour une famille finie de vecteurs (voir la définition 8.15, page 344). Cela nous avait alors permis de définir le rang d'une application linéaire φ de E dans F comme la dimension du sous-espace $\operatorname{Im}\varphi$ de F, à la condition que E soit de dimension finie (voir la définition 9.6, page 395).

Nous définissons maintenant le rang d'une matrice rectangulaire.

Définition 10.13 *Soit* A *une matrice de type* (n, p) *sur* $\mathbb{K}$. *On appelle* rang *de* A, *et on note* rg A, *le rang de la famille des p vecteurs correspondant aux colonnes de* A, *dans l'espace vectoriel* $\mathbb{K}^n$. *En d'autres termes,*

$$\operatorname{rg} A \overset{déf.}{=} \operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p)$$

où, pour $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\boldsymbol{c}_j$ *désigne le vecteur de* $\mathbb{K}^n$ *dont les coordonnées dans la base canonique sont rangées dans la j-ième colonne de* A.

Isomorphisme canonique entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Rappelons que deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si, ils sont de même dimension (voir la proposition 9.11, page 393). Par conséquent, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n est isomorphe à $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ puisque $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est lui-même un $\mathbb{K}$-espace de dimension n. Il est d'ailleurs relativement aisé d'exhiber un isomorphisme entre E et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Il suffit de munir l'espace E d'une base $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ et de considérer l'application notée $\Phi_{\mathcal{B}_E}$ qui au vecteur $\boldsymbol{x}$ de E associe la matrice-colonne X de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{B}_E$, autrement dit l'application :

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n \longmapsto \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Un tel isomorphisme $\Phi_{\mathcal{B}_E}$ n'est bien évidemment pas unique car il est subordonné au choix de la base $\mathcal{B}_E$. En particulier, $\mathbb{K}^n$ est isomorphe à $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et l'application :

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est qualifiée d'isomorphisme canonique car les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ coïncident avec les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Nous notons Φ_c cet isomorphisme.

Soient A une matrice sur $\mathbb{K}$ comportant n lignes et p colonnes et $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_p$ les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dont les coordonnées dans la base canonique sont rangées respectivement dans les colonnes $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_p$ de A. On a alors $\Phi_c(\boldsymbol{c}_j) = \mathrm{C}_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$ et, puisque Φ_c est un isomorphisme,

$$\mathrm{rg}(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_p) = \mathrm{rg}(\Phi_c(\boldsymbol{c}_1), \ldots, \Phi_c(\boldsymbol{c}_p)) = \mathrm{rg}(\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_p).$$

Ainsi, le rang de la matrice A est aussi égal au rang de la famille de ses p matrices-colonnes $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_p$ considérées comme des vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Autrement dit, $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = \mathrm{rg}(\mathrm{C}_1, \cdots, \mathrm{C}_p)$.

Exemple Considérons la matrice rectangulaire suivante :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Alors,} \quad \mathrm{C}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce sont deux matrices-colonnes. Elles appartiennent à $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = 2$ car les vecteurs $\boldsymbol{c}_1 = (2, 4, 0)$ et $\boldsymbol{c}_2 = (2, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ associés aux deux matrices-colonnes C_1 et C_2 forment une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.

On a le résultat suivant.

PROPOSITION 10.9 *Si* A *est une matrice de type* (n, p) *alors*

$$\operatorname{rg} \mathrm{A} \leqslant \min\{n, p\}.$$

Démonstration Comme dans la définition 10.13, désignons par $\boldsymbol{c}_j$ le vecteur de $\mathbb{K}^n$ correspondant à la j-ième colonne de A, et ce pour $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. De l'égalité :

$$\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p) = \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Vect}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p)\big),$$

il vient d'une part que $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p) \leqslant p$ puisque les vecteurs $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p$ ne sont pas nécessairement linéairement indépendants, et d'autre part que $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p) \leqslant n$ puisque $\operatorname{Vect}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p)$ est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$. On a donc $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p) \leqslant \min\{n, p\}$, c'est-à-dire $\operatorname{rg} \mathrm{A} \leqslant \min\{n, p\}$. □

10.3.2 Lien entre le rang d'une matrice et celui d'une application associée

Considérons une matrice A de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$. Posons

$$\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p}.$$

Y-a-t-il un lien entre le rang de A et celui d'une application linéaire qui lui est associée ? Pour répondre à cette question, commençons par nous intéresser à l'application linéaire φ_{c} canoniquement associée à A. Rappelons (voir en page 436) que φ_{c} est l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice associée relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{K}^p} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ de $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{B}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{K}^n} = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ de $\mathbb{K}^n$ est A. On a donc :

$$\varphi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{f}_i \tag{14}$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. Montrons que le rang de l'application linéaire φ_{c} est égal au rang de la matrice A. Rappelons que le rang de φ_{c} est défini comme la dimension du sous-espace $\operatorname{Im} \varphi_{\mathrm{c}}$, ce dernier étant engendré par les images par φ_{c} des vecteurs de $\mathcal{B}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{K}^p}$. Soit j un entier compris entre 1 et p. On vérifie :

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{e}_j) &= a_{1j} \boldsymbol{f}_1 + a_{2j} \boldsymbol{f}_2 + \ldots + a_{nj} \boldsymbol{f}_n \\
&= a_{1j}(1, 0, \ldots, 0) + a_{2j}(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + a_{nj}(0, 0, \ldots, 1) \\
&= (a_{1j}, 0, \ldots, 0) + (0, a_{2j}, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, a_{nj}) \\
&= (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}).
\end{aligned}$$

Or, $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ est précisément le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont les coefficients sont rangés dans la j-ième colonne C_j de la matrice A. Nous l'avons noté $\boldsymbol{c}_j$. On a ainsi montré que $\operatorname{Im} \varphi_{\mathrm{c}} = \operatorname{Vect}\big(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p\big)$, d'où en passant aux dimensions,

$$\operatorname{rg} \varphi_{\mathrm{c}} = \operatorname{rg} \mathrm{A}$$

puisque, par définition, $\operatorname{rg}\varphi_{\mathrm{c}} = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}\varphi_{\mathrm{c}})$ et $\operatorname{rg} \mathrm{A} = \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Vect}(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_p)\big)$.

Considérons à présent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, le premier de dimension p et le second de dimension n, munis respectivement des bases $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$ et $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ et φ une application linéaire de E dans F dont la matrice associée relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est aussi A. Puisque A représente φ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, on a :

$$\varphi(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{v}_i \tag{15}$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. Il existe une relation liant φ et φ_{c}. Pour l'établir, nous devons considérer l'isomorphisme Ψ de $\mathbb{K}^p$ dans E qui transforme $\mathcal{B}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{K}^p}$ en $\mathcal{B}_E$ (c'est-à-dire : $\Psi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{u}_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$) ainsi que l'isomorphisme Φ de $\mathbb{K}^n$ dans F qui transforme $\mathcal{B}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{K}^n}$ en $\mathcal{B}_F$ (c'est-à-dire : $\Phi(\boldsymbol{f}_i) = \boldsymbol{v}_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$). Soit j un entier entre 1 et p. Calculons $(\Phi \circ \varphi_{\mathrm{c}} \circ \Psi^{-1})(\boldsymbol{u}_j)$. Utilisant que $\Psi^{-1}(\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{e}_j$,

$$(\Phi \circ \varphi_{\mathrm{c}} \circ \Psi^{-1})(\boldsymbol{u}_j) = \Phi\big[\varphi_{\mathrm{c}}\big(\Psi^{-1}(\boldsymbol{u}_j)\big)\big] = \Phi\big[\varphi_{\mathrm{c}}\big(\boldsymbol{e}_j\big)\big].$$

Ainsi, utilisant (14), puis la linéarité de Φ,

$$(\Phi \circ \varphi_{\mathrm{c}} \circ \Psi^{-1})(\boldsymbol{u}_j) = \Phi\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{f}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Phi(\boldsymbol{f}_i).$$

Utilisant enfin que $\Phi(\boldsymbol{f}_i) = \boldsymbol{v}_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on obtient :

$$(\Phi \circ \varphi_{\mathrm{c}} \circ \Psi^{-1})(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{v}_i,$$

d'où, en comparant avec (15), $\big(\Phi\circ\varphi_{\mathrm{c}}\circ\Psi^{-1}\big)(\boldsymbol{u}_j) = \varphi(\boldsymbol{u}_j)$. Les deux applications linéaires $\Phi \circ \varphi_{\mathrm{c}} \circ \Psi^{-1}$ et φ sont nécessairement identiques puisqu'elles agissent de la même manière sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$ de E. On a donc montré l'égalité $\varphi = \Phi \circ \varphi_{\mathrm{c}} \circ \Psi^{-1}$, schématisée par

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad \varphi = \Phi \circ \varphi_{\mathrm{c}} \circ \Psi^{-1} \quad} & F \\ \Psi^{-1} \big\downarrow & & \big\uparrow \Phi \\ \mathbb{K}^p & \xrightarrow[\quad \varphi_{\mathrm{c}} \quad]{} & \mathbb{K}^n \end{array} .$$

De $\varphi = \Phi \circ \varphi_{\mathrm{c}} \circ \Psi^{-1}$ il vient $\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg}\big(\Phi \circ \varphi_{\mathrm{c}} \circ \Psi^{-1}\big)$. Rappelons que l'on ne change pas le rang d'une application linéaire en composant à droite et à gauche par deux applications linéaires bijectives (voir la proposition 9.14, page 399, et la remarque page 400). Les deux applications Φ et Ψ^{-1} étant bijectives puisque ce sont des isomorphismes, on a : $\operatorname{rg}\big(\Phi\circ\varphi_{\mathrm{c}}\circ\Psi^{-1}\big) = \operatorname{rg}\varphi_{\mathrm{c}}$ et donc $\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg}\varphi_{\mathrm{c}}$, établissant ainsi que

$$\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg}\mathrm{A}$$

puisqu'il a été établi plus haut que $\operatorname{rg}\varphi_c = \operatorname{rg} A$.

On est donc en mesure d'énoncer le résultat suivant.

PROPOSITION 10.10 *Soit* A *une matrice rectangulaire. Si φ est une application linéaire de E dans F, avec E un $\mathbb{K}$-espace muni d'une base $\mathcal{B}_E$ et F un $\mathbb{K}$-espace muni d'une base $\mathcal{B}_F$, telle que $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$ alors*

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\varphi.$$

En d'autres termes, la proposition 10.10 stipule que le rang d'une matrice est égal au rang de toute application linéaire dont elle est représentative. Réciproquement, on vérifie que le rang d'une application linéaire est égal au rang de n'importe quelle matrice associée. Cela sous-entend que le rang d'une application linéaire φ de E dans F peut s'effectuer en calculant le rang de la matrice A associée à φ relativement à deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ et que ce calcul ne dépend pas du choix des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ définissant A.

10.3.3 Lien entre le rang d'une matrice et celui de sa transposée

Soit A une matrice rectangulaire de type (n, p). Le rang de la famille des p vecteurs-colonnes de A est égal au rang de la famille des n vecteurs-lignes de A puisque le rang d'une matrice et celui de sa transposée sont égaux :

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(A^T\right).$$

Ce résultat est, pour l'instant, admis. Il sera démontré plus loin (voir le corollaire 10.3, page 472).

Ainsi, pour calculer le rang d'une matrice A de type (n, p), on peut soit calculer le rang de la famille des n vecteurs-lignes $L_1, \ldots, L_n$, soit calculer le rang de la famille des p vecteurs-colonnes $C_1, \ldots, C_p$, ce qu'on écrit :

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \ldots, C_p) = \operatorname{rg}(L_1, \ldots, L_n).$$

Par exemple, calculons le rang de la matrice $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Commençons par calculer le rang de la famille des trois vecteurs-lignes L_1, L_2 et L_3. En effectuant à partir de A les opérations élémentaires suivantes : $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ (première étape), puis $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2$ (deuxième étape), on obtient les matrices A_1 et A_2 suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux premiers vecteurs-lignes L_1 et L_2 de A_2 font apparaître un système de zéros échelonnés et le vecteur-ligne L_3 de A_2 est nul. On en déduit que le rang de A_2 est égal à 2, d'où $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Calculons à présent le rang de la famille des quatre vecteurs-colonnes C_1, C_2, C_3 et C_4. Appliquons la méthode des zéros échelonnés cette fois-ci non pas sur les lignes mais sur les colonnes de A. En effectuant à partir de A les opérations élémentaires suivantes : $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ et $C_4 \longleftarrow C_4 - 2\,C_1$ (première étape), puis $C_3 \longleftarrow C_3 + C_2$ et $C_4 \longleftarrow C_4 + C_2$ (deuxième étape), on obtient les matrices A_1' et A_2' suivantes :

$$A_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2' = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs-colonnes C_3 et C_4 de A_2' sont nuls et les vecteurs-colonnes C_1 et C_2 de A_2' font apparaître un système de zéros échelonnés. Ainsi $\mathrm{rg}(A_2') = 2$ et on retrouve que $\mathrm{rg}(A) = 2$.

10.4 Matrices carrées inversibles

10.4.1 Définition d'une matrice inversible

DÉFINITION 10.14 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* n *sur* $\mathbb{K}$.

✗ *On dit que* A *est inversible (on dit aussi régulière) s'il existe une matrice carrée d'ordre* n *sur* $\mathbb{K}$, *notée* A^{-1} *et appelée matrice inverse de* A, *telle que*

$$A^{-1} \times A = I_n \qquad \textit{et} \qquad A \times A^{-1} = I_n.$$

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices inversibles d'ordre* n.

✗ *Lorsqu'une matrice carrée n'est pas inversible, on dit qu'elle est singulière.*

Cela n'a pas de sens de parler de matrice inversible pour des matrices non carrées. Observons qu'en notant A^{-1} la matrice inverse de A, cela sous-entend son unicité, ce dont on se convainc facilement. En effet, supposons que A soit une matrice d'ordre n et qu'elle admette deux matrices inverses A' et A''. La matrice A admettant A' pour inverse, on a alors :

$$A \times A' = I_n.$$

Multiplions à gauche cette égalité par A''. On obtient :

$$A'' \times (A \times A') = A'',$$

ou encore, la multiplication des matrices étant associative,

$$(A'' \times A) \times A' = A'',$$

d'où, en tenant compte de l'égalité $A'' \times A = I_n$ (puisque A admet aussi A'' pour inverse),

$$A' = A''.$$

Ceci démontre l'unicité de l'inverse de A et autorise la notation employée.

Remarque Soit A une matrice d'ordre n sur $\mathbb{K}$.

- S'il existe une matrice B d'ordre n sur $\mathbb{K}$ telle que $B \times A = I_n$ alors on peut en déduire directement que A est inversible (son inverse est alors la matrice B) et il n'est pas nécessaire dans ce cas-là de vérifier l'autre égalité, à savoir que $A \times B = I_n$.
- De même, s'il existe une matrice B d'ordre n sur $\mathbb{K}$ telle que $A \times B = I_n$ alors on peut aussi en déduire directement que A est inversible, son inverse étant la matrice B, et il n'est pas nécessaire cette fois-ci de vérifier l'égalité $B \times A = I_n$.

Nous admettons pour l'instant ces deux résultats. Une démonstration en sera donnée plus loin (voir page 455).

Revenons un instant sur la définition d'une matrice inversible. Comprenons-nous bien. La propriété d'inversibilité d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ d'ordre n équivaut à l'existence de n^2 scalaires a'_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ (ce sont les coefficients de la matrice inverse de A) vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & & a'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou, de manière équivalente (d'après les règles de calcul sur les matrices), vérifiant les n^2 équations suivantes :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a'_{kj} = \delta_{ij} \tag{16}$$

où on rappelle que δ_{ij}, désignant le symbole de Kronecker, est défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

pour tous i, j appartenant à $\{1, \ldots, n\}$. Déterminer l'inverse d'une matrice d'ordre n revient donc à résoudre un système de n^2 équations à n^2 inconnues, ce qui peut vite conduire à des calculs longs et générer de multiples erreurs d'étourderie. D'ailleurs, mis à part la lourdeur des calculs, se lancer directement dans le calcul de l'inverse d'une matrice peut s'avérer être une perte de temps ... car la matrice en question n'est peut-être pas inversible ! Nous verrons à la proposition 10.13 une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice (et donc de l'existence des coefficients a'_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$). Nous verrons aussi en page 461 comment ramener le calcul des n^2 coefficients de A^{-1} (lorsque celle-ci existe, bien sûr !) à la résolution d'un unique système linéaire de n équations à n inconnues.

Cas des matrices diagonales

Cherchons à quelle condition une matrice diagonale A est inversible, et le cas échéant, calculons sa matrice inverse. Posons $\mathrm{A} = \mathrm{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. La matrice A étant diagonale, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. En tenant compte de ce résultat, (16) se simplifie comme suit

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \quad a_{ii} \times a'_{ij} = \delta_{ij}.$$

Intéressons-nous en particulier aux relations pour lesquelles $i = j$. On a :

$$a_{ii} \times a'_{ii} = 1$$

pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ ou encore, de manière équivalente, $a_{ii} \neq 0$, $a'_{ii} \neq 0$ et $a'_{ii} = 1/a_{ii}$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$. Intéressons-nous à présent aux relations pour lesquelles $i \neq j$. Soit $i \in \{1,\dots,n\}$. On a :

$$a_{ii} \times a'_{ij} = 0$$

pour tout $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}$. On a donc $a'_{ij} = 0$ pour tout $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}$ puisque $a_{ii} \neq 0$. On a ainsi démontré le résultat suivant : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale soit inversible est que tous ses coefficients diagonaux soient non nuls et $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{diag}\left(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1}\right)$. Par exemple, la matrice diagonale

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

est inversible (puisque ses éléments diagonaux sont tous non nuls) et on a :

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/(1+2\mathrm{i}) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il ne faut cependant pas se laisser griser par ce résultat, ni même se laisser abuser par la terminologie employée : à l'exception des matrices diagonales, les coefficients de la matrice inverse de A ne sont pas, en général, les inverses des coefficients de la matrice A. Il n'y a pas de lien immédiat entre les coefficients de A^{-1} et ceux de A. Ainsi, ce n'est pas parce qu'une matrice possède un ou plusieurs coefficients nuls qu'elle est nécessairement singulière. Réciproquement, une matrice dont tous les coefficients sont non nuls n'est pas nécessairement inversible. Les deux exemples donnés ci-dessous illustrent cela.

Exemples

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ car

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. Supposons en effet qu'elle le soit, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$ telle que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou, de manière équivalente, telle que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a'_{11} + a'_{21} & = & 1 \\ a'_{11} + a'_{21} & = & 0 \\ a'_{12} + a'_{22} & = & 0 \\ a'_{12} + a'_{22} & = & 1 \end{array} \right. .$$

Un tel système est bien sûr impossible (par exemple, retrancher la deuxième équation à la première conduit à une absurdité), ce qui montre que A n'est pas inversible.

Remarque Soient A une matrice d'ordre n inversible et A^{-1} son inverse. Comme nous l'avons déjà souligné, le calcul des coefficients de A^{-1} nécessite, en théorie, la résolution d'un système de n^2 équations à n^2 inconnues, ce qui peut sembler vite insurmontable, même pour des valeurs de n petites, car source de multiples erreurs lors des calculs ! Fort heureusement, on remarque (s'en convaincre) que l'équation matricielle :

$$A \times A^{-1} = I_n$$

dont l'inconnue est la matrice A^{-1}, se décompose en n équations matricielles :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad A\, C'_j = I_n^{(j)}$$

où C'_j désigne la j-ième colonne de A^{-1} et $I_n^{(j)}$ désigne la j-ième colonne de I_n. Supposons A inversible. Notons $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $A^{-1} = (a'_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Le calcul de A^{-1} peut donc être mené en résolvant successivement, pour j variant de 1 à n,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{ij} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \longleftarrow j\text{-ième ligne}$$

dont les inconnues sont les n scalaires $a'_{1j}, \dots, a'_{nj}$ (ce sont les coefficients de la j-ième matrice-colonne extraite de A^{-1}). À titre d'exemple, considérons la matrice inversible suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La détermination des coefficients de la première colonne de A^{-1} se ramène à la résolution du système :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \\ a'_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui impose $a'_{11} = 0$, $a'_{21} = 1$, $a'_{31} = -1/2$. Les coefficients de la deuxième colonne de A^{-1} vérifient :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{12} \\ a'_{22} \\ a'_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient $a'_{12} = 1$, $a'_{22} = 0$, $a'_{32} = 0$. Enfin, les coefficients de la troisième colonne de A^{-1} vérifient :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{13} \\ a'_{23} \\ a'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient $a'_{13} = -1$, $a'_{23} = 0$, $a'_{33} = -1/2$. D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il est évident que cette méthode s'avère vite lourde à utiliser dès que n grandit. Nous donnerons plus loin (voir en page 461) une alternative, basée sur l'interprétation d'une matrice inversible comme une matrice de passage. Cette nouvelle méthode sera plus rapide car elle ne nécessitera la résolution que d'un seul système de n équations à n inconnues (contre la résolution de n systèmes de n équations à n inconnues pour la méthode exposée ci-dessus).

10.4.2 Propriétés

Proposition 10.11 ✗ *Si une matrice carrée* A *est inversible alors sa matrice inverse est elle-même inversible et* $(A^{-1})^{-1} = A$.

✗ *Si* A *et* B *sont deux matrices carrées inversibles du même ordre, alors la matrice produit* $A \times B$ *est inversible et* $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

✗ *Si une matrice carrée* A *est inversible alors sa matrice transposée est elle-même inversible et*[4] $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

[4] Rappelons que si une matrice est carrée alors sa matrice transposée est une matrice carrée du même ordre.

Démonstration Soit A une matrice inversible. D'après la définition 10.14, il est clair que la matrice inverse de A est elle-même inversible, son inverse étant la matrice A. Montrons maintenant la deuxième propriété. Considérons deux matrices A et B inversibles et d'ordre n. On vérifie :

$$\begin{aligned}(\mathrm{B}^{-1} \times \mathrm{A}^{-1}) \times (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) &= \mathrm{B}^{-1} \times (\mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{A}) \times \mathrm{B} \quad \text{car } \times \text{ est associative} \\ &= \mathrm{B}^{-1} \times \mathrm{I}_n \times \mathrm{B} \quad \text{car } \mathrm{A}^{-1} \text{ est l'inverse de A} \\ &= \mathrm{B}^{-1} \times \mathrm{B} = \mathrm{I}_n \quad \text{car } \mathrm{B}^{-1} \text{ est l'inverse de B.}\end{aligned}$$

D'après la remarque effectuée page 449, on en déduit directement que la matrice $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est inversible (son inverse est alors la matrice $\mathrm{B}^{-1} \times \mathrm{A}^{-1}$) et il n'est pas nécessaire de vérifier l'égalité $(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \times (\mathrm{B}^{-1} \times \mathrm{A}^{-1}) = \mathrm{I}_n$. Montrons enfin la troisième propriété. Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n. En passant à la transposition dans l'égalité $\mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$, et en tenant compte que $(\mathrm{I}_n)^T = \mathrm{I}_n$, on obtient :

$$\mathrm{A}^T \times (\mathrm{A}^{-1})^T = \mathrm{I}_n.$$

On en déduit que A^T est inversible et que son inverse est $\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^T$.[5] □

Structure de groupe pour $\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times\right)$

L'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est inclus dans celui des matrices carrées d'ordre n. La loi $\times$ (qui est une loi interne sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$) induit sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une loi interne puisque, d'après la proposition 10.11, le produit de deux matrices inversibles est encore une matrice inversible. On vérifie les propriétés suivantes.

- La loi $\times$ est associative sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ puisqu'elle l'est sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
- La matrice I_n, qui est l'élément neutre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ pour la loi $\times$, est inversible et on a $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$. C'est aussi l'élément neutre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour la loi induite $\times$.
- Toute matrice A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ possède un symétrique pour la loi $\times$. C'est la matrice inverse A^{-1} puisque A^{-1} appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et vérifie :

$$\mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{A} = \mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}_n.$$

Attention, la multiplication n'est pas commutative sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sauf bien sûr pour $n = 1$. Par conséquent, muni de la multiplication, l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ possède une structure de groupe non commutatif (sauf pour $n = 1$). L'ensemble structuré $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est appelé *groupe linéaire d'ordre n* sur le corps $\mathbb{K}$ (d'où les initiales).

---

[5] De même, on vérifie aisément que l'implication réciproque est vraie, à savoir que si A^T est inversible alors A est inversible. Un corollaire est que si les vecteurs-colonnes de A forment une famille libre alors les vecteurs-lignes de A forment aussi une famille libre, et réciproquement, résultat que nous connaissions déjà puisque $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}^T)$.

La matrice associée à une application linéaire bijective est-elle inversible ?

La réponse est « oui ». Pour s'en convaincre, considérons une matrice A carrée d'ordre n, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F, munis des bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, et une application linéaire φ de E dans F telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) = \mathrm{A}$, ce qui suppose que E et F soient tous les deux de dimension n (puisque A est d'ordre n). Supposons l'application linéaire φ bijective. Il existe alors une application φ^{-1} (nécessairement linéaire puisque φ l'est) de F dans E telle que

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_F.$$

Écrivons l'une de ces deux égalités fonctionnelles (disons la première) sous forme matricielle. D'après la proposition 10.8,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\varphi^{-1} \circ \varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\varphi^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi).$$

Ainsi, puisque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{I}_n$, l'égalité fonctionnelle $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_E$ s'écrit matriciellement comme suit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\varphi^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) = \mathrm{I}_n.$$

On en déduit que la matrice associée à l'isomorphisme φ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est inversible et que son inverse est la matrice associée à l'isomorphisme réciproque φ^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$ et

$$\Big[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)\Big]^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\varphi^{-1}).$$

Il est à noter l'inversion de l'ordre des bases. On retiendra ce résultat grâce au schéma suivant :

$$(E, \mathcal{B}_E) \underset{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\varphi^{-1})}{\overset{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)}{\rightleftarrows}} (F, \mathcal{B}_F).$$

Réciproquement, on vérifie que si la matrice associée à une application linéaire φ de E dans F, relativement à des bases quelconques $\mathcal{B}_E$ de E et $\mathcal{B}_F$ de F, est inversible, alors l'application φ est bijective. On a alors le résultat suivant.

Proposition 10.12 *Une application linéaire φ d'un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie dans un $\mathbb{K}$-espace F de même dimension est bijective si et seulement si, la matrice carrée associée à φ relativement à des bases quelconques $\mathcal{B}_E$ de E et $\mathcal{B}_F$ de F, est inversible. Si φ est bijective alors*

$$\Big[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)\Big]^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\varphi^{-1})$$

et, en particulier, lorsque $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \overset{\text{not.}}{=} \mathcal{B}$,

$$\Big[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)\Big]^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}).$$

Remarque Soit A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$. Il est maintenant aisé de montrer que l'existence d'une matrice B, carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$, telle que $\mathrm{B} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$, permet de conclure directement que A est inversible, son inverse étant la matrice B, sans devoir vérifier que $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{I}_n$. Pour cela, considérons les endomorphismes φ_c et ψ_c de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés, respectivement, aux matrices A et B, et désignons par $\mathcal{B}^\mathrm{c}_{\mathbb{K}^n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors, l'égalité matricielle $\mathrm{B} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ s'écrit :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}(\psi_\mathrm{c}, \mathcal{B}^\mathrm{c}_{\mathbb{K}^n})}_{\mathrm{B}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}(\varphi_\mathrm{c}, \mathcal{B}^\mathrm{c}_{\mathbb{K}^n})}_{\mathrm{A}} = \underbrace{\mathrm{Mat}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}, \mathcal{B}^\mathrm{c}_{\mathbb{K}^n})}_{\mathrm{I}_n}$$

et, passant aux applications linéaires, devient :

$$\psi_\mathrm{c} \circ \varphi_\mathrm{c} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}.$$

Rappelons que l'identité est bijective. Elle est donc en particulier injective. L'application composée $\psi_\mathrm{c} \circ \varphi_\mathrm{c}$ est injective puisqu'elle est égale à l'identité. On en déduit que φ_c est injective (voir la remarque page 43). Elle est donc bijective car pour un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, les propriétés d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité sont équivalentes. De $\psi_\mathrm{c} \circ \varphi_\mathrm{c} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ il vient (voir la remarque page 46) :

$$\varphi_\mathrm{c}^{-1} = \psi_\mathrm{c}$$

et, revenant aux matrices associées,

$$\mathrm{Mat}(\varphi_\mathrm{c}^{-1}, \mathcal{B}^\mathrm{c}_{\mathbb{K}^n}) = \underbrace{\mathrm{Mat}(\psi_\mathrm{c}, \mathcal{B}^\mathrm{c}_{\mathbb{K}^n})}_{\mathrm{B}}.$$

Utilisant alors que $\mathrm{Mat}(\varphi_\mathrm{c}^{-1}, \mathcal{B}^\mathrm{c}_{\mathbb{K}^n}) = \left[\mathrm{Mat}(\varphi_\mathrm{c}, \mathcal{B}^\mathrm{c}_{\mathbb{K}^n})\right]^{-1} = \mathrm{A}^{-1}$, on obtient :

$$\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}.$$

On démontrerait selon le même modèle que l'existence d'une matrice $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{I}_n$ permet de conclure directement que A est inversible et que $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}$, sans même devoir vérifier que $\mathrm{B} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

Isomorphisme de groupes entre $\big(\mathcal{GL}_\mathbb{K}(E), \circ\big)$ et $\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times\big)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Étant donnée une base $\mathcal{B}$ fixée de E, il est clair que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Mat}_\mathcal{B} : & \mathcal{GL}_\mathbb{K}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ & \varphi & \longmapsto & \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\varphi) \end{array}$$

définit une bijection. De plus, d'après la proposition 10.8, pour tous φ, ψ appartenant à $\mathcal{GL}_\mathbb{K}(E)$,

$$\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\psi) \times \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\varphi).$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ définit un isomorphisme de l'ensemble structuré $\big(\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E), \circ\big)$ dans l'ensemble structuré $\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times\big)$. Puisque ces derniers possèdent des structures de groupes (non commutatifs sauf pour $n = 1$), l'isomorphisme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est qualifié d'isomorphisme de groupes.

Donnons à présent une caractérisation d'une matrice inversible.

PROPOSITION 10.13 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit inversible est que son rang soit égal à son ordre. Autrement dit, pour toute matrice* A *carrée d'ordre* n *sur* $\mathbb{K}$*,*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{rg}\,\mathrm{A} = n.$$

Démonstration Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$. Considérons l'endomorphisme φ de E dont la matrice associée relativement à $\mathcal{B}$ est A. D'après la proposition 10.12,

$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \varphi \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E). \tag{17}$$

D'après la proposition 9.13 (voir page 397), une condition nécessaire et suffisante pour que l'application φ soit bijective est que son rang soit égal à la dimension de l'espace E. Autrement dit,

$$\varphi \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E) \iff \mathrm{rg}\,\varphi = n. \tag{18}$$

En regroupant les deux équivalences (17) et (18), et en tenant compte que le rang de l'endomorphisme φ est égal à celui de la matrice A (d'après la proposition 10.10), on obtient l'équivalence suivante :

$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{rg}\,\mathrm{A} = n,$$

ce qui termine la démonstration. □

Exemples

1. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car son rang est 3.

2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car son rang est 1.

La proposition suivante est la version matricielle de la proposition 9.14.[6] Elle stipule que l'on ne change pas le rang d'une matrice lorsque l'on multiplie à gauche et/ou à droite cette matrice par une matrice inversible.

---

[6] voir en page 399.

Proposition 10.14 *Soit* A *une matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$.
✗ *Si* $B \in GL_n(\mathbb{K})$ *alors* $\mathrm{rg}(B \times A) = \mathrm{rg}\, A$.
✗ *Si* $C \in GL_p(\mathbb{K})$ *alors* $\mathrm{rg}(A \times C) = \mathrm{rg}\, A$.
✗ *Si* $B \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $C \in GL_p(\mathbb{K})$ *alors* $\mathrm{rg}(B \times A \times C) = \mathrm{rg}\, A$.

Démonstration La démonstration de chacune des deux propriétés est immédiate. Il suffit de considérer les applications linéaires canoniquement associées à chacune des matrices et d'utiliser les résultats de la proposition 9.14. La rédaction est laissée en exercice. Il est à noter que la troisième propriété se déduit des deux premières. □

10.5 Changement de bases

Nous avons vu au paragraphe 10.2.1 comment représenter sous forme matricielle une application linéaire φ de E dans F relativement à deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, la première base, $\mathcal{B}_E$, appartenant à l'espace de départ E et la seconde, $\mathcal{B}_F$, à l'espace d'arrivée F.[7] Le choix de ces deux bases étant arbitraire, l'utilisation de toutes autres bases $\mathcal{C}_E$ de E et $\mathcal{C}_F$ de F est *a priori* acceptable.[8] On a alors les deux représentations matricielles de φ suivantes :

- représentation relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$,
- représentation relativement aux bases $\mathcal{C}_E$ et $\mathcal{C}_F$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{C}_F}(\varphi)$.

Ces deux matrices, bien que différentes, représentent la même application linéaire, seules les bases de départ et d'arrivée diffèrent.

Une application linéaire possède ainsi autant de représentations matricielles qu'il est possible de choisir de bases différentes. Se pose alors la question de savoir s'il est possible de passer directement d'une représentation matricielle à une autre ? Autrement dit, pouvons-nous déduire de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$ l'expression de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{C}_F}(\varphi)$ sans même connaître l'application linéaire φ ? Le cas échéant, suivant quel mode opératoire ? La réponse à ces questions fait l'objet des paragraphes suivants.

10.5.1 Définition d'une matrice de passage

Considérons dans un espace vectoriel E de dimension n deux bases distinctes $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{C}_E = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Qualifions la base $\mathcal{B}_E$ d'« ancienne base » et la base $\mathcal{C}_E$ de « nouvelle base ». Décomposons chacun des

[7] Rappelons qu'une seule base suffit pour représenter matriciellement un endomorphisme puisque les espaces de départ et d'arrivée sont identiques.
[8] Elle est même parfois recommandée puisque certains choix conduisent à des représentations matricielles qui se prêtent mieux au calcul des puissances d'une matrice, au calcul du déterminant (voir le chapitre suivant), etc.

vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_n$ de la nouvelle base $\mathcal{C}_E$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}_E$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 & = & p_{11}\boldsymbol{e}_1 + p_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + p_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{u}_2 & = & p_{12}\boldsymbol{e}_1 + p_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + p_{n2}\boldsymbol{e}_n \\ & \vdots & \\ \boldsymbol{u}_n & = & p_{1n}\boldsymbol{e}_1 + p_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + p_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \boldsymbol{u}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{e}_i$$

où, pour j variant de 1 à n, les scalaires p_{1j}, p_{2j}, ..., p_{nj} représentent les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{u}_j$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}_E$ de E.

DÉFINITION 10.15 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{C}_E$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$ la matrice carrée d'ordre n dont la j-ième colonne est formée des coordonnées dans $\mathcal{B}_E$ du j-ième vecteur de la base $\mathcal{C}_E$.*

Avec les notations utilisées, la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$ est donc la matrice P définie par

$$\mathrm{P} \overset{déf.}{=} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & & \boldsymbol{u}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{array}.$$

C'est une matrice carrée d'ordre n.

Exemple On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ où $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$ et $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ (c'est la base canonique de $\mathbb{R}^3$) et de la base $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ où $\boldsymbol{u}_1 = (1,0,-1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,-1,0)$ et $\boldsymbol{u}_3 = (1,1,1)$. Pour expliciter la matrice de passage de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ à $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}$, il faut d'abord écrire les trois vecteurs de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}$ en fonction des trois vecteurs de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$. Cette étape préliminaire est ici très facile puisque $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ est la base canonique. On a immédiatement :

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

On en déduit alors l'expression de la matrice P de passage de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ à $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}$:

$$\mathrm{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array}.$$

C'est une matrice carrée d'ordre 3.

10.5.2 Propriétés des matrices de passage

La question suivante se pose naturellement : quelle application linéaire remarquable est associée à une matrice de passage ? La réponse donnée par la proposition 10.15 nous sera d'une grande utilité.

PROPOSITION 10.15 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$. La matrice de passage* P *de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$ est la matrice représentant l'application identité* $\mathrm{id}_E : \boldsymbol{x} \in E \longmapsto \boldsymbol{x} \in E$ *relativement aux bases $\mathcal{C}_E$ et $\mathcal{B}_E$. En d'autres termes,*

$$\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E).$$

Démonstration Soit $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. Écrivons la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E)$ associée à l'application id_E relativement à la base de départ $\mathcal{C}_E = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ et à la base d'arrivée $\mathcal{B}_E$. En appliquant la définition 10.12 (voir page 429), pour j variant de 1 à n, la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E)$ est constituée des coordonnées du vecteur $\mathrm{id}_E(\boldsymbol{u}_j)$ dans la base d'arrivée $\mathcal{B}_E$. Or, $\mathrm{id}_E(\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{u}_j$ pour $j = 1, \ldots, n$. Ainsi, la j-ième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E)$ est constituée des coordonnées du vecteur $\boldsymbol{u}_j$ dans la base $\mathcal{B}_E$. C'est précisément la matrice P (d'après la définition 10.15). □

Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$ alors P représente l'application identité avec pour base de départ la nouvelle base $\mathcal{C}_E$ et pour base d'arrivée l'ancienne base $\mathcal{B}_E$, et non l'inverse ! Schématiquement,

$$(E, \mathcal{C}_E) \xrightarrow{\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E)} (E, \mathcal{B}_E).$$

L'identité de E n'est pas la seule application linéaire que l'on peut associer à la matrice de passage P de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$. Considérons par exemple l'endomorphisme Φ de E qui transforme $\mathcal{B}_E$ en $\mathcal{C}_E$, c'est-à-dire l'unique endomorphisme de E qui vérifie : $\Phi(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{u}_1$, $\Phi(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{u}_2$, …, $\Phi(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{u}_n$. Alors, on vérifie aisément que P est aussi la matrice associée à Φ relativement à la base $\mathcal{B}_E$ (prise comme base de départ et d'arrivée). Autrement dit, on a aussi : $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\Phi)$.

Remarques

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}_E$. La matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à elle-même est la matrice unité I_n puisque

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{I}_n.$$

2. Une matrice de passage P est nécessairement inversible puisque c'est la matrice associée à une application bijective (par exemple l'application identité). Si P est d'ordre n, on écrit alors $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Connaissant la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$, pouvons-nous en déduire la matrice de passage de $\mathcal{C}_E$ à $\mathcal{B}_E$?

Appelons $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{C}_E$ à $\mathcal{B}_E$. En appliquant la proposition 10.15, Q est la matrice associée à l'application id_E relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$ (remarquer l'ordre des deux bases), c'est-à-dire :

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{C}_E}(\mathrm{id}_E).$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$. D'après la proposition 10.15, P est la matrice associée à l'application id_E relativement cette fois-ci aux bases $\mathcal{C}_E$ et $\mathcal{B}_E$, soit :

$$\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E).$$

Calculons l'un des deux produits matriciels $\mathrm{Q} \times \mathrm{P}$ et $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$. Rappelons que la matrice associée à l'application identité relativement à n'importe quelle base est la matrice unité. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Q} \times \mathrm{P} &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{C}_E}(\mathrm{id}_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{C}_E}(\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{I}_n.\end{aligned}$$

On en déduit directement que $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{Q}$ et on peut énoncer le résultat suivant.

Proposition 10.16 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$. Si* P *est la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$ alors* P^{-1}*, la matrice inverse de* P*, est la matrice de passage de $\mathcal{C}_E$ à $\mathcal{B}_E$.*

Exemple Reprenons l'exemple de l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ et de la base $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ où $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$. La matrice de passage Q de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}$ à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ s'écrit

$$\mathrm{Q} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{array} \end{array}$$

car de $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, il vient :

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3), \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3), \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{3}(-2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3).$$

On voit que l'on a effectivement $\mathrm{Q} = \mathrm{P}^{-1}$ en vérifiant l'une des deux égalités $\mathrm{Q} \times \mathrm{P} = \mathrm{I}_3$ ou $\mathrm{P} \times \mathrm{Q} = \mathrm{I}_3$. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Nous avons vu plus haut que toute matrice de passage est nécessairement inversible. Réciproquement, on se convainc facilement que toute matrice inversible définit une matrice de passage. Cette remarque nous fournit une méthode de calcul de l'inverse d'une matrice, qui ne nécessite l'inversion que d'un seul système. Présentons la méthode sur un exemple. Considérons la matrice inversible :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Interprétons A comme la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ à une base $\mathcal{C}_E = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, ce qui revient à écrire le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \boldsymbol{u}_1 & = & & & \boldsymbol{e}_2 & & \\ \boldsymbol{u}_2 & = & \boldsymbol{e}_1 & - & \boldsymbol{e}_2 & - & \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{u}_3 & = & & - & 2\boldsymbol{e}_2 & - & 2\boldsymbol{e}_3 \end{array} \right. .$$

Son inverse, la matrice A^{-1}, peut alors s'interpréter comme la matrice de passage de $\mathcal{C}_E$ à $\mathcal{B}_E$. Une méthode pour l'obtenir consiste à exprimer les vecteurs de l'ancienne base $\mathcal{B}_E$ en fonction des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{C}_E$. On déduit facilement du système précédent le nouveau système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \boldsymbol{e}_1 & = & & & \boldsymbol{u}_2 & - & \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 & = & \boldsymbol{u}_1 & & & & \\ \boldsymbol{e}_3 & = & -\boldsymbol{u}_1 & & & - & \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3 \end{array} \right.$$

Il contient les coefficients de la matrice A^{-1}. On obtient finalement :

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Cette méthode que nous venons de présenter dans le cas d'une matrice inversible d'ordre 3 se généralise au cas des matrices inversibles d'ordre quelconque.

10.5.3 Changement de bases pour un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni des deux bases $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ et $\mathcal{C}_E = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$. Un vecteur $\boldsymbol{x}$ appartenant à E peut se décomposer dans chacune des deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$. On note x_1, x_2, …, x_n les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}_E$ et on qualifie ces coordonnées d'« anciennes » :

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i. \tag{19}$$

On désigne par x'_1, x'_2, …, x'_n les « nouvelles » coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans la nouvelle base $\mathcal{C}_E$:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \boldsymbol{u}_j. \tag{20}$$

On cherche les relations liant anciennes et nouvelles coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$. En partant de (20), on a :

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \boldsymbol{u}_j = \sum_{j=1}^{n} \Big[x'_j \Big(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \boldsymbol{e}_i \Big) \Big]$$

puisque $\boldsymbol{u}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \boldsymbol{e}_i$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ (par définition de P). Or,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \Big[x'_j \Big(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \boldsymbol{e}_i \Big) \Big] &= \sum_{j=1}^{n} \Big[\sum_{i=1}^{n} x'_j p_{ij} \boldsymbol{e}_i \Big] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \boldsymbol{e}_i \Big] = \sum_{i=1}^{n} \Big[\Big(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \Big) \boldsymbol{e}_i \Big] \end{aligned}$$

où on a d'abord fait passer le scalaire x'_j à l'intérieur de la deuxième somme (puisqu'il ne dépend pas de l'indice i), puis interverti les deux sommes, et enfin fait sortir le vecteur $\boldsymbol{e}_i$ de la deuxième somme (puisqu'il ne dépend pas de l'indice j). On a donc :

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \Big[\Big(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \Big) \boldsymbol{e}_i \Big]. \tag{21}$$

En comparant (19) et (21), on en déduit l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \Big[\Big(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \Big) \boldsymbol{e}_i \Big].$$

En identifiant les coordonnées, on obtient l'expression des anciennes coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ en fonction de ses nouvelles coordonnées :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j,$$

c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 &=& p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \ldots + p_{1n}x'_n \\ x_2 &=& p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \ldots + p_{2n}x'_n \\ & \vdots & \\ x_n &=& p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \ldots + p_{nn}x'_n \end{array} \right.$$

ou encore, sous une forme matricielle plus compacte,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

ce qui démontre la proposition suivante.

> **Proposition 10.17** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$. Si X et X' désignent les matrices-colonnes des coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans les bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$ et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$ alors*
>
> $$\mathrm{X} = \mathrm{PX}'.$$

D'une manière plus concise (par rapport à la justification donnée en préambule à la proposition 10.17), l'égalité $\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$ correspond à l'écriture matricielle, relativement à la base de départ $\mathcal{C}_E$ et à la base d'arrivée $\mathcal{B}_E$, de l'égalité vectorielle :

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{id}_E(\boldsymbol{x}).$$

En effet, la matrice-colonne $\mathrm{X}' \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ étant constituée des coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la base de départ $\mathcal{C}_E$ et la matrice-colonne X étant constituée des coordonnées de son image par id_E (c'est-à-dire ici du même vecteur $\boldsymbol{x}$) dans la base d'arrivée $\mathcal{B}_E$, on a, d'après la proposition 10.5, l'équivalence suivante :

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{id}_E(\boldsymbol{x}) \quad\Longleftrightarrow\quad \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\boldsymbol{x})}_{=\mathrm{X}} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E)}_{=\mathrm{P}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E}(\boldsymbol{x})}_{=\mathrm{X}'}$$

puisque P désigne la matrice associée à l'application id_E relativement à la base de départ $\mathcal{C}_E$ et à la base d'arrivée $\mathcal{B}_E$.

> L'égalité matricielle $\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$ signifie que les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}_E$ s'écrivent en fonction des coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans la nouvelle base $\mathcal{C}_E$. La matrice P étant la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$, on serait pourtant tenté d'écrire l'inverse (chose qu'il ne faut bien évidemment pas faire !).

Si l'on désire exprimer cette fois-ci les nouvelles coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ en fonction de ses anciennes coordonnées, il suffit de multiplier l'égalité matricielle $\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$ par la matrice P^{-1} (qui existe car $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$). On a en effet :

$$\mathrm{X} = \mathrm{PX}' \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{PX}',$$

et, puisque $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$, on obtient :

$$\mathrm{X}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}.$$

Exemple Reprenons l'exemple de $\mathbb{R}^3$ muni de la base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ (c'est sa base canonique) et de la base $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ avec $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 0)$ et $\boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 1)$. Considérons le vecteur $\boldsymbol{x} = (3, 6, 9)$ de $\mathbb{R}^3$. Puisque $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a immédiatement :

$$(3, 6, 9) = 3\underbrace{(1, 0, 0)}_{=\boldsymbol{e}_1} + 6\underbrace{(0, 1, 0)}_{=\boldsymbol{e}_2} + 9\underbrace{(0, 0, 1)}_{=\boldsymbol{e}_3} = 3\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2 + 9\boldsymbol{e}_3.$$

On note x'_1, x'_2 et x'_3 les coordonnées de ce même vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la nouvelle base $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$. On a : $\boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2 + x'_3\boldsymbol{u}_3$. Calculons x'_1, x'_2 et x'_3. On a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}} \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{X}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{X}},$$

ou encore, de manière équivalente,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{X}'} = \frac{1}{3}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{X}}.$$

Le vecteur X' s'obtient en effectuant le produit matriciel $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$. On obtient $x'_1 = -3$, $x'_2 = 0$ et $x'_3 = 6$, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{x} = -3\boldsymbol{u}_1 + 6\boldsymbol{u}_3.$$

Attention, il ne faut surtout pas écrire « $\boldsymbol{x} = (-3, 0, 6)$ ». C'est faux car $(-3, 0, 6)$ représente le vecteur $-3\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_3$.

10.5.4 Effet d'un changement de bases pour une application linéaire

On considère une application linéaire φ de E dans F où l'espace de départ E est de dimension p et l'espace d'arrivée F de dimension n. On munit l'espace E des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$. On note X et X′ les matrices-colonnes de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ constituées des coordonnées d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ de E respectivement dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$. Si $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$ alors on a entre X et X′ la relation matricielle suivante :

$$\mathrm{X} = \mathrm{PX}'.$$

On munit l'espace F des bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{C}_F$. On note Y et Y′ les matrices-colonnes (elles appartiennent à $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) constituées des coordonnées du vecteur $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$ de F respectivement dans $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{C}_F$. Si $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{C}_F$ alors on a entre Y et Y′ la relation matricielle suivante :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{QY}'$$

ou encore, puisque Q est inversible,

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Y}.$$

On désigne par A (respectivement par B) la matrice associée à φ relativement aux deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ (resp. $\mathcal{C}_E$ et $\mathcal{C}_F$), c'est-à-dire :

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{C}_F}(\varphi).$$

D'après la proposition 10.5, l'égalité vectorielle $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$ peut s'écrire

- relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sous la forme matricielle :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\boldsymbol{y})}_{=\mathrm{Y}} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)}_{=\mathrm{A}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\boldsymbol{x})}_{=\mathrm{X}}, \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \mathrm{Y} = \mathrm{AX}. \tag{22}$$

- relativement aux bases $\mathcal{C}_E$ et $\mathcal{C}_F$ sous la forme matricielle :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_F}(\boldsymbol{y})}_{=\mathrm{Y}'} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{C}_F}(\varphi)}_{=\mathrm{B}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E}(\boldsymbol{x})}_{=\mathrm{X}'}, \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \mathrm{Y}' = \mathrm{BX}'. \tag{23}$$

On cherche une relation liant les deux matrices A et B. Partons de (22). Multiplions (à gauche) l'égalité (22) par Q^{-1} (la matrice Q est inversible ; Q^{-1} existe). On obtient :

$$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Y} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AX}.$$

Or, $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Y} = \mathrm{Y}'$ et $\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$. On obtient ainsi :

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{PX}')$$

ou encore, le produit matriciel étant associatif,

$$\mathrm{Y}' = (\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP})\mathrm{X}'. \tag{24}$$

En comparant (24) avec (23), on en déduit, par identification, une relation donnant B en fonction de A :

$$\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}.$$

On a ainsi démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 10.1 *Soient E un espace vectoriel muni des deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$, F un espace vectoriel muni des deux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{C}_F$. Soit φ une application linéaire de E dans F. Alors les deux matrices* $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$ *et* $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{C}_F}(\varphi)$, *toutes les deux du même type, vérifient l'égalité matricielle :*

$$\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$$

où P *est la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$ et où* Q *est la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{C}_F$.*

Il est à noter que les deux matrices rectangulaires A et B sont du même type puisqu'elles représentent la même application linéaire φ. En revanche, les deux matrices carrées inversibles P et Q ne sont *a priori* pas du même ordre, sauf si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$, auquel cas A, B, P et Q sont quatre matrices carrées du même ordre.

L'égalité $\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$ n'est rien d'autre que l'écriture matricielle de l'égalité fonctionnelle $\varphi = \mathrm{id}_F \circ \varphi \circ \mathrm{id}_E$ que l'on vérifie aisément puisque

$$(\mathrm{id}_F \circ \varphi \circ \mathrm{id}_E)(\boldsymbol{x}) = \mathrm{id}_F(\varphi(\mathrm{id}_E(\boldsymbol{x}))) = \mathrm{id}_F(\varphi(\boldsymbol{x})) = \varphi(\boldsymbol{x})$$

pour tout $x \in E$, et que l'on schématise par

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & F \\ \mathrm{id}_E \uparrow & & \downarrow \mathrm{id}_F \\ E & \xrightarrow[\varphi = \mathrm{id}_F \circ \varphi \circ \mathrm{id}_E]{} & F \end{array}.$$

Il suffit alors de compléter ce schéma en munissant l'espace E des deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$, et l'espace F des deux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{C}_F$, puis en écrivant les matrices associées à chacune des applications relativement aux bases des espaces de départ et des espaces d'arrivée (le sens des flèches nous indique dans chaque cas l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On obtient alors le schéma :

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{B}_E) & \xrightarrow{\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)} & (F, \mathcal{B}_F) \\ \mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E, \mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E) \uparrow & & \downarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_F}(\mathrm{id}_F) = \mathrm{Q}^{-1} \\ (E, \mathcal{C}_E) & \xrightarrow[\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_F}(\varphi)]{} & (F, \mathcal{C}_F) \end{array}$$

et on retrouve l'égalité matricielle :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_F}(\varphi)}_{= \mathrm{B}} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_F}(\mathrm{id}_F)}_{= \mathrm{Q}^{-1}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)}_{= \mathrm{A}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E, \mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E)}_{= \mathrm{P}}.$$

En particulier, lorsque φ est un endomorphisme de E, on peut choisir

$$\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \overset{not.}{=} \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_E = \mathcal{C}_F \overset{not.}{=} \mathcal{C}.$$

La matrice associée à φ dans la base $\mathcal{B}$ se note alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{C}$ se note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)$. La matrice Q, matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{C}_F$, est donc égale à la matrice P, matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$, puisque $\mathcal{B}_F = \mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_F = \mathcal{C}_E$. On a alors le résultat suivant.

COROLLAIRE 10.1 *Soient E un espace vectoriel muni des deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et φ un endomorphisme de E. Alors les deux matrices carrées* $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ *et* $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)$, *toutes les deux du même ordre, vérifient l'égalité matricielle :*

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$$

où P *est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.*[9]

[9] L'ordre de la matrice carrée P est identique à celui des matrices carrées A et B.

On retrouve cette écriture matricielle à partir de l'égalité fonctionnelle $\varphi = \mathrm{id}_E \circ \varphi \circ \mathrm{id}_E$ en munissant l'espace E des deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, puis en écrivant les matrices associées à chacune des applications. On obtient le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
(E,\mathcal{B}) & \xrightarrow{\quad \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \quad} & (E,\mathcal{B}) \\
\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) \uparrow & & \downarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{P}^{-1} \\
(E,\mathcal{C}) & \xrightarrow[\quad \mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) \quad]{} & (E,\mathcal{C})
\end{array} .$$

On retrouve l'égalité matricielle :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)}_{=\mathrm{B}} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E)}_{=\mathrm{P}^{-1}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)}_{=\mathrm{A}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}_{=\mathrm{P}} .$$

Exemple Reprenons l'exemple de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ qui à (x_1, x_2, x_3) associe $(2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$. Soient $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{e}_1) &= \varphi\big((1,0,0)\big) = (2,1,1) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \\
\varphi(\boldsymbol{e}_2) &= \varphi\big((0,1,0)\big) = (1,2,1) = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \\
\varphi(\boldsymbol{e}_3) &= \varphi\big((0,0,1)\big) = (1,1,2) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}$$

On en déduit alors l'expression de la matrice A représentative de φ dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$:

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & \varphi(\boldsymbol{e}_2) & \varphi(\boldsymbol{e}_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array} .$$

Soit $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ où $\boldsymbol{u}_1 = (1,0,-1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,-1,0)$ et $\boldsymbol{u}_3 = (1,1,1)$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{u}_1) &= \varphi\big((1,0,-1)\big) = (1,0,-1) = \boldsymbol{u}_1, \\
\varphi(\boldsymbol{u}_2) &= \varphi\big((1,-1,0)\big) = (1,-1,0) = \boldsymbol{u}_2, \\
\varphi(\boldsymbol{u}_3) &= \varphi\big((1,1,1)\big) = (4,4,4) = 4\boldsymbol{u}_3.
\end{aligned}$$

La matrice B, matrice représentative de φ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}$, s'écrit ainsi :

$$\mathrm{B} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi(\boldsymbol{u}_1) & \varphi(\boldsymbol{u}_2) & \varphi(\boldsymbol{u}_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{array} .$$

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ à $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}$. On rappelle que

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que l'on a bien :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{B}} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}}.$$

Remarque Effectuer le produit matriciel $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$ (au lieu du produit $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$) revient à calculer la matrice associée à φ relativement à $\mathcal{B}$ (base de départ) et $\mathcal{C}$ (base d'arrivée). Vérifions-le. Aidons-nous du schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) & \\ (E,\mathcal{B}) & \xrightarrow{\hspace{3cm}} & (E,\mathcal{B}) \\ \mathrm{I}_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) \uparrow & & \downarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{P}^{-1} \\ (E,\mathcal{B}) & \xrightarrow{\hspace{3cm}} & (E,\mathcal{C}) \\ & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) & \end{array}.$$

On en déduit l'égalité :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E)}_{=\mathrm{P}^{-1}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)}_{=\mathrm{A}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}_{=\mathrm{I}_n},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$.

De même, effectuer le produit matriciel AP revient à calculer la matrice associée à φ relativement, cette fois-ci, à $\mathcal{C}$ (base de départ) et $\mathcal{B}$ (base d'arrivée). Comme précédemment, aidons-nous d'un schéma :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) & \\ (E,\mathcal{B}) & \xrightarrow{\hspace{3cm}} & (E,\mathcal{B}) \\ \mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) \uparrow & & \downarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{I}_n \\ (E,\mathcal{C}) & \xrightarrow{\hspace{3cm}} & (E,\mathcal{B}) \\ & \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\varphi) & \end{array}.$$

On déduit de ce schéma l'égalité suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\varphi) = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}_{=\mathrm{I}_n} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)}_{=\mathrm{A}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}_{=\mathrm{P}},$$

c'est-à-dire : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{AP}$.

En reprenant l'exemple précédent, on obtient deux nouvelles représentations matricielles de l'application φ (voir aussi la solution de l'exercice 2, page 475) :

$$\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3})} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3})},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}}.$$

Exercice 4 Soient $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ définie par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1 - Déterminer B, matrice associée à f dans la nouvelle base $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ où $\boldsymbol{u}_1 = (1,0,-1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,-1,0)$ et $\boldsymbol{u}_3 = (1,1,1)$.
2 - Calculer B^n pour tout entier n.
3 - En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{A}^n = \frac{(a-b)^n}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{(a+2b)^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10.5.5 Matrices équivalentes, matrices semblables

Définition 10.16 *Soient n et p deux entiers naturels non nuls.*

✗ *Soient* A *et* B *deux matrices rectangulaires de type (n,p) sur $\mathbb{K}$. On dit que* A *est équivalente à* B *si*

$$\exists\, \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad \exists\, \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Ainsi, deux matrices rectangulaires et de même type sont équivalentes si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

✗ *Soient* A *et* B *deux matrices carrées d'ordre p sur $\mathbb{K}$. On dit que* A *est semblable à* B *si*

$$\exists\, \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad \mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Ainsi, deux matrices carrées et de même ordre sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

La notion d'équivalence entre matrices de type (n,p) définit une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ au sens de la définition 2.28 donnée en page 57. On a en effet les trois propriétés suivantes.

- Toute matrice A de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à elle-même (propriété de réflexivité) puisqu'on peut écrire $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{I}_p$ avec $\mathrm{I}_p \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si A est équivalente à B alors B est équivalente à A (propriété de symétrie). En effet, A étant équivalente à B, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$. En multipliant cette égalité à gauche par Q et à droite par P^{-1}, on en déduit la relation $\mathrm{A} = \mathrm{QBP}^{-1}$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{A} = (\mathrm{Q}^{-1})^{-1}\mathrm{BP}^{-1}$$

  avec $\mathrm{P}^{-1} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q}^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, vérifiant ainsi que la matrice B est équivalente à la matrice A.
- Soient A, B et C trois matrices de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si A est équivalente à B et si B est équivalente à C alors A est équivalente à C (propriété de transitivité). En effet, A étant équivalente à B,

$$\exists\, \mathrm{P}_1 \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad \exists\, \mathrm{Q}_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{B} = \mathrm{Q}_1^{-1}\mathrm{AP}_1. \tag{25}$$

  De même, B étant équivalente à C,

$$\exists\, \mathrm{P}_2 \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad \exists\, \mathrm{Q}_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{C} = \mathrm{Q}_2^{-1}\mathrm{BP}_2. \tag{26}$$

  En injectant alors (25) dans (26), on obtient

$$\mathrm{C} = \mathrm{Q}_2^{-1}\mathrm{Q}_1^{-1}\mathrm{AP}_1\mathrm{P}_2,$$

  qui s'écrit aussi, puisque $\mathrm{Q}_2^{-1}\mathrm{Q}_1^{-1} = \big(\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\big)^{-1}$,

$$\mathrm{C} = \big(\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\big)^{-1}\mathrm{A}\big(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\big)$$

  avec $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a ainsi vérifié que C était équivalente à A.

En procédant comme ci-dessus, on vérifie facilement que la relation « A est semblable à B » définit une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ au sens de la définition 2.28.

PROPOSITION 10.18 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* A *soit de rang* r *est qu'elle soit équivalente à la matrice* J_r *définie par*[10]

$$\mathrm{J}_r = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right).$$

[10] La matrice J_r est de type (n,p) puisqu'elle est équivalente à la matrice A.

Démonstration Supposons A équivalente à J_r. Cela signifie qu'il existe une matrice inversible P d'ordre p et une matrice inversible Q d'ordre n telles que $\mathrm{J}_r = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$, d'où

$$\mathrm{rg}(\mathrm{J}_r) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}\big).$$

Or, $\mathrm{rg}\big(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}\big) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{A}\big)$ puisque les deux matrices Q^{-1} et P sont inversibles (voir la proposition 10.14), et il est clair que le rang de la matrice J_r est r. Par conséquent,

$$r = \mathrm{rg}\big(\mathrm{A}\big).$$

Réciproquement, supposons A de rang r et montrons que A est alors équivalente à J_r. Utilisons pour cela une application linéaire φ de E dans F telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) = \mathrm{A}$ avec $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Le but est ici de trouver une base $\mathcal{C}_E$ de E et une base $\mathcal{C}_F$ de F de telle sorte que la matrice associée à φ relativement à $\mathcal{C}_E$ et $\mathcal{C}_F$ soit J_r, ce qui terminera la démonstration puisque les deux matrices A et J_r représentant la même application linéaire φ relativement à des bases différentes, nous aurons ainsi montré qu'elles sont équivalentes. Rappelons que $r \leqslant p$ et $r \leqslant n$. Nous n'effectuons la démonstration que dans le cas où $r < p$ et $r < n$. Dans les autres cas, elle s'effectue selon le même modèle. Elle est laissée en exercice. Reprenons les notations de la démonstration du théorème 9.1 (théorème du rang, voir pape 395). On désigne par $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\varphi} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{p-r})$ une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et par $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\varphi} = (\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_r)$ une base de $\mathrm{Im}\,\varphi$. Les vecteurs $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{p-r}$ appartiennent au noyau de φ. Ils vérifient ainsi :

$$\forall i \in \{1, \ldots, p-r\} \quad \varphi(\boldsymbol{w}_i) = \mathbf{0}_F. \tag{27}$$

Soit $\mathcal{C}_E = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{p-r})$ où les vecteurs $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ de E vérifient

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\} \quad \varphi(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{\ell}_i. \tag{28}$$

D'après la démonstration du théorème 9.1, la famille $\mathcal{C}_E$ constitue bien une base de E. La base $\mathcal{C}_F$ de F s'obtient en complétant $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\varphi}$ par $n-r$ vecteurs de F. Notons-les $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-r}$. On a : $\mathcal{C}_F = (\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_r, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-r})$. Écrivons à présent la matrice associée à φ relativement aux nouvelles bases $\mathcal{C}_E$ et $\mathcal{C}_F$. Elle se déduit de (27) et (28) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{C}_F}(\varphi) = \begin{array}{cc} \varphi(\boldsymbol{u}_1)\varphi(\boldsymbol{u}_2)\cdots\varphi(\boldsymbol{u}_r)\varphi(\boldsymbol{w}_1)\cdots\varphi(\boldsymbol{w}_{p-r}) & \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \boldsymbol{\ell}_1 \\ \boldsymbol{\ell}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\ell}_r \\ \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_{n-r} \end{array} \end{array}$$

C'est la matrice J_r. La démonstration est terminée. □

Il vient immédiatement de la proposition 10.18 les résultats suivants.

COROLLAIRE 10.2 *Soient* A, B *deux matrices rectangulaires de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* A *et* B *soient équivalentes est que*

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{B})\,.$$

Démonstration Il est clair que si A et B sont équivalentes alors elles ont même rang (puisqu'elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes). Réciproquement, si elles ont même rang, alors, d'après la proposition 10.18, elles sont toutes les deux équivalentes à la matrice J_r. Elles sont donc équivalentes entre elles par transitivité de la relation d'équivalence entre matrices. □

COROLLAIRE 10.3 *Le rang d'une matrice et celui de sa transposée sont égaux. Autrement dit, pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{A}^T\right).$$

Démonstration Soit A une matrice de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de rang r. D'après la proposition 10.18, il existe deux matrices P et Q, $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, telles que $\mathrm{J}_r = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$, d'où, en passant à la transposition,

$$\mathrm{J}_r^T = \left(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}\right)^T = \mathrm{P}^T\mathrm{A}^T(\mathrm{Q}^{-1})^T,$$

c'est-à-dire, en tenant compte que $(\mathrm{Q}^{-1})^T = (\mathrm{Q}^T)^{-1}$,

$$\mathrm{J}_r^T = \mathrm{P}^T\mathrm{A}^T(\mathrm{Q}^T)^{-1}.$$

En multipliant à gauche par $(\mathrm{P}^T)^{-1}$ et à droite par Q^T, on obtient

$$\mathrm{A}^T = \left(\mathrm{P}^T\right)^{-1}\mathrm{J}_r^T\mathrm{Q}^T,$$

et, en passant au rang,

$$\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}^T\right) = \mathrm{rg}\big((\mathrm{P}^T)^{-1}\mathrm{J}_r^T\mathrm{Q}^T\big) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{J}_r^T\big)$$

puisque les deux matrices $(\mathrm{P}^T)^{-1}$ et Q^T sont inversibles. Il suffit pour conclure de remarquer que $\mathrm{rg}\big(\mathrm{J}_r^T\big) = r$. On en déduit alors que $\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}^T\right) = r$, ce qui termine la démonstration puisque nous avons ainsi vérifié que $\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}^T\right) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$. □

Remarque Deux matrices semblables sont nécessairement équivalentes (c'est immédiat). La réciproque est fausse : deux matrices équivalentes peuvent ne pas être semblables. Par exemple, les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sont équivalentes puisque, d'après la corollaire 10.2, elles ont le même rang (qui vaut 3). Elles ne sont pourtant pas semblables puisque les traces sont différentes (nous utilisons ici la notion de trace d'une matrice carrée qui fait l'objet de l'exercice 5 ci-après, et en particulier la contraposition de l'implication « si deux matrices sont semblables alors elles ont la même trace » (voir la question 4 du même exercice).

10.6 Exercices de synthèse

EXERCICE 5 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. *On appelle trace de* A, *et on note* $\mathrm{Tr}(\mathrm{A})$, *la somme des éléments de sa diagonale. Autrement dit, si* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *alors*

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \overset{déf.}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1 - Montrer que Tr *constitue une forme linéaire sur* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

2 - Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^T\mathrm{A}) = 0 \iff \mathrm{A} = 0_n$.

3 - Montrer que $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{BA})$ *pour tous* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

4 - Soient A *et* B *deux matrices de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. *Déduire de la question précédente que si* A *et* B *sont semblables alors* $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{B})$.

5 - Avons-nous $\mathrm{Tr}(\mathrm{ABC}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{BAC})$ *pour tous* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *? Indication : on pourra considérer les matrices*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6 - Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 8 \\ 3 & -3 & 12 \end{pmatrix} \quad et \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 6 *On considère l'application* f *qui à tout polynôme* P *de* $\mathbb{R}_3[X]$ *associe le reste de la division euclidienne de* P *par* $X^2 - 1$. *On note* $\mathcal{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$.

1 - Montrer que f *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[X]$.

2 - Montrer que $\mathcal{C} = \big(1, X-1, X^2-1, (X^2-1)(X+1)\big)$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$. *Expliciter les deux matrices* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *et* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

3 - Calculer $\mathrm{rg}\, f$. *Déterminer l'image et le noyau de* f *et montrer que* $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$.

4 - Montrer que f *est un projecteur de* $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est*

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1 - Déterminer le rang de f. L'application f est-elle bijective ? En déduire $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker} f)$.

2 - Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k)$. *Déterminer le rang de f^k et en déduire* $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker} f^k)$.

3 - Soit $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{Ker} f^2$. Montrer que $\mathcal{C} = (f^2(\boldsymbol{v}), -f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v})$ est une base de E. Écrire $\mathrm{M}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

4 - On désigne par P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Calculer P et P^{-1} lorsque $\boldsymbol{v} = e_3$ et vérifier que $\mathrm{M}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.

5 - On pose $\mathrm{N} = \mathrm{M} + \mathrm{I}$. *Calculer* N^n *en fonction de* M *pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de* N^n.

6 - Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par récurrence par $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $r_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$p_n = 3p_{n-1} + q_{n-1}, \quad q_n = -3p_{n-1} + r_{n-1}, \quad r_n = p_{n-1}.$$

Trouver les expressions de p_n, q_n, r_n en fonction de n.

10.7 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - Calculons les premières puissances de B :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\mathrm{B}^k = 0$ pour tout entier $k \geqslant 3$. Puisque la matrice unité commute avec toute matrice (du même ordre), on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}^n = (\mathrm{B} + \mathrm{I})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}^k \mathrm{I}^{n-k} = \mathrm{I} + n\mathrm{B} + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{B}^2.$$

On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & 0 \\ nc + \frac{n(n-1)}{2}ab & nb & 1 \end{pmatrix}.$$

2 - De B $=$ A $-$ I il vient $B^3 = (A - I)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$, d'où $A^3 = 3A^2 - 3A + I$.

3 - Pour $n \geqslant 3$, en multipliant l'égalité $A^3 = 3A^2 - 3A + I$ par A^{n-3}, on obtient : $A^n = 3A^{n-1} - 3A^{n-2} + A^{n-3}$ pour tout entier $n \geqslant 3$.

Solution de l'exercice 2

La base $\mathcal{B}$ est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. À première vue, la deuxième base $\mathcal{C}$ semble quelconque. Il n'en est rien. Les vecteurs qui la composent sont ce qu'on appelle des vecteurs propres. Ils dépendent de l'endomorphisme f considéré. Pour les obtenir, nous avons dû procéder à un calcul préalable non explicité pour l'instant. L'étude et la recherche de vecteurs propres pour un endomorphisme feront l'objet du chapitre 12. On a entre les vecteurs de $\mathcal{B}$ et ceux de $\mathcal{C}$ les deux systèmes de relations

$$(\mathrm{S}_1)\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathrm{S}_2)\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \\ \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{3}(-2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \end{cases}$$

Pour calculer la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$, il faut au préalable calculer les trois vecteurs $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ et les exprimer par rapport aux trois vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$. On a :

$$(\mathrm{S}_3)\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) = (2,1,1) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ f(\boldsymbol{e}_2) = (1,2,1) = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ f(\boldsymbol{e}_3) = (1,1,2) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}.$$

Remarquons que, puisque $\mathcal{B}$ est la base canonique, les décompositions de $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ par rapport à $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ sont immédiates. On en déduit alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array}.$$

Pour calculer la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$, il faut cette fois-ci commencer par calculer $f(\boldsymbol{u}_1)$, $f(\boldsymbol{u}_2)$, $f(\boldsymbol{u}_3)$. On a :

$$(\mathrm{S}_4)\begin{cases} f(\boldsymbol{u}_1) = (1,0,-1) = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \\ f(\boldsymbol{u}_2) = (1,-1,0) = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \\ f(\boldsymbol{u}_3) = (4,4,4) = 4\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3 \end{cases}$$

Attention, il faut maintenant décomposer ces vecteurs par rapport aux trois vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$. En utilisant le système de relations (S_2), on obtient :

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1, \quad f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_2, \quad f(\boldsymbol{u}_3) = 4\boldsymbol{u}_3.$$

On en déduit l'expression suivante (au chapitre 12, nous verrons que ce n'est pas un hasard si cette matrice est diagonale. Les éléments diagonaux s'appellent des valeurs propres) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & f(\boldsymbol{u}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{array} .$$

Pour calculer la matrice associée à f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, il faut cette fois-ci décomposer les vecteurs $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ (nous les avons déjà calculés plus haut, voir le système (S_3)) par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$. En injectant les relations du système (S_2) dans celles du système (S_3), il vient :

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + 4\boldsymbol{u}_3) \\ f(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + 4\boldsymbol{u}_3) \\ f(\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{3}(-2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + 4\boldsymbol{u}_3) \end{cases}$$

On en déduit alors l'expression suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \frac{1}{3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{array} .$$

Enfin, pour calculer la matrice associée à f relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$, il faut décomposer les vecteurs $f(\boldsymbol{u}_1)$, $f(\boldsymbol{u}_2)$, $f(\boldsymbol{u}_3)$ par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$. C'est précisément ce que contient le système (S_4). On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & f(\boldsymbol{u}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array} .$$

Remarquons que ces quatre matrices, bien que différentes, représentent néanmoins le même endomorphisme.

Solution de l'exercice 3

Dans cet exercice, A désigne une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$. On suppose que A est la matrice associée à un endomorphisme φ de E, où E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, relativement à une base $\mathcal{B}$ de E. Notons $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$.

1 - L'indice de nilpotence de la matrice A est égal à celui de l'endomorphisme φ. De plus, on sait (*cf.* exercice 1, page 377) que si φ est nilpotent d'indice p alors $p \leqslant n$, ce qui termine la démonstration.

2 - Supposons $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ triangulaire supérieure stricte. Pour montrer que A est nécessairement nilpotente, nous procédons en n étapes. Nous commençons (première étape) par exprimer les images par φ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Les informations recherchées sont contenues dans la matrice A. En effet, A étant la matrice représentative de φ dans $\mathcal{B}$, la j-ième colonne de A contient les coordonnées dans la base d'arrivée (ici égale à la base de départ $\mathcal{B}$) du vecteur $\varphi(e_j)$. Puisque $a_{ij} = 0$ dès que $i \geqslant j$, on a :

$$\mathrm{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) & \quad & \varphi(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{array} \end{array}$$

et on en déduit :

$$\begin{cases} \text{pour } j = 1 : & \varphi(e_1) & = & \mathbf{0}_E, \\ \text{pour } j = 2 : & \varphi(e_2) & = & a_{12}e_1, \\ \text{pour } j = 3 : & \varphi(e_3) & = & a_{13}e_1 + a_{23}e_2, \\ \quad \vdots & & & \\ \text{pour } j = n : & \varphi(e_n) & = & a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + a_{3n}e_3 + \ldots + a_{n-1,n}e_{n-1}. \end{cases}$$

En résumé, on a obtenu que $\varphi(e_1) = \mathbf{0}_E$ et $\varphi(e_j) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{j-1})$ pour tout $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$. En particulier, $\varphi(e_2) \in \mathrm{Vect}\,(e_1)$.

Nous nous intéressons à présent (c'est la deuxième étape) aux images par φ^2 des vecteurs de $\mathcal{B}$. À l'évidence, l'image par φ^2 de e_1 est le vecteur nul. En effet,

$$\varphi^2(e_1) = \varphi(\varphi(e_1)) = \varphi(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_E$$

puisque $\varphi(e_1) = \mathbf{0}_E$ et φ est linéaire. L'image par φ^2 de e_2 est aussi le vecteur nul. En effet, $\varphi^2(e_2) = \varphi(\varphi(e_2))$. Or, $\varphi(e_2) \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ car $\varphi(e_2) \in \mathrm{Vect}\,(e_1)$ et $\varphi(e_1) = \mathbf{0}_E$ (résultats établis à la première étape). Donc, $\varphi^2(e_2) = \mathbf{0}_E$. Soit $j \in \{3, \ldots, n\}$. De $\varphi(e_j) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{j-1})$ (*cf.* étape 1), il vient :

$$\varphi^2(e_j) \in \mathrm{Vect}\,(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_{j-1}))\,.$$

Or, $\varphi(e_1) = \mathbf{0}_E$, $\varphi(e_2) \in \mathrm{Vect}\,(e_1)$, $\ldots$, $\varphi(e_{j-1}) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{j-2})$. D'où

$$\varphi^2(e_j) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{j-2})\,.$$

En résumé, on a obtenu d'une part que $\varphi^2(e_1) = \varphi^2(e_2) = \mathbf{0}_E$ et d'autre part que $\varphi^2(e_j) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{j-2})$ pour tout $j \in \{3, \ldots, n\}$. En particulier, $\varphi^2(e_3) \in \mathrm{Vect}\,(e_1)$.

Nous nous intéressons dans cette troisième étape aux images par φ^3 des vecteurs de $\mathcal{B}$. Si $j \in \{1, 2\}$ alors de $\varphi^2(e_j) = \mathbf{0}_E$ (*cf.* étape 2) il vient :

$$\varphi^3(e_j) = \varphi(\varphi^2(e_j)) = \varphi(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_E.$$

De plus, $\varphi^3(e_3) = \varphi(\varphi^2(e_3))$. Or, $\varphi^2(e_3) \in \operatorname{Ker}\varphi$ car $\varphi^2(e_3) \in \operatorname{Vect}(e_1)$ (résultat établi à l'étape 2) et $\varphi(e_1) = \mathbf{0}_E$. On a donc aussi $\varphi^3(e_3) = \mathbf{0}_E$. Soit $j \in \{4, \dots, n\}$. De $\varphi^2(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{j-2})$ (*cf.* étape 2) il vient

$$\varphi^3(e_j) \in \operatorname{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_{j-2}))\,.$$

Or, $\varphi(e_1) = \mathbf{0}_E$, $\varphi(e_2) \in \operatorname{Vect}(e_1)$, ..., $\varphi(e_{j-2}) \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{j-3})$. D'où

$$\varphi^3(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{j-3})\,.$$

En résumé, on a obtenu, à l'issue de la troisième étape, que $\varphi^3(e_1) = \varphi^3(e_2) = \varphi^3(e_3) = \mathbf{0}_E$ et $\varphi^3(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{j-3})$ pour tout $j \in \{4, \dots, n\}$ avec, en particulier, $\varphi^3(e_4) \in \operatorname{Vect}(e_1)$.

Plus généralement, on obtient, à l'issue de la k-ième étape, que $\varphi^k(e_j) = \mathbf{0}_E$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ et $\varphi^k(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{j-k})$ pour tout $j \in \{k+1, \dots, n\}$.

À l'issue de la $(n-1)$-ième étape, on obtient que $\varphi^{n-1}(e_j) = \mathbf{0}_E$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et $\varphi^{n-1}(e_n) \in \operatorname{Vect}(e_1)$. Par conséquent, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$,

$$\varphi^n(e_j) = \varphi(\varphi^{n-1}(e_j)) = \varphi(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_E.$$

On a aussi $\varphi^n(e_n) = \varphi(\varphi^{n-1}(e_n)) = \mathbf{0}_E$ car $\varphi^{n-1}(e_n) \in \operatorname{Ker}\varphi$. On a ainsi vérifié que l'image par φ^n de chacun de vecteurs de $\mathcal{B}$ était le vecteur nul. L'application composée φ^n est donc l'application nulle, ce qui implique $\mathrm{A}^n = 0$ et montre que A est nilpotente. Son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n.

3 - Décomposons la matrice A comme la somme de la matrice identité et d'une matrice triangulaire supérieure stricte, $\mathrm{A} = \mathrm{I} + \mathrm{B}$ avec

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente, B est nécessairement nilpotente. On a :

$$\mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, grâce à la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\mathrm{A}^m = \mathrm{I} + m\mathrm{B} + \frac{m(m-1)}{2}\mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2m^2 + m \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 4

1 - Commençons par déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Il convient pour cela de décomposer chacun des vecteurs de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$, ce qui est immédiat puisque $\mathcal{B}$ est la base canonique. En effet, on a : $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$. D'où

$$\mathrm{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array}.$$

Pour déterminer P^{-1}, matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$, il faut décomposer chacun des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$. Cela nécessite cette fois-ci quelques calculs. On déduit des équations précédentes le système suivant :

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3), \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3), \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{3}(-2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3).$$

D'où

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{array} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B, matrice associée à f relativement à $\mathcal{C}$, est alors donnée par la relation : $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, qui fait apparaître un double produit matriciel. On obtient :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}.$$

Bien sûr, le produit matriciel étant associatif, l'expression de B est indépendante de l'ordre dans lequel on calcule $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. On peut, au choix, soit calculer le produit AP, suivi du produit $\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{AP})$, soit calculer dans un premier temps le produit $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$, puis le produit $(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A})\mathrm{P}$.

2 - La matrice B étant diagonale, il vient immédiatement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{B}^n = \begin{pmatrix} (a-b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a+2b)^n \end{pmatrix}.$$

3 - Multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} dans l'égalité $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, on obtient l'égalité $\mathrm{PBP}^{-1} = (\mathrm{PP}^{-1})\mathrm{A}(\mathrm{PP}^{-1})$, c'est-à-dire $\mathrm{PBP}^{-1} = \mathrm{A}$ puisque $\mathrm{PP}^{-1} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} = \mathrm{I}$. Soit n un entier naturel non nul. On a :

$$\underbrace{\mathrm{A} \times \ldots \times \mathrm{A}}_{n \text{ fois}} = \underbrace{(\mathrm{PBP}^{-1}) \times \ldots \times (\mathrm{PBP}^{-1})}_{n \text{ fois}} = \mathrm{P}(\underbrace{\mathrm{B} \times \ldots \times \mathrm{B}}_{n \text{ fois}})\mathrm{P}^{-1},$$

c'est-à-dire : $A^n = PB^nP^{-1}$. Cette égalité est encore vraie pour $n = 0$ puisque $A^0 = I$ et $PB^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$. Avant d'aller plus loin, décomposons B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme suit :

$$B^n = (a-b)^n M + (a+2b)^n N$$

avec M et N les deux matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} PB^nP^{-1} &= P\Big((a-b)^n M + (a+2b)^n N\Big)P^{-1} \\ &= (a-b)^n PMP^{-1} + (a+2b)^n PNP^{-1}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n demandée :

$$A^n = \frac{(a-b)^n}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{(a+2b)^n}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 5

1 - Soient α, β deux scalaires et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices d'ordre n sur $\mathbb{K}$. On a : $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. L'application trace est linéaire car

$$\mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \alpha \mathrm{Tr}(A) + \beta \mathrm{Tr}(B).$$

Elle est à valeurs dans $\mathbb{K}$. C'est donc une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.

2 - Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Cherchons l'expression de $\mathrm{Tr}(A^T A)$. On a : $A^T = (a'_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$ pour tous i, j appartenant à $\{1, \ldots, n\}$. D'où $A^T A = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

pour tous i, j dans $\{1, \ldots, n\}$. On obtient :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^T\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2\Big].$$

Ainsi, $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^T\mathrm{A}) = 0$ si et seulement si, $a_{ki} = 0$ pour tous k, i appartenant à $\{1, \ldots, n\}$, ce qui montre que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^T\mathrm{A}) = 0$ si et seulement si, A est nulle.

3 - Remarquons que si A appartient à $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si B appartient à $\mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ alors les deux produits matriciels AB et BA sont bien définis et on a $\mathrm{AB} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{BA} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ avec

$$\mathrm{AB} = \Big(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad \mathrm{BA} = \Big(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant p}.$$

On vérifie que l'on a :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ki}\Big] = \sum_{k=1}^{p}\Big[\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}\Big] = \sum_{i=1}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}\Big]$$

où on a, dans un premier temps, permuté les deux sommes, puis remplacé en même temps i par k et k par i (ce que l'on a le droit de faire puisque les indices sont muets). On reconnaît dans le terme de droite l'expression de $\mathrm{Tr}(\mathrm{BA})$. On a ainsi vérifié que $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB})$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{BA})$ étaient égaux.

4 - Les matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ étant semblables, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. D'après la question précédente, $\mathrm{Tr}\big((\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A})\mathrm{P}\big) = \mathrm{Tr}(\mathrm{P}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}))$. On en déduit :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\big) = \mathrm{Tr}(\mathrm{PP}^{-1}\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}).$$

5 - La réponse est non car $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} \times \mathrm{A} \times \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6 - Bien que l'on ait $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{B})$, on ne peut pas en déduire que A et B sont semblables. L'égalité des traces est une condition nécessaire (pour que deux matrices soient semblables) mais non suffisante. En revanche, rappelons que si A et B sont semblables alors $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{B})$ (puisqu'elles sont associées à la même application linéaire). Procédons par contraposition. On a : $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1 \neq \mathrm{rg}(\mathrm{B}) = 3$. On peut alors en déduire que A et B ne sont pas semblables.

Solution de l'exercice 6

1 - Commençons par vérifier que f est une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même. L'image d'un polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ par f est le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$. C'est donc un polynôme de degré strictement inférieur au degré de $X^2 - 1$. Ainsi, $f(P) \in \mathbb{R}_1[X]$. Or, $\mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}_3[X]$. On a donc, *a fortiori*, $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. Vérifions maintenant la propriété de linéarité de f. Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\exists!\,(Q_1, R_1) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \quad P_1 = Q_1(X^2 - 1) + R_1 \quad \text{et} \quad \deg(R_1) < 2,$$
$$\exists!\,(Q_2, R_2) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \quad P_2 = Q_2(X^2 - 1) + R_2 \quad \text{et} \quad \deg(R_2) < 2.$$

Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha P_1 + \beta P_2 = (\alpha Q_1 + \beta Q_2)(X^2 - 1) + \alpha R_1 + \beta R_2$$

et on vérifie :

$$\begin{aligned}\deg(\alpha R_1 + \beta R_2) &\leqslant \max\{\deg(\alpha R_1), \deg(\beta R_2)\} \\ &\leqslant \max\{\deg(R_1), \deg(R_2)\} < 2.\end{aligned}$$

On a donc $f(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha R_1 + \beta R_2$. Or, $R_1 = f(P_1)$ et $R_2 = f(P_2)$. Par conséquent, $f(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha f(P_1) + \beta f(P_2)$.

2 - Rappelons que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[X]) = 4$. Il est donc suffisant de vérifier que la famille $\mathcal{C} = \big(1, X - 1, X^2 - 1, (X^2 - 1)(X + 1)\big)$ est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. De la relation de liaison

$$\alpha + \beta(X - 1) + \gamma(X^2 - 1) + \delta(X^2 - 1)(X + 1) = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

qui se réécrit :

$$(\alpha - \beta - \gamma - \delta) + (\beta - \delta)X + (\gamma + \delta)X^2 + \delta X^3 = 0_{\mathbb{R}[X]},$$

on déduit, par identification, que $\alpha - \beta - \gamma - \delta = 0$, $\beta - \delta = 0$, $\gamma + \delta = 0$, $\delta = 0$. D'où $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Explicitons les deux matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Commençons par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Les deux polynômes 1 et $X - 1$ ont des degrés inférieurs strictement à celui de $X^2 - 1$. Le reste dans la division euclidienne de 1 (respectivement $X - 1$) par $X^2 - 1$ est donc égal à 1 (resp. $X - 1$). On a donc : $f(1) = 1$ et $f(X - 1) = X - 1$. Les deux polynômes $X^2 - 1$ et $(X^2 - 1)(X + 1)$ sont divisibles par $X^2 - 1$. Leur reste dans la division euclidienne par $X^2 - 1$ est donc le polynôme nul. On a donc : $f(X^2 - 1) = 0$ et $f((X^2 - 1)(X + 1)) = 0$. On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Explicitons à présent la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Suivant un raisonnement analogue à $X - 1$, on obtient : $f(X) = X$. On a : $X^2 = (X^2 - 1) + 1$. Donc, $f(X^2) = 1$. De même, $X^3 = (X^2 - 1)X + X$. Donc, $f(X^3) = X$. On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 - Le rang de f est égal au rang de n'importe quelle matrice qui lui est associée. À l'évidence, $\mathrm{rg}\big(\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f)\big) = 2$. On a donc $\mathrm{rg}\, f = 2$. Ainsi, $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 2. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, f &= \mathrm{Vect}\,\big(f(1), f(X - 1), f(X^2 - 1), f((X^2 - 1)(X + 1))\big) \\ &= \mathrm{Vect}\,(1, X - 1, 0, 0) = \mathrm{Vect}\,(1, X - 1).\end{aligned}$$

Une base de $\mathrm{Im}\, f$ est donc $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\, f} = (1, X-1)$. D'après le théorème du rang,

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}\, f) = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[X])}_{=4} - \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}\, f)}_{=2} = 2.$$

Pour déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$, il suffit de trouver deux polynômes de $\mathrm{Ker}\, f$ linéairement indépendants. Les polynômes X^2-1 et $(X^2-1)(X+1)$ appartiennent à $\mathrm{Ker}\, f$ car $f(X^2-1) = f((X^2-1)(X+1)) = 0$ et ils forment une famille libre (c'est immédiat). Ainsi,

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\left(X^2-1, (X^2-1)(X+1)\right)$$

et une base de $\mathrm{Ker}\, f$ est $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker} f} = \left(X^2-1, (X^2-1)(X+1)\right)$. Nous avons montré que la famille $\mathcal{C} = \left(1, X-1, X^2-1, (X^2-1)(X+1)\right)$ constituait une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Les deux premiers polynômes, 1 et $X-1$, forment une base de $\mathrm{Ker}\, f$. Les deux derniers, X^2-1 et $(X^2-1)(X+1)$, forment une base de $\mathrm{Im}\, f$. Ainsi, tout polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ se décompose de manière unique comme la somme d'un polynôme appartenant à $\mathrm{Ker}\, f$ et d'un polynôme appartenant à $\mathrm{Im}\, f$. Les deux espaces $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$, ce que l'on note : $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}_3[X]$.

4 - Il suffit de vérifier que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. C'est immédiat.

Solution de l'exercice 7

En préambule, remarquons que $f(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3$, $f(e_2) = e_1 - e_2$, $f(e_3) = e_2 - e_3$ puisque $\mathrm{M} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1 - Notons C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de la matrice M. On remarque que $\mathrm{C}_3 = -\mathrm{C}_1 + 2\mathrm{C}_2$. Les trois colonnes sont liées. En revanche, C_2 et C_3 sont libres, d'où $\mathrm{rg}\, \mathrm{M} = 2$ (la matrice M est singulière). On en déduit $\mathrm{rg}\, f = 2$, f n'est donc pas bijective, et, grâce au théorème du rang appliqué à f,

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(E)}_{=3} = \underbrace{\mathrm{rg}\, f}_{=2} + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}\, f), \quad \text{d'où :} \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}\, f) = 1.$$

2 - Puisque $\mathrm{M} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a $\mathrm{M}^k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On obtient :

$$\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où $\mathrm{M}^k = 0$ pour tout $k \geqslant 3$, ce qui signifie que M, et donc aussi l'application associée f, est nilpotente d'indice 3. De l'expression de M^2, il vient $\mathrm{rg}(\mathrm{M}^2) = 1$ et donc $\mathrm{rg}(f^2) = 1$. Appliquant alors le théorème du rang à f^2,

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(E)}_{=3} = \underbrace{\mathrm{rg}\, f^2}_{=1} + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}\, f^2), \quad \text{d'où :} \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}\, f^2) = 2.$$

Pour tout $k \geqslant 3$, $\operatorname{rg} f^k = 0$ et donc, grâce au théorème du rang appliqué à f^k,

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(E)}_{=3} = \underbrace{\operatorname{rg} f^k}_{=0} + \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker} f^k), \quad \text{d'où :} \quad \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker} f^k) = 3.$$

3 - Soit $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{Ker} f^2$. Puisque l'espace E est de dimension 3, les trois vecteurs $f^2(\boldsymbol{v})$, $-f(\boldsymbol{v})$ et $\boldsymbol{v}$ forment une base s'ils constituent une famille libre. Remarquons que l'hypothèse $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{Ker} f^2$ nous assure que le vecteur $f^2(\boldsymbol{v})$ est non nul. De plus, puisque l'on a l'implication $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E \Longrightarrow f^2(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E$, on en déduit, par contraposition, que le vecteur $f(\boldsymbol{v})$ est non nul. Suivant un raisonnement analogue, on vérifie que le vecteur $\boldsymbol{v}$ est aussi non nul. Écrivons la relation de liaison :

$$\alpha f^2(\boldsymbol{v}) - \beta f(\boldsymbol{v}) + \gamma \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E \tag{29}$$

où α, β et γ désignent trois réels quelconques. En appliquant f^2 à l'égalité (29), on obtient :

$$\alpha f^4(\boldsymbol{v}) - \beta f^3(\boldsymbol{v}) + \gamma f^2(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E.$$

Or, pour tout $k \geqslant 3$, $f^k = 0$. Ainsi $f^4(\boldsymbol{v}) = f^3(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E$. Puisque $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{Ker} f^2$, $f^2(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}_E$. On en déduit alors que $\gamma = 0$ et la relation de liaison (29) s'écrit :

$$\alpha f^2(\boldsymbol{v}) - \beta f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E.$$

En appliquant cette fois-ci f à cette égalité, on obtient :

$$\alpha f^3(\boldsymbol{v}) - \beta f^2(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E.$$

Puisque $f^3(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E$ et $f^2(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}_E$, il vient $\beta = 0$ et la relation de liaison devient $\alpha f^2(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E$, dont on déduit $\alpha = 0$ puisque, encore une fois, $f^2(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}_E$. On a ainsi vérifié que la famille $\mathcal{C} = (f^2(\boldsymbol{v}), -f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v})$ était libre. Calculons les images par f des vecteurs de $\mathcal{C}$ et décomposons ces images dans $\mathcal{C}$. On a :

$$\begin{cases} f(f^2(\boldsymbol{v})) = f^3(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E = 0f^2(\boldsymbol{v}) + 0(-f(\boldsymbol{v})) + 0\boldsymbol{v}, \\ f(-f(\boldsymbol{v})) = -f^2(\boldsymbol{v}) = (-1)f^2(\boldsymbol{v}) + 0(-f(\boldsymbol{v})) + 0\boldsymbol{v}, \\ f(\boldsymbol{v}) = 0f^2(\boldsymbol{v}) + (-1)(-f(\boldsymbol{v})) + 0\boldsymbol{v}. \end{cases}$$

La matrice M′ associée à f relativement à cette nouvelle base $\mathcal{C}$ s'écrit alors :

$$\mathrm{M}' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f^3(\boldsymbol{v}) & -f^2(\boldsymbol{v}) & f(\boldsymbol{v}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f^2(\boldsymbol{v}) \\ -f(\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{v} \end{array}.$$

4 - Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C} = (f^2(\boldsymbol{e}_3), -f(\boldsymbol{e}_3), \boldsymbol{e}_3)$. Notons $\boldsymbol{u}_1 = f^2(\boldsymbol{e}_3)$, $\boldsymbol{u}_2 = -f(\boldsymbol{e}_3)$ et $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$. Exprimons les trois vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ dans la base $\mathcal{B}$. Pour $\boldsymbol{u}_3$, c'est immédiat ! Les coordonnées de $f^2(\boldsymbol{e}_3)$ dans $\mathcal{B}$ sont rangées dans la troisième colonne de M^2. On a donc :

$$f^2(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \text{d'où :} \quad \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

Les coordonnées de $f(e_3)$ dans $\mathcal{B}$ sont rangées dans la troisième colonne de M. On a donc :

$$f(e_3) = e_2 - e_3, \quad \text{d'où :} \quad u_2 = -e_2 + e_3.$$

La matrice P sécrit alors :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De $u_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $u_2 = -e_2 + e_3$, $u_3 = e_3$, il vient facilement :

$$e_1 = u_1 - 2u_2 + u_3, \quad e_2 = -u_2 + u_3, \quad e_3 = u_3.$$

On en déduit :

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on remarque que $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}$ (on vérifie en effet que $\mathrm{P}^2 = \mathrm{I}$). Pour vérifier que $\mathrm{M}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$, on peut, au choix, soit effectuer le produit matriciel MP (respectivement $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}$), suivi du produit matriciel $\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{MP})$ (resp. $(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M})\mathrm{P}$) et remarquer que l'on obtient bien la matrice M′, soit remarquer que M et M′ représentent le même endomorphisme f mais dans des bases différentes, $\mathcal{B}$ pour M et $\mathcal{C}$ pour M′, et que P est précisément la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, ce qui est suffisant pour conclure que $\mathrm{M}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ (*cf.* corollaire 10.1).

5 - Soit $n \in \mathbb{N}$. La matrice unité, I, commute avec toutes les matrices. On peut alors utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer N^n. Puisque $\mathrm{M}^k = 0$ pour tout entier $k \geqslant 3$, on obtient :

$$\mathrm{N}^n = \mathrm{I} + n\mathrm{M} + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{M}^2.$$

Des expressions de I, M et M^2, on déduit celle de N^n :

$$\mathrm{N}^n = \begin{pmatrix} 1 + 2n + \frac{n(n-1)}{2} & n + \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)}{2} \\ -3n - n(n-1) & 1 - n - n(n-1) & n - n(n-1) \\ n + \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)}{2} & 1 - n + \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

6 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \\ r_{n-1} \end{pmatrix},$$

qui s'écrit sous la forme suivante : $\mathrm{X}_n = \mathrm{N}\,\mathrm{X}_{n-1}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice-colonne X_n définie comme suit :

$$\mathrm{X}_n \overset{déf.}{=} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

On établit alors, par récurrence sur l'entier n, que $X_n = N^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, en tenant compte de (30), on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad q_n = 1 - n^2, \quad r_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

CHAPITRE 11

Systèmes d'équations linéaires

11.1 Un outil pratique : le déterminant

11.1.1 Tel Monsieur Jourdain

En introduction à la théorie des déterminants, nous commençons par quelques rappels et commentaires sur les systèmes linéaires réels 2×2, puis sur les systèmes linéaires réels 3×3. Dans les deux cas, la notion de déterminant associé à un système linéaire y apparaît de manière naturelle. Ainsi, tel Monsieur Jourdain[1] faisant de la prose sans le savoir, vous manipulez la notion de déterminant depuis plusieurs années sans même le savoir.

Le déterminant d'un système 2×2

On considère dans $\mathbb{R}$ le système linéaire de deux équations à deux inconnues (x_1 et x_2) suivant :

$$(\mathrm{S}_{2\times 2}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array} \right.$$

où a_{11}, a_{12}, b_1, a_{21}, a_{22} et b_2 désignent des réels donnés. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système linéaire $(\mathrm{S}_{2\times 2})$. Il vérifie :

$$\mathcal{S} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$$

où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ définis par[2]

$$\mathcal{D}_1 \overset{déf.}{=} \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\big\},$$

$$\mathcal{D}_2 \overset{déf.}{=} \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2\big\}.$$

Nous donnons une interprétation graphique au système linéaire $(\mathrm{S}_{2\times 2})$ sur la figure 1 où les deux sous-ensembles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont représentés par des droites. Pour obtenir une équation ne portant que sur l'inconnue x_1, on peut multiplier

---

[1] Nous faisons référence ici à la pièce de théâtre classique « Le Bourgeois gentilhomme » écrite en 1670 par Molière (1622-1673).

[2] Remarquons que ces deux sous-ensembles ne possèdent pas, en général, de structure de sous-espace vectoriel puisque $(0,0) \notin \mathcal{D}_1$ et $(0,0) \notin \mathcal{D}_2$, sauf si $b_1 = b_2 = 0$. Nous qualifions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de sous-espaces affines de dimension 1 ou de droites affines.

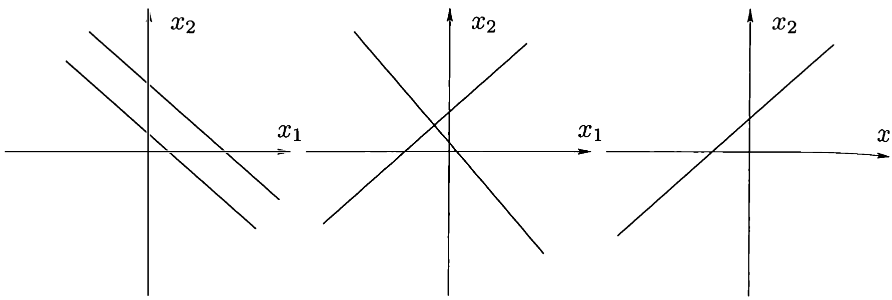


Fig. 1 Interprétation géométrique d'un système linéaire réel 2×2. Les représentations graphiques des deux équations correspondent à des droites. Trois cas sont possibles : il n'y a pas de solution (les droites sont strictement parallèles, dessin de gauche), il y a une unique solution (les droites se coupent, dessin central), il y a une infinité de solutions (les droites sont confondues, dessin de droite).

la première équation par a_{22}, la seconde par $-a_{12}$ et on additionne le tout. De même, pour obtenir une équation ne portant que sur l'inconnue x_2, on peut multiplier la première équation par $-a_{21}$, la seconde par a_{11} et on additionne le tout. On obtient alors le système suivant :

$$(\mathrm{S}'_{2\times 2}) \quad \begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}$$

La quantité réelle $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ est présente en facteur dans les deux équations. On l'appelle le *déterminant du système* 2×2. Cette quantité joue un rôle capital. Discutons de sa valeur.

- Supposons $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Le système linéaire $(\mathrm{S}_{2\times 2})$ possède alors une unique solution (on dit qu'il est déterminé). Notons-la $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ où

$$\widetilde{x}_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{et} \quad \widetilde{x}_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

  On a donc : $\mathcal{S} = \{(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)\}$. D'un point de vue géométrique, cela signifie que les droites associées aux deux équations se coupent.
- Supposons maintenant $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Alors le système $(\mathrm{S}'_{2\times 2})$ s'écrit

$$\begin{cases} 0 &= b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ 0 &= a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}$$

  Il est clair que si l'un (ou les deux à la fois) des deux scalaires $b_1a_{22} - a_{12}b_2$ et $a_{11}b_2 - b_1a_{21}$ est non nul alors ce système est absurde et, dans ce cas, il n'y a pas de solution ($\mathcal{S} = \emptyset$). D'un point de vue géométrique, les droites sont parallèles. En revanche, si l'on a simultanément $b_1a_{22} - a_{12}b_2 = 0$ et $a_{11}b_2 - b_1a_{21} = 0$ alors ce système est trivial puisque les deux équations sont de la forme $0 = 0$. D'un point de vue géométrique, cela signifie que les droites sont confondues. Il y a donc cette fois-ci une infinité de solutions. Pour les obtenir, on supprime une des deux équations du système linéaire initial $(\mathrm{S}_{2\times 2})$, disons la deuxième, et on résout par rapport à l'une des deux inconnues. On obtient, par exemple, si $a_{11} \neq 0$,

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\big(b_1 - a_{12}x_2\big).$$

Les deux inconnues x_1 et x_2 sont dépendantes l'une de l'autre. Les solutions sont tous les couples $\big((b_1 - a_{12}x_2)/a_{11}, x_2\big)$ où x_2 parcourt $\mathbb{R}$. On a donc :

$$\mathcal{S} = \Big\{\big(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2, x_2\big) \;\big|\; x_2 \in \mathbb{R}\Big\}$$

et on dit que le système linéaire $(\mathrm{S}_{2\times 2})$ est indéterminé.

Pour être cohérent avec les notations que nous allons utiliser par la suite, nous introduisons dès à présent les trois matrices-colonnes C_1, C_2 et B définies comme suit :

$$\mathrm{C}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

ce qui nous permet de noter sous la forme plus concise $\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$ le déterminant du système linéaire $(\mathrm{S}_{2\times 2})$:

$$\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

On remarque alors que l'on a :

$$\det(\mathrm{B}, \mathrm{C}_2) = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \quad \text{et} \quad \det(\mathrm{C}_1, \mathrm{B}) = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

Ainsi, lorsque $\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$ est non nul, les coordonnées $\widetilde{x}_1$ et $\widetilde{x}_2$ de l'unique solution du système linéaire $(\mathrm{S}_{2\times 2})$ s'écrivent :

$$\widetilde{x}_1 = \frac{\det(\mathrm{B}, \mathrm{C}_2)}{\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)} \quad \text{et} \quad \widetilde{x}_2 = \frac{\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{B})}{\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)}.$$

Nous remarquons, non sans intérêt, que le déterminant d'un système linéaire 2×2 vérifie les propriétés suivantes : pour toutes matrices-colonnes

$$\mathrm{C}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C}'_1 = \begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

appartenant à $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et pour tous α, β appartenant à $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \det(\alpha\mathrm{C}_1 + \beta\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}_2) &= (\alpha a_{11} + \beta a'_{11})a_{22} - (\alpha a_{21} + \beta a'_{21})a_{12} \\ &= \alpha(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + \beta(a'_{11}a_{22} - a'_{21}a_{12}) \\ &= \alpha\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) + \beta\det(\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}_2) \end{aligned}$$

et on dit que le déterminant est linéaire par rapport à C_1. On vérifie suivant le même modèle qu'il est aussi linéaire par rapport à C_2. De plus, on vérifie facilement que si les matrices-colonnes C_1 et C_2 sont égales alors

$$\det(C_1, C_2) = 0.$$

Ces remarques motiveront la définition générale d'une forme bilinéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (voir la définition 11.1, page 493).

Le déterminant d'un système 3×3

Considérons maintenant dans $\mathbb{R}$ le système linéaire de trois équations à trois inconnues (x_1, x_2 et x_3) suivant :

$$(S_{3\times 3}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 = & b_3 \end{array} \right.$$

où a_{11}, a_{12}, a_{13}, b_1, a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_2, a_{31}, a_{32}, a_{33} et b_3 désignent des réels donnés. Conformément à la notation utilisée plus haut, $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions du système $(S_{3\times 3})$. Il vérifie :

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$$

où $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par[3]

$$\mathcal{P}_1 \overset{déf.}{=} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\},$$

$$\mathcal{P}_2 \overset{déf.}{=} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2\},$$

$$\mathcal{P}_3 \overset{déf.}{=} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\}.$$

Pour une interprétation graphique du système linéaire $(S_{3\times 3})$, nous nous référons à la figure 2 où $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont représentés par des plans. En notant

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

le système linéaire $(S_{3\times 3})$ s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3 = B. \tag{1}$$

Nous pouvons déduire de l'équation précédente trois équations, portant chacune uniquement sur une des trois inconnues x_1, x_2 et x_3. Pour ce faire, nous allons profiter du fait que nous travaillons ici dans l'espace $\mathbb{R}^3$, ce qui nous autorise à utiliser successivement les deux opérations de calcul vectoriel que sont le produit scalaire et le produit vectoriel.

---

[3] Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, le sous-ensemble $\mathcal{P}_i$ n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ puisqu'il ne contient pas le vecteur nul, sauf, bien sûr, si $b_i = 0$. Nous le qualifions de sous-espace affine de dimension 2 ou de plan affine.

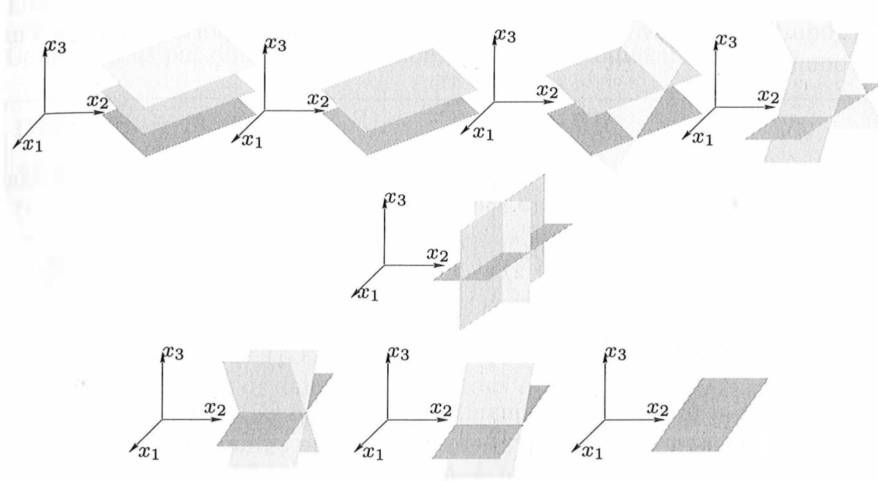


Fig. 2 Interprétation géométrique d'un système linéaire réel 3×3. Les représentations graphiques des trois équations correspondent à des plans (deux plans confondus sont représentés par un unique plan). Trois cas sont possibles. Il n'y a pas de solution (dessins du haut). Il y a une unique solution (les plans s'intersectent en un point ; dessin du milieu). Il y a une infinité de solutions (dessins du bas).

- Pour obtenir une équation portant uniquement sur l'inconnue x_1, on procède en deux étapes. On commence par effectuer le produit vectoriel de (1) par C_2, ce qui permet d'éliminer x_2 puisque $C_2 \wedge C_2 = 0$. On a :

$$x_1(C_1 \wedge C_2) + x_3(C_3 \wedge C_2) = B \wedge C_2.$$

  On effectue ensuite le produit scalaire de cette dernière égalité avec C_3. On élimine ainsi x_3 puisque $(C_3 \wedge C_2) \cdot C_3 = 0$. On obtient :

$$x_1\big((C_1 \wedge C_2) \cdot C_3\big) = (B \wedge C_2) \cdot C_3. \tag{2}$$

- De même, pour obtenir une équation ne portant que sur x_2, on effectue d'abord le produit vectoriel de (1) par C_1, puis on effectue le produit scalaire avec C_3. On obtient :

$$x_2\big((C_2 \wedge C_1) \cdot C_3\big) = (B \wedge C_1) \cdot C_3.$$

  On vérifie (revenir à la définition du produit scalaire et à celle du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$) que

$$(C_2 \wedge C_1) \cdot C_3 = -\big((C_1 \wedge C_2) \cdot C_3\big) \quad \text{et} \quad (B \wedge C_1) \cdot C_3 = -(C_1 \wedge B) \cdot C_3.$$

  On en déduit :

$$x_2\big((C_1 \wedge C_2) \cdot C_3\big) = (C_1 \wedge B) \cdot C_3. \tag{3}$$

- Enfin, en effectuant dans l'ordre le produit vectoriel de (1) par C_1 et le produit scalaire avec C_2, on obtient une équation ne portant que sur l'inconnue x_3. Elle s'écrit :

$$x_3\big((C_3 \wedge C_1) \cdot C_2\big) = (B \wedge C_1) \cdot C_2.$$

En revenant aux définitions du produit scalaire et du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, on vérifie que

$$(C_3 \wedge C_1) \cdot C_2 = (C_1 \wedge C_2) \cdot C_3 \quad \text{et} \quad (B \wedge C_1) \cdot C_2 = (C_1 \wedge C_2) \cdot B.$$

On en déduit :

$$x_3\big((C_1 \wedge C_2) \cdot C_3\big) = (C_1 \wedge C_2) \cdot B. \tag{4}$$

On remarque la présence de la quantité réelle $(C_1 \wedge C_2) \cdot C_3$ en facteur de x_1 dans (2), en facteur de x_2 dans (3) et en facteur de x_3 dans (4). On reconnaît en $(C_1 \wedge C_2) \cdot C_3$ le produit mixte de C_1, C_2, C_3. Nous l'appelons *déterminant du système* 3×3 et nous le notons $\det(C_1, C_2, C_3)$. On vérifie :

$$\begin{aligned} \det(C_1, C_2, C_3) \quad = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ & -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \end{aligned}$$

Il est clair que si sa valeur est non nulle alors le système linéaire $(S_{3\times 3})$ possède une unique solution $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3) \in \mathbb{R}^3$ où

$$\widetilde{x}_1 = \frac{\det(B, C_2, C_3)}{\det(C_1, C_2, C_3)}, \quad \widetilde{x}_2 = \frac{\det(C_1, B, C_3)}{\det(C_1, C_2, C_3)}, \quad \widetilde{x}_3 = \frac{\det(C_1, C_2, B)}{\det(C_1, C_2, C_3)}.$$

Le système linéaire est alors dit déterminé. D'un point de vue géométrique, cela signifie que les plans associés aux équations du système $(S_{3\times 3})$ s'intersectent en un seul point.

Afin d'alléger l'exposé, nous laissons là la discussion et nous renvoyons le lecteur aux commentaires de la figure 2. Nous pouvons néanmoins déjà remarquer que la quantité $\det(C_1, C_2, C_3)$ joue le même rôle (capital) vis-à-vis d'un système linéaire 3×3, que la quantité $\det(C_1, C_2)$ vis-à-vis d'un système linéaire 2×2 et on peut vérifier que le déterminant d'un système linéaire 3×3 possède des propriétés analogues à celles du déterminant d'un système linéaire 2×2. En effet, il est facile de vérifier que le déterminant d'un système linéaire 3×3 est linéaire par rapport à C_1, par rapport à C_2 et par rapport à C_3. De plus, il est nul si, parmi les trois matrices-colonnes C_1, C_2, C_3, deux sont identiques. Ces remarques seront à l'origine de la définition générale d'une forme trilinéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (voir la définition 11.3, page 495).

Le but est maintenant de définir le déterminant pour un système linéaire comportant n équations et n inconnues (avec n un entier naturel non nul quelconque) et à coefficients dans $\mathbb{K}$ (égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour y arriver, nous le déduirons, comme cas particulier, de la définition encore plus générale d'un déterminant d'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n. Nous nous intéressons dans un premier temps aux cas $n = 2$ et $n = 3$.

11.1.2 Déterminant d'ordre 2

Commençons par donner la définition d'une forme bilinéaire alternée.

DÉFINITION 11.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

✗ *Une application $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \in E \times E \longmapsto \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \in \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire si elle est linéaire en chacune des variables $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_2$.*

✗ *Une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite alternée si $\varphi(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{c} \in E$.*

Autrement dit, une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ est une forme bilinéaire si

- pour tous $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}'_1$, $\boldsymbol{c}_2$ dans E et pour tous α, β dans $\mathbb{K}$,

$$\varphi(\alpha\boldsymbol{c}_1 + \beta\boldsymbol{c}'_1, \boldsymbol{c}_2) = \alpha\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) + \beta\varphi(\boldsymbol{c}'_1, \boldsymbol{c}_2),$$

- pour tous $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}'_2$ dans E et pour tous α, β dans $\mathbb{K}$,

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \alpha\boldsymbol{c}_2 + \beta\boldsymbol{c}'_2) = \alpha\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) + \beta\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}'_2).$$

Propriété d'antisymétrie

Considérons $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire alternée. Soient $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_2$ deux vecteurs de E. Puisque φ est alternée,

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) = 0. \tag{5}$$

Or, φ étant bilinéaire, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) &= \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) + \varphi(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) \\ &= \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1) + \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) + \varphi(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1) + \varphi(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2). \end{aligned}$$

Utilisant à nouveau que φ est alternée, $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1) = \varphi(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2) = 0$. Ainsi, l'égalité (5) se réécrit :

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = -\varphi(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1)$$

et montre que le signe de $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$ change lorsque l'on permute les deux vecteurs $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_2$. On dit que φ est *antisymétrique*.

Quel intérêt avons-nous à disposer d'une forme bilinéaire alternée ?

Notre motivation résulte de la constatation suivante. Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire alternée. Si $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_2$ sont deux vecteurs liés alors $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = 0$. En effet, si $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_2$ sont liés alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que $\alpha\boldsymbol{c}_1 + \beta\boldsymbol{c}_2 = 0_E$. Supposons (sans perte de généralité) que β soit non nul. Alors $\boldsymbol{c}_2 = -(\alpha/\beta)\boldsymbol{c}_1$ et

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = \varphi\left(\boldsymbol{c}_1, -\frac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{c}_1\right) = -\frac{\alpha}{\beta}\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1)$$

car φ est bilinéaire. D'où $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = 0$ car $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1) = 0$ (φ alternée). Une conséquence est que $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$ ne change pas lorsqu'on ajoute à l'un des vecteurs un multiple de l'autre. Par exemple, pour tout $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \in E^2$ et pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$,

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 + \gamma \boldsymbol{c}_1) = \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) + \gamma\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1) = \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$$

car $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1) = 0$ (φ alternée).

Cas d'un espace vectoriel de dimension 2

Vous remarquerez qu'à ce stade du chapitre, nous ne connaissons toujours pas de forme qui soit à la fois bilinéaire et alternée. Pour trouver une telle forme, nous nous plaçons dans le cas particulier d'un espace E de dimension 2. Nous nous donnons une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ de E ainsi qu'une forme bilinéaire alternée $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$. Calculons $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$ où $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_2$ sont deux vecteurs de E rapportés à la base $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{c}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{c}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2$$

où $(a_{11}, a_{21}) \in \mathbb{K}^2$ et $(a_{12}, a_{22}) \in \mathbb{K}^2$. Puisque φ est bilinéaire,

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) &= \varphi(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2, a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2)\\
&= \varphi(a_{11}\boldsymbol{e}_1, a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2) + \varphi(a_{21}\boldsymbol{e}_2, a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2)\\
&= \varphi(a_{11}\boldsymbol{e}_1, a_{12}\boldsymbol{e}_1) + \varphi(a_{11}\boldsymbol{e}_1, a_{22}\boldsymbol{e}_2) + \varphi(a_{21}\boldsymbol{e}_2, a_{12}\boldsymbol{e}_1) + \varphi(a_{21}\boldsymbol{e}_2, a_{22}\boldsymbol{e}_2)\\
&= a_{11}a_{12}\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_{11}a_{22}\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + a_{21}a_{12}\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + a_{21}a_{22}\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2),
\end{aligned}$$

d'où, puisque $\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = \varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 0$ (φ est alternée),

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = a_{11}a_{22}\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + a_{21}a_{12}\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1).$$

En tenant compte du fait que $\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = -\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, on obtient finalement :

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\,\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2), \tag{6}$$

ce qui signifie qu'une forme bilinéaire alternée $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ où E est un $\mathbb{K}$-espace de dimension 2, est entièrement déterminée par son action sur une base de E. Étant donné le choix d'une base $\mathcal{B}$, parmi toutes les formes bilinéaires alternées existantes, une seule joue un rôle privilégié en algèbre linéaire. C'est celle qui vérifie : $\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$. Notons-la $\det_{\mathcal{B}} : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$. La notation indicielle utilisée pour $\mathcal{B}$ rappelle que cette forme est définie relativement à la base $\mathcal{B}$. Pour obtenir l'expression de $\det_{\mathcal{B}}$, il suffit de remplacer φ par $\det_{\mathcal{B}}$ dans (6) :

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2).$$

Or, $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$. Ainsi,

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

On peut vérifier que la forme $\det_{\mathcal{B}}$ est effectivement bilinéaire et alternée (il suffit de le vérifier à partir de son expression). De plus, elle est unique. Ceci se déduit de l'unicité de son écriture. La définition suivante a alors un sens.

Définition 11.2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.*

✗ *On appelle déterminant d'ordre 2 dans la base $\mathcal{B}$ l'unique forme bilinéaire alternée notée $\det_{\mathcal{B}} : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant : $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) = 1$.*

✗ *Si $c_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$ et $c_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$ alors*

$$\det_{\mathcal{B}}(c_1, c_2) \overset{déf.}{=} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

On note symboliquement :

$$\det_{\mathcal{B}}(c_1, c_2) \overset{not.}{=} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ \left| \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \end{array}.$$

Par exemple, étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, les deux vecteurs $c_1 = 2e_1 + 3e_2$ et $c_2 = 10e_1 + 15e_2$ sont liés car :

$$\det_{\mathcal{B}}(c_1, c_2) \overset{not.}{=} \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = 2 \times 15 - 3 \times 10 = 0.$$

11.1.3 Déterminant d'ordre 3

Commençons par donner la définition d'une forme trilinéaire alternée.

Définition 11.3 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

✗ *Une application $(c_1, c_2, c_2) \in E^3 \longmapsto \varphi(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{K}$ est une forme trilinéaire si elle est linéaire en chacune des variables c_1, c_2 et c_3.*

✗ *Une forme trilinéaire $\varphi : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite alternée si $\varphi(c_1, c_2, c_3) = 0$ dès que deux des trois vecteurs c_1, c_2 et c_3 sont égaux. Autrement dit, la forme trilinéaire $\varphi : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ est alternée si*

$$\forall (c, c') \in E^2 \quad \varphi(c, c, c') = \varphi(c, c', c) = \varphi(c', c, c) = 0.$$

En d'autres termes, une application φ de E^3 dans $\mathbb{K}$ est une forme trilinéaire si

- pour tous c_1, c_1', c_2, c_3 dans E et pour tous α, β dans $\mathbb{K}$,

$$\varphi(\alpha c_1 + \beta c_1', c_2, c_3) = \alpha\varphi(c_1, c_2, c_3) + \beta\varphi(c_1', c_2, c_3),$$

- pour tous c_1, c_2, c_2', c_3 dans E et pour tous α, β dans $\mathbb{K}$,

$$\varphi(c_1, \alpha c_2 + \beta c_2', c_3) = \alpha\varphi(c_1, c_2, c_3) + \beta\varphi(c_1, c_2', c_3),$$

- pour tous c_1, c_2, c_3, c_3' dans E et pour tous α, β dans $\mathbb{K}$,

$$\varphi(c_1, c_2, \alpha c_3 + \beta c_3') = \alpha\varphi(c_1, c_2, c_3) + \beta\varphi(c_1, c_2, c_3').$$

Propriétés

Si l'on fixe l'un des trois vecteurs alors φ devient une forme bilinéaire alternée par rapport aux deux autres. On en déduit les propriétés suivantes.

- Dès que l'on permute deux vecteurs parmi les trois, la valeur par φ change de signe. Par exemple, pour tous c_1, c_2, c_3 appartenant à E,

$$\varphi(c_1, c_2, c_3) = -\varphi(c_3, c_2, c_1) = -(-\varphi(c_2, c_3, c_1)) = \varphi(c_2, c_3, c_1).$$

- Si l'un des trois vecteurs est combinaison linéaire des deux autres alors la valeur par φ est nulle. Par exemple, considérons trois vecteurs c_1, c_2, c_3 de E et supposons qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $c_3 = \alpha c_1 + \beta c_2$. Alors,

$$\varphi(c_1, c_2, c_3) = \varphi(c_1, c_2, \alpha c_1 + \beta c_2) = \alpha\varphi(c_1, c_2, c_1) + \beta\varphi(c_1, c_2, c_2)$$

d'où, puisque $\varphi(c_1, c_2, c_1) = 0 = \varphi(c_1, c_2, c_2)$ (φ est alternée),

$$\varphi(c_1, c_2, \alpha c_1 + \beta c_2) = 0.$$

- Lorsqu'on ajoute à l'un des trois vecteurs une combinaison linéaire des deux autres, la valeur par φ ne change pas. Par exemple, pour tous α, β appartenant à $\mathbb{K}$ et pour tous c_1, c_2, c_3 appartenant à E,

$$\varphi(c_1, c_2, c_3 + \alpha c_1 + \beta c_2) = \varphi(c_1, c_2, c_3) + \alpha\varphi(c_1, c_2, c_1) + \beta\varphi(c_1, c_2, c_2),$$

d'où, puisque $\varphi(c_1, c_2, c_1) = 0 = \varphi(c_1, c_2, c_2)$ (φ est alternée),

$$\varphi(c_1, c_2, c_3 + \alpha c_1 + \beta c_2) = \varphi(c_1, c_2, c_3).$$

Cas d'un espace vectoriel de dimension 3

Plaçons-nous dans un espace E de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et cherchons à caractériser une forme trilinéaire alternée $\varphi : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$. Procédons comme au paragraphe précédent en calculant $\varphi(c_1, c_2, c_3)$ où c_1, c_2 et c_3 sont trois vecteurs de E rapportés à la base $\mathcal{B}$:

$$c_1 = \sum_{i_1=1}^{3} a_{i_1,1} e_{i_1}, \quad c_2 = \sum_{i_2=1}^{3} a_{i_2,2} e_{i_2}, \quad c_3 = \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_3,3} e_{i_3}.$$

En utilisant que φ est une forme trilinéaire, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(c_1, c_2, c_3) &= \varphi\Big(\sum_{i_1=1}^{3} a_{i_1,1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{3} a_{i_2,2} e_{i_2}, \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_3,3} e_{i_3}\Big) \\
&= \sum_{i_1=1}^{3} a_{i_1,1}\, \varphi\Big(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{3} a_{i_2,2} e_{i_2}, \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_3,3} e_{i_3}\Big) \\
&= \sum_{i_1=1}^{3} \sum_{i_2=1}^{3} a_{i_1,1} a_{i_2,2}\, \varphi\Big(e_{i_1}, e_{i_2}, \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_3,3} e_{i_3}\Big) \\
&= \sum_{i_1=1}^{3} \sum_{i_2=1}^{3} \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_1,1} a_{i_2,2} a_{i_3,3}\, \varphi\big(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}\big)
\end{aligned}$$

Utilisons à présent que φ est alternée :

$$\varphi(c_1, c_2, c_3) = a_{11}a_{12}a_{13}\underbrace{\varphi(e_1, e_1, e_1)}_{=0} + a_{11}a_{12}a_{23}\underbrace{\varphi(e_1, e_1, e_2)}_{=0} + \dots$$

Nous n'avons explicité que les deux premiers termes de la somme. Il y a en fait $3^3 = 27$. Il est inutile de les écrire tous car on sait que $\varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}) = 0$ dès que deux indices sont égaux. Ainsi, parmi les 27 termes, on ne considère que les termes où les indices i_1, i_2 et i_3 sont tous les trois distincts. Autrement dit, on ne considère que les termes pour lesquels $\{i_1, i_2, i_3\} = \sigma(\{1, 2, 3\})$ avec σ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ (c'est-à-dire $\sigma \in \mathfrak{S}_3$). On sait qu'il y a $3! = 6$ permutations possibles de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ (voir page 49). Elles s'écrivent :

$$\sigma_1 = \mathrm{id}_{\{1,2,3\}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \tau_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$
$$\sigma_3 = \tau_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_4 = \tau_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\sigma_5 = \tau_{2,3} \circ \tau_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_6 = \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

où $\tau_{i,j}$ désigne la permutation (c'est en fait une transposition) qui opère uniquement sur le sous-ensemble $\{i, j\}$ de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, en échangeant i et j, et en laissant invariant l'élément de $\{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$. Ainsi,

$$\varphi(c_1, c_2, c_3) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}a_{\sigma(3),3}\, \varphi\big(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\big), \tag{7}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\varphi(c_1, c_2, c_3) \;&=\; a_{11}a_{22}a_{33}\,\varphi(e_1, e_2, e_3) + a_{21}a_{32}a_{13}\,\varphi(e_2, e_3, e_1)\\ &\quad + a_{31}a_{12}a_{23}\,\varphi(e_3, e_1, e_2) + a_{31}a_{22}a_{13}\,\varphi(e_3, e_2, e_1)\\ &\quad + a_{21}a_{12}a_{33}\,\varphi(e_2, e_1, e_3) + a_{11}a_{32}a_{23}\,\varphi(e_1, e_3, e_2).\end{aligned}$$

Montrons que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, le terme $\varphi\big(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\big)$ est égal, à un signe multiplicatif près, à $\varphi(e_1, e_2, e_3)$. Le cas de σ_1 est immédiat puisque σ_1 est la permutation identique de $\{1, 2, 3\}$:

$$\varphi\big(e_{\sigma_1(1)}, e_{\sigma_1(2)}, e_{\sigma_1(3)}\big) = \varphi(e_1, e_2, e_3).$$

Considérons les cinq autres cas :

- cas où $\sigma_2 = \tau_{1,2}$: $\varphi\big(e_{\sigma_2(1)}, e_{\sigma_2(2)}, e_{\sigma_2(3)}\big) = \varphi(e_2, e_1, e_3) = -\varphi(e_1, e_2, e_3)$,
- cas où $\sigma_3 = \tau_{2,3}$: $\varphi\big(e_{\sigma_3(1)}, e_{\sigma_3(2)}, e_{\sigma_3(3)}\big) = \varphi(e_1, e_3, e_2) = -\varphi(e_1, e_2, e_3)$,
- cas où $\sigma_4 = \tau_{1,3}$: $\varphi\big(e_{\sigma_4(1)}, e_{\sigma_4(2)}, e_{\sigma_4(3)}\big) = \varphi(e_3, e_2, e_1) = -\varphi(e_1, e_2, e_3)$,

– cas où $\sigma_5 = \tau_{2,3} \circ \tau_{1,3} : \varphi\big(e_{\sigma_5(1)}, e_{\sigma_5(2)}, e_{\sigma_5(3)}\big) = \varphi(e_2, e_3, e_1) = \varphi(e_1, e_2, e_3)$,

– cas où $\sigma_6 = \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2} : \varphi\big(e_{\sigma_6(1)}, e_{\sigma_6(2)}, e_{\sigma_6(3)}\big) = \varphi(e_3, e_1, e_2) = \varphi(e_1, e_2, e_3)$.

En résumé, nous avons montré que

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_3 \quad \varphi\big(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\big) = \varepsilon(\sigma)\varphi(e_1, e_2, e_3).$$

Ici, $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ. Elle vaut -1 (respectivement 1) lorsque σ est une transposition (resp. la composée de deux transpositions ou la permutation identique). On déduit de (7) que

$$\varphi(c_1, c_2, c_3) = \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3}\Big)\varphi(e_1, e_2, e_3), \tag{8}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \varphi(c_1, c_2, c_3) \quad = \quad & \Big(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ & -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}\Big)\varphi(e_1, e_2, e_3), \end{aligned}$$

ce qui signifie qu'une forme trilinéaire alternée $\varphi : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ où E est un $\mathbb{K}$-espace de dimension 3, est entièrement déterminée par son action sur une base de E. Là encore, étant donné le choix d'une base $\mathcal{B}$, parmi toutes les formes trilinéaires alternées existantes, une seule joue un rôle privilégié en algèbre linéaire. C'est celle qui vérifie $\varphi(e_1, e_2, e_3) = 1$. On la note $\det_{\mathcal{B}} : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$. En remplaçant φ par $\det_{\mathcal{B}}$ dans (8), on obtient :

$$\det{}_{\mathcal{B}}(c_1, c_2, c_3) = \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3}\Big)\det{}_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3).$$

D'où, puisque $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = 1$,

$$\det{}_{\mathcal{B}}(c_1, c_2, c_3) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3}.$$

On peut vérifier qu'elle est effectivement trilinéaire et alternée. Une fois de plus, l'unicité de l'écriture prouve l'unicité de la forme. Tout cela nous conduit à la définition suivante.

DÉFINITION 11.4 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.*

✗ *On appelle déterminant d'ordre 3 dans la base $\mathcal{B}$ l'unique forme trilinéaire alternée notée $\det_{\mathcal{B}} : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant : $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = 1$.*

✗ *Si, pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, les scalaires a_{1j}, a_{2j}, a_{3j} désignent les coordonnées du vecteur c_j dans la base $\mathcal{B}$ alors*

$$\det{}_{\mathcal{B}}(c_1, c_2, c_3) \overset{déf.}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(c_1, c_2, c_3) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}\end{aligned}$$

et on note symboliquement :

$$\det_{\mathcal{B}}(c_1, c_2, c_3) \overset{not.}{=} \begin{array}{|ccc|c} \multicolumn{1}{c}{c_1} & c_2 & \multicolumn{1}{c}{c_3} & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & e_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & e_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & e_3 \end{array}\ .$$

Exemple Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension 3 muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Les trois vecteurs $c_1 = e_1 - e_3$, $c_2 = -e_2 + 2e_3$ et $c_3 = -e_1 + e_2$ forment une famille libre car leur déterminant dans la base $\mathcal{B}$ est non nul :

$$\det_{\mathcal{B}}(c_1, c_2, c_3) \overset{not.}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Développement selon la règle de Sarrus

Pour se souvenir de la formule du déterminant d'ordre 3, on peut utiliser la disposition pratique suivante :

$$\left|\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & \searrow & & \times & & \times & \nearrow & & & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & \nearrow & & \times & & \times & \searrow & & & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{array}\right|.$$

Ainsi, dans l'expression de $\det_{\mathcal{B}}(c_1, c_2, c_3)$, les trois premiers termes (ceux précédés d'un signe $+$) se retrouvent grâce aux trois premières diagonales descendantes, et les trois derniers termes (ceux précédés d'un signe $-$) se retrouvent grâce aux trois premières diagonales montantes. En procédant ainsi, on dit que l'on a developpé le déterminant d'ordre 3 selon la *règle de Sarrus*.[4]

Remarques

1. Les coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$ de chacun des trois vecteurs c_1, c_2 et c_3 peuvent être disposées soit en colonne, soit en ligne. Cela n'influe pas sur la valeur finale de $\det_{\mathcal{B}}(c_1, c_2, c_3)$. En effet, on vérifie facilement l'égalité

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

[4] Sarrus, Pierre (1798, Saint Affrique (dans l'Aveyron) - 1861, Saint Affrique). Mathématicien français, Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg.

2. Un déterminant d'ordre 3 peut se décomposer en une combinaison linéaire de 3 déterminants d'ordre 2. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

On dit que l'on a développé le déterminant d'ordre 3 par rapport à sa première colonne. Nous reviendrons sur cette remarque au § 11.1.5.

11.1.4 Déterminant d'ordre n

Nous généralisons maintenant les notions de forme bilinéaire alternée et de forme trilinéaire alternée en introduisant celle de forme multilinéaire alternée.

DÉFINITION 11.5 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.*

✗ *Une application $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in E^n \longmapsto \varphi(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire si elle est linéaire en chacune de ses variables.*

✗ *Une forme n-linéaire $\varphi : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite alternée si $\varphi(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ dès que au moins deux des vecteurs c_1, c_2, ..., c_n sont égaux.*

Commentons cette définition.

- Dire qu'une application φ de E^n dans $\mathbb{K}$ est n-linéaire signifie que pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tous vecteurs c_j, $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$, appartenant à E, l'application

$$c_i \in E \longrightarrow \varphi(c_1, \dots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \dots, c_n) \in \mathbb{K}$$

  est linéaire.

- Lorsque l'on permute les vecteurs c_1, ..., c_n, la valeur de $\varphi(c_1, \dots, c_n)$ est inchangée à un signe multiplicatif près. On rappelle que toute permutation est décomposable d'au moins une manière en un produit de transpositions (voir l'exercice 8, page 83). En notant $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble constitué de toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \varphi\big(c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}, \dots, c_{\sigma(n)}\big) = \varepsilon(\sigma)\varphi(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

  où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ et vaut $+1$ (respectivement -1) lorsque σ peut s'écrire comme le produit d'un nombre pair (resp. impair) de transpositions. On rappelle que, par convention, la signature de la permutation identique est égal à 1 (voir page 51).

Cas d'un espace vectoriel de dimension n

On suppose $n \geqslant 2$. Pour trouver une forme n-linéaire alternée $\varphi : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$, nous nous plaçons dans un espace E de dimension n que nous munissons d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. L'expression de φ s'obtient alors en développant $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ où chacun des vecteurs $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ est décomposé dans la base $\mathcal{B}$ comme suit

$$\boldsymbol{c}_1 = \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \quad \boldsymbol{c}_2 = \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2}\boldsymbol{e}_{i_2}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{c}_n = \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}\boldsymbol{e}_{i_n}.$$

On a donc, puisque φ est une forme n-linéaire,

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) &= \varphi\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2}\boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}\boldsymbol{e}_{i_n}\Big) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}\Big\{a_{i_1,1}a_{i_2,2}\ldots a_{i_n,n}\,\varphi\big(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}\big)\Big\}. \end{aligned}$$

Or, φ est aussi alternée. Ainsi, parmi les termes présents dans la somme (il y en a n^n), tous sont nuls sauf ceux pour lesquels $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \sigma\big(\{1, 2, \ldots, n\}\big)$ avec σ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ (c'est-à-dire $\sigma \in \mathfrak{S}_n$). Rappelons qu'il y a $n\,!$ permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Par conséquent,

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big\{a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}\varphi\big(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{e}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}\big)\Big\}.$$

Par commodité, nous utilisons la notation indicielle suivante :

$$\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = a_{\sigma(1),1} \times a_{\sigma(2),2} \times \ldots \times a_{\sigma(n),n}.$$

De plus, puisque $\varphi\big(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}\big) = \varepsilon(\sigma)\varphi(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) = \left[\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\Big)\right]\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n). \tag{9}$$

Afin d'alléger les notations, on note parfois $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ sous la forme $\varphi(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est la famille définie par $\mathcal{F} = \big(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n\big)$. Ainsi, l'égalité (9) donnée ci-dessus s'écrit :

$$\varphi(\mathcal{F}) = \left[\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\Big)\right]\varphi(\mathcal{B}). \tag{10}$$

Une forme n-linéaire alternée $\varphi : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ où E est un $\mathbb{K}$-espace de dimension n, est par conséquent entièrement déterminée par son action sur une base de E. La définition suivante a alors un sens.

DÉFINITION 11.6 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.*

✗ *On appelle déterminant d'ordre n dans la base $\mathcal{B}$ l'unique forme n-linéaire alternée notée* $\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ *vérifiant :* $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$.

✗ *Si, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, les scalaires a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj} désignent les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{c}_j$ dans la base $\mathcal{B}$ alors*

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_n) \overset{déf.}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \Big(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \Big)$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.

On note symboliquement :

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_n) \overset{not.}{=} \begin{array}{|cccc|c} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & & \boldsymbol{c}_n & \\ a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & e_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & e_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & e_n \end{array}.$$

Il est évident que la formule donnant l'expression d'un déterminant d'ordre n généralise celle d'un déterminant d'ordre 3 (voir la définition 11.4, page 498). On retrouve aussi l'expression d'un déterminant d'ordre 2. Vérifions-le. D'après la définition 11.6, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \Big(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{2} a_{\sigma(i),i} \Big).$$

On a : $\mathfrak{S}_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ avec $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ainsi,

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = \varepsilon(\sigma_1) a_{\sigma_1(1),1} a_{\sigma_1(2),2} + \varepsilon(\sigma_2) a_{\sigma_2(1),1} a_{\sigma_2(2),2}.$$

Or, $a_{\sigma_1(1),1} = a_{11}$ et $a_{\sigma_1(2),2} = a_{22}$ car $\sigma_1(1) = 1$ et $\sigma_1(2) = 2$. On a aussi $a_{\sigma_2(1),1} = a_{21}$ et $a_{\sigma_2(2),2} = a_{12}$ car $\sigma_2(1) = 2$ et $\sigma_2(2) = 1$. De plus, $\varepsilon(\sigma_1) = 1$ et $\varepsilon(\sigma_2) = -1$. Finalement,

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

On a ainsi retrouvé l'expression d'un déterminant d'ordre 2 (voir la définition 11.2).

En pratique, la formule du déterminant d'ordre n donnée dans la définition 11.6 est rarement utilisée. On lui préfère la formule de récurrence (sur l'ordre) donnée au paragraphe 11.1.5.

Notations

Soit $n \geqslant 2$. Pour toute famille $\mathcal{F} = \big(c_1, \ldots, c_n\big)$ de vecteurs de E, on note parfois $\det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_n)$ sous la forme $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$. En particulier, l'égalité

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$$

s'écrit aussi : $\det_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{B}\big) = 1$.

Remarques

1. D'après la définition de la forme $\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$, l'égalité (10) s'écrit maintenant sous la forme suivante :

$$\varphi(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{F}\big) \times \varphi(\mathcal{B}) \tag{11}$$

où $\mathcal{F}$ désigne une famille de n vecteurs de E et où $\varphi : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ désigne une forme n-linéaire alternée (quelconque). En particulier, puisque la forme $\det_{\mathcal{B}}$ est elle-même n-linéaire alternée, elle vérifie aussi l'égalité (11) et, dans ce cas, cette dernière est triviale.[5] On peut aussi considérer comme forme n-linéaire alternée, le déterminant dans n'importe quelle autre base $\mathcal{C}$ de E. Ainsi, pour toute famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E,

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{F}\big) \times \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \tag{12}$$

ou encore, en inversant les rôles des deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{C}}\big(\mathcal{F}\big) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}). \tag{13}$$

Cette dernière égalité nous sera utile pour démontrer la première propriété de la proposition 11.3. En particulier, en choisissant $\mathcal{F}$ égale à $\mathcal{C}$ dans (12), ou encore $\mathcal{F}$ égale à $\mathcal{B}$ dans (13), on obtient :

$$1 = \det_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{C}\big) \times \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$$

car $\det_{\mathcal{C}}\big(\mathcal{C}\big) = 1 = \det_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{B}\big)$. Nous utiliserons ce résultat dans la démonstration de la proposition 11.1.

L'intérêt de disposer d'une forme n-linéaire alternée devient évident au vu de la proposition suivante.

PROPOSITION 11.1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ muni d'une base $\mathcal{B}$ et v_1, v_2, …, v_n des vecteurs de E. Une condition nécessaire et suffisante pour que v_1, v_2, …, v_n forment une base de E est que* $\det_{\mathcal{B}}\big(v_1, v_2, \ldots, v_n\big) \neq 0$.

---

[5] Elle s'écrit en effet sous la forme suivante :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{F}\big) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}),$$

c'est-à-dire : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ puisque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Démonstration Notons $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.

⊵ Montrons que si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$ alors $\mathcal{F}$ est libre (elle constituera alors une base de E puisque $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$). Utilisons un raisonnement par contraposée. Supposons la famille $\mathcal{F}$ liée et montrons que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$. D'après la proposition 8.6 (voir page 331), puisque $\mathcal{F}$ est liée, un de ses vecteurs s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs. Il existe ainsi un entier i appartenant à $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j$$

où $\beta_j \in \mathbb{K}$ pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. On en déduit :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$$

ou encore, utilisant la linéarité de la forme $\det_{\mathcal{B}}$ par rapport à sa i-ième variable,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \beta_j \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n).$$

Il apparaît ainsi $n-1$ déterminants dans la somme de droite. Pour chacun d'eux, le vecteur $\boldsymbol{v}_j$ y est répété deux fois. Puisque la forme $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée, chacun de ces $n-1$ déterminants est nul et on en déduit que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est nul.

⊵ Montrons maintenant la réciproque. Supposons la famille $\mathcal{F}$ libre et montrons que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$. Puisque $\mathcal{F}$ est libre et puisque son cardinal est égal à la dimension de E, c'est donc une base de E. Notons-la désormais $\mathcal{C}$. On peut ainsi définir l'unique forme n-linéaire alternée notée $\det_{\mathcal{C}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = 1$. La relation suivante (nous l'avons établie plus haut) :

$$1 = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \times \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$$

permet de conclure directement car il est clair que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ ne peut être nul. □

Déterminant d'une matrice carrée

En s'inspirant de la formule donnée dans la définition 11.6, on peut définir le déterminant d'une matrice carrée indépendamment de tout contexte vectoriel.

DÉFINITION 11.7 *Soit* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *une matrice carrée d'ordre* $n \geqslant 2$ *à coefficients dans* $\mathbb{K}$. *On appelle déterminant de* A *et on note* $\det(\mathrm{A})$, *le scalaire*

$$\det(\mathrm{A}) \overset{déf.}{=} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \Big(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\Big).$$

Par convention, si $n = 1$, *c'est-à-dire si* $\mathrm{A} = (a_{11})$, *alors* $\det(\mathrm{A}) \overset{déf.}{=} a_{11}$.

La notion de déterminant est dépourvue de sens pour des matrices rectangulaires et non carrées. Il ne faut pas faire l'amalgame avec le rang d'une matrice qui, lui, est défini pour n'importe quel type de matrice (qu'elle soit rectangulaire ou carrée). Le déterminant de la matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est aussi noté

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Donnons à présent une interprétation vectorielle au déterminant d'une matrice A d'ordre n. Considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}$ et désignons par $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ les vecteurs de E dont les coordonnées par rapport à $\mathcal{B}$ correspondent aux colonnes $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n$ de A. Le déterminant de A s'interprète alors comme le déterminant des vecteurs $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ de E par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$\det(\mathrm{A}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$$

et on écrit parfois

$$\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n).$$

C'est l'écriture que nous avions utilisée au paragraphe 11.1.1.

Remarque Il est clair que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ pour toute base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$. On en déduit que

$$\det(\mathrm{I}_n) = 1$$

pour tout entier $n \geqslant 2$. Cette égalité est vraie aussi lorsque $n = 1$.

La caractérisation suivante est très utile en pratique.

Proposition 11.2 *Pour qu'une matrice carrée soit inversible il faut et il suffit que son déterminant soit non nul. En d'autres termes, pour toute matrice carrée* A *d'ordre* n *sur* $\mathbb{K}$,

$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

Démonstration L'inversibilité de la matrice A carrée d'ordre n équivaut à l'indépendance linéaire de ses n vecteurs colonnes, qui équivaut à son tour à $\det(\mathrm{A}) \neq 0$. □

Proposition 11.3 *Pour tous* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, *on a :*

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \det(\mathrm{A}) \times \det(\mathrm{B}).$$

En particulier, si A *est inversible alors* $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathrm{A})}$.

Démonstration $\trianglerighteq$ C'est immédiat lorsque $n = 1$. Supposons $n \geqslant 2$. La démonstration s'effectue en considérant séparément les cas où A est inversible et où A n'est pas inversible. Supposons dans un premier temps A inversible. La matrice A s'interprète alors comme une matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n à une base $\mathcal{C}$ du même espace. Cela signifie que sa j-ième colonne est formée des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du j-ième vecteur de la base $\mathcal{C}$. On a ainsi :

$$\det(\mathrm{A}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}). \tag{14}$$

Soient $\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \ldots, \mathrm{C}'_n$ les colonnes de la matrice B et $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n$ celles de la matrice-produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathrm{C}'_1 & \mathrm{C}'_2 & & \mathrm{C}'_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathrm{C}_1 & \mathrm{C}_2 & & \mathrm{C}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Désignons par $\mathcal{F}$ la famille constituée des vecteurs de E dont les coordonnées par rapport à $\mathcal{C}$ correspondent à $\mathrm{C}'_1, \ldots, \mathrm{C}'_n$, autrement dit telle que

$$\det(\mathrm{B}) = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}). \tag{15}$$

On vérifie sans peine que l'on a :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{A} \times \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathrm{C}'_1 & \mathrm{C}'_2 & & \mathrm{C}'_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathrm{AC}'_1 & \mathrm{AC}'_2 & \cdots & \mathrm{AC}'_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\mathrm{C}_j = \mathrm{AC}'_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, ce qui montre, puisque A est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, que les colonnes de la matrice-produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ contiennent les coordonnées des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$. On a donc :

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}). \tag{16}$$

Or, nous avons vu que l'on pouvait écrire (voir page 503) :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}).$$

Ainsi, en tenant compte des égalités (14), (15) et (16), on en déduit :

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \det(\mathrm{B}) \times \det(\mathrm{A}).$$

Le cas où A n'est pas inversible est immédiat. On a $\det(\mathrm{A}) = 0$ (d'après la proposition 11.2) et la matrice-produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est nécessairement non inversible car, sinon, il existerait une matrice C telle que $(\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{I}_n$, ou encore, par associativité du produit matriciel, telle que $\mathrm{A}(\mathrm{BC}) = \mathrm{I}_n$ et A serait inversible. On a donc $\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = 0$ et l'égalité $\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \det(\mathrm{B}) \times \det(\mathrm{A})$ est satisfaite.

$\trianglerighteq$ Montrons à présent que $\det(\mathrm{A}^{-1}) = 1/\det(\mathrm{A})$ lorsque A est inversible. Supposons donc A inversible. En prenant la matrice B égale à A^{-1} (qui existe puisque A est inversible) et en utilisant le fait que $\det(\mathrm{I}_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on obtient :

$$1 = \det(\mathrm{A}) \times \det(\mathrm{A}^{-1}).$$

On en déduit d'une part que les deux scalaires $\det(\mathrm{A})$ et $\det(\mathrm{A}^{-1})$ sont non nuls puisque leur produit est non nul, et d'autre part que

$$\det(\mathrm{A}^{-1}) = 1/\det(\mathrm{A}),$$

ce qui termine la démonstration. □

Remarques

1. Puisque le produit est commutatif dans $\mathbb{K}$, on déduit de la proposition 11.3 que, pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \det(\mathrm{B} \times \mathrm{A}).$$

2. Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. Si A et B sont semblables alors leurs déterminants ont la même valeur. En effet, supposer A et B semblables signifie qu'il existe une matrice inversible P, d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$, telle que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et on en déduit

$$\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \det(\mathrm{P}^{-1}) \times \det(\mathrm{A}) \times \det(\mathrm{P}) = \det(\mathrm{A})$$

car $\det(\mathrm{P}^{-1}) = 1/\det(\mathrm{P})$. Par conséquent, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et f un endomorphisme de E alors $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.[6]

PROPOSITION 11.4 *Pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^T)$.

Démonstration C'est immédiat lorsque $n = 1$. Supposons $n \geqslant 2$. Rappelons que si $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ alors $\mathrm{A}^T = (a'_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. On doit montrer que $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^T)$, c'est-à-dire :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \Big(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \Big) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \Big(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \Big). \tag{17}$$

[6] Cette remarque donne un sens à la définition du déterminant d'un endomorphisme : étant donnés un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et f un endomorphisme de E, on appelle *déterminant de l'endomorphisme* f le scalaire noté $\det(f)$ et défini comme suit :

$$\det(f) \overset{déf.}{=} \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$$

où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ désigne une base quelconque de E. On a les propriétés suivantes :

- $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.
- Un endomorphisme f de E est bijectif si et seulement si, $\det(f) \neq 0$.
- Pour tous endomorphismes f et g de E, $\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f)$. En particulier, si f est bijectif alors $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. En posant $j = \sigma(i)$, soit $i = \sigma^{-1}(j)$, on a :

$$\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}. \tag{18}$$

Un tel changement d'indice revient en fait à réordonner le produit des scalaires $a_{\sigma(1),1}$, $a_{\sigma(2),2}$, ..., $a_{\sigma(n),n}$ suivant le premier indice.[7] La signature d'une permutation σ et celle de sa réciproque, la permutation σ^{-1}, sont identiques. En multipliant le terme de gauche dans (18) par $\varepsilon(\sigma)$ et celui de droite par $\varepsilon(\sigma^{-1})$, on obtient :

$$\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \varepsilon(\sigma^{-1})\prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}. \tag{19}$$

Il revient au même de sommer le terme de gauche dans (19) par rapport à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ que de sommer le terme de droite de (19) par rapport à $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$. Ainsi,

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\right) = \sum_{\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma^{-1})\prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}\right). \tag{20}$$

On reconnaît à gauche dans l'égalité (20), l'expression du déterminant de A. Intéressons-nous à celle de droite. On a :

$$\sum_{\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma^{-1})\prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\right) \tag{21}$$

où on a remplacé σ^{-1} par σ (puisque l'indice de sommation est muet) et j par i (puisque l'indice de produit est aussi muet). On reconnaît cette fois-ci à droite dans l'égalité (21) l'expression du déterminant de A^T. En regroupant (20) et (21), on obtient finalement (17), c'est-à-dire $\det(A) = \det(A^T)$. □

Remarque Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Rappelons que les colonnes de la matrice A^T correspondent aux lignes de la matrice A. Puisque le déterminant de A et celui de sa matrice transposée, la matrice A^T, sont égaux, le déterminant de A s'obtient aussi en calculant le déterminant de ses lignes L_1, L_2, ..., L_n et on écrit :

$$\det(A) = \det(L_1, L_2, \dots, L_n).$$

---

[7] Pour s'en convaincre, plaçons-nous, à titre d'exemple, dans le cas où $n = 4$ et considérons la permutation

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 2$ et $\sigma(4) = 1$. D'où

$$\begin{aligned} & a_{\sigma(1),1} \times a_{\sigma(2),2} \times a_{\sigma(3),3} \times a_{\sigma(4),4} \\ = {} & a_{31} \times a_{42} \times a_{23} \times a_{14} \\ = {} & a_{14} \times a_{23} \times a_{31} \times a_{42} \quad \text{où on a réordonné suivant le premier indice} \\ = {} & a_{1,\sigma^{-1}(1)} \times a_{2,\sigma^{-1}(2)} \times a_{3,\sigma^{-1}(3)} \times a_{4,\sigma^{-1}(4)} \end{aligned}$$

car $\sigma^{-1}(1) = 4$, $\sigma^{-1}(2) = 3$, $\sigma^{-1}(3) = 1$ et $\sigma^{-1}(4) = 2$.

11.1.5 Développement d'un déterminant suivant une colonne ou une ligne

Soient A une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$ et i, j deux éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant dans A la i-ième ligne et la j-ième colonne. Par exemple, si

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$\Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2,2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{3,2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Soient $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$. Son déterminant est donné par

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij} \right)$$

où l'indice j prend une valeur quelconque entre 1 et n. On dit que l'on a développé le déterminant suivant la j-ième colonne. Afin d'alléger l'exposé, nous décidons de ne pas démontrer ce résultat.[8] Pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, Δ_{ij} s'appelle le *mineur de a_{ij} dans* A et le produit $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le *cofacteur de a_{ij} dans* A.

Ainsi, un déterminant d'ordre n se décompose en une combinaison linéaire de n déterminants d'ordre $n - 1$, ces derniers se décomposant chacun en une combinaison linéaire de $n - 1$ déterminants d'ordre $n - 2$, et ainsi de suite jusqu'à s'être ramené à l'ordre 3. À ce niveau-là, on a le choix entre

- calculer directement chacun des déterminants d'ordre 3 en utilisant la règle de Sarrus,[9]
- ou développer chacun des déterminants d'ordre 3 par rapport à une ligne ou à une colonne pour faire apparaître une combinaison linéaire de déterminants d'ordre 2.

Nous insistons sur le fait que le calcul d'un déterminant est indépendant du choix de la colonne par rapport à laquelle on effectue le développement. Ainsi, on développera de préférence par rapport à la colonne comportant le moins de termes non nuls. Par exemple, en utilisant un développement par rapport à la première colonne ($j = 1$),

$$\begin{vmatrix} 2^{(+)} & 0 & 0 \\ 5^{(-)} & -1 & 2 \\ 3^{(+)} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{= \Delta_{1,1}} - 5 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{= \Delta_{2,1}} + 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{= \Delta_{3,1}} = -2$$

---

[8] Vous en trouverez une démonstration dans l'ouvrage : *Algèbre I*, J.-M. Monier, Collection J'intègre (Dunod, 2000).

[9] Rappelons que la règle de Sarrus n'est valable que pour les déterminants d'ordre 3. Elle ne peut donc être généralisée pour $n \geqslant 4$.

car $\Delta_{1,1} = (-1) \times 1 - 0 \times 2 = -1$ et $\Delta_{2,1} = \Delta_{3,1} = 0$. Il est à noter la présence symbolique du signe de $(-1)^{i+j}$ (où i est l'indice de la ligne et j celui de la colonne correspondant au coefficient considéré) en exposant de chacun des termes de la j-ième colonne par rapport à laquelle on choisit de développer. Cela aide à ne pas les oublier lorsque l'on développe ! On peut aussi (ce qui est préférable) choisir de développer par rapport à la deuxième colonne ($j = 2$) :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0^{(-)} & 0 \\ 5 & -1^{(+)} & 2 \\ 3 & 0^{(-)} & 1 \end{vmatrix} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{=\Delta_{2,2}} = -2$$

car $\Delta_{2,2} = 2 \times 1 - 3 \times 0 = 2$. Puisque le déterminant d'une matrice et celui de sa matrice transposée sont égaux (voir la proposition 11.4, page 507), on peut aussi développer le déterminant suivant n'importe quelle ligne. Le calcul est alors indépendant du choix de la ligne. Par exemple, en développant par rapport à la deuxième ligne ($i = 2$),

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5^{(-)} & -1^{(+)} & 2^{(-)} \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=\Delta_{2,1}} - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{=\Delta_{2,2}} - 2\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}_{=\Delta_{2,3}} = -2$$

car $\Delta_{2,1} = \Delta_{2,3} = 0$ et $\Delta_{2,2} = 2$, ou encore en développant par rapport à la première ligne ($i = 1$),

$$\begin{vmatrix} 2^{(+)} & 0^{(-)} & 0^{(+)} \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=\Delta_{1,1}} = -2$$

car $\Delta_{1,1} = -1$.

Déterminant d'une matrice triangulaire

La formule de récurrence d'un déterminant nous donne immédiatement l'expression du déterminant d'une matrice triangulaire.

> **PROPOSITION 11.5** *Le déterminant d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) est égal au produit de ses coefficients diagonaux.*

Démonstration Rappelons que si une matrice est triangulaire supérieure, alors sa transposée est une matrice triangulaire inférieure. Le déterminant d'une matrice et celui de sa transposée étant égaux, nous n'effectuons la démonstration que dans le cas d'une matrice triangulaire supérieure. Démontrons la propriété en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'ordre n. Il est clair que la propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie à l'ordre $n - 1$ (c'est notre hypothèse de récurrence) et montrons qu'elle est vraie à l'ordre n. Soit $\mathrm{T} = (t_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure d'ordre n :

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la n-ième ligne, on obtient :

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{2n} t_{nn} \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & & t_{1,n-1} \\ 0 & t_{22} & & t_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n-1,n-1} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Or, $(-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1$. Utilisons à présent notre hypothèse de récurrence. Elle s'écrit :

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & & t_{1,n-1} \\ 0 & t_{22} & & t_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n-1} t_{ii}. \tag{23}$$

En injectant (23) dans (22), on obtient :

$$\det(\mathrm{T}) = t_{nn} \prod_{i=1}^{n-1} t_{ii},$$

c'est-à-dire : $\det(\mathrm{T}) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$, ce qui termine la récurrence sur n. □

On déduit immédiatement des deux propositions 11.2 et 11.5 la caractérisation suivante.

COROLLAIRE 11.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) soit inversible est que ses coefficients diagonaux soient tous non nuls.*

11.1.6 Propriétés des déterminants

Chacune des propriétés que nous énonçons dans ce paragraphe se justifie en considérant le déterminant comme une forme multilinéaire alternée. Pour bien les assimiler, nous conseillons de les vérifier sur un déterminant d'ordre 2 ou sur un déterminant d'ordre 3. Rappelons que le déterminant d'une matrice et celui de sa matrice transposée sont égaux. Par conséquent, toute propriété énoncée par rapport aux colonnes reste valable si elle est énoncée par rapport aux lignes. Il nous semble plus approprié d'énoncer chacune des propriétés du déterminant par rapport aux rangées, englobant ainsi lignes et colonnes.

- PROPRIÉTÉ 1 : si tous les éléments d'une même rangée sont nuls alors le déterminant est nul.
- PROPRIÉTÉ 2 : si l'on permute deux rangées du même type (ligne ou colonne) alors le déterminant change de signe.
- PROPRIÉTÉ 3 : si l'on multiplie par $\alpha \in \mathbb{K}$ tous les éléments d'une même rangée alors le déterminant est multiplié par α. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 3 \times (-1).$$

En particulier, si toutes les rangées d'une matrice d'ordre n sont multipliées par le même scalaire α alors son déterminant est multiplié par α^n. Autrement dit, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det(\alpha \mathrm{A}) = \alpha^n \det(\mathrm{A}).$$

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 4^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4^3 \times 7.$$

- PROPRIÉTÉ 4 : si une rangée s'écrit comme une combinaison linéaire des autres rangées du même type alors son déterminant est nul. En particulier, si deux rangées parallèles sont égales alors le déterminant est nul.
- PROPRIÉTÉ 5 : le déterminant ne change pas lorsque l'on ajoute à une rangée une combinaison linéaire des rangées du même type, à l'exception de la rangée considérée.

Les propriétés du déterminant que nous venons d'énoncer sont très utiles dans les calculs. En effet, avant de procéder au développement par rapport à une colonne ou à une ligne, on a souvent intérêt à faire apparaître le plus de zéros sur la ligne ou la colonne par rapport à laquelle on a choisi de développer.

Exemples

1. Calculons le déterminant D_1 suivant :

$$D_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{1+\mathrm{i}}{3} & \dfrac{1-2\mathrm{i}}{3} & \dfrac{1+\mathrm{i}}{3} \\ \dfrac{1-2\mathrm{i}}{3} & \dfrac{1+\mathrm{i}}{3} & \dfrac{1+\mathrm{i}}{3} \\ \dfrac{1+\mathrm{i}}{3} & \dfrac{1+\mathrm{i}}{3} & \dfrac{1-2\mathrm{i}}{3} \end{vmatrix}$$

où $\mathrm{i}^2 = -1$. Toutes les lignes étant multipliées par $1/3$, on en déduit

$$D_1 = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 1+\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \end{vmatrix}.$$

En retranchant la colonne 1 aux colonnes 2 et 3, on obtient

$$D_1 = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 1+\mathrm{i} & -3\mathrm{i} & 0 \\ 1-2\mathrm{i} & 3\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 0 & -3\mathrm{i} \end{vmatrix}.$$

Puis, en additionnant la ligne 3 à la ligne 2, il vient

$$D_1 = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 1+\mathrm{i} & -3\mathrm{i} & 0 \\ 2-\mathrm{i} & 3\mathrm{i} & 0 \\ 1+\mathrm{i} & 0 & -3\mathrm{i} \end{vmatrix}.$$

Enfin, en développant par rapport à la dernière colonne, on trouve

$$D_1 = -\frac{3\mathrm{i}}{27}\begin{vmatrix} 1+\mathrm{i} & -3\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{vmatrix} = 1$$

car $\begin{vmatrix} 1+\mathrm{i} & -3\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{vmatrix} = 9\mathrm{i}.$

2. Calculons à présent le déterminant D_2 suivant :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{vmatrix}$$

où $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. En additionnant les colonnes 1 et 2 à la troisième colonne, et en tenant compte de l'égalité $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$, il vient

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & \mathrm{j} & 0 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

d'où, en développant par rapport à la troisième colonne,

$$D_2 = 3\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{j} \\ 1 & \mathrm{j}^2 \end{vmatrix} = 3\mathrm{j}(\mathrm{j}-1).$$

EXERCICE 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants d'ordre n suivants :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & & n \\ n & 2 & n & & n \\ n & n & 3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ n & n & & n & n \end{vmatrix}.$$

Application au calcul du rang d'une matrice rectangulaire

Nous donnons dans ce paragraphe une méthode de calcul du rang d'une matrice rectangulaire, basée sur la théorie des déterminants.

DÉFINITION 11.8 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On appelle déterminant d'ordre k extrait de* A *tout déterminant d'une matrice carrée d'ordre k déduite de* A *par suppression de $n-k$ lignes et de $p-k$ colonnes.*

En particulier, une matrice carrée déduite de A par suppression de $n-1$ lignes et de $p-1$ colonnes est d'ordre 1. On l'identifie alors à un scalaire et on rappelle que son déterminant est égal au scalaire lui-même.

Le résultat suivant peut s'avérer très utile en pratique.

PROPOSITION 11.6 *Soit* A *une matrice non nulle de* $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Le rang de* A *est le plus grand entier ρ tel qu'il existe un déterminant non nul d'ordre ρ extrait de* A.

Démonstration Pour une démonstration, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage : *Algèbre I*, J.-M. Monier, Collection J'intègre (Dunod, 2000). □

Calculons par exemple le rang de la matrice rectangulaire 4×3 suivante :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son rang est au moins égal à deux puisqu'il existe (au moins) une matrice extraite d'ordre 2 dont le déterminant est non nul. Par exemple, la matrice obtenue à partir de A par suppression des deux dernières lignes et de la dernière colonne convient car

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Examinons à présent les déterminants d'ordre 3 extraits de A. Intéressons-nous d'abord à la matrice extraite correspondant aux trois premières lignes de A. Son déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit en effet de remarquer que la dernière ligne est égale à la somme des deux autres lignes. En revanche, la matrice extraite obtenue en supprimant la première ligne a un déterminant non nul :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

On a donc exhibé un déterminant non nul d'ordre 3 extrait de A. Il est clair qu'on ne peut pas extraire de déterminant d'ordre supérieur à 3 (puisque la matrice est de type $(4, 3)$). On conclut donc que le rang de A est égal à 3. On peut vérifier que la méthode des zéros échelonnés confirme ce résultat.

11.2 Généralités sur les systèmes d'équations linéaires

11.2.1 Définition

Commençons par la définition générale d'un système linéaire.

DÉFINITION 11.9 *Soient n et p deux entiers naturels non nuls.*

✗ *On appelle système linéaire de n équations à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ (on dit aussi un système linéaire de type (n,p) ou $n \times p$) un système d'équations de la forme :*

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

où les inconnues sont les scalaires x_1, x_2, $\ldots$, x_p de $\mathbb{K}$ et où les données sont les scalaires a_{ij} de $\mathbb{K}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ (appelés coefficients du système linéaire) et les scalaires b_i de $\mathbb{K}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ (appelés seconds membres du système linéaire).

✗ *On appelle solution du système linéaire tout p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ qui vérifie les n équations du système précédent.*

✗ *Un système linéaire est dit homogène si tous les seconds membres sont nuls.*

Un système linéaire peut avoir plus d'équations que d'inconnues (c'est le cas si $n > p$; le système est alors dit surabondant), moins d'équations que d'inconnues (c'est le cas si $n < p$; le système est alors dit sousabondant), autant d'équations que d'inconnues (c'est le cas si $n = p$).

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble de tous les p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations du système linéaire (S). Il vérifie :

$$\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$$

où, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{H}_i$ est le sous-ensemble de $\mathbb{K}^p$ défini par

$$\mathcal{H}_i \overset{déf.}{=} \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p \;\middle|\; a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p = b_i \right\}.$$

Il est à noter que, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{H}_i$ n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ puisqu'il ne contient pas le vecteur nul, sauf si $b_i = 0$.[10]

Comme nous le verrons, un système linéaire de type (n, p) peut, soit ne posséder aucune solution, soit en posséder une seule, soit en posséder une infinité, et il n'y a pas d'autres alternatives.[11] Ce n'est pas parce qu'un système linéaire possède autant d'équations que d'inconnues qu'il possède nécessairement une solution. Le « bon » critère porte non pas sur la taille du système linéaire mais sur son rang (le rang d'un système linéaire sera défini au § 11.2.3). Néanmoins, remarquons dès à présent qu'un système linéaire homogène de type (n, p) admet toujours pour solution le vecteur $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^p$, qualifié de *solution banale* ou *solution triviale*, et ce quelles que soient les valeurs prises par n et p.

DÉFINITION 11.10 ✗ *On dit que deux systèmes linéaires sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

✗ *Un système linéaire est dit déterminé (respectivement indéterminé) lorsqu'il possède une unique solution (resp. une infinité de solutions).*

11.2.2 Interprétation matricielle

Il est commode d'écrire un système linéaire de type (n, p) sous la forme d'une équation matricielle. Pour cela, considérons la matrice rectangulaire $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et les matrices-colonnes $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définies par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{np} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Le système linéaire (S) s'écrit sous la forme d'une équation matricielle (équivalente au système) :

$$\text{(EM)} \quad \mathrm{AX} = \mathrm{B}$$

où les données sont la matrice rectangulaire $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et la matrice-colonne $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et où l'inconnue est la matrice-colonne $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Par conséquent, il est équivalent de résoudre le système linéaire (S) ou de résoudre l'équation matricielle (EM). Dans ce cas, il s'agit de déterminer toutes les matrices-colonnes X de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vérifiant (EM).

---

[10] Les sous-ensembles $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$ sont qualifiés de sous-espace affine de dimension $p-1$ (on dit aussi hyperplan affine). Il sera établi plus loin, qu'à l'instar des sous-ensembles $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\ldots$, $\mathcal{H}_n$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système linéaire ne possède pas de structure de sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, sauf dans le cas particulier où tous les seconds membres sont nuls.

[11] Lorsque l'application n'est pas linéaire, il y a d'autres alternatives. Par exemple, l'équation $x^2 = 4$ possède deux solutions réelles distinctes, à savoir 2 et -2. L'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas linéaire.

Remarque En notant C_1, C_2, ..., C_p les colonnes de la matrice A (ce sont des éléments de $M_{n,1}(\mathbb{K})$), le système linéaire (S) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$(EM') \quad x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_pC_p = B.$$

Nous utiliserons parfois cette écriture.

DÉFINITION 11.11 *Un système d'équation matricielle* $AX = B$ *avec* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ *et* $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ *est dit rectangulaire. En particulier, il est dit*

- *échelonné si la matrice* A *est échelonnée,*
- *carré si la matrice* A *est carrée,*
- *triangulaire si la matrice* A *est triangulaire,*
- *diagonal si la matrice* A *est diagonale.*

11.2.3 Interprétation vectorielle

Pour discuter de l'existence de solutions à l'équation matricielle (EM), nous allons réécrire cette dernière sous la forme d'une équation vectorielle.

Équation vectorielle équivalente

On sait qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ admettant $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ pour matrice associée relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$. Nous l'avons appelée application canoniquement associée à A. Soient $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ et $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$. Le système linéaire (S) et l'équation matricielle (EM) sont alors équivalents à l'équation vectorielle suivante :

$$(EV) \quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

où l'application linéaire $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et le vecteur $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$ sont les données du problème, et le vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^p$ l'inconnue du problème. Ainsi, il est équivalent de résoudre le système linéaire (S) ou de résoudre l'équation vectorielle (EV). Il s'agit par conséquent de trouver tous les vecteurs $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{K}^p$ qui vérifient (EV). L'ensemble des solutions s'écrit

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^p \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\}.$$

Remarque En notant $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$, l'équation vectorielle (EV) s'écrit :

$$(EV') \quad x_1\boldsymbol{c}_1 + x_2\boldsymbol{c}_2 + \ldots + x_p\boldsymbol{c}_p = \boldsymbol{b}$$

où $\boldsymbol{c}_1 = f(\boldsymbol{e}_1)$, $\boldsymbol{c}_2 = f(\boldsymbol{e}_2)$, ..., $\boldsymbol{c}_p = f(\boldsymbol{e}_p)$. Les vecteurs $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, ..., $\boldsymbol{c}_p$ sont les vecteurs dont les matrices de coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sont C_1, C_2, ..., C_p. Ainsi, (EV′) est la version vectorielle de l'égalité matricielle (EM′). Résoudre (EV), ou de manière équivalente résoudre (EV′), revient donc à chercher si le vecteur $\boldsymbol{b}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p$, et, le cas échéant, à trouver toutes les combinaisons linéaires possibles auquelles $\boldsymbol{b}$ est égal.

Discussion sur l'ensemble des solutions

Nous allons maintenant chercher à caractériser l'ensemble $\mathcal{S}$. Est-il vide ? S'il ne l'est pas, possède-t-il un ou plusieurs éléments ?

Remarquons sans attendre que si le second membre $\boldsymbol{b}$ est nul (l'équation (EV) est dite homogène) alors

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^p \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_{\mathbb{K}^n}\} = \operatorname{Ker} f.$$

Le noyau d'une application linéaire n'étant jamais vide (il contient toujours le vecteur nul de l'ensemble de départ, ici de $\mathbb{K}^p$), une équation linéaire homogène n'est jamais impossible. Elle admet toujours $\boldsymbol{0}_{\mathbb{K}^p}$ pour solution.

Remarquons aussi que lorsque $\boldsymbol{b}$ est nul, l'ensemble $\mathcal{S}$ constitue un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ (puisque $\mathcal{S}$ est le noyau de f). En revanche, $\mathcal{S}$ ne possède pas de structure de sous-espace vectoriel lorsque $\boldsymbol{b}$ est non nul. Pour s'en convaincre, considérons deux vecteurs $\boldsymbol{w}_1$ et $\boldsymbol{w}_2$ de $\mathcal{S}$ et vérifions que leur somme n'appartient pas à $\mathcal{S}$. Puisque $\boldsymbol{w}_1 \in \mathcal{S}$ et $\boldsymbol{w}_2 \in \mathcal{S}$, on a : $f(\boldsymbol{w}_1) = f(\boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{b}$. D'où, utilisant aussi la linéarité de f,

$$f(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \underbrace{f(\boldsymbol{w}_1)}_{=\boldsymbol{b}} + \underbrace{f(\boldsymbol{w}_2)}_{=\boldsymbol{b}} = 2\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b}$$

lorsque $\boldsymbol{b}$ est non nul.

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 11.7 *Soient f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, $\boldsymbol{b}$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^p \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\}$.*

- *Si $\boldsymbol{b} \notin \operatorname{Im} f$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$;*
- *Si $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$ alors $\mathcal{S} = \{\widetilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f\}$ où $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ désigne une solution particulière de (EV), c'est-à-dire $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{K}^p$ tel que $f(\widetilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{b}$.*

Démonstration Il est clair que si $\boldsymbol{b} \notin \operatorname{Im} f$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$ et (EV) est impossible (voir page 39). Supposons à présent $\boldsymbol{b}$ dans $\operatorname{Im} f$. Cela signifie qu'il existe au moins un vecteur appartenant à $\mathbb{K}^p$, notons-le $\widetilde{\boldsymbol{x}}$, tel que $f(\widetilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{b}$. On a alors : $\mathcal{S} \neq \emptyset$ (puisque $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$). (EV) est possible. Montrons maintenant que les deux ensembles $\mathcal{S}$ et $\{\widetilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f\}$ sont égaux. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$. Raisonnons par équivalence. On a :

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \iff f(\boldsymbol{x}) = f(\widetilde{\boldsymbol{x}}) \iff f(\boldsymbol{x} - \widetilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}_{\mathbb{K}^n}.$$

Ainsi, l'appartenance de $\boldsymbol{x}$ à $\mathcal{S}$ est équivalente à l'existence d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\operatorname{Ker} f$ tel que $\boldsymbol{x} - \widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}$, c'est-à-dire tel que $\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v}$, ce qui termine la démonstration. □

Précisons ce résultat. Dans le cas où $\boldsymbol{b}$ appartient à l'image de f, la connaissance d'une solution particulière (le vecteur $\widetilde{\boldsymbol{x}}$) de (EV) d'une part, et du noyau de f d'autre part, permet de reconstruire toutes les solutions de (EV). La dimension de $\operatorname{Ker} f$ s'obtient grâce au théorème du rang appliqué à f :

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^p) = \operatorname{rg} f + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f)\,.$$

D'où, en notant $r \overset{not.}{=} \operatorname{rg} f$,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = p - r.$$

Supposons qu'il existe une solution $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ à (EV).

- Si $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = 0$, autrement dit si le noyau de f est réduit au vecteur nul, alors le vecteur $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ est l'unique solution de (EV). En effet, si $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}^p}\}$ alors, d'après la proposition 11.7,

$$\mathcal{S} = \left\{\widetilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}^p}\}\right\} = \left\{\widetilde{\boldsymbol{x}} + \mathbf{0}_{\mathbb{K}^p}\right\} = \left\{\widetilde{\boldsymbol{x}}\right\}.$$

  Le système linéaire (S), équivalent à (EV), est donc déterminé.

- Si maintenant $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) \geqslant 1$ alors (EV) possède une infinité de solutions. En effet, si $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{p-r}$ désignent les vecteurs d'une base de $\operatorname{Ker} f$, alors, d'après la proposition 11.7, pour tout vecteur $\boldsymbol{w}$ de $\mathcal{S}$, il existe un unique $(p-r)$-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-r})$ de $\mathbb{K}^{p-r}$ tel que

$$\boldsymbol{w} = \widetilde{\boldsymbol{x}} + \underbrace{\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_{p-r}\boldsymbol{v}_{p-r}}_{= \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f}\,.$$

  La forme générale d'une solution dépend donc de $p - r$ scalaire(s) qui sont les coordonnées $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-r}$ d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\operatorname{Ker} f$ dans une base du même sous-espace $\operatorname{Ker} f$. Dans ce cas, le système linéaire (S), équivalent à (EV), est indéterminé.

En résumé, l'équation vectorielle $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ peut ne posséder aucune solution (c'est le cas si $\boldsymbol{b} \notin \operatorname{Im} f$), posséder une solution unique (c'est le cas si $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = 0$), posséder une infinité de solutions (c'est le cas si $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) \geqslant 1$) et il n'y a pas d'autres cas de figure.

Il est à noter l'importance dans notre discussion des deux sous-espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$. En pratique, ce n'est pas tant ces deux espaces qui nous intéressent mais plutôt leurs dimensions. Définissons à présent le rang d'un système linéaire.

DÉFINITION 11.12 *On appelle rang d'un système linéaire le rang de toute matrice qui lui est associée (ou de manière équivalente celui de toute application linéaire associée).*

Comment savoir si $b \in \operatorname{Im} f$ sans expliciter complètement $\operatorname{Im} f$?

Considérons la base canonique $\mathcal{B}_c$ de l'espace de départ $\mathbb{K}^p$. On rappelle que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ est engendré par $f(\mathcal{B}_c)$. Ainsi, l'appartenance de $\boldsymbol{b}$ à $\operatorname{Im} f$ signifie que la sur-famille $(f(\mathcal{B}_c), \boldsymbol{b})$ est liée. En pratique, cela revient à vérifier que le rang de la sur-famille $(f(\mathcal{B}_c), \boldsymbol{b})$ est égal à celui de la famille $f(\mathcal{B}_c)$. Par conséquent, si $\mathcal{B}_c = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ alors une condition nécessaire et suffisante pour que $\boldsymbol{b}$ appartienne à $\operatorname{Im} f$ est que

$$\operatorname{rg}\big(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p), \boldsymbol{b}\big) = \operatorname{rg}\big(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)\big).$$

Exemple Soit $m \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre le système réel 3×3

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & m \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

et l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'équation vectorielle associée s'écrit $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ où $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\boldsymbol{b} = (m, 2, 3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et où f est l'application linéaire qui au vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$\boldsymbol{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3).$$

C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Nous l'avons déjà étudié au chapitre 9 (voir page 386). Son image est engendrée par les trois vecteurs $\boldsymbol{c}_1 = f((1,0,0)) = (1,0,1)$, $\boldsymbol{c}_2 = f((0,1,0)) = (1,1,2)$ et $\boldsymbol{c}_3 = f((0,0,1)) = (0,1,1)$. Ces trois vecteurs forment une famille liée puisque $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_3$. On vérifie sans peine que deux des trois vecteurs, par exemple $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_3$, forment une famille libre. On a donc $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) = 2$. De plus, il est aisé de vérifier (en utilisant par exemple la méthode des zéros échelonnés) que $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{b}) = 3$ si $m \neq 1$ et $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{b}) = 2$ si $m = 1$. Par conséquent,

- si $m \neq 1$ alors $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{b}) \neq \operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$, d'où $\boldsymbol{b} \notin \operatorname{Im} f$;
- si $m = 1$ alors $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{b}) = \operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$, d'où $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$.

Vérifions ces résultats. L'image de f est nécessairement un plan vectoriel puisque c'est un sous-espace de dimension 2. Nous avons déjà établi (voir page 386) que

$$\operatorname{Im} f = \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 - y_1 - y_2 = 0\right\}.$$

Il est alors très facile de savoir si le vecteur $\boldsymbol{b}$ appartient à $\operatorname{Im} f$. En effet, $(b_1, b_2, b_3) \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si, $b_3 - b_1 - b_2 = 0$. On retrouve alors que l'unique valeur de m pour laquelle $(m, 2, 3)$ appartient à $\operatorname{Im} f$ est $m = 1$. La figure 3 résume la situation. À gauche est représenté le cas $m \neq 1$ et à droite le cas $m = 1$.

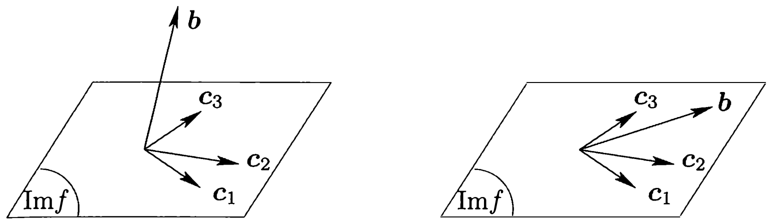


Fig. 3 Illustration de « $b \notin \operatorname{Im} f$ » (dessin de gauche) et de « $b \in \operatorname{Im} f$ » (dessin de droite).

11.3 Résolution d'un système de Cramer

En préambule à l'étude générale des systèmes linéaires que nous effectuerons au paragraphe 11.4, nous nous intéressons ici à l'étude de systèmes linéaires particuliers, les systèmes de Cramer. Comme nous nous en rendrons compte au paragraphe 11.4.3, l'étude de tels systèmes linéaires est primordiale puisque, dans le cas général, nous essaierons de nous y ramener (ce qui constituera une étape essentielle de la méthode d'élimination de Gauss).

11.3.1 Définition

DÉFINITION 11.13 *Un système linéaire de n équations à p inconnues est dit de Cramer s'il possède autant d'équations que d'inconnues (c'est-à-dire si $n = p$) et si le rang r du système vérifie : $r = n = p$. Un système de Cramer est aussi appelé système régulier.*

Un système de Cramer est donc un système carré dont la matrice associée est inversible. Avec les notations utilisées, un système de Cramer s'écrit :

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

et il vérifie :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Interprétations vectorielle et matricielle :

– D'un point de vue vectoriel, un système linéaire est de Cramer si et seulement si, l'application f canoniquement associée à ce système est bijective. Par conséquent, pour tout vecteur $\boldsymbol{b}$ appartenant à $\mathbb{K}^n$, il existe une unique solution à l'équation vectorielle (EV). C'est le vecteur de $\mathbb{K}^n$ que nous avons noté $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ dans la proposition 11.7. La surjectivité de f nous assure l'existence de ce vecteur et l'injectivité de f nous assure son unicité puisque le noyau de f est réduit au vecteur nul de $\mathbb{K}^n$. Le vecteur $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ de $\mathbb{K}^n$ s'obtient en appliquant l'application (linéaire) réciproque f^{-1} à l'égalité vectorielle (EV). On a :

$$f(\widetilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(f(\widetilde{\boldsymbol{x}})) = f^{-1}(\boldsymbol{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{\boldsymbol{x}} = f^{-1}(\boldsymbol{b}).$$

– D'un point de vue matriciel, dire qu'un système linéaire est de Cramer signifie que sa matrice associée est une matrice carrée inversible. L'équation matricielle (EM) possède une unique solution. Nous la notons $\widetilde{\mathrm{X}}$. C'est la matrice-colonne composée des coordonnées du vecteur $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Elle s'obtient en multipliant à gauche les deux membres de (EM) par la matrice A^{-1} (qui existe puisque A est inversible). On a :

$$\mathrm{A}\widetilde{\mathrm{X}} = \mathrm{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}\widetilde{\mathrm{X}} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{\mathrm{X}} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}.$$

On a ainsi démontré de deux manières différentes le résultat d'existence et d'unicité suivant.

PROPOSITION 11.8 *Un système de Cramer possède une solution et une seule.*

11.3.2 Les formules de Cramer

Il existe des formules donnant chacune des coordonnées de l'unique solution d'un système de Cramer en fonction des coefficients de ce système. Elles sont données ci-dessous.

PROPOSITION 11.9 (Formules de Cramer)
Les coordonnées $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$, …, $\widetilde{x}_n$ de l'unique solution d'un système de Cramer d'équation matricielle $\mathrm{A}\widetilde{\mathrm{X}} = \mathrm{B}$, sont données par

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \widetilde{x}_j = \frac{\det\left(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{j-1}, \mathrm{B}, \mathrm{C}_{j+1}, \ldots, \mathrm{C}_n\right)}{\det(\mathrm{A})}$$

où C_1, C_2, …, C_n représentent les n colonnes de la matrice A et où le numérateur est le déterminant de la matrice déduite de A en remplaçant la j-ième colonne C_j par la matrice-colonne B.

Démonstration On commence par écrire l'équation matricielle $\mathrm{A}\widetilde{\mathrm{X}} = \mathrm{B}$ sous la forme matricielle équivalente :

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{x}_k \mathrm{C}_k = \mathrm{B}$$

où les matrices-colonnes C_1, C_2, ..., C_n, appartenant toutes à $M_{n,1}(\mathbb{K})$, désignent les n colonnes de la matrice A. Soit $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On a :

$$\begin{aligned}&\det(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n)\\ &= \det(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, \sum_{k=1}^{n} \widetilde{x}_k C_k, C_{j+1}, \ldots, C_n).\end{aligned}$$

En utilisant alors la propriété de linéarité du déterminant par rapport à sa j-ième colonne, on obtient :

$$\begin{aligned}&\det(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \widetilde{x}_k \det(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, C_k, C_{j+1}, \ldots, C_n).\end{aligned} \tag{24}$$

Il apparaît ainsi une somme de n déterminants à droite de l'égalité. Remarquons que dans $n-1$ déterminants, la matrice-colonne C_k, $k \neq j$, y est répétée deux fois. Le déterminant étant une forme alternée, il ne reste dans la somme que le terme $\widetilde{x}_j \det(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n)$ correspondant à l'indice $k = j$, les autres étant nuls. Ainsi, (24) se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned}&\det(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n)\\ &= \widetilde{x}_j \det(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n).\end{aligned} \tag{25}$$

On remarque que $\det(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n)$ est le déterminant de la matrice A. Il est bien évidemment non nul puisque, f étant bijective, la matrice A est inversible. On déduit alors de (25) la relation suivante :

$$\widetilde{x}_j = \frac{\det(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n)}{\det(A)},$$

ce qui termine la démonstration. □

CRAMER, Gabriel (1704, Genève (Suisse) - 1752, Bagnols-sur-Cèze (France)).

Il a été Professeur de mathématiques et de philosophie à Genève. Dans son article *Introduction to the analysis of algebraic curves* publié en 1750, Cramer a été le premier à énoncer une règle générale permettant le calcul des solutions d'un système linéaire $n \times n$, règle qui est à l'origine des formules qui portent son nom. S'il l'illustre avec soin dans plusieurs cas simples ($n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$), il n'en donne en revanche aucune démonstration dans le cas général.

Les formules données dans la proposition 11.9 sont connues sous le nom de *formules de Cramer*, du nom du mathématicien suisse Gabriel Cramer. L'utilisation de telles formules nécessite le calcul de $n+1$ déterminants. Par conséquent, elles deviennent vite lourdes à manipuler lorsque la taille du système croît. En pratique, les formules de Cramer sont attractives pour un système d'ordre $n = 2$ ou $n = 3$, elles le sont un peu moins pour $n = 4$. Elles sont rédhibitoires pour $n \geqslant 5$.

Une méthode beaucoup plus utilisée que les formules de Cramer pour la résolution d'un système linéaire est la méthode d'élimination de Gauss. Elle sera présentée plus loin (voir page 527).

Exemples

1. Considérons dans $\mathbb{R}$ le système 3×3 suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & & & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{où} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

C'est un système de Cramer. Les coordonnées $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3$ de son unique solution sont données par

$$\widetilde{x}_1 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5, \quad \widetilde{x}_2 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\widetilde{x}_3 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

On a donc $\mathcal{S} = \{(5, 3, 4)\}$.

2. Soit $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Considérons dans $\mathbb{C}$ le système 3×3 suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & \mathrm{j} \\ x_1 & + & \mathrm{j}x_2 & + & \mathrm{j}^2x_3 & = & \mathrm{j} \\ x_1 & + & \mathrm{j}^2x_2 & + & \mathrm{j}x_3 & = & \mathrm{j} \end{array}\right. \quad \text{où} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{vmatrix} = 3\mathrm{j}(\mathrm{j}-1) \neq 0.$$

C'est aussi un système de Cramer. Son unique solution $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)$ appartient à $\mathbb{C}^3$. On obtient :

$$\widetilde{x}_1 = \frac{1}{3\mathrm{j}(\mathrm{j}-1)}\begin{vmatrix} \mathrm{j} & 1 & 1 \\ \mathrm{j} & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{vmatrix} = \frac{1}{3\mathrm{j}(\mathrm{j}-1)}\big(3\mathrm{j}^2(\mathrm{j}-1)\big) = \mathrm{j}.$$

Les valeurs de $\widetilde{x}_2$ et $\widetilde{x}_3$ s'obtiennent plus facilement. En effet,

$$\widetilde{x}_2 = \frac{1}{3\mathrm{j}(\mathrm{j}-1)}\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{j} & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{x}_3 = \frac{1}{3\mathrm{j}(\mathrm{j}-1)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathrm{j} \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j} \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{vmatrix} = 0$$

puisque dans l'expression du déterminant donnant $\widetilde{x}_2$ (respectivement donnant $\widetilde{x}_3$), la deuxième colonne (resp. la troisième colonne) est un multiple de la première colonne. On a donc $\mathcal{S} = \{(\mathrm{j}, 0, 0)\}$.

11.4 Résolution d'un système linéaire

Nous reprenons ici l'étude générale d'un système linéaire de n équations à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$, d'équation matricielle

$$\text{(EM)} \quad \mathrm{AX} = \mathrm{B}.$$

Nous insistons sur le fait que les deux entiers n et p ne sont pas nécessairement égaux. Ainsi, le système considéré pourra être sousabondant (cas où $n < p$) ou surabondant (cas où $n > p$) et, pour ces deux cas, la matrice A sera rectangulaire et les deux matrices-colonnes X, B ne possèderont pas le même nombre de lignes. Le système considéré pourra aussi être carré. Dans ce cas, la matrice A sera elle-même carrée et les deux matrices-colonnes X, B possèderont le même nombre de lignes. Attention, rappelons qu'un système carré n'est pas nécessairement de Cramer. Pour qu'il le soit, il lui reste à vérifier une condition sur son rang (voir la définition 11.13, page 521).

Conformément à ce qui a été fait dans les paragraphes précédents, nous utiliserons souvent l'équivalence entre l'équation matricielle (EM) et l'équation vectorielle

$$\text{(EV)} \quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}.$$

11.4.1 Compatibilité d'un système linéaire

Définition 11.14 *Soient* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. *On note* $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_p$ *les colonnes de la matrice rectangulaire* A. *Le système linéaire d'équation matricielle* $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ *est dit compatible si*

$$\mathrm{rg}(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_p, \mathrm{B}) = \mathrm{rg}(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_p).$$

D'après ce que nous avons déjà vu à la fin du paragraphe 11.2.3, l'interprétation vectorielle que l'on peut donner à un système linéaire compatible est évidente. Si on note $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_p$ les vecteurs de la base canonique de l'espace de départ $\mathbb{K}^p$ alors, pour j variant de 1 à p, la colonne C_j est constituée des coordonnées du vecteur $f(\boldsymbol{e}_j)$ dans la base canonique de l'espace d'arrivée $\mathbb{K}^n$. Dire que le système linéaire d'équation matricielle $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ est compatible revient donc à écrire que

$$\mathrm{rg}\big(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p), \boldsymbol{b}\big) = \mathrm{rg}\big(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)\big),$$

ou, de manière équivalente, que $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\, f$. La propriété de compatibilité du système d'équation matricielle $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ signifie donc que $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\, f$, autrement dit que (EV) est possible. Elle nous assure ainsi l'existence d'au moins une solution.

11.4.2 Le théorème de Rouché-Fontené

Le point de départ à l'étude d'un système linéaire de type (n, p) est le calcul de son rang. Notons-le r. Rappelons que $r \leqslant n$ et $r \leqslant p$. Nous allons considérer successivement les trois cas suivants : $r = n = p$ (cas 1), $r = n < p$ (cas 2) et $r < n$ (cas 3). Rappelons que, d'après le théorème du rang,

$$\dim_{\mathbb{K}} (\operatorname{Ker} f) = p - r.$$

Procédons à l'étude des cas.

- Cas 1 : $r = n = p$.
  Lorsque $r = n = p$, le système linéaire est de Cramer. Ce premier cas a fait l'objet du paragraphe 11.3 dans son intégralité. Quel que soit le vecteur $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{K}^n$, l'équation vectorielle admet une unique solution (voir la proposition 11.8).
- Cas 2 : $r = n < p$.
  Nous considérons maintenant le cas où le rang est égal au nombre des équations ($r = n$) et où le système est sousabondant ($n < p$). Remarquons que le cas où $n = p$, que nous excluons ici, correspond au cas 1 précédent. Du point de vue vectoriel, la condition $r = n$ signifie que

  $$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$$

  ou, de manière équivalente, que $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}^n$ ou encore que f est surjective. Ainsi, quel que soit le vecteur $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{K}^n$, l'équation vectorielle admet non seulement toujours une solution (le système est compatible : $\mathcal{S} \neq \emptyset$) mais, en plus, il y en a une infinité puisque

  $$\dim_{\mathbb{K}} (\operatorname{Ker} f) = p - n > 0.$$

  Une solution est donc un vecteur de $\mathbb{K}^p$ dépendant de $p - n$ paramètre(s).
- Cas 3 : $r < n$.
  Considérons à présent le cas où le rang est strictement inférieur au nombre des équations ($r < n$). Remarquons que pour ce troisième cas, le système peut être surabondant, sousabondant ou même carré. En revenant au point de vue vectoriel, la condition $r < n$ signifie que

  $$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) < \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$$

  ou, de manière équivalente, que $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{K}^n$ avec $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{K}^n$, ou encore que f n'est pas surjective. On ne peut résoudre l'équation vectorielle que si $\boldsymbol{b}$ appartient à $\operatorname{Im} f$. Il faut par conséquent envisager les deux cas suivants.
  - Si $\boldsymbol{b} \notin \operatorname{Im} f$ (c'est-à-dire si le système est incompatible) alors il n'y a pas de solution ($\mathcal{S} = \emptyset$).
  - Si $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$ (c'est-à-dire si le système est compatible) alors il y a au moins une solution et elle dépend de $p - r$ paramètre(s) puisque

    $$\dim_{\mathbb{K}} (\operatorname{Ker} f) = p - r.$$

Cette solution est peut-être l'unique solution (c'est le cas si $p = r$, ce qui signifie que f est injective puisque $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = 0$). Il y en a peut-être une infinité (c'est le cas si $p > r$). Tout dépend donc de la valeur de $p - r$.

On résume ces trois situations dans le théorème suivant.

THÉORÈME 11.1 (de Rouché-Fontené[12])
Considérons un système linéaire (S) *de n équations à p inconnues, à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de rang r. Trois cas sont possibles.*

- *Si $r = n = p$ alors* (S) *est de Cramer. Il admet une unique solution.*
- *Si $r = n < p$ alors* (S) *admet une infinité de solutions et ce quels que soient les seconds membres.*
- *Si $r < n$ alors* (S) *admet au moins une solution si et seulement si, le système est compatible. Dans le cas où* (S) *est compatible, il possède une unique solution lorsque $r = p$; il en possède une infinité lorsque $r < p$.*

Il ressort de ce théorème que le point de départ à l'étude de n'importe quel système linéaire, qu'il soit sousabondant, surabondant ou carré, est le calcul de son rang. Il est à noter que si le théorème de Rouché-Fontené offre l'avantage de donner une vue synthétique pour la résolution d'un système linéaire, il ne nous donne en revanche aucune stratégie pour savoir si un système est compatible ou non, et, le cas échéant, aucune technique pour résoudre ce système. La méthode d'élimination de Gauss, présentée au paragraphe suivant, va remédier à ce manque.

11.4.3 Méthode d'élimination de Gauss

La méthode d'élimination de Gauss (appelée aussi méthode du pivot de Gauss) est une méthode de résolution systématique d'un système linéaire de type (n, p) de la forme

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

d'inconnues les scalaires x_1, x_2, ..., x_p de $\mathbb{K}$. Elle permet une discussion sur l'existence éventuelle d'une solution, suivie, dans le cas où l'existence est établie, d'un calcul de sa forme générale. La méthode se décompose en deux étapes : une première étape dite d'élimination, suivie (éventuellement) d'une seconde étape dite de remontée.

[12] ROUCHÉ, Eugène (1832 - 1910) : mathématicien français, il fut élu à l'Académie des Sciences en 1896. FONTENÉ, Georges (1848 - 1923) : mathématicien français.

GAUSS, Karl Friedrich (1777, Brunswick - 1855, Göttingen).

Illustre mathématicien et physicien, il était surnommé par ses pairs *Prince des mathématiciens.* Son œuvre est considérable. La paternité de la méthode qui porte son nom, revient initialement au mathématicien chinois Liu Hui (200 ans avant notre ère) qui en exposa en quelques phrases les principes dans son livre *Neuf chapitres sur la science du calcul.* Gauss s'en inspira lorsqu'il étudia l'orbite de l'astéroïde Pallas, laquelle étude le conduisit à la résolution d'un système de six équations à six inconnues.

Étape d'élimination

Cette première étape vise à écrire le système linéaire (S), que nous qualifions de système initial, sous une forme échelonnée. Pour y arriver, la manière de procéder est identique à celle de la méthode des zéros échelonnés, à l'exception du fait que nous opérons cette fois-ci directement sur les équations du système. La méthode des zéros échelonnés a été détaillée au chapitre 8. Nous ne la rappelons pas. On désigne par $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n$ les équations du système initial, et par $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_p$ les colonnes de la matrice associée à ce système. Le passage du système initial au système échelonné s'effectue en utilisant les opérations élémentaires suivantes :

- multiplication d'une équation E_k par un scalaire non nul, ce que nous notons $\mathrm{E}_k \longleftarrow \alpha\mathrm{E}_k$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$,
- addition d'un multiple d'une équation $\mathrm{E}_{k'}$ à une autre équation E_k, ce que nous notons $\mathrm{E}_k \longleftarrow \mathrm{E}_k + \alpha\mathrm{E}_{k'}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$,
- échange des équations E_k et $\mathrm{E}_{k'}$, ce que nous notons $\mathrm{E}_k \longleftrightarrow \mathrm{E}_{k'}$, et/ou des colonnes C_k et $\mathrm{C}_{k'}$, ce que nous notons $\mathrm{C}_k \longleftrightarrow \mathrm{C}_{k'}$.

Il est facile de vérifier que le système échelonné est équivalent au système initial. Supposons par exemple que le rang r du système initial soit strictement inférieur au nombre de lignes et au nombre de colonnes. À l'issue de l'étape d'élimination, on aura le système échelonné de type (n, p) suivant :

$$
(\mathrm{S}') \quad \left\{ \begin{array}{rcl}
a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \ldots + a'_{1r}x'_r + \ldots + a'_{1p}x'_p & = & b'_1 \\
a'_{22}x'_2 + \ldots + a'_{2r}x'_r + \ldots + a'_{2p}x'_p & = & b'_2 \\
\ddots \qquad\qquad & & \vdots \\
a'_{rr}x'_r + \ldots + a'_{rp}x'_p & = & b'_r \\
0 & = & b'_{r+1} \\
 & & \vdots \\
0 & = & b'_n
\end{array} \right.
$$

où les scalaires a'_{11}, a'_{22}, ..., a'_{rr} sont tous non nuls et où x'_1, x'_2, ..., x'_p correspondent à une permutation éventuelle des inconnues. Bien sûr, en l'absence de permutation des colonnes, $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$, ..., $x'_p = x_p$. On désigne par E'_1, E'_2, ..., E'_n les équations du nouveau système. Les équations E'_{r+1}, ..., E'_n ne contiennent pas d'inconnue : $0 = b'_{r+1}$, ..., $0 = b'_n$. Elles traduisent la compatibilité ou l'incompatibilité du système.

- Si pour au moins l'une d'entre elles, disons la ℓ-ième où $\ell \in \{r+1, \ldots, n\}$, le scalaire b'_ℓ est non nul alors l'égalité $0 = b'_\ell$ est absurde, ce qui signifie que le système n'est pas compatible. On vérifie en effet que l'on a :

$$\mathrm{rg}(\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \ldots, \mathrm{C}'_p) = r \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \ldots, \mathrm{C}'_p, \mathrm{B}') \geqslant r+1$$

  où C'_1, C'_2, ..., C'_p désignent les colonnes de la matrice associée au système échelonné et où B' désigne le second membre. Il n'y a donc pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$.

- Si $b'_i = 0$ pour tout $i \in \{r+1, \ldots, n\}$ alors les équations E'_{r+1}, ..., E'_n sont toutes triviales (de la forme $0 = 0$), ce qui signifie que le système est compatible puisque l'on a, cette fois-ci :

$$\mathrm{rg}(\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \ldots, \mathrm{C}'_p) = r = \mathrm{rg}(\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \ldots, \mathrm{C}'_p, \mathrm{B}').$$

  Il possède au moins une solution. On sait que la forme générale d'une solution est un vecteur de $\mathbb{K}^p$, dépendant de $p - r$ paramètre(s). Pour l'obtenir, on commence par résoudre le système (S'') de type (r, r) donné ci après, obtenu à partir de (S') en supprimant les équations triviales E'_{r+1}, ..., E'_n (qualifiées de non principales ou de secondaires) et en faisant passer aux seconds membres dans les équations E'_1, E'_2, ..., E'_r (qualifiées de principales) les termes comportant les scalaires x'_{r+1}, ..., x'_p. Le système (S'') s'écrit alors :

$$(\mathrm{S}'') \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \ldots + a'_{1r}x'_r & = & b''_1 \\ a'_{22}x'_2 + \ldots + a'_{2r}x'_r & = & b''_2 \\ \ddots \quad & & \vdots \\ a'_{rr}x'_r & = & b''_r \end{array} \right.$$

  où les scalaires x'_1, x'_2, ..., x'_r sont les inconnues (dites principales) et où les seconds membres b''_1, b''_2, ..., b''_r sont définis comme suit :

$$\begin{array}{rcl} b''_1 & = & b'_1 - \left(a'_{1,r+1}x'_{r+1} + \ldots + a'_{1p}x'_p\right), \\ b''_2 & = & b'_2 - \left(a'_{2,r+1}x'_{r+1} + \ldots + a'_{2p}x'_p\right), \\ & \vdots & \\ b''_r & = & b'_r - \left(a'_{r,r+1}x'_{r+1} + \ldots + a'_{rp}x'_p\right). \end{array}$$

  Les $p - r$ scalaires x'_{r+1}, ..., x'_p apparaissent uniquement dans les seconds membres b''_1, b''_2, ..., b''_r et sont maintenant traités comme des paramètres (ils sont qualifiés d'inconnues non principales). Le système (S'') est de Cramer car

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & & a'_{1r} \\ 0 & a'_{22} & & a'_{2r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a'_{rr} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{r} a'_{ii} \neq 0$$

car $a'_{11} \neq 0, \ldots, a'_{rr} \neq 0$. Il possède donc une unique solution. C'est un vecteur de $\mathbb{K}^r$ dont chacune des coordonnées va dépendre des $p-r$ paramètres $x'_{r+1}, \ldots, x'_p$.

Étape de remontée

Le système (S″) obtenu à l'issue de l'étape d'élimination est un système triangulaire supérieur dont la résolution s'effectue en partant de la dernière équation, puis en remontant jusqu'à la première équation. En effet, de la dernière équation $a'_{rr}x'_r = b''_r$, il vient immédiatement :

$$x'_r = \frac{b''_r}{a'_{rr}}$$

puisque $a'_{rr} \neq 0$. On injecte alors ce résultat dans l'avant-dernière équation

$$a'_{r-1,r-1}x'_{r-1} + a'_{r-1,r}x'_r = b''_{r-1},$$

dont on déduit, puisque $a'_{r-1,r-1} \neq 0$:

$$x'_{r-1} = \frac{b''_{r-1} - a'_{r-1,r}x'_r}{a'_{r-1,r-1}}.$$

En procédant comme cela en remontant jusqu'à la première équation

$$a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + a'_{13}x'_3 + \ldots + a'_{1r}x'_r = b''_1,$$

on obtient finalement, puisque $a'_{11} \neq 0$:

$$x'_1 = \frac{b''_1 - \left(a'_{12}x'_2 + a'_{13}x'_3 + \ldots + a'_{1r}x'_r\right)}{a'_{11}}.$$

À l'issue de cette étape de remontée, les inconnues $x'_1, \ldots, x'_r$ s'expriment en fonction des $p-r$ inconnues $x'_{r+1}, \ldots, x'_p$ que l'on a traitées comme des paramètres.

11.4.4 Illustration avec des exemples

Étude d'un système sousabondant

Considérons dans $\mathbb{R}$ le système linéaire 3×5 suivant :

$$(\mathrm{S}_1) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & - & 6x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & - & 6x_5 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & 8x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

où les inconnues sont les réels x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5. Dans cet exemple, $n=3$ et $p=5$. C'est un système sousabondant (il possède plus d'inconnues que d'équations). Utilisons la méthode d'élimination de Gauss. Remarquons que nous ne nous soucions pas de savoir, *a priori*, dans quel cas du théorème de

Rouché-Fontené nous sommes puisque l'on sait que cela va nous être donné par la méthode d'élimination de Gauss. Néanmoins, nous pouvons remarquer que le système n'étant pas carré, le cas 1 du théorème de Rouché-Fontené est à exclure. En revanche, les cas 2 et 3 sont à envisager.

En effectuant à partir du système linéaire (S_1) les deux opérations élémentaires $\mathrm{E}_2 \longleftarrow \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1$, $\mathrm{E}_3 \longleftarrow \mathrm{E}_3 + \mathrm{E}_1$, puis l'opération élémentaire $\mathrm{E}_3 \longleftarrow \mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_2$, on obtient le système échelonné :

$$(\mathrm{S}_1') \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & - & 6x_5 & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & & & = & 1 \\ & & & & x_3 & & & - & 3x_5 & = & 2 \end{array} \right. .$$

Son rang est égal à 3 ($r = 3$). Nous nous situons donc dans le deuxième cas du théorème de Rouché-Fontené : le système linéaire (S_1) possède une infinité de solutions. La forme générale d'une solution est un vecteur de $\mathbb{R}^5$, dépendant de $p - r = 5 - 3 = 2$ paramètres. Elle s'obtient facilement à partir du système échelonné (S_1') en conservant toutes les équations (elles sont toutes principales), en prenant x_1, x_2, x_3 comme inconnues principales et en faisant passer aux seconds membres les termes comportant les deux inconnues non principales x_4 et x_5, autrement dit en résolvant le système linéaire 3×3 suivant :

$$(\mathrm{S}_1'') \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 - 6x_4 + 6x_5 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 + 2x_4 \\ & & & & x_3 & = & 2 + 3x_5 \end{array} \right.$$

où les inconnues sont maintenant x_1, x_2 et x_3 et où x_4 et x_5 sont traités comme des paramètres. C'est un système de Cramer. Il possède une unique solution. De (S_1'') on a : $x_3 = 2 + 3x_5$, puis $x_2 = -1 + 2x_4 - 3x_5$ et enfin $x_1 = -1 - 3x_5$. Il convient maintenant de revenir à la solution du système (S_1) initial. C'est un vecteur de $\mathbb{R}^5$ de la forme

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1 - 3x_5, -1 + 2x_4 - 3x_5, 2 + 3x_5, x_4, x_5)$$

où chacun des deux paramètres x_4 et x_5 parcourt l'ensemble $\mathbb{R}$. On a :

$$\mathcal{S} = \big\{(-1 - 3x_5, -1 + 2x_4 - 3x_5, 2 + 3x_5, x_4, x_5) \ \text{ avec } \ x_4 \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ x_5 \in \mathbb{R}\big\}.$$

Il y a une infinité de solutions.

Remarque On peut aussi développer l'expression générale d'une solution du système linéaire (S_1) comme suit :

$$\begin{aligned} &(-1 - 3x_5, -1 + 2x_4 - 3x_5, 2 + 3x_5, x_4, x_5) \\ &= (-1, -1, 2, 0, 0) + x_4(0, 2, 0, 1, 0) + x_5(-3, -3, 3, 0, 1), \end{aligned}$$

ce qui permet de réécrire l'ensemble $\mathcal{S}$ sous la forme

$$\mathcal{S} = \big\{\widetilde{x} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f\big\}$$

avec $\widetilde{x} = (-1,-1,2,0,0)$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((0,2,0,1,0),(-3,-3,3,0,1))$. À titre de vérification, on s'assurera que $(-1,-1,2,0,0)$ est bien une solution particulière du système linéaire (S_1) et que $(0,2,0,1,0)$ et $(-3,-3,3,0,1)$ sont bien deux solutions (linéairement indépendantes) du système linéaire homogène associé à (S_1).

Étude d'un système carré

Reprenons l'exemple du système linéaire réel 3×3 dont nous avions étudié l'équation vectorielle au paragraphe 11.2.3 en page 520. Il s'écrit :

$$(\mathrm{S}_2) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & m \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

où les réels x_1, x_2 et x_3 sont les inconnues et où m est un paramètre réel. Dans cet exemple, $n = p = 3$. Le système linéaire (S_2) est un système carré (il possède autant d'équations que d'inconnues), ce qui exclut le cas 2 du théorème de Rouché-Fontené. Nous remarquons que son rang r est au moins égal à deux puisque l'on peut extraire une sous-matrice 2×2 de déterminant non nul (c'est immédiat) et il est facile de vérifier que le rang n'est pas égal à 3 car

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La méthode d'élimination de Gauss va nous confirmer ce résultat. Écrivons (S_2) sous une forme échelonnée. En effectuant à partir du système (S_2) l'opération élémentaire $\mathrm{E}_3 \longleftarrow \mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_1$, puis $\mathrm{E}_3 \longleftarrow \mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_2$, on obtient le système échelonné :

$$(\mathrm{S}'_2) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & m \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 1-m \end{array} \right. .$$

Nous retrouvons que le rang est égal à 2 ($r = 2$). Nous sommes donc dans le troisième cas du théorème de Rouché-Fontené (le rang est strictement inférieur au nombre d'équations). Une condition nécessaire et suffisante pour que le système linéaire (S_2) admette au moins une solution est qu'il soit compatible. La discussion porte alors sur les valeurs du réel m.

- Si $m \neq 1$ alors la dernière égalité du système (S'_2) est absurde, ce qui traduit l'incompatibilité du système. Il n'y a donc pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Si $m = 1$ alors la dernière égalité est triviale $(0 = 0)$ et le système est compatible. Il admet au moins une solution. La forme générale d'une solution dépendant de $p - r = 3 - 2 = 1$ paramètre, il en existe en fait une infinité. Éliminons la troisième équation de (S'_2) et faisons passer aux seconds membres les termes comportant l'unique inconnue non principale x_3 dans les deux premières équations. On obtient le système linéaire 2×2 (c'est un système de Cramer) suivant :

$$(\mathrm{S}''_2) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ & & x_2 & = & 2 - x_3 \end{array} \right.$$

où x_1 et x_2 sont les inconnues et où x_3 est traité comme un paramètre. De (S_2'') on a : $x_2 = 2 - x_3$, puis $x_1 = -1 + x_3$. La solution générale du système linéaire (S_2) est le vecteur de $\mathbb{R}^3$ d'expression $(x_1, x_2, x_3) = (-1 + x_3, 2 - x_3, x_3)$ où x_3 parcourt tout $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est infini. Il s'écrit :

$$\mathcal{S} = \{(-1 + x_3, 2 - x_3, x_3) \text{ avec } x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque Lorsque $m = 1$, l'ensemble des solutions s'écrit aussi :

$$\mathcal{S} = \{\widetilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f\}$$

avec $\widetilde{\boldsymbol{x}} = (-1, 2, 0)$ et $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}(1, -1, 1)$ car

$$(-1 + x_3, 2 - x_3, x_3) = (-1, 2, 0) + x_3(1, -1, 1).$$

Comme pour l'étude du système (S_1), il est, à ce stade-là, fortement conseillé de vérifier que $(-1, 2, 0)$ est bien une solution particulière du système linéaire (S_2) et que $(1, -1, 1)$ est bien une solution du système homogène associé à (S_2).

Étude d'un système surabondant

Considérons dans $\mathbb{R}$ le système linéaire 4×3 suivant :

$$(S_3) \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 11 \end{array}\right.$$

d'inconnues les réels x_1, x_2 et x_3. Dans cet exemple, $n = 4$ et $p = 3$. Le système (S_3) est surabondant (il possède plus d'équations que d'inconnues). Nous sommes assurément dans le cas 3 du théorème de Rouché-Fontené. Il convient donc d'étudier la compatibilité du système pour savoir s'il possède au moins une solution. C'est ce que va nous donner, en autres, la méthode d'élimination de Gauss. Écrivons donc le système linéaire (S_3) sous une forme échelonnée. En effectuant à partir de (S_3) les trois opérations élémentaires $E_2 \longleftarrow E_2 + 2E_1$, $E_3 \longleftarrow E_3 + 3E_1$ et $E_4 \longleftarrow E_4 + 3E_1$, puis les deux opérations $E_3 \longleftarrow E_3 - E_2$ et $E_4 \longleftarrow E_4 - 7E_2$, et enfin $E_4 \longleftrightarrow E_3$, on obtient le système échelonné :

$$(S_3') \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & -7 \\ & & x_2 & - & 11x_3 & = & -10 \\ & & & & 60x_3 & = & 60 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Son rang est 3 $(r = 3)$. Le système est compatible (puisque la dernière équation est de la forme $0 = 0$). Il existe donc au moins une solution et il ne peut en exister d'autres puisque le rang du système est ici égal au nombre des inconnues. Déterminons cette unique solution. On l'obtient en résolvant les trois premières équations du système (S_3'), autrement dit en résolvant le système 3×3 de Cramer suivant :

$$(\mathrm{S}_3'')\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & -7 \\ & & x_2 & - & 11x_3 & = & -10 \\ & & & & 60x_3 & = & 60 \end{array}\right. .$$

On obtient facilement (méthode de remontée) $x_3 = 1$, puis $x_2 = 1$ et enfin $x_1 = 3$. L'ensemble des solutions de (S_3) est donc un singleton. Il s'écrit $\mathcal{S} = \{(3,1,1)\}$. À titre de vérification, on s'assurera que $(3,1,1)$ est bien solution de (S_3).

11.5 Exercices de synthèse

Exercice 2 *Résoudre les systèmes linéaires suivants :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 2 \\ -2x & + & y & & & = & 1 \\ x & - & 3y & + & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ x & + & 11y & - & 5z & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 11y & - & 5z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & & & + & 3z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 4z & = & 7 \end{array}\right.$$

Exercice 3 *Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et V_n le déterminant de Vandermonde (d'ordre $n \geqslant 2$) défini par*

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

1 - Vérifier que, pour tout $n \geqslant 3$,

$$V_n = \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ a_2 & a_3 & & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & & a_n^{n-2} \end{vmatrix} .$$

2 - En déduire que $V_n = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

EXERCICE 4 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le déterminant d'ordre n suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & x & 1+x^2 & x \\ 0 & & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

1 - Montrer que $\Delta_n - \Delta_{n-1} = x^2\big(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}\big)$ pour tout $n \geqslant 3$.

2 - En déduire que $\Delta_n = \Delta_{n-1} + x^{2n}$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Calculer Δ_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 5 *Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m et résoudre les systèmes linéaires réels suivants :*

$$(\mathrm{S}_1) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & mz & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{array} \right. ,$$

$$(\mathrm{S}_2) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 5y & - & 8z & = & 8 \\ 4x & + & 3y & - & 9z & = & 9 \\ 2x & + & 3y & + & mz & = & 7 \\ mx & + & 8y & - & 7z & = & m \end{array} \right.$$

11.6 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Retranchons à la première colonne la somme de toutes les autres colonnes. De cette manière, la première colonne contiendra $n-1$ zéros en dessous de son premier terme :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-n & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) étant égal au produit de ses coefficients diagonaux, on obtient : $\Delta_n = 2-n$. Lorsque $n = 1$, $\Delta_1 = |(1)| = 1$.

2 - Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. En retranchant la dernière colonne aux $n-1$ premières colonnes, on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & & n \\ n & 2 & n & & n \\ n & n & 3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ n & n & & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & & n \\ 0 & 2-n & 0 & & n \\ 0 & 0 & 3-n & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ 0 & 0 & & 0 & n \end{vmatrix}.$$

On en déduit $D_n = (1-n) \times (2-n) \times \cdots \times (-1) \times n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut montrer que $D_n = (-1)^{n-1} n!$. Lorsque $n = 1$, $D_1 = |(1)| = 1$.

Solution de l'exercice 2

1 - La résolution est ici facilitée par la forme triangulaire inférieure du système

$$(\mathrm{S}_1) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 2 \\ -2x & + & y & & & = & 1 \\ x & - & 3y & + & z & = & 3 \end{array} \right. .$$

Le système est carré et son rang est 3 (puisque son déterminant est non nul). Le système est donc de Cramer (on est dans le cas 1 du théorème de Rouché-Fontené) : il y a existence et unicité d'une solution. En injectant $x = 2$ dans la deuxième équation, on obtient : $y = 5$; puis, en injectant $x = 2$ et $y = 5$ dans la troisième, on obtient : $z = 16$. Ainsi, $\mathcal{S} = \{(2, 5, 16)\}$.

2 - Considérons à présent le système linéaire carré :

$$(\mathrm{S}_2) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ x & + & 11y & - & 5z & = & 5 \end{array} \right. .$$

Remarquons que son rang est au moins égal à 2 puisque l'on peut extraire au moins une sous-matrice 2×2 de déterminant non nul, et il n'est pas égal à 3 car

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce n'est donc pas un système de Cramer. Écrivons le système linéaire (S_2) sous une forme échelonnée. En effectuant à partir de (S_2) les opérations élémentaires $\mathrm{E}_2 \longleftarrow \mathrm{E}_2 - 2\mathrm{E}_1$, $\mathrm{E}_3 \longleftarrow \mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_1$, puis $\mathrm{E}_3 \longleftarrow \mathrm{E}_3 - 2\mathrm{E}_2$, on obtient le système échelonné :

$$(\mathrm{S}'_2) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ & & 7y & - & 3z & = & -3 \\ & & & & 0 & = & 10 \end{array} \right. .$$

Nous retrouvons que le rang est égal à 2 (nous sommes donc dans le troisième cas du théorème de Rouché-Fontené). La dernière égalité est absurde. Elle traduit l'incompatibilité du système. Il n'y a donc pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$.

3 - Nous nous intéressons au système linéaire carré et homogène suivant :

$$(\mathrm{S}_3) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 11y & - & 5z & = & 0 \end{array} \right. .$$

La matrice de ce système est identique à celle du système (S_2) étudié à la question précédente. On est donc encore dans le cas 3 du théorème de Rouché-Fontené. Observons que, cette fois-ci, le système est nécessairement compatible puisque tous les seconds membres sont nuls. Nous sommes donc assurés de l'existence d'au moins une solution. Puisque le rang du système vaut 2, la forme générale d'une solution dépend de $3-2=1$ paramètre. L'étape d'élimination s'effectue comme dans l'exemple précédent et conduit au système échelonné (homogène) suivant :

$$(\mathrm{S}_3') \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ & & 7y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

En éliminant la dernière équation et en faisant passer aux seconds membres les termes comportant l'inconnue non principale z dans les deux premières équations, on obtient le système de Cramer :

$$(\mathrm{S}_3'') \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & 3y & = & -z \\ & & 7y & = & 3z \end{array} \right. .$$

Il vient $y = 3z/7$, puis $x = 2z/7$. Les solutions de (S_3) s'écrivent sous la forme générale $(x,y,z) = (2z/7, 3z/7, z)$ où z parcourt tout $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de (S_3) est infini. Il s'écrit : $\mathcal{S} = \big\{(2z/7, 3z/7, z) \text{ avec } z \in \mathbb{R}\big\} = \mathbb{R}\,(2,3,7)$.

4 - Nous considérons maintenant le système surabondant (ce qui exclut de prime abord les cas 1 et 2 du théorème de Rouché-Fontené) :

$$(\mathrm{S}_4) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & & & + & 3z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 4z & = & 7 \end{array} \right. .$$

Écrivons (S_4) sous une forme échelonnée. En effectuant à partir de (S_4) les trois opérations élémentaires $\mathrm{E}_2 \longleftarrow \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1$, $\mathrm{E}_3 \longleftarrow \mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_1$ et $\mathrm{E}_4 \longleftarrow \mathrm{E}_4 - 2\mathrm{E}_1$, puis $\mathrm{E}_3 \longleftarrow \mathrm{E}_3 + \mathrm{E}_2$ et $\mathrm{E}_4 \longleftarrow \mathrm{E}_4 + \mathrm{E}_2$, on obtient le système échelonné

$$(\mathrm{S}_4') \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & - & 2z & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Son rang est égal à 2. Le système est compatible puisque les deux dernières équations sont de la forme $0=0$. La forme générale d'une solution dépend de $3-2=1$ paramètre. Pour l'obtenir, il suffit de résoudre le système de Cramer :

$$(\mathrm{S}_4'') \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 3-z \\ & & y & = & -1+2z \end{array} \right. .$$

Il vient $y = -1 + 2z$, puis $x = 4 - 3z$. Les solutions de (S_4) s'écrivent sous la forme générale $(x, y, z) = (4 - 3z, -1 + 2z, z)$ où z parcourt tout $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de (S_4) s'écrit ainsi : $\mathcal{S} = \{(4 - 3z, -1 + 2z, z) \ \text{ avec } \ z \in \mathbb{R}\} = \{(4, -1, 0) + z(-3, 2, 1) \ \text{ avec } \ z \in \mathbb{R}\}$. Il est infini.

Solution de l'exercice 3

1 - Soit $n \geqslant 3$. Le déterminant de Vandermonde V_n est un déterminant d'ordre n. Nous cherchons à faire apparaître des zéros dans la première colonne en dessous du premier terme présent sur la diagonale. C'est ce qu'on obtient en transformant les lignes $L_2, \ldots, L_n$ de la manière suivante : $L_i \leftarrow L_i - a_1 L_{i-1}$, $2 \leqslant i \leqslant n$. En effet, en procédant ainsi, on obtient :

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

Développons alors par rapport à la première colonne :

$$V_n = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

Enfin, factorisons par $a_2 - a_1$ dans la première colonne, par $a_3 - a_1$ dans la deuxième colonne, ...et par $a_n - a_1$ dans la dernière colonne. On obtient finalement :

$$V_n = \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ a_2 & a_3 & & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

2 - Notons $V_n^{(1)} = V_n$. Ainsi, $V_n^{(1)}$ est le déterminant de Vandermonde d'ordre n associé aux n coefficients $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. D'après la question précédente,

$$V_n^{(1)} = \left(\prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) \right) V_{n-1}^{(2)}$$

où $V_{n-1}^{(2)}$ est le déterminant de Vandermonde d'ordre $n - 1$ associé aux $n - 1$ coefficients $a_2, a_3, \ldots, a_n$. Il suffit alors de réitérer le processus pour obtenir :

$$V_{n-1}^{(2)} = \left(\prod_{j=3}^{n} (a_j - a_2) \right) V_{n-2}^{(3)}$$

où $V_{n-2}^{(3)}$ désigne le déterminant de Vandermonde d'ordre $n-2$ associé aux $n-2$ coefficients a_3, a_4, ..., a_n. On obtient aussi :

$$V_{n-2}^{(3)} = \left(\prod_{j=4}^{n}(a_j - a_3)\right) V_{n-3}^{(4)}$$

où $V_{n-3}^{(4)}$ désigne le déterminant de Vandermonde d'ordre $n-3$ associé aux $n-3$ coefficients a_4, a_5, ..., a_n, et ainsi de suite, jusqu'à :

$$V_3^{(n-2)} = (a_{n-1} - a_{n-2})(a_n - a_{n-2})V_2^{(n-1)}$$

où $V_2^{(n-1)}$ désigne le déterminant de Vandermonde d'ordre 2 associé aux deux coefficients a_{n-1} et a_n. Or,

$$V_2^{(n-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_n - a_{n-1}.$$

On obtient finalement :

$$V_n = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(a_j - a_i)\right),$$

ce qui s'écrit encore :

$$V_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i).$$

Solution de l'exercice 4

1 - Soit $n \geqslant 3$. Développons Δ_n par rapport à la première colonne :

$$\Delta_n = (1+x^2)\Delta_{n-1} - x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & x & 1+x^2 & x \\ 0 & & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

ou encore, en développant le dernier déterminant (qui est d'ordre $n-1$) par rapport à la première ligne,

$$\Delta_n = (1+x^2)\Delta_{n-1} - x^2\Delta_{n-2}.$$

En réarrangeant les termes, on obtient :

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = x^2\left(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}\right).$$

2 - Utilisant le résultat obtenu ci-dessus, on obtient, pour tout $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} \Delta_n - \Delta_{n-1} &= x^2\left(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}\right) = x^2 \times x^2\left(\Delta_{n-2} - \Delta_{n-3}\right) \\ &= \ldots = \underbrace{x^2 \times x^2 \times \ldots \times x^2}_{(n-2)\text{ fois}}\left(\Delta_2 - \Delta_1\right) = x^{2(n-2)}\left(\Delta_2 - \Delta_1\right). \end{aligned}$$

Or, $\Delta_2 - \Delta_1 = ((1+x^2)^2 - x^2) - (1+x^2) = x^4$. D'où, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + x^{2n}.$$

On en déduit alors, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \Delta_{n-1} + x^{2n} = \Delta_{n-2} + x^{2(n-1)} + x^{2n} = \Delta_{n-3} + x^{2(n-2)} + x^{2(n-1)} + x^{2n} \\ &= \ldots = \Delta_1 + x^{2\times 2} + x^{2\times 3} + \ldots + x^{2(n-2)} + x^{2(n-1)} + x^{2n}.\end{aligned}$$

Or, $\Delta_1 = 1 + x^2$. Par conséquent, pour tout entier n non nul,

$$\Delta_n = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2(n-2)} + x^{2(n-1)} + x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}.$$

Ainsi, pour tout n non nul, le déterminant Δ_n s'exprime comme la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison x^2 et de premier terme 1. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Delta_n = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2} & \text{si } x^2 \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Solution de l'exercice 5

1 - Remarquons que (S_1) étant carré, cela exclut le cas 2 du théorème de Rouché-Fontené. En effectuant à partir du système (S_1) les opérations $\mathrm{E}_2 \longleftarrow \mathrm{E}_2 - 2\mathrm{E}_1$, $\mathrm{E}_3 \longleftarrow \mathrm{E}_3 - 3\mathrm{E}_1$, puis $\mathrm{E}_3 \longleftarrow 5\mathrm{E}_3 - 4\mathrm{E}_2$, on obtient le système échelonné :

$$(\mathrm{S}_1') \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad - 5y + (m-6)z = 1 \\ \quad\quad (-4m-16)z = 6 \end{cases}$$

dont le rang dépend de la valeur du paramètre réel m.

- Si $m = -4$ alors le rang est 2 et la dernière équation est absurde puisqu'elle devient $0 = 6$. Nous sommes dans le cas 3 du théorème de Rouché-Fontené : le rang du système est strictement inférieur au nombre d'équations et le système n'est pas compatible. Il n'y a pas de solution.
- Si $m \neq -4$ alors le rang est 3. Nous sommes maintenant dans le cas 1 du théorème de Rouché-Fontené : le rang du système est égal au nombre d'équations et le système est carré. Le système est donc de Cramer. Il possède une unique solution $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \in \mathbb{R}^3$. On obtient, par remontée :

$$\widetilde{z} = \frac{-3}{2m+8}, \quad \text{puis} \quad \widetilde{y} = \frac{-m+2}{2m+8} \quad \text{et enfin} \quad \widetilde{x} = \frac{2m+5}{2m+8}.$$

En résumé, l'ensemble des solutions s'écrit :

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \left\{ \left(\dfrac{2m+5}{2m+8}, \dfrac{-m+2}{2m+8}, \dfrac{-3}{2m+8} \right) \right\} & \text{si } m \neq -4 \\ \emptyset \quad \text{si } m = -4 \end{cases}$$

2 - Remarquons que (S_2) étant surabondant, cela exclut les cas 1 et 2 du théorème de Rouché-Fontené. En effectuant à partir du système (S_2) les trois opérations élémentaires $E_2 \longleftarrow E_2 - 2E_1$, $E_3 \longleftarrow E_3 - E_1$ et $E_4 \longleftarrow 2E_4 - mE_1$, puis $E_2 \longleftarrow -\frac{1}{7}E_2$, et enfin $E_3 \longleftarrow E_3 + 2E_2$ et $E_4 \longleftarrow E_4 - (16-5m)E_2$, on obtient le système suivant :

$$(S_2') \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & - & 8z & = & 8 \\ & & y & - & z & = & 1 \\ & & & & (m+6)z & = & 1 \\ & & & & (2+3m)z & = & -m-16 \end{array} \right.$$

Interrompons l'étape d'élimination pour discuter de la valeur du pivot $m+6$.

- Supposons $m = -6$. Il est facile de voir que le rang du système vaut 3 (il est strictement inférieur au nombre d'équations) et le système n'est pas compatible (la troisième équation est absurde) : le système ne possède pas de solution.
- Supposons à présent $m \neq -6$. Le pivot $m+6$ est alors non nul, ce qui nous autorise à poursuivre l'étape d'élimination. En effectuant à partir du système (S_2') l'opération élémentaire $E_4 \longleftarrow (m+6)E_4 - (2+3m)E_3$, on obtient le système échelonné :

$$(S_2'') \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & - & 8z & = & 8 \\ & & y & - & z & = & 1 \\ & & & & (m+6)z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & -m^2-25m-98 \end{array} \right.$$

De toute évidence, son rang est 3 (il est strictement inférieur au nombre d'équations) : nous sommes dans le cas 3 du théorème de Rouché-Fontené. Est-il compatible ? Le trinôme $m^2+25m+98$ possède deux racines réelles distinctes :

$$m_1 = \frac{-25+\sqrt{233}}{2} \qquad \text{et} \qquad m_2 = \frac{-25-\sqrt{233}}{2}$$

qui sont distinctes de -6. Par conséquent, si $m \notin \{m_1, m_2\}$ alors le système est incompatible puisque la dernière équation est absurde : il n'y a donc pas de solution ; si $m \in \{m_1, m_2\}$ alors la dernière équation est triviale $(0=0)$, ce qui traduit, cette fois-ci, la compatibilité du système : il existe ainsi au moins une solution et cette dernière est unique (puisque la dimension du noyau est nulle). On l'obtient en résolvant les trois premières équations du système (S_2''). On obtient, par remontée :

$$\widetilde{z} = \frac{1}{m+6}, \quad \text{puis} \quad \widetilde{y} = \frac{m+7}{m+6} \quad \text{et enfin} \quad \widetilde{x} = \frac{3(m+7)}{2(m+6)}.$$

En résumé, l'ensemble des solutions s'écrit :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \left(\dfrac{3(m+7)}{2(m+6)}, \dfrac{m+7}{m+6}, \dfrac{1}{m+6} \right) \right\} & \text{si } m \in \{m_1, m_2\} \\ \emptyset \quad \text{si } m \notin \{m_1, m_2\} & \end{array} \right.$$

CHAPITRE 12

Réduction des endomorphismes

12.1 Éléments propres d'un endomorphisme

12.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

DÉFINITION 12.1 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle valeur propre de f tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe un vecteur $\boldsymbol{u}$ non nul de E tel que*

$$f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}.$$

Ce vecteur $\boldsymbol{u}$ non nul de E se nomme vecteur propre de f associé à la valeur propre λ et le couple $(\lambda, \boldsymbol{u})$ de $\mathbb{K} \times \left(E \setminus \{\mathbf{0}_E\}\right)$ se nomme élément propre de f.

Remarques

1. Dans la définition 12.1, la condition qu'un vecteur vérifiant $f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$ soit non nul est impérative, car si on autorisait le vecteur nul, n'importe quel scalaire λ de $\mathbb{K}$ conviendrait et la définition d'une valeur propre serait alors dépourvue d'intérêt.

2. Bien évidemment, les notions de valeur propre et de vecteur propre n'ont de sens que pour des endomorphismes puisqu'un vecteur propre et son image appartiennent nécessairement au même espace vectoriel.

Un vecteur propre associé à une valeur propre est-il unique ?

La réponse est « non ». Pour s'en convaincre, considérons un vecteur propre $\boldsymbol{u}$ appartenant à E, associé à la valeur propre λ. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur non nul appartenant à $\mathbb{K}\boldsymbol{u}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{u}$ avec $\alpha \neq 0$ (car $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}_E$). Calculons $f(\boldsymbol{x})$. Puisque f est linéaire, on a :

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) = \alpha \lambda \boldsymbol{u} = \lambda \alpha \boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Ainsi, tout vecteur non nul colinéaire à $\boldsymbol{u}$ est aussi vecteur propre associé à λ.

Fig. 1 Représentation dans $\mathbb{R}^2$ du cas où $f(\boldsymbol{u}) \neq \lambda \boldsymbol{u}$ (figure de gauche, le vecteur $\boldsymbol{u}$ et son image par f ne sont pas colinéaires) et du cas où $f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$ (figure de droite, le vecteur $\boldsymbol{u}$ et son image par f sont colinéaires).

Exemples

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. On considère l'endomorphisme f de E défini par

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \quad f(\boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

Le vecteur $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ car

$$f(\boldsymbol{u}_1) = f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) + f(\boldsymbol{e}_3) = -(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{u}_1.$$

Comme nous l'avons remarqué plus haut, tout vecteur non nul colinéaire à $\boldsymbol{u}_1$ est aussi vecteur propre associé à $\lambda_1 = -1$. Les deux vecteurs $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$ et $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$ sont deux vecteurs propres de f associés à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ puisque

$$f(\boldsymbol{u}_2) = f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_3) = 2(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{u}_2,$$

$$f(\boldsymbol{u}_3) = f(\boldsymbol{e}_2) - f(\boldsymbol{e}_3) = 2(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{u}_3.$$

Tout vecteur non nul colinéaire à $\boldsymbol{u}_2$ ou à $\boldsymbol{u}_3$ est aussi vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$. Remarquons que les deux vecteurs $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$ sont linéairement indépendants. Toute combinaison linéaire non nulle de $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$ est aussi vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$. Vérifions-le. Soit $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{u}_2 + \beta \boldsymbol{u}_3$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Le vecteur $\boldsymbol{x}$ ainsi défini est alors nécessairement non nul (puisque $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$ forment une famille libre) et $f(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}$. En effet, puisque f est linéaire,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\alpha \boldsymbol{u}_2 + \beta \boldsymbol{u}_3) = \alpha f(\boldsymbol{u}_2) + \beta f(\boldsymbol{u}_3) \\ &= \alpha 2 \boldsymbol{u}_2 + \beta 2 \boldsymbol{u}_3 = 2(\alpha \boldsymbol{u}_2 + \beta \boldsymbol{u}_3) = 2\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Comme nous le verrons par la suite, $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$ sont les deux seules valeurs propres de f.

2. Considérons à présent le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ des applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Cet espace est de

dimension infinie. Considérons l'application linéaire f qui à un élément φ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ lui associe son application dérivée :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}.$$

L'application f est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et toute application de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

L'ensemble des valeurs propres de f est donc l'ensemble $\mathbb{R}$. Remarquons que cet ensemble est infini.

12.1.2 Caractérisation des valeurs propres

On note $\mathrm{id}_E : \boldsymbol{x} \in E \longmapsto \boldsymbol{x} \in E$ l'application identité de E. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de l'endomorphisme f de E et $\boldsymbol{u}$ un vecteur propre associé à λ. On a les équivalences suivantes :

$$f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u} \quad \Longleftrightarrow \quad (f - \lambda \,\mathrm{id}_E)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \,\mathrm{id}_E).$$

L'existence d'un vecteur propre $\boldsymbol{u}$, qui est nécessairement non nul, signifie que le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas réduit au vecteur nul ou, de manière équivalente, que l'endomorphisme $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas injectif.

On peut par conséquent énoncer la caractérisation suivante.

Proposition 12.1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda \in \mathbb{K}$ soit valeur propre de f est que l'endomorphisme $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ ne soit pas injectif.*

Une valeur propre peut-elle être nulle ?

Bien évidemment, la réponse est « oui ».[1] En effet, 0 est valeur propre d'un endomorphisme f de E signifie qu'il existe un vecteur non nul $\boldsymbol{u}$ de E tel que $f(\boldsymbol{u}) = 0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E$. Autrement dit, 0 est valeur propre de f signifie que

$$\mathrm{Ker}\, f \neq \{\mathbf{0}_E\},$$

c'est-à-dire que f n'est pas injectif. Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que 0 soit valeur propre de f est que f ne soit pas injectif.

---

[1] En revanche, un vecteur propre n'est, par définition, jamais égal au vecteur nul.

Proposition 12.2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E et $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{K} \times \big(E \setminus \{\mathbf{0}_E\}\big)$ un élément propre de f. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda^k, \boldsymbol{u})$ est un élément propre de f^k où*

$$f^k \overset{not.}{=} \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

De plus, si f est bijectif alors $\lambda \neq 0$ et $(\lambda^{-1}, \boldsymbol{u})$ est un élément propre de f^{-1}.

Démonstration Soit $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{K} \times \big(E \setminus \{\mathbf{0}_E\}\big)$ un élément propre de f. Montrons que $(\lambda^k, \boldsymbol{u})$ est un élément propre de f^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Effectuons une récurrence sur l'entier k. La propriété est immédiate pour $k = 1$. Supposons que $(\lambda^{k-1}, \boldsymbol{u})$ soit un élément propre de f^{k-1} avec $k \geqslant 2$ (c'est notre hypothèse de récurrence) et déduisons-en que $(\lambda^k, \boldsymbol{u})$ est un élément propre de f^k. Par hypothèse, $f^{k-1}(\boldsymbol{u}) = \lambda^{k-1}\boldsymbol{u}$. En appliquant f à cette égalité et en utilisant la propriété de linéarité de f, on obtient :

$$f^k(\boldsymbol{u}) = f(\lambda^{k-1}\boldsymbol{u}) = \lambda^{k-1} f(\boldsymbol{u}) = (\lambda^{k-1} \times \lambda)\boldsymbol{u}$$

où il a été tenu compte que $(\lambda, \boldsymbol{u})$ était un élément propre de f. On a ainsi obtenu l'égalité : $f^k(\boldsymbol{u}) = \lambda^k \boldsymbol{u}$, ce qui montre que $(\lambda^k, \boldsymbol{u})$ est élément propre de f^k. Supposons à présent f bijectif. Ainsi, f est injectif et $\lambda \neq 0$ (nous utilisons ici la caractérisation suivante : 0 est valeur propre d'un endomorphisme f si et seulement si, f n'est pas injectif). Par hypothèse, $f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$. Appliquons f^{-1} (qui existe car f est bijective) à cette égalité. On obtient :

$$f^{-1}(f(\boldsymbol{u})) = f^{-1}(\lambda \boldsymbol{u}).$$

Or, $f^{-1}(f(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{u}$ (par définition de f^{-1}) et $f^{-1}(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda f^{-1}(\boldsymbol{u})$ puisque f^{-1} est linéaire. On en déduit l'égalité :

$$\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{u} = f^{-1}(\boldsymbol{u}),$$

ce qui montre que $(\lambda^{-1}, \boldsymbol{u})$ est élément propre de f^{-1}. □

12.2 Sous-espaces propres

12.2.1 Définition

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Considérons deux vecteurs propres $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ associés à la même valeur propre λ de f. On vérifie que tout vecteur non nul de la forme $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ est aussi vecteur propre associé à λ. En effet,

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v}) = \alpha\lambda\boldsymbol{u} + \beta\lambda\boldsymbol{v} = \lambda(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}).$$

Rappelons qu'un vecteur propre est (par définition) non nul. Aussi, pour que l'ensemble formé de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ définisse un sous-espace vectoriel, il faut lui adjoindre le vecteur nul.

DÉFINITION 12.2 *Soient f un endormorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. On appelle sous-espace propre associé à λ, et on note E_λ, le sous-espace vectoriel de E constitué des vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul. Autrement dit,*

$$E_\lambda \overset{déf.}{=} \{\boldsymbol{x} \in E \mid f(\boldsymbol{x}) = \lambda\,\boldsymbol{x}\} = \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)\,.$$

Remarques

1. Tous les vecteurs de l'espace propre E_λ sont des vecteurs propres de f (associés à la valeur propre λ), à l'exception du vecteur nul.

2. Si $\boldsymbol{u} \in E$ est un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\mathbb{K}\boldsymbol{u} \subset E_\lambda$.

3. Si 0 est valeur propre de f alors $E_0 = \operatorname{Ker} f$. En d'autres termes, si 0 est valeur propre de f alors le sous-espace propre de f associé à 0 est le noyau de f.

12.2.2 Somme de sous-espaces propres

Soient E_{λ_1} et E_{λ_2} deux sous-espaces propres de f associés aux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Nous allons montrer que les deux sous-espaces E_{λ_1} et E_{λ_2} sont en somme directe dans E. Rappelons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux sous-espaces soient en somme directe est que leur intersection soit réduite au vecteur nul (voir la proposition 8.16, page 354). Pour le cas présent, on doit vérifier que

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_E\}.$$

C'est immédiat. En effet, si $\boldsymbol{u} \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$, alors $f(\boldsymbol{u}) = \lambda_1\boldsymbol{u}$ et $f(\boldsymbol{u}) = \lambda_2\boldsymbol{u}$. On obtient :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E$$

et on en déduit $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E$ puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$. La somme des deux sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} se note alors $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$. Bien entendu, un endomorphisme peut posséder plus de deux sous-espaces propres. La somme de sous-espaces n'ayant été définie au chapitre 8 que dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, nous allons généraliser les définitions de somme, somme directe et sous-espaces supplémentaires au cas de plus de deux sous-espaces.

DÉFINITION 12.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F_1, ..., F_m des sous-espaces de E.*

✗ *La somme de F_1, ..., F_m est le sous-espace de E, noté $F_1 + \ldots + F_m$, défini par*

$$F_1 + \ldots + F_m \overset{\text{déf.}}{=} \left\{ \boldsymbol{x}_{F_1} + \ldots + \boldsymbol{x}_{F_m} \;\middle|\; \boldsymbol{x}_{F_1} \in F_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{F_m} \in F_m \right\}.$$

✗ *En particulier, la somme de F_1, ..., F_m est dite directe si pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ appartenant au sous-espace $F_1 + \ldots + F_m$*

$$\exists\,!\,(\boldsymbol{x}_{F_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{F_m}) \in F_1 \times \ldots \times F_m \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{F_1} + \ldots + \boldsymbol{x}_{F_m}.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{x}_{F_1}$, ..., $\boldsymbol{x}_{F_m}$ sont appelés les composants du vecteur $\boldsymbol{x}$ respectivement dans F_1, ..., F_m. Le sous-espace vectoriel $F_1 + \ldots + F_m$ se note alors $F_1 \oplus \ldots \oplus F_m$.

✗ *Enfin, les sous-espaces vectoriels F_1, ..., F_m sont dits supplémentaires dans E si $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_m$.*

Exemple Considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Les droites vectorielles $\mathbb{K}e_1$, $\mathbb{K}e_2$, ..., $\mathbb{K}e_n$ sont supplémentaires dans E. On écrit alors $E = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}e_n$. Vérifions-le. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de E. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E,

$$\exists\,!\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad \boldsymbol{x} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Posant alors $\boldsymbol{x}_i = \alpha_i e_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\exists\,!\,(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \mathbb{K}e_1 \times \mathbb{K}e_2 \times \ldots \times \mathbb{K}e_n \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \boldsymbol{x}_n.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ sont les composants du vecteur $\boldsymbol{x}$ respectivement dans $\mathbb{K}e_1$, $\mathbb{K}e_2$, ..., $\mathbb{K}e_n$.

Revenons à présent à l'étude des sous-espaces propres.

PROPOSITION 12.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace et f une application linéaire de E dans F. Si λ_1, ..., λ_m sont des valeurs propres de f distinctes deux à deux alors la somme des sous-espaces propres correspondants E_{λ_1}, ..., E_{λ_m} est directe. On la note dans ce cas $E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_m}$.*

Démonstration Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur appartenant au sous-espace vectoriel $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \ldots + E_{\lambda_m}$. Par définition de la somme de sous-espaces vectoriels, il existe $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \in E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2} \times \ldots \times E_{\lambda_m}$ tel que

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \boldsymbol{x}_m. \tag{1}$$

Montrons que cette décomposition est unique. Appliquons successivement f, f^2, ..., f^{m-1} à l'égalité (1). On obtient le système suivant :

$$\text{(S)} \quad \left\{ \begin{array}{rcccccc} \boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & + \ldots + & \boldsymbol{x}_m \\ f(\boldsymbol{x}) & = & \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 & + & \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 & + \ldots + & \lambda_m \boldsymbol{x}_m \\ f^2(\boldsymbol{x}) & = & \lambda_1^2 \boldsymbol{x}_1 & + & \lambda_2^2 \boldsymbol{x}_2 & + \ldots + & \lambda_m^2 \boldsymbol{x}_m \\ & & & & & & \\ f^{m-1}(\boldsymbol{x}) & = & \lambda_1^{m-1} \boldsymbol{x}_1 & + & \lambda_2^{m-1} \boldsymbol{x}_2 & + \ldots + & \lambda_m^{m-1} \boldsymbol{x}_m \end{array} \right.$$

où il a été tenu compte, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, que

$$f(\boldsymbol{x}_k) = \lambda_k \boldsymbol{x}_k, \quad f^2(\boldsymbol{x}_k) = \lambda_k^2 \boldsymbol{x}_k, \quad \ldots, \quad f^{m-1}(\boldsymbol{x}_k) = \lambda_k^{m-1} \boldsymbol{x}_k$$

car $\boldsymbol{x}_k \in E_{\lambda_k}$ (voir la proposition 12.2, page 546). Le système linéaire (S) est un système carré, d'inconnue le m-uplet $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ de $E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2} \times \ldots \times E_{\lambda_m}$. Son déterminant est connu. C'est le déterminant de Vandermonde d'ordre m associé aux coefficients λ_1, λ_2, ..., λ_m. Il a fait l'objet d'un exercice de synthèse au chapitre 11 (voir page 534). Il est donné par

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Il est non nul puisque les valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_m sont supposées distinctes deux à deux. Le système linéaire (S) est donc de Cramer : il existe un unique m-uplet $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ de $E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2} \times \ldots \times E_{\lambda_m}$, solution du système (S) ; ceci montre l'unicité de la décomposition (1). □

Conséquence

Une conséquence immédiate de la proposition 12.3 est que m vecteurs propres associés à m valeurs propres distinctes deux à deux forment une famille libre dans E. Mieux encore, si $\mathcal{L}_1$, ..., $\mathcal{L}_m$ désignent des familles libres constituées de vecteurs propres appartenant respectivement à E_{λ_1}, ..., E_{λ_m}, alors la famille $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m)$, obtenue par la réunion de ces m familles, est aussi une famille libre dans E. En effet, si on note $\mathcal{L}_1 = (\boldsymbol{u}_1^{(1)}, \boldsymbol{u}_2^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n_1}^{(1)})$, ..., $\mathcal{L}_m = (\boldsymbol{u}_1^{(m)}, \boldsymbol{u}_2^{(m)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n_m}^{(m)})$ et $\mathcal{L}$ la famille obtenue par la réunion de ces familles,

$$\mathcal{L} = (\underbrace{\boldsymbol{u}_1^{(1)}, \boldsymbol{u}_2^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n_1}^{(1)}}_{\in E_{\lambda_1}}, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{u}_1^{(m)}, \boldsymbol{u}_2^{(m)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n_m}^{(m)}}_{\in E_{\lambda_m}}),$$

alors, de la relation de liaison

$$\underbrace{\alpha_1^{(1)} \boldsymbol{u}_1^{(1)} + \ldots + \alpha_{n_1}^{(1)} \boldsymbol{u}_{n_1}^{(1)}}_{\in E_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{\alpha_1^{(m)} \boldsymbol{u}_1^{(m)} + \ldots + \alpha_{n_m}^{(m)} \boldsymbol{u}_{n_m}^{(m)}}_{\in E_{\lambda_m}} = \mathbf{0}_E,$$

on déduit, puisque la somme des sous-espaces E_{λ_1}, ..., E_{λ_m} est directe, que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1^{(1)}\boldsymbol{u}_1^{(1)}+\ldots+\alpha_{n_1}^{(1)}\boldsymbol{u}_{n_1}^{(1)} & = & \mathbf{0}_E \\ \\ \alpha_1^{(m)}\boldsymbol{u}_1^{(m)}+\ldots+\alpha_{n_m}^{(m)}\boldsymbol{u}_{n_m}^{(m)} & = & \mathbf{0}_E \end{array}\right.$$

D'où, puisque chacune des familles $\mathcal{L}_1$, ..., $\mathcal{L}_m$ est libre,

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1^{(1)}=\ldots=\alpha_{n_1}^{(1)}=0 \\ \\ \alpha_1^{(m)}=\ldots=\alpha_{n_m}^{(m)}=0 \end{array}\right.$$

On a donc montré que la famille $\mathcal{L}=\big(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_m\big)$ était libre.

Le sous-espace $E_{\lambda_1}\oplus E_{\lambda_2}\oplus\ldots\oplus E_{\lambda_m}$ n'ayant aucune raison d'être l'espace E tout entier, les sous-espaces propres E_{λ_1}, E_{λ_2}, ..., E_{λ_m} ne sont pas nécessairement supplémentaires dans E. Mais rien ne s'oppose à ce qu'ils le soient, et dans ce cas particulier, on dira que l'endomorphisme f est diagonalisable. Nous reviendrons plus en détail sur ce point dans la suite du chapitre.

Exercice 1 Soient E un $\mathbb{C}$-espace et $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ vérifiant $f\circ f\circ f=\mathrm{id}_E$. Soit $\mathrm{j}=-1/2+\mathrm{i}\sqrt{3}/2$. Montrer que

$$E=\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_E)\oplus\operatorname{Ker}(f-\mathrm{j}\,\mathrm{id}_E)\oplus\operatorname{Ker}\big(f-\mathrm{j}^2\,\mathrm{id}_E\big)\,.$$

12.3 Cas d'un espace de dimension finie

On se restreint maintenant au cas où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)=n$.

12.3.1 Écriture sous forme matricielle

On munit l'espace E d'une base $\mathcal{B}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$. Soient f un endomorphisme de E, λ une valeur propre de f ($\lambda\in\mathbb{K}$) et $\boldsymbol{x}$ un vecteur propre de f associé à λ ($\boldsymbol{x}\in E$ et $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}_E$). En notant $\mathrm{A}=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice (carrée d'ordre n) associée à f relativement à $\mathcal{B}$ et X la matrice-colonne formée des coordonnées x_1, x_2, ..., x_n du vecteur propre $\boldsymbol{x}$ dans la même base $\mathcal{B}$, l'égalité vectorielle

$$f(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x}$$

s'écrit dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme matricielle

$$\mathrm{A}\,\mathrm{X}=\lambda\,\mathrm{X},$$

c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On étend aux matrices carrées[(2)] les notions définies sur les endomorphismes.

DÉFINITION 12.4 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* n *à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

✗ *On appelle* valeur propre *de* A *tout scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$ *pour lequel il existe une matrice-colonne* $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *non nulle telle que*

$$\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}.$$

La matrice-colonne $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *est appelée* vecteur propre *de* A *associé à* λ *et le couple* (λ, X) *se nomme* élément propre *de* A.

✗ *On appelle* espace propre *de* A *associé à* λ, *et on note* E_λ, *le sous-espace de* $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *défini par*

$$E_\lambda \overset{déf.}{=} \left\{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; \mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}\right\}.$$

✗ *On appelle* spectre *de* A *le sous-ensemble de* $\mathbb{K}$ *constitué de toutes les valeurs propres de* A. *On le note* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

12.3.2 Calcul des valeurs propres

Commençons par donner une caractérisation des valeurs propres, plus pratique que celle de la proposition 12.1. On note I_n la matrice unité d'ordre n. On rappelle que I_n est inversible et que c'est la matrice associée à l'application identité relativement à n'importe quelle base de E. Puisque $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice associée à l'endomorphisme $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ relativement à $\mathcal{B}$ est $\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}_n$. D'après la proposition 12.1,

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \iff f - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non injectif.} \qquad (2)$$

D'après le corollaire 9.5 (voir page 398), puisque l'espace E est de dimension finie, on a équivalence entre les propriétés d'injectivité et de bijectivité de l'endomorphisme $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$. Autrement dit,

$$f - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non injectif} \iff f - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non bijectif.} \qquad (3)$$

(2) Les notions de valeur propre et de vecteur propre sont dépourvues de sens pour des matrices rectangulaires et non carrées !

Rappelons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit bijectif est que sa matrice représentative dans n'importe quelle base soit inversible (voir la proposition 10.12, page 454). On a ainsi l'équivalence :

$$f - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non bijectif} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}_n \text{ non inversible.} \tag{4}$$

Enfin, la matrice $\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}_n$ est non inversible si et seulement si, son déterminant est nul. En regroupant ce dernier résultat avec les trois équivalences (2), (3) et (4), on obtient finalement l'équivalence suivante :

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}_n) = 0.$$

On a ainsi établi la proposition suivante.

PROPOSITION 12.4 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, f un endomorphisme de E et* A *sa matrice associée relativement à $\mathcal{B}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda \in \mathbb{K}$ soit valeur propre de f est que*

$$\det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}_n) = 0.$$

On en déduit que, pour que 0 soit valeur propre de A, il faut et il suffit que $\det(\mathrm{A}) = 0$, c'est-à-dire que A ne soit pas inversible (d'après la proposition 11.2, page 505). On a ainsi montré la caractérisation suivante.

COROLLAIRE 12.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée* A *soit inversible est que* 0 *ne soit pas valeur propre de* A. *En d'autres termes, pour toute matrice* A *carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$, on a l'équivalence :*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{A}).$$

Étant donnée la matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $\lambda \in \mathbb{K} \longmapsto \det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}_n) \in \mathbb{K}$ est une application polynomiale de degré n. Cela conduit naturellement à la définition suivante.

DÉFINITION 12.5 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$.*

✗ *On appelle polynôme caractéristique de* A *le polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré n, noté P_{A}, défini par*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_{\mathrm{A}}(\lambda) \overset{\text{déf.}}{=} \det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}_n)\,.$$

✗ *L'équation algébrique $P_{\mathrm{A}}(\lambda) = 0$, d'inconnue le scalaire λ de $\mathbb{K}$, s'appelle équation caractéristique associée à la matrice* A.

La détermination des valeurs propres de f dans $\mathbb{K}$ équivaut au calcul des zéros du polynôme caractéristique $P_{\mathrm{A}} \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. En effet, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f équivaut à $P_{\mathrm{A}}(\lambda) = 0$, c'est-à-dire à

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Reprenons l'exemple de l'endomorphisme f qui au vecteur $\boldsymbol{x}$, de coordonnées x_1, x_2, x_3 dans $\mathcal{B}$, associe le vecteur $\boldsymbol{y}$, de coordonnées y_1, y_2, y_3 dans $\mathcal{B}$ telles que

$$y_1 = x_1 - x_2 - x_3, \quad y_2 = -x_1 + x_2 - x_3, \quad y_3 = -x_1 - x_2 + x_3.$$

Relativement à la base $\mathcal{B}$, la matrice associée à f est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_{\mathrm{A}}(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$

Détaillons les calculs. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Commençons par retrancher la troisième colonne à la première ($\mathrm{C}_1 \longleftarrow \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_3$) :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ \lambda-2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Puis développons par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ \lambda-2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{=\lambda(\lambda-2)} + (\lambda-2)\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1-\lambda & -1 \end{vmatrix}}_{=2-\lambda}.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ \lambda-2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$

Les valeurs propres de A, et donc de f, sont les deux réels -1 et 2. On écrit : $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{-1, 2\}$.

Remarques

1. Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$ une matrice carrée d'ordre 2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} &= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{=\mathrm{Tr(A)}}\lambda + \underbrace{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}_{=\det(\mathrm{A})} \end{aligned}$$

et, comme indiqué sous les accolades, on remarque que les scalaires $a_{11}+a_{22}$ et $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ sont respectivement la trace et le déterminant de A. Par conséquent,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_{\mathrm{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr(A)}\lambda + \det(\mathrm{A}).$$

Plus généralement, si $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice carrée d'ordre n alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_{\mathrm{A}}(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr(A)}\lambda^{n-1} + \ldots + \det(\mathrm{A}).$$

2. Si une matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure ou inférieure, alors ses valeurs propres sont les éléments de sa diagonale puisque

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_{\mathrm{A}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-\lambda).$$

C'est en particulier aussi le cas lorsque A est diagonale.

Remarquons que le calcul des valeurs propres de l'endomorphisme f de E s'effectue en résolvant l'équation caractéristique $P_{\mathrm{A}}(\lambda) = 0$ où le polynôme caractéristique P_{A} est défini à partir de la matrice A, elle-même définie à partir d'une base $\mathcal{B}$ de E. La question suivante est alors légitime.

Le calcul des valeurs propres dépend-il de la base choisie ?

La réponse à cette question est « non ». Pour le vérifier, considérons une deuxième base $\mathcal{C}$ de l'espace E et désignons par B la matrice représentative de f dans $\mathcal{C}$. Le polynôme caractéristique de B est défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_{\mathrm{B}}(\lambda) = \det(\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_n).$$

Les deux matrices A et B sont semblables car elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Elles vérifient ainsi :

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$$

où P désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Vérifions que $P_{\mathrm{B}}(\lambda) = P_{\mathrm{A}}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. En utilisant $\det(\mathrm{P}^{-1}) = 1/\det(\mathrm{P})$ (voir la proposition 11.3, page 505), on vérifie :

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{B}}(\lambda) &= \det(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} - \lambda\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}) \\ &= \det(\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{AP} - \lambda\mathrm{P})) = \det(\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n)\mathrm{P}) \\ &= \det(\mathrm{P}^{-1}) \times \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n) \times \det(\mathrm{P}) \\ &= \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n) \\ &= P_{\mathrm{A}}(\lambda). \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique P_{A} est par conséquent invariant lorsqu'on remplace A par une matrice semblable ou, de manière équivalente, lorsqu'on représente f dans des bases différentes. On le note ainsi P_f et on dit que P_f est le *polynôme caractéristique de l'endomorphisme f*. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_f(\lambda) = \det\bigl(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda\,\mathrm{I}_n\bigr) = \det\bigl(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)\bigr)$$

pour toute base $\mathcal{B}$ de E. Le calcul des valeurs propres étant invariant par changement de base, nous pouvons ainsi nous placer dans n'importe quelle base de E pour calculer les valeurs propres d'un endomorphisme f de E.

DÉFINITION 12.6 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.*

✗ *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité h du polynôme caractéristique de f alors on dit que λ est une valeur propre de multiplicité h (ou d'ordre h) de f.*

✗ *En particulier, si $h = 1$ alors la valeur propre est dite simple. Si $h > 1$ alors la valeur propre est dite multiple. Elle est dite double lorsque $h = 2$ et triple lorsque $h = 3$.*

Existe-t-il toujours des valeurs propres ?

La réponse est « oui » à la condition que le corps $\mathbb{K}$ considéré soit algébriquement clos. C'est le cas du corps $\mathbb{C}$. Rappelons que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n admet n racines (comptées avec leurs multiplicités) dans $\mathbb{C}$ (voir le théorème de d'Alembert-Gauss, page 251). Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace E se factorise ainsi dans $\mathbb{C}$ comme suit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_f(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{h_i}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ désignent les valeurs propres distinctes de f, de multiplicités respectives $h_1, h_2, \ldots, h_m$ et où $m \leqslant n$ et $h_1 + h_2 + \ldots + h_m = n$. Ainsi, un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n, admet toujours (au moins) une valeur propre (sous-entendu dans $\mathbb{C}$) et le nombre de valeurs propres distinctes est inférieur ou égal à n, ce que l'on résume par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \quad \Bigl(\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \mathrm{card}\bigl(\mathrm{Sp}(\mathrm{A})\bigr) \leqslant n \Bigr).$$

La situation est différente lorsque l'on travaille sur le corps des nombres réels car, contrairement à $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos. Un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel peut ne pas avoir de valeur propre. C'est par exemple le cas de la matrice réelle suivante :

$$\mathrm{A}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

où $\theta \in [0, 2\pi[$. En effet,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_{\mathrm{A}_\theta}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(\mathrm{A}_\theta)\lambda + \det(\mathrm{A}_\theta) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1.$$

Les valeurs propres sur $\mathbb{C}$ sont $\lambda_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\lambda_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ car

$$P_{\mathrm{A}_\theta}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) = P_{\mathrm{A}_\theta}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) = 0.$$

Si $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$ alors A_θ ne possède aucune valeur propre dans $\mathbb{R}$; son spectre est vide. En revanche, si $\theta = 0$ ou si $\theta = \pi$ alors le spectre est non vide puisque

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_0) = \mathrm{Sp}(\mathrm{I}_2) = \{1\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(\mathrm{A}_\pi) = \mathrm{Sp}(-\mathrm{I}_2) = \{-1\}.$$

Exercice 2 Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
1 - Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si λ est valeur propre de A associée au vecteur propre X alors λ^m est valeur propre de A^m associée à X.
2 - Déterminer les valeurs propres de A lorsque $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ (on dit que A est idempotente) ; même question lorsque $\mathrm{A}^n = \mathrm{I}_n$.
3 - Supposons A inversible. Montrer que si (λ, X) est élément propre de A alors $(\lambda^{-1}, \mathrm{X})$ est élément propre de A^{-1}.

12.3.3 Calcul des vecteurs propres

Intéressons-nous maintenant au calcul des vecteurs propres correspondant à chacune des valeurs propres. Soit $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Calculer $\boldsymbol{x}$, c'est résoudre l'équation vectorielle suivante :

$$\big(f - \lambda\,\mathrm{id}_E\big)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E.$$

Les solutions sont les vecteurs du sous-espace propre $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$. Puisque $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas injective, il existe des solutions autres que le vecteur nul. Se pose alors la question de la dimension du sous-espace propre E_λ. On sait déjà que E_λ est de dimension finie et que sa dimension ne peut excéder n puisque E_λ est inclus dans E et $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$. Remarquons que si $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}_E$ désigne un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ alors, nécessairement, $\mathbb{K}\boldsymbol{u} \subset E_\lambda$ d'où

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda) \geqslant 1$$

car $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\boldsymbol{u}) = 1$. Le sous-espace propre E_λ est donc de dimension supérieure ou égale à 1. La proposition suivante complète ce résultat.

Proposition 12.5 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Si λ est une valeur propre de multiplicité h de f alors*

$$1 \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda) \leqslant h.$$

En particulier, si λ est une valeur propre simple de f alors $\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda) = 1$.

Démonstration Soit $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, nous notons provisoirement $\widetilde{\lambda}$ une valeur propre de multiplicité h de f et λ la variable du polynôme caractéristique P_f. Puisque $\widetilde{\lambda}$ est valeur propre de multiplicité h, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n - h$ tel que

$$P_f(\lambda) = (\lambda - \widetilde{\lambda})^h Q(\lambda)$$

avec $Q(\widetilde{\lambda}) \neq 0$. Désignons par $p \geqslant 1$ la dimension du sous-espace propre $E_{\widetilde{\lambda}}$ associé à la valeur propre $\widetilde{\lambda}$. Montrons que $(\lambda - \widetilde{\lambda})^p$ divise le polynôme caractéristique P_f. Pour cela, nous munissons le sous-espace propre $E_{\widetilde{\lambda}}$ d'une base $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille (libre) par $n - p$ vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-p}$ de E, pour obtenir une base de E. Notons $\mathcal{C}$ cette nouvelle base : $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-p})$. Pour chaque entier j compris entre 1 et p, le vecteur $\boldsymbol{u}_j$ est un vecteur propre correspondant à la valeur propre $\widetilde{\lambda}$. On a donc $f(\boldsymbol{u}_j) = \widetilde{\lambda}\boldsymbol{u}_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. Écrivons alors la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ associée à f dans la nouvelle base $\mathcal{C}$. Concentrons-nous sur ses p premières colonnes. Pour j variant de 1 à p, son j-ième vecteur-colonne est, par définition, constitué des coordonnées du vecteur $f(\boldsymbol{u}_j)$ dans la base $\mathcal{C}$. On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{cc} f(\boldsymbol{u}_1)f(\boldsymbol{u}_2)\cdots f(\boldsymbol{u}_p)f(\boldsymbol{v}_1)\cdots f(\boldsymbol{v}_{n-p}) & \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \widetilde{\lambda} & 0 & & 0 & \\ 0 & \widetilde{\lambda} & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \mathrm{R} \\ 0 & \cdots & 0 & \widetilde{\lambda} & \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & \mathrm{S} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \end{array}\right) & \begin{array}{c} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_p \\ \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_{n-p} \end{array} \end{array}$$

où R est une matrice rectangulaire de type $(p, n - p)$ et S une matrice carrée d'ordre $n - p$. L'expression du polynôme caractéristique associé à f étant indépendante de la base choisie, on a :

$$P_f(\lambda) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) - \lambda\,\mathrm{I}_n\right).$$

En développant par rapport aux p premières colonnes, on obtient :

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) &= (\widetilde{\lambda} - \lambda)^p \det(\mathrm{S} - \lambda \mathrm{I}_{n-p}) \\ &= (-1)^p (\lambda - \widetilde{\lambda})^p \det(\mathrm{S} - \lambda \mathrm{I}_{n-p}). \end{aligned}$$

Ainsi, $(\lambda - \widetilde{\lambda})^p$ divise le polynôme P_f, ce qui termine la démonstration puisque $(\lambda - \widetilde{\lambda})^p$ ne divisant pas Q, cela signifie qu'il divise nécessairement $(\lambda - \widetilde{\lambda})^h$, d'où $p \leqslant h$. En particulier, si la multiplicité de $\widetilde{\lambda}$ est égale à 1, on en déduit immédiatement que $p = 1$. □

Comment déterminer la dimension d'un sous-espace propre ?

Dans le cas d'une valeur propre simple, c'est immédiat car le sous-espace propre associé est de dimension égale à 1. En revanche, dans le cas d'une valeur propre de multiplicité $h \geqslant 2$, cela l'est moins car la dimension du sous-espace propre associé n'est *a priori* pas égale à h. Pour déterminer $\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda)$, il suffit cependant d'appliquer le théorème du rang à l'endomorphisme $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$. On obtient alors la relation :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \mathrm{rg}\big(f - \lambda\,\mathrm{id}_E\big) + \dim_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)\big),$$

d'où, puisque $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$,

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \mathrm{rg}\big(f - \lambda\,\mathrm{id}_E\big).}$$

Le calcul du rang de $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ nous permet donc de trouver $\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda)$.

Détermination d'une base d'un sous-espace propre

Après avoir calculé la dimension du sous-espace propre E_λ, on en cherche une base. Si $p = \dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda)$ alors cela revient à chercher p vecteurs linéairement indépendants vérifiant l'équation vectorielle suivante :

$$\big(f - \lambda\,\mathrm{id}_E\big)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$$

ou, de manière équivalente (en se plaçant dans la base $\mathcal{B}$), vérifiant l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, la détermination d'une base du sous-espace propre E_λ se ramène à la résolution du système linéaire $n \times n$ homogène :

$$\text{(S)}\quad \left\{ \begin{array}{rcl} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

où les inconnues sont les scalaires x_1, x_2, $\ldots$, x_n et où les données sont les coefficients a_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, de la matrice A ainsi que la valeur propre λ que l'on a calculée au préalable. Bien évidemment, un tel système n'est pas de Cramer puisque son déterminant est nul (son rang est ainsi strictement inférieur au nombre d'équations). Il est en revanche compatible (car homogène), ce qui signifie qu'il possède des solutions autres que la solution banale.

12.3.4 Illustration avec un exemple

Reprenons l'exemple de l'endomorphisme f de E, avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, dont la matrice associée relativement à $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà vérifié que $\mathrm{Sp(A)} = \{-1, 2\}$ et que -1 est valeur propre simple et 2 valeur propre double (voir page 553).

Détermination du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = -1$

Puisque la valeur propre $\lambda_1 = -1$ est simple, son sous-espace propre E_{λ_1} est nécessairement de dimension égale à 1. Soient $\boldsymbol{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ un vecteur de E_{λ_1}, rapporté à la base $\mathcal{B}$, et X la matrice-colonne formée des coordonnées x_1, x_2, x_3. On doit résoudre $(\mathrm{A} - (-1)\mathrm{I}_3)\,\mathrm{X} = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les scalaires x_1, x_2 et x_3 vérifient le système linéaire 3×3 homogène suivant :

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, ce système est équivalent au système échelonné suivant :

$$(\mathrm{S}') \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Son rang est égal à 2. Ainsi, $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A} - (-1)\mathrm{I}_3) = 2$, d'où $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) = 3 - 2 = 1$. On retrouve bien que le sous-espace propre E_{λ_1} est de dimension égale à 1. En éliminant dans le système (S′) la dernière équation et en faisant passer aux seconds membres les termes comportant l'unique inconnue non principale x_3, on se ramène au système suivant (contrairement au système (S), le système (S″) est de Cramer) :

$$(\mathrm{S}'') \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & x_2 & = & x_3 \\ & & 3x_2 & = & 3x_3 \end{array} \right.$$

On obtient $x_1 = x_3$ et $x_2 = x_3$. Ainsi, un vecteur propre $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de A associé à λ_1 s'écrit :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } x_3 \in \mathbb{R}.$$

Finalement, un vecteur propre $\boldsymbol{x}$ de f associé à λ_1 s'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{x} = x_3\boldsymbol{e}_1 + x_3\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \quad \text{avec} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

On obtient le vecteur propre $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ en choisissant $x_3 = 1$. Le sous-espace propre associé est une droite vectorielle. Il est donné par $E_{\lambda_1} = \mathbb{R}\boldsymbol{u}_1$.

Détermination du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 2$

La valeur propre $\lambda_2 = 2$ est une valeur propre multiple d'ordre 2. On sait donc que $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 1$ ou 2. Un vecteur propre de A vérifie $(\mathrm{A} - 2\,\mathrm{I}_3)\mathrm{X} = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De manière évidente, $\mathrm{rg}(\mathrm{A} - 2\,\mathrm{I}_3) = 1$, d'où $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 3 - 1 = 2$. Les trois équations du système sont identiques. On se ramène à une seule équation à trois inconnues, qui se résout en fixant deux des trois variables et en résolvant par rapport à la variable restante. En fixant x_2 et x_3 on voit que la solution de l'équation

$$-x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

est $x_1 = -(x_2 + x_3)$. Ainsi, un vecteur propre X de A associé à λ_2 s'écrit :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_2 + x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad x_2 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Un vecteur propre $\boldsymbol{x}$ de f associé à λ_2 s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= -(x_2 + x_3)\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \\ &= x_2(-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + x_3(-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) \quad \text{avec} \quad x_2 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_3 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ce qui montre que les deux vecteurs $-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ (correspondant à $x_2 = 1$ et $x_3 = 0$) et $-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$ (correspondant à $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$) engendrent E_{λ_2}. Ces deux vecteurs forment une base de E_{λ_2} car le sous-espace E_{λ_2} est de dimension 2. En choisissant $x_2 = 0$ et $x_3 = -1$ d'une part, et $x_2 = 1$ et $x_3 = -1$ d'autre part, on obtient les deux vecteurs propres $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$ et $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$. Ces deux vecteurs forment aussi une base de E_{λ_2}. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est donc un plan vectoriel. Il est donné par

$$E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3).$$

Pour faire la transition avec le paragraphe suivant, on remarque que

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1})}_{=1} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2})}_{=2} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(E)}_{=3}.$$

Puisque $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$, on en déduit que les deux sous-espaces sont supplémentaires dans E, ce qu'on écrit $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.

12.4 Diagonalisation et trigonalisation

12.4.1 Diagonalisation d'un endomorphisme

Comme nous l'avons vu au paragraphe 12.3.2, tous les endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E n'admettent pas nécessairement de valeurs propres (et donc de vecteurs propres). Cependant, s'ils existent, les vecteurs propres d'un endomorphisme f associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre dans l'espace E (voir les commentaires à la suite de la proposition 12.3). Cela fait d'une famille de vecteurs propres un « bon candidat » pour constituer une base de E puisque, pour être une base, il ne lui reste plus qu'à être génératrice de l'espace E tout entier. Et si c'est le cas, on dira que f est diagonalisable.

Définition 12.7 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie ou infinie. Un endomorphisme f de E est dit diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f. Diagonaliser f, c'est trouver une telle base.*

Quel intérêt avons-nous à diagonaliser un endomorphisme ?

Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un espace vectoriel E de dimension n et considérons un endomorphisme f de E. Supposons f diagonalisable. D'après la définition 12.7, cela signifie qu'il existe une base notée $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ constituée de vecteurs propres de f. Écrivons la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$. Par définition, son j-ième vecteur-colonne est constitué des coordonnées de $f(\boldsymbol{u}_j)$ dans $\mathcal{C}$. Or, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, …, $\boldsymbol{u}_n$ sont des vecteurs propres de f. Il existe donc n valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités et notées λ_1, λ_2, …, λ_n (elles appartiennent toutes à $\mathbb{K}$) telles que

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1, \quad f(\boldsymbol{u}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{u}_2, \quad \ldots, \quad f(\boldsymbol{u}_n) = \lambda_n \boldsymbol{u}_n.$$

On en déduit alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{cccc} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & & f(\boldsymbol{u}_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n \end{array} \end{array}.$$

C'est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres (distinctes ou confondues) λ_1, λ_2, …, λ_n de f. On la note aussi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \overset{not.}{=} \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,.$$

En notant $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage d'une base (quelconque) $\mathcal{B}$ de E à la base des vecteurs propres $\mathcal{C}$, on a la relation :

$$\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{P}.$$

Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, la matrice associée à f dans $\mathcal{B}$ est ainsi semblable à une matrice diagonale.

En résumé, si un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ alors sa matrice associée dans la base formée de ses vecteurs propres est diagonale et toute matrice associée à f relativement à une base (quelconque) de E est semblable à une matrice diagonale.

On a la définition suivante.

DÉFINITION 12.8 *Soit* A *une matrice de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. *On dit que* A *est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible* P *d'ordre* n *sur* $\mathbb{K}$, *et s'il existe une matrice diagonale* D *d'ordre* n *sur* $\mathbb{K}$, *telles que*

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Diagonaliser A, *c'est trouver* D.

Dire qu'une matrice rectangulaire est diagonalisable n'a pas de sens ! Il faut qu'elle soit carrée. Comme le montre l'exemple qui suit, la manière de diagonaliser une matrice (qui est diagonalisable) n'est pas unique.

Exemple Soient la matrice carrée A appartenant à $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et les trois vecteurs colonnes U_1, U_2 et U_3 appartenant à $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a déjà vérifié que U_1 est un vecteur propre de A associé à $\lambda_1 = -1$ et que U_2, U_3 sont deux vecteurs propres de A associés à $\lambda_2 = 2$ (voir page 559). Considérons les trois matrices P, Q et R de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathrm{U}_1 & \mathrm{U}_2 & \mathrm{U}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathrm{U}_2 & \mathrm{U}_1 & \mathrm{U}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathrm{U}_2 & \mathrm{U}_3 & \mathrm{U}_1 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors les trois égalités matricielles suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{diag}(-1,2,2)} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=\operatorname{diag}(2,-1,2)} = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Q}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Q}},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=\operatorname{diag}(2,2,-1)} = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{R}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{R}}.$$

Remarque Soit A une matrice d'ordre n sur $\mathbb{K}$. Supposons A diagonalisable. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ désignent les valeurs propres de A, distinctes deux à deux et de multiplicités respectives $h_1, \ldots, h_m$, alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, la valeur propre λ_i est présente h_i fois sur la diagonale principale de la matrice D. Le rang de A est alors égal au nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leurs multiplicités). De plus, puisque A et D sont semblables, $\det(\mathrm{D}) = \det(\mathrm{A})$. Par conséquent,

$$\det(\mathrm{A}) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{h_i} = (\underbrace{\lambda_1 \times \ldots \times \lambda_1}_{h_1 \text{ fois}}) \times \ldots \times (\underbrace{\lambda_m \times \ldots \times \lambda_m}_{h_m \text{ fois}}).$$

Puisque A et D sont semblables, $\mathrm{Tr}(\mathrm{D}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A})$ (voir en page 473). Ainsi,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{m} h_i \lambda_i = (\underbrace{\lambda_1 + \ldots + \lambda_1}_{h_1 \text{ fois}}) + \ldots + (\underbrace{\lambda_m + \ldots + \lambda_m}_{h_m \text{ fois}}).$$

12.4.2 Caractérisation de la diagonalisation en dimension finie

Proposition 12.6 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et f un endomorphisme de E. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de f et $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_m}$ les sous-espaces propres correspondants. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable est que*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_1}) + \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_2}) + \ldots + \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_m}) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

Démonstration $\trianglerighteq$ Soient $n_i = \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_i})$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. Supposons f diagonalisable et montrons que $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$. Puisque f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{C}$ de vecteurs propres de f. La matrice associée à f dans cette base est diagonale. On s'en sert pour calculer le polynôme caractéristique P_f. En notant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes, de multiplicités respectives $h_1, h_2, \ldots, h_m$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_f(\lambda) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) - \lambda\, \mathrm{I}_n\right) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda)^{h_i},$$

d'où $h_1+h_2+\ldots+h_m=n$ puisque P_f est un polynôme de degré n. Il est alors suffisant de montrer que $n_i = h_i$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ car de l'égalité $h_1+h_2+\ldots+h_m = n$, on pourra en déduire l'égalité recherchée :

$$n_1+n_2+\ldots+n_m=n.$$

- Pour tout i appartenant à $\{1,2,\ldots,m\}$, les vecteurs propres de $\mathcal{C}$ correspondant à la valeur propre λ_i (il y en a h_i) forment une famille libre. On a donc nécessairement :

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,m\} \quad n_i \geqslant h_i. \tag{5}$$

- D'après la proposition 12.5, la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre à laquelle il est associé. On a donc aussi :

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,m\} \quad n_i \leqslant h_i. \tag{6}$$

De (5) et (6) on déduit que $n_i = h_i$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,m\}$.

$\trianglerighteq$ Montrons à présent la réciproque. Supposons que $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$ et montrons que f est diagonalisable. On extrait une base de chacun des sous-espaces propres E_{λ_1}, E_{λ_2}, ..., E_{λ_m}. Soient

$$\mathcal{C}_1 = \big(\boldsymbol{u}_i^{(1)}\big)_{1\leqslant i\leqslant n_1}, \quad \mathcal{C}_2 = \big(\boldsymbol{u}_i^{(2)}\big)_{1\leqslant i\leqslant n_2}, \quad \ldots, \quad \mathcal{C}_m = \big(\boldsymbol{u}_i^{(m)}\big)_{1\leqslant i\leqslant n_m}$$

des bases respectives des sous-espaces E_{λ_1}, E_{λ_2}, ..., E_{λ_m}. Tous les vecteurs appartenant à ces bases sont des vecteurs propres. On considère la famille $\mathcal{C}$ que l'on obtient en réunissant l'ensemble des m bases $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_m$:

$$\mathcal{C} = \Big(\underbrace{\boldsymbol{u}_1^{(1)},\boldsymbol{u}_2^{(1)},\ldots,\boldsymbol{u}_{n_1}^{(1)}}_{\in E_{\lambda_1}},\underbrace{\boldsymbol{u}_1^{(2)},\boldsymbol{u}_2^{(2)},\ldots,\boldsymbol{u}_{n_2}^{(2)}}_{\in E_{\lambda_2}},\ldots,\underbrace{\boldsymbol{u}_1^{(m)},\boldsymbol{u}_2^{(m)},\ldots,\boldsymbol{u}_{n_m}^{(m)}}_{\in E_{\lambda_m}}\Big).$$

C'est une famille libre dans E. Nous avons déjà vérifié ce point au paragraphe 12.2.2 (c'est une conséquence de la proposition 12.3). Or, $\mathrm{card}(\mathcal{C}) = \mathrm{card}(\mathcal{C}_1)+\mathrm{card}(\mathcal{C}_2)+\ldots+\mathrm{card}(\mathcal{C}_m) = n_1+n_2+\ldots+n_m$. En tenant compte de notre hypothèse $(n_1+n_2+\ldots+n_m=n)$, on obtient $\mathrm{card}(\mathcal{C}) = n$. Puisque toute famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n est une base, la famille (de vecteurs propres) $\mathcal{C}$ ainsi construite est effectivement une base de E ; cela termine la démonstration. □

Remarque Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E soit diagonalisable est que l'espace E soit somme directe des sous-espaces propres E_{λ_1}, E_{λ_2}, ..., E_{λ_m} :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_m}.$$

On déduit immédiatement de la proposition 12.6 une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Corollaire 12.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Si un endomorphisme f de E possède exactement n valeurs propres distinctes deux à deux, alors f est diagonalisable*

Démonstration Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Supposons les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distinctes deux à deux. Ce sont donc nécessairement des valeurs propres simples de f et, d'après la proposition 12.5, la dimension de chaque sous-espace propre est égale à 1. On a ainsi :

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_1})}_{=1} + \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_2})}_{=1} + \ldots + \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_n})}_{=1} = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(E)}_{=n},$$

et, d'après la proposition 12.6, cela nous permet de conclure que f est diagonalisable. □

Comme l'illustre le deuxième exemple ci-après, la condition donnée dans le corollaire 12.2 est suffisante mais non nécessaire.

Exemples

1. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

La matrice A possède ainsi une valeur propre simple ($\lambda_1 = 3$; on a donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) = 1$) et une valeur propre double ($\lambda_2 = 2$). On vérifie facilement que $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\big((1,1,-2)\big)$ et $E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\big((1,0,0)\big)$ où nous nous sommes placés dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On a donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 1$. La matrice A n'est pas diagonalisable car

$$\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) + \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 2 \neq \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3).$$

2. Reprenons l'exemple de la matrice A de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ (valeur propre simple) et $\lambda_2 = 2$ (valeur propre double) et $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$ et $E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\big((1,0,-1),(0,1,-1)\big)$. Nous nous sommes encore placés dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Cette matrice est diagonalisable (nous l'avons d'ailleurs diagonalisée suivant trois manières différentes dans un exemple précédent) car

$$\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) + \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 1 + 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3).$$

On utilise aussi souvent la caractérisation suivante.

COROLLAIRE 12.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n et f un endomorphisme de E. Soient λ_1, λ_2, ..., λ_m les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $h_1, h_2, \ldots, h_m$ et $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_m}$ les sous-espaces propres correspondants. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable est que*

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + \ldots + h_m = n \\ \forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_i}) = h_i \end{cases}$$

EXERCICE 3 On considère dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ les deux matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 - Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés des matrices A et B. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?
2 - Mêmes questions si on considère A et B dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.

Tout endomorphisme est-il diagonalisable ?

On se convainc facilement que la réponse à cette question est « non ». En effet, d'après le corollaire 12.3, pour qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E soit diagonalisable, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. le nombre de ses valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités) est égal à la dimension de E ;
2. la dimension de chacun des sous-espaces propres est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

Il existe des endomorphismes pour lesquels l'une ou l'autre de ces deux conditions (ou les deux à la fois) n'est pas vérifiée (voir l'exemple précédent et l'exercice 3). Néanmoins, nous pouvons remarquer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors la première condition (celle portant sur le nombre de valeurs propres) est automatiquement vérifiée puisque tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$. L'obstruction à la diagonalisation d'un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ne pourra apparaître que si la deuxième condition (celle portant sur la dimension des sous-espaces propres) n'est pas vérifiée.

Il est intéressant de noter que certaines catégories d'endomorphismes ne sont jamais diagonalisables. C'est le cas des endomorphismes nilpotents, à l'exception de l'application nulle. Ce point est développé ci-après.

Endomorphisme nilpotent

Proposition 12.7 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Supposons f non identiquement nul. Si f est nilpotent alors f n'est pas diagonalisable.*

Démonstration Utilisons un raisonnement par contraposée. Supposons f à la fois nilpotent et diagonalisable et déduisons-en que f est identiquement nul. Soient $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Notons $\mathrm{N} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice associée à f dans $\mathcal{B}$. D'après notre hypothèse, N est à la fois nilpotente et diagonalisable. Puisqu'elle est diagonalisable, il existe une matrice inversible P d'ordre n sur $\mathbb{K}$ telle que

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{N}\mathrm{P}$$

avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Les scalaires λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n sont les valeurs propres (distinctes ou confondues) de N. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient :

$$\mathrm{N} = \mathrm{P}\mathrm{D}\mathrm{P}^{-1}$$

et on montre (par récurrence sur l'entier k) que $\mathrm{N}^k = \mathrm{P}\mathrm{D}^k\mathrm{P}^{-1}$ ou encore $\mathrm{D}^k = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{N}^k\mathrm{P}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque N est nilpotente, $\mathrm{N}^p = 0$ pour un certain entier p non nul. Il vient alors que $\mathrm{D}^p = 0$, autrement dit que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. La matrice diagonale D est donc nulle. On en déduit que la matrice N est nulle, ou, de manière équivalente, que l'endomorphisme f est identiquement nul. □

Décomposition de Dunford

L'importance de l'étude des endomorphismes nilpotents apparaît clairement dans la proposition suivante que nous admettons.

Proposition 12.8 (Décomposition de Dunford)
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ (ce qui est toujours le cas lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors il existe un unique couple (g, h) d'endomorphismes de E tel que

$$f = g + h \qquad \textit{et} \qquad g \circ h = h \circ g$$

avec g diagonalisable et h nilpotent. Cette décomposition est connue sous le nom de décomposition de Dunford.

Les deux endomorphismes g et h sont définis à partir de f. L'endomorphisme g (respectivement h) est appelé partie diagonalisable (resp. partie nilpotente) de f. Il est à noter que lorsque le corps de référence est $\mathbb{C}$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable est que sa partie nilpotente soit l'endomorphisme nul.

Exemple Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A définie par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La partie diagonalisable g et la partie nilpotente h de f sont les endomorphismes dont les matrices respectives dans la base canonique sont G et H avec

$$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{H} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous verrons ultérieurement (voir page 576) suivant quelle méthode nous avons obtenu les expressions des deux matrices G et H. Nous pouvons néanmoins vérifier les points suivants.

- La matrice A se décompose comme la somme des deux matrices G et H, c'est-à-dire : $\mathrm{A} = \mathrm{G} + \mathrm{H}$.
- Déterminons le polynôme caractéristique de G. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En développant par rapport à la première ligne,

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(3-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}}_{=\lambda(\lambda-1)} - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}}_{=-2(\lambda-1)} - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}_{=4(\lambda-1)}.$$

  Ainsi, le polynôme caractéristique de G s'écrit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P_{\mathrm{G}}(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

  La matrice G possède une valeur propre double ($\lambda_1 = 1$) et une valeur propre simple ($\lambda_2 = 2$). Elle est diagonalisable puisque $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) = 2$ et $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 1$.
- La matrice H est nilpotente puisque $\mathrm{H}^2 = 0$.
- Le produit des deux matrices G et H est commutatif : $\mathrm{G} \times \mathrm{H} = \mathrm{H} \times \mathrm{G}$.

12.4.3 Trigonalisation d'un endomorphisme

DÉFINITION 12.9 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie. Un endomorphisme f de E est dit trigonalisable (on dit aussi triangularisable) s'il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de f est triangulaire. Trigonaliser f, c'est trouver une telle base.*

Remarquons que cette définition ne précise pas si la matrice triangulaire doit être supérieure ou inférieure. À ce propos, rappelons que si $\mathcal{B}$ désigne une base de E et si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure alors, en désignant par $\mathcal{C}$ la base obtenue à partir de $\mathcal{B}$ en inversant l'ordre des vecteurs, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ est triangulaire inférieure. On peut donc toujours supposer, sans restriction aucune, que la matrice triangulaire dont il est question dans la définition 12.9, est supérieure.

DÉFINITION 12.10 *Une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire s'il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et s'il existe une matrice triangulaire $\mathrm{T} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}.$$

Trigonaliser A, c'est trouver T.

Donnons à présent une caractérisation d'un endomorphisme trigonalisable en dimension finie.

PROPOSITION 12.9 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme f de E soit trigonalisable est que son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration Désignons par n la dimension de l'espace E. Montrons dans un premier temps que la condition est nécessaire. Supposons f trigonalisable et déduisons-en que son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Puisque, par hypothèse, l'endomorhisme f est trigonalisable, il existe une base $\mathcal{C}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Utilisons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ pour calculer le polynôme caractéristique de f. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_f(\lambda) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) - \lambda \mathrm{I}_n\big) = \prod_{i=1}^{n} (t_{ii} - \lambda)$$

puisque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ est triangulaire, ce qui montre que P_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Montrons à présent que la condition est suffisante. Supposons le polynôme caractéristique de f scindé sur $\mathbb{K}$ et montrons qu'il existe alors une base de E relativement à laquelle la matrice associée à f est triangulaire. Utilisons pour cela un raisonnement par récurrence sur la dimension n de l'espace E. Le résultat est immédiat pour $n = 1$. Supposons-le vérifié pour les espaces de dimension $n-1$ avec $n \geqslant 2$. Soient E un espace de dimension n et f un endomorphisme de E. Le fait que P_f soit scindé sur $\mathbb{K}$ nous assure que f possède au moins une valeur propre $\lambda_1 \in \mathbb{K}$. Désignons par $\boldsymbol{u}_1$ un vecteur propre de f associé à λ_1. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $n-1$ vecteurs $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$, ..., $\boldsymbol{w}_n$ de E tels que la famille $\mathcal{B}_E = \big(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \dots, \boldsymbol{w}_n\big)$ est une base de E. Écrivons la matrice associée à f relativement à cette base. Pour tout $j \in \{2, 3, \dots, n\}$, notons α_j, m_{2j}, m_{3j}, ..., m_{nj} les coordonnées du vecteur $f(\boldsymbol{w}_j)$ dans $\mathcal{B}_E$:

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{w}_2) & = & \alpha_2\boldsymbol{u}_1 + m_{22}\boldsymbol{w}_2 + m_{32}\boldsymbol{w}_3 + \dots + m_{n2}\boldsymbol{w}_n \\ f(\boldsymbol{w}_3) & = & \alpha_3\boldsymbol{u}_1 + m_{23}\boldsymbol{w}_2 + m_{33}\boldsymbol{w}_3 + \dots + m_{n3}\boldsymbol{w}_n \\ & & \\ f(\boldsymbol{w}_n) & = & \alpha_n\boldsymbol{u}_1 + m_{2n}\boldsymbol{w}_2 + m_{3n}\boldsymbol{w}_3 + \dots + m_{nn}\boldsymbol{w}_n \end{cases}$$

On a aussi $f(\boldsymbol{u}_1) = \lambda_1\boldsymbol{u}_1$. On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) = \left(\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \hline 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m_{n2} & m_{n3} & & m_{nn} \end{array}\right).$$

Soit F le sous-espace de E engendré par les $n-1$ vecteurs $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$, ..., $\boldsymbol{w}_n$. Ces derniers étant linéairement indépendants, la dimension de F est égale à $n-1$ et une base de F est la famille $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \dots, \boldsymbol{w}_n)$. À l'évidence, les deux sous-espaces $\mathbb{K}\boldsymbol{u}_1$ et F sont supplémentaires dans E. Intéressons-nous à l'endomorphisme de F, noté g, dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}_F$ est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(g) = \begin{pmatrix} m_{22} & m_{23} & & m_{2n} \\ m_{32} & m_{33} & & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n2} & m_{n3} & & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice carrée d'ordre $n-1$. On se convainc facilement que g peut s'écrire comme suit : $g = p \circ f|_F$ où $f|_F : F \longrightarrow E$ est la restriction de f au sous-espace F, et où $p : E \longrightarrow F$ est l'application (linéaire) qui à un vecteur de E associe son composant dans F. Le polynôme caractéristique de g est scindé puisque celui de f l'est. Utilisons notre hypothèse de récurrence : il existe une base de F, notée $\mathcal{C}_F = (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_F}(g) = \begin{pmatrix} t_{22} & t_{23} & & t_{2n} \\ 0 & t_{33} & & t_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice d'ordre $n-1$ triangulaire supérieure. Revenons à présent à l'espace E. Considérons la nouvelle base $\mathcal{C}_E$ que nous obtenons en complétant le vecteur $\boldsymbol{u}_1$ des $n-1$ vecteurs $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, …, $\boldsymbol{u}_n$, c'est-à-dire considérons la base : $\mathcal{C}_E = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \dots, \boldsymbol{u}_n)$. Écrivons enfin la matrice associée à f relativement à cette nouvelle base. Puisque $\mathbb{K}\boldsymbol{u}_1$ et F sont supplémentaires dans E, pour tout $j \in \{2, 3, \dots, n\}$, il existe un unique $\beta_j \in \mathbb{K}$ tel que

$$f(\boldsymbol{u}_j) = \underbrace{\beta_j \boldsymbol{u}_1}_{\in \mathbb{K}\boldsymbol{u}_1} + \underbrace{p(f(\boldsymbol{u}_j))}_{\in F}.$$

Or, $p(f(\boldsymbol{u}_j)) = g(\boldsymbol{u}_j)$ pour $j \in \{2, 3, \dots, n\}$. Ainsi, en tenant compte de l'expression de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_F}(g)$, on obtient :

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{u}_2) & = & \beta_2 \boldsymbol{u}_1 + t_{22}\boldsymbol{u}_2 \\ f(\boldsymbol{u}_3) & = & \beta_3 \boldsymbol{u}_1 + t_{23}\boldsymbol{u}_2 + t_{33}\boldsymbol{u}_3 \\ & & \\ f(\boldsymbol{u}_n) & = & \beta_n \boldsymbol{u}_1 + t_{2n}\boldsymbol{u}_2 + t_{3n}\boldsymbol{u}_3 + \ldots + t_{nn}\boldsymbol{u}_n \end{cases}$$

On en déduit finalement l'expression de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E}(f)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E}(f) = \left(\begin{array}{c|ccccc} \lambda_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_n \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & t_{nn} \end{array}\right).$$

C'est une matrice triangulaire (supérieure), ce qui termine la récurrence. □

Remarque Si un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est trigonalisable, alors les éléments se trouvant sur la diagonale principale de T sont nécessairement les valeurs propres de f, et, en notant λ_1, λ_2, …, λ_m ses valeurs propres distinctes deux à deux, de multiplicités respectives h_1, h_2, …, h_m, chaque valeur propre λ_i avec $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, y figure h_i fois.

Tout endomorphisme est-il trigonalisable ?

La réponse à cette question est « non » si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et « oui » si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En effet, d'après la proposition 12.9, pour qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E soit trigonalisable, il faut et il suffit que son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$, autrement dit, que le nombre de ses valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités) soit égal à la dimension de E. Il est clair que cette condition n'est pas toujours vérifiée si le corps de référence est $\mathbb{R}$ (par exemple, c'est le cas de la matrice $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de l'exercice 3). En revanche, elle est automatiquement vérifiée lorsque l'on travaille dans $\mathbb{C}$ puisque tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$. Ainsi, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (ou toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$) est trigonalisable.

En pratique, pour trigonaliser un endomorphisme ou une matrice, on procèdera en suivant pas à pas les étapes de la démonstration de la proposition 12.9. L'exemple traité au paragraphe suivant illustre cette remarque.

12.4.4 Illustration avec un exemple

Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui à (x_1, x_2, x_3) associe

$$\big(-2x_1 - x_2 + 2x_3, -15x_1 - 6x_2 + 11x_3, -14x_1 - 6x_2 + 11x_3\big).$$

Cet endomorphisme est-il trigonalisable ? Pour répondre à cette question, nous choisissons de munir l'espace $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, et d'effectuer la recherche des valeurs propres dans cette base. Il est à noter que le fait d'avoir choisi la base canonique est tout à fait arbitraire, toute autre base de l'espace $\mathbb{R}^3$ conviendrait. Notons A la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}_c$. Elle s'écrit :

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En développant par rapport à la première ligne,

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 2 \\ -15 & -6-\lambda & 11 \\ -14 & -6 & 11-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-2-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} -6-\lambda & 11 \\ -6 & 11-\lambda \end{vmatrix}}_{=\lambda(\lambda-5)} + \underbrace{\begin{vmatrix} -15 & 11 \\ -14 & 11-\lambda \end{vmatrix}}_{=15\lambda-11} + 2\underbrace{\begin{vmatrix} -15 & -6-\lambda \\ -14 & -6 \end{vmatrix}}_{=6-14\lambda}.$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P_f(\lambda) = \det\big(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3\big) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda-1)^3.$$

L'endomorphisme f est trigonalisable (puisque son polynôme caractéristique est scindé) et $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1\}$. Remarquons que la matrice A n'est certainement pas diagonalisable, car si elle l'était, elle serait semblable à la matrice identité d'ordre 3, et donc nécessairement égale à I_3, ce qui, de toute évidence, n'est pas le cas. Cherchons à présent les vecteurs propres de f associés à la valeur propre triple $\lambda = 1$. Effectuons les calculs dans la base canonique $\mathcal{B}_c$. Soit $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ un vecteur propre rapporté à $\mathcal{B}_c$. On doit résoudre :

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -15 & -7 & 11 \\ -14 & -6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient $x_1 = x_3/2$ et $x_2 = x_3/2$ avec $x_3 \in \mathbb{R}$. En choisissant $x_3 = 2$, on obtient le vecteur propre $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1, 2)$, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3. \tag{7}$$

Il s'agit à présent de compléter le vecteur $\boldsymbol{u}_1$ par deux vecteurs de telle sorte que l'on obtienne une base de $\mathbb{R}^3$. Il y a une infinité de manières d'y arriver. Par souci de simplicité, nous choisissons de compléter $\boldsymbol{u}_1$ par les deux vecteurs $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous obtenons la nouvelle base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Écrivons la matrice représentative de f dans cette nouvelle base. En utilisant l'égalité $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$ (qui se déduit de (7)), on obtient d'une part :

$$f(\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2 - 6\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{u}_1 - 5\boldsymbol{e}_2 - 4\boldsymbol{e}_3$$

et d'autre part :

$$f(\boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{e}_1 + 11\boldsymbol{e}_2 + 11\boldsymbol{e}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 + 9\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3.$$

D'où, puisque $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1$,

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array}.$$

Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les deux vecteurs linéairement indépendants $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$. La famille $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ constitue une base de F. On s'intéresse maintenant à l'endomorphisme g de F tel que

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g(\boldsymbol{e}_2) & g(\boldsymbol{e}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array}.$$

Le but est maintenant de trigonaliser g. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P_g(\lambda) = \det\big(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}(g) - \lambda \mathrm{I}_2\big) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Cherchons les vecteurs propres de g associés à la valeur propre double $\lambda = 1$. Nous effectuons les calculs dans la base $\mathcal{B}_F$. Soit $x_2 \boldsymbol{e}_2 + x_3 \boldsymbol{e}_3$ un vecteur propre de g associé à la valeur propre $\lambda = 1$, rapporté à la base $\mathcal{B}_F$. Trouver x_2 et x_3 revient à résoudre :

$$\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient facilement $x_2 = 3x_3/2$ avec $x_3 \in \mathbb{R}$. Ainsi, en choisissant $x_3 = 2$, on obtient le vecteur propre

$$\boldsymbol{u}_2 = 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \tag{8}$$

c'est-à-dire $\boldsymbol{u}_2 = (0,3,2)$ puisque $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$ et $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$. Écrivons à présent la matrice représentative de g dans la nouvelle base $\mathcal{C}_F = (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{e}_3)$ du sous-espace F. D'une part, $g(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_2$ puisque $\boldsymbol{u}_2$ est un vecteur propre de g associé à la valeur propre $\lambda = 1$. D'autre part, on déduit de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(g)$ que

$$g(\boldsymbol{e}_3) = 9\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3$$

Or, $\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{u}_2 - \dfrac{2}{3}\boldsymbol{e}_3$ (cela se déduit de (8)). Ainsi,

$$g(\boldsymbol{e}_3) = 9\Big(\frac{1}{3}\boldsymbol{u}_2 - \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_3\Big) + 7\boldsymbol{e}_3 = 3\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

On obtient ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_F}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g(\boldsymbol{u}_2) & g(\boldsymbol{e}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array}.$$

Revenons maintenant à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ et écrivons sa matrice représentative dans la nouvelle base $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{e}_3)$. On vérifie que l'on a :

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}_2) &= f(3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3) = 3f(\boldsymbol{e}_2) + 2f(\boldsymbol{e}_3) \\ &= 3(-\boldsymbol{u}_1 - 5\boldsymbol{e}_2 - 4\boldsymbol{e}_3) + 2(2\boldsymbol{u}_1 + 9\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3) \\ &= \boldsymbol{u}_1 + \underbrace{3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3}_{=\boldsymbol{u}_2} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \end{aligned}$$

$$f(\boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{u}_1 + \underbrace{9\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3}_{=3\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{e}_3} = 2\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

D'où, puisque $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array}.$$

C'est une matrice triangulaire supérieure. Notons-la T. On a alors la relation matricielle : $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ où P désigne la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ à la base $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{e}_3)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{T}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}}.$$

EXERCICE 4 Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

1 - Calculer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2 - Vérifier que $\boldsymbol{u}_1 = (-4, 1, 2)$ et $\boldsymbol{u}_2 = (-2, 1, 1)$ sont deux vecteurs propres de l'application linéaire canoniquement associée à A.
3 - Soit $\boldsymbol{v} = (-1, \frac{1}{2}, 1)$. Montrer que $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4 - Vérifier que A est semblable à la matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12.4.5 Complément : réduction de Jordan

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Notons λ_1, λ_2, …, λ_m ses valeurs propres distinctes deux à deux, de multiplicités respectives h_1, h_2, …, h_m. On peut affiner le résultat de la proposition 12.9 et montrer que sous la même condition, à savoir si le polynôme caractéristique de f est scindé, autrement dit si $h_1 + h_2 + \ldots + h_m = n$, alors il existe une base $\mathcal{C}$ de E relativement à laquelle la matrice associée à f s'écrit sous la forme suivante :

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_m \end{array}\right)$$

où, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, la sous-matrice J_i est carrée, d'ordre h_i, à coefficients dans $\mathbb{K}$ et est définie par

$$J_i = \lambda_i \, I_{h_i} + N_i$$

où I_{h_i} désigne la matrice identité d'ordre h_i et où la matrice N_i est définie par

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1^{(i)} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2^{(i)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & \epsilon_{h_i-1}^{(i)} \\ 0 & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les scalaires $\epsilon_1^{(i)}$, $\epsilon_2^{(i)}$, …, $\epsilon_{h_i-1}^{(i)}$ valent 0 ou 1. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, la matrice N_i est nilpotente puisqu'elle est triangulaire supérieure stricte (on utilise ici le résultat établi au chapitre 10 dans l'exercice 3, page 443). La matrice J est une matrice carrée, d'ordre n, triangulaire supérieure. Elle a une forme remarquable, dite diagonale par blocs. Les blocs diagonaux sont les sous-matrices $\mathrm{J}_1, \ldots, \mathrm{J}_m$ d'ordres respectifs $h_1, \ldots, h_m$ (non nécessairement égaux) et les blocs hors-diagonaux sont des sous-matrices (non nécessairement carrées) à coefficients nuls. On convient de noter J comme suit :

$$\mathrm{J} = \operatorname{diag}\big(\mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2, \ldots, \mathrm{J}_m\big).$$

La matrice J est appelée *forme réduite de Jordan* associée à f, du nom du mathématicien français Camille JORDAN (1838 – 1922). La démonstration de ce résultat est admise.

Il est à noter que la réduction de Jordan fournit une version matricielle (représentation dans la base $\mathcal{C}$) de la décomposition de Dunford (voir la proposition 12.8, page 567). En effet, on remarque que l'on peut décomposer la matrice J comme la somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice triangulaire supérieure stricte N :

$$\mathrm{J} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$$

où les deux matrices carrées D et N sont diagonales par blocs :

$$\mathrm{D} = \operatorname{diag}\big(\lambda_1 \mathrm{I}_{h_1}, \lambda_2 \mathrm{I}_{h_2}, \ldots, \lambda_m \mathrm{I}_{h_m}\big) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N} = \operatorname{diag}\big(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \ldots, \mathrm{N}_m\big).$$

Pour chaque entier i compris entre 1 et m, les blocs $\lambda_i \mathrm{I}_{h_i}$ et N_i étant de même taille, leur produit matriciel est bien défini. On vérifie :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \quad \Big(\big(\lambda_i \mathrm{I}_{h_i}\big) \times \mathrm{N}_i = \mathrm{N}_i \times \big(\lambda_i \mathrm{I}_{h_i}\big) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}_i^{h_i} = 0_{h_i} \Big).$$

On en déduit que le produit des deux matrices D et N est commutatif, $\mathrm{D} \times \mathrm{N} = \mathrm{N} \times \mathrm{D}$, et que la matrice N est nilpotente, $\mathrm{N}^p = 0$ avec $p = \max\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$. Ainsi, la matrice D (respectivement la matrice N) est la représentation matricielle dans $\mathcal{C}$ de la partie diagonalisable g (resp. de la partie nilpotente h) de l'endomorphisme f.

Exemple Nous reprenons ici l'exemple de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ (voir page 568) dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considérons la nouvelle base $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ où $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,2)$, $\boldsymbol{u}_2 = (-1,2,0)$ et $\boldsymbol{u}_3 = (0,1,1)$. On vérifie :

$$f(\boldsymbol{u}_1) = 2\boldsymbol{u}_1, \quad f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_2 \qquad \text{et} \qquad f(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3.$$

La matrice représentative de f relativement à la base $\mathcal{C}$ s'écrit ainsi :

$$\mathrm{J} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \operatorname{diag}\left((2), \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

C'est la forme réduite de Jordan associée à f. Elle se décompose comme suit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{J}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{N}}.$$

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{C}$. On a $\mathrm{J} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, d'où

$$\mathrm{A} = \mathrm{PJP}^{-1} = \mathrm{P}(\mathrm{D}+\mathrm{N})\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PDP}^{-1} + \mathrm{PNP}^{-1}.$$

Posons $\mathrm{G} = \mathrm{PDP}^{-1}$ et $\mathrm{H} = \mathrm{PNP}^{-1}$. On vérifie :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{G}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}^{-1}},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{H}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{N}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}^{-1}}.$$

On retrouve les expressions de G et H données en page 567. La matrice A se décompose de la façon suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{G}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{H}}.$$

La matrice G (respectivement la matrice H) est la représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}_c$ de la partie diagonalisable g (resp. de la partie nilpotente h) de l'endomorphisme f.

12.5 Exercices de synthèse

Exercice 5 *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui à au vecteur (x_1, x_2, x_3) associe le vecteur $(4x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 - 2x_3)$.*

1 - On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice associée à f dans $\mathcal{B}$.

2 - Calculer les valeurs propres de f. Vérifier que f est diagonalisable. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

3 - Calculer les vecteurs propres de f.

4 - Soit $\mathcal{C}$ une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f. Écrire $\mathrm{D} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

5 - On considère l'endomorphisme $g = f^3 - 9f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ où $f^3 \overset{not.}{=} f \circ f \circ f$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g)$ et en déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.

Exercice 6 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies sous forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par le système suivant :*

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} &= -u_n + w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + v_n \end{cases}$$

1 - Écrire le système (S) *sous la forme matricielle*

$$\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n \qquad \textit{avec} \qquad \mathrm{X}_n - \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2 - Calculer les valeurs propres de A. *En déduire que* A *est diagonalisable. Proposer une base $\mathcal{C}$ de vecteurs propres de* A.

3 - Soit P *la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{C}$. Calculer* P *et* P^{-1}, *puis expliciter la matrice* B *définie par* $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

4 - Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5 - En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

12.6 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

La méthode utilisée consiste à montrer que tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E peut s'écrire de manière unique sous la forme : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ avec $\boldsymbol{x}_1 \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, $\boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{j}\,\mathrm{id}_E)$ et $\boldsymbol{x}_3 \in \operatorname{Ker}\big(f - \mathrm{j}^2\,\mathrm{id}_E\big)$. Supposons dans un premier temps que ces trois vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ existent. On a alors :

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{x}_1, \quad f(\boldsymbol{x}_2) = \mathrm{j}\,\boldsymbol{x}_2 \quad \text{et} \quad f(\boldsymbol{x}_3) = \mathrm{j}^2\,\boldsymbol{x}_3.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ vérifient nécessairement :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_1 + \mathrm{j}\,\boldsymbol{x}_2 + \mathrm{j}^2\,\boldsymbol{x}_3 = f(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}_1 + \mathrm{j}^2\,\boldsymbol{x}_2 + \mathrm{j}\,\boldsymbol{x}_3 = f^2(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

où la deuxième (respectivement la troisième) égalité a été obtenue en composant la première égalité par f (respectivement par f^2) et en tenant compte que $\mathrm{j}^3 = 1$. En additionnant les trois égalités et en tenant compte du fait que $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$, on obtient :

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{x} + f(\boldsymbol{x}) + f^2(\boldsymbol{x})).$$

En multipliant la première égalité par j^2, la deuxième par j, en laissant inchangée la troisième, en additionnant le tout, et en tenant compte du fait que $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$ et $\mathrm{j}^3=1$, on obtient : $3\,\mathrm{j}^2 x_2=\mathrm{j}^2 x+\mathrm{j}f(x)+f^2(x)$, d'où, en multipliant par $\mathrm{j}/3$:

$$x_2=\frac{1}{3}(x+\mathrm{j}^2\,f(x)+\mathrm{j}\,f^2(x)).$$

De même, en multipliant la première égalité par j^2, la troisième par j, en laissant inchangée la deuxième, en additionnant le tout, et en tenant compte du fait que $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$ et $\mathrm{j}^3=1$, on obtient : $3\,\mathrm{j}^2 x_3=\mathrm{j}^2 x+f(x)+\mathrm{j}f^2(x)$, d'où, en multipliant par $\mathrm{j}/3$:

$$x_3=\frac{1}{3}(x+\mathrm{j}\,f(x)+\mathrm{j}^2\,f^2(x)).$$

Les trois vecteurs x_1,x_2,x_3 ainsi calculés sont les seules solutions (si elles existent !) possibles (l'unicité de l'écriture implique l'unicité de ces solutions). Pour que notre raisonnement soit complet, il reste à vérifier que x_1 appartient à $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$, que x_2 appartient à $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{j}\,\mathrm{id}_E)$, que x_3 appartient à $\operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{j}^2\,\mathrm{id}_E\right)$ et que $x=x_1+x_2+x_3$. Cette dernière égalité est bien évidemment vérifiée puisque c'est une des trois équations du système. De plus, on vérifie que

$$f(x_1)=\frac{1}{3}(f(x)+f^2(x)+f^3(x))=\frac{1}{3}(f(x)+f^2(x)+x)=x_1$$

où on a utilisé $f^3(x)=x$ puisque $f^3=\mathrm{id}_E$, ce qui montre que le vecteur x_1 appartient à $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$. On vérifie de même que le vecteur x_2 appartient à $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{j}\,\mathrm{id}_E)$ puisque

$$f(x_2)=\frac{1}{3}(f(x)+\mathrm{j}^2\,f^2(x)+\mathrm{j}\,f^3(x))=\frac{1}{3}(f(x)+\mathrm{j}^2\,f^2(x)+\mathrm{j}\,x)=\mathrm{j}\,x_2$$

et enfin que le vecteur x_3 appartient à $\operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{j}^2\,\mathrm{id}_E\right)$ puisque

$$f(x_3)=\frac{1}{3}(f(x)+\mathrm{j}\,f^2(x)+\mathrm{j}^2\,f^3(x))=\frac{1}{3}(f(x)+\mathrm{j}\,f^2(x)+\mathrm{j}^2\,x)=\mathrm{j}^2\,x_3.$$

Solution de l'exercice 2

Soit (λ,X) un élément propre de $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1 - En multipliant à gauche l'égalité matricielle $\mathrm{AX}=\lambda\mathrm{X}$ par A, on obtient que $\mathrm{A}^2\mathrm{X}=\lambda^2\mathrm{X}$, ce qui montre que (λ,X) est un élément propre de A. Plus généralement, en utilisant une récurrence sur l'entier m, on obtient que $\mathrm{A}^m\mathrm{X}=\lambda^m\mathrm{X}$ pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, ce qui montre que (λ^m,X) est un élément propre de la matrice A^m.

2 - D'après ce qui précède, (λ^2,X) est élément propre de A^2. Si $\mathrm{A}^2=\mathrm{A}$ alors $(\lambda^2-\lambda)\mathrm{X}=0$, d'où $\lambda^2=\lambda$ puisque $\mathrm{X}\neq 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp(A)}\subset\{0,1\}$. De la même manière, si $\mathrm{A}^n=\mathrm{I}$ alors $(\lambda^n-1)\mathrm{X}=0$, d'où $\lambda^n=1$ puisque $\mathrm{X}\neq 0$. Ainsi, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

3 - Supposons à présent A inversible (la matrice A^{-1} existe). On a nécessairement $\lambda \neq 0$ puisque A est inversible. De $AX = \lambda X$ il vient : $A^{-1}X = \lambda^{-1}X$, ce qui montre que (λ^{-1}, X) est un élément propre de A^{-1}.

Solution de l'exercice 3

1 - a) Considérons A dans $M_3(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Ainsi , A possède deux valeurs propres sur $\mathbb{R}$: $\lambda_1 = 1$ (valeur propre double) et $\lambda_2 = -1$ (valeur propre simple; on a donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 1$). On obtient facilement que $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\big((1,0,1),(0,1,0)\big)$ avec $(1,0,1)$ et $(0,1,0)$ libres entre eux, d'où $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) = 2$, et $E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\big((1,0,-1)\big)$. La matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car

$$\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) + \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 2 + 1 = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3).$$

b) Considérons B dans $M_3(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P_B(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1).$$

Ainsi, B possède une unique valeur propre sur $\mathbb{R}$: $\lambda = 1$. C'est une valeur propre simple. On obtient facilement que $E_{\lambda=1} = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$. La matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car

$$\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda=1}) = 1 \neq \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3).$$

2 - a) La matrice A considérée comme une matrice complexe est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ puisqu'elle l'est sur $\mathbb{R}$.

b) Si $B \in M_3(\mathbb{C})$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$P_B(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - \mathrm{j})(\lambda - \bar{\mathrm{j}}).$$

Ainsi, la matrice B considérée maintenant comme une matrice complexe possède trois valeurs propres simples sur $\mathbb{C}$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \mathrm{j}$ et $\lambda_3 = \bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$. On obtient que $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$, $E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\big((\mathrm{j},\mathrm{j}^2,1)\big)$ et $E_{\lambda_3} = \mathrm{Vect}\big((\mathrm{j}^2,\mathrm{j},1)\big)$. À titre de vérification, il est conseillé de s'assurer que l'on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{j}^2 \\ 1 \\ \mathrm{j} \end{pmatrix} = \mathrm{j} \begin{pmatrix} \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui montre que $(\mathrm{j},\mathrm{j}^2,1)$ est bien un vecteur propre de B associé à la valeur propre $\lambda_2 = \mathrm{j}$. De même,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{j} \\ 1 \\ \mathrm{j}^2 \end{pmatrix} = \mathrm{j}^2 \begin{pmatrix} \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} \\ 1 \end{pmatrix},$$

vérifiant ainsi que $(\mathrm{j}^2,\mathrm{j},1)$ est bien un vecteur propre de B associé à la valeur propre $\lambda_3 = \mathrm{j}^2$. La matrice B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car

$$\sum_{i=1}^{3} \dim_{\mathbb{C}}(E_{\lambda_i}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3).$$

Solution de l'exercice 4

On note f l'application linéaire canoniquement associée à A.

1 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & 16 & 16 \\ -5 & -7-\lambda & -6 \\ -6 & -8 & -7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (13-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} -7-\lambda & -6 \\ -8 & -7-\lambda \end{vmatrix}}_{=\lambda^2+14\lambda+1} - 16\underbrace{\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -6 & -7-\lambda \end{vmatrix}}_{=5\lambda-1} + 16\underbrace{\begin{vmatrix} -5 & -7-\lambda \\ -6 & -8 \end{vmatrix}}_{=-6\lambda-2}.$$

Ainsi, le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad P_{\mathrm{A}}(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda - 3 = -(\lambda-1)^2(\lambda+3).$$

La matrice A possède deux valeurs propres distinctes sur $\mathbb{R}$: $\lambda_1 = 1$ (c'est une valeur propre double) et $\lambda_2 = -3$ (c'est une valeur propre simple ; on a donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 1$). On vérifie que $\mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda_1 \mathrm{I}_3) = 2$. On en déduit la dimension du sous-espace propre associé : $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) = 3 - 2 = 1$. La matrice A n'est pas diagonalisable puisque la dimension de E_{λ_1} est différente de l'ordre de multiplicité de λ_1 (en tant que racine du polynôme caractéristique).

2 - Les vecteurs $\boldsymbol{u}_1 = (-4,1,2)$ et $\boldsymbol{u}_2 = (-2,1,1)$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement à $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -3$. Pour vérifier que $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1$ et $f(\boldsymbol{u}_2) = -3\boldsymbol{u}_2$, il suffit d'effectuer les calculs en se plaçant dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3 - La famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car son rang est égal à 3.

4 - Dire que A est semblable à T signifie que A et T représentent la même application linéaire (ici f) dans des bases différentes. On rappelle que l'on a déjà supposé que $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et il y a fort à parier que $\mathrm{T} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Suivant l'expression de T, écrire que $\mathrm{T} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ signifie que

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1, \quad f(\boldsymbol{u}_2) = -3\boldsymbol{u}_2 \;\text{ et }\; f(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u}_1 - 4\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}.$$

Les deux premières relations sont vérifiées car $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ sont deux vecteurs propres de f. Il reste alors à vérifier la troisième. Plaçons-nous pour cela encore dans la base canonique $\mathcal{B}$. On vérifie :

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9/2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$-\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9/2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

En notant respectivement U_1, U_2 et V les matrices-colonnes constituées des coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{v}$, on a ainsi vérifié l'égalité matricielle $\mathrm{AV} = -\mathrm{U}_1 - 4\mathrm{U}_2 + \mathrm{V}$ et, par conséquent, montré l'égalité (vectorielle) $f(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u}_1 - 4\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}$.

Solution de l'exercice 5

1 - Notons A la matrice associée à f dans $\mathcal{B}$. Elle s'écrit :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

2 - Le polynôme caractéristique de f s'obtient en calculant celui de la matrice A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \underbrace{\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}}_{=\lambda^2-8} + 4 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{=2\lambda}$$

D'où $P_f(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 16) = -\lambda(\lambda+4)(\lambda-4)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, f possède trois valeurs propres simples sur $\mathbb{R}$: $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 4$. Il est diagonalisable car $\sum_{k=1}^{3} \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_k}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Il n'est pas bijectif car 0 est valeur propre.

3 - On obtient : $E_{\lambda_1} = \mathbb{R}(1,0,-1)$, $E_{\lambda_2} = \mathbb{R}(2,-1,0))$ et $E_{\lambda_3} = \mathbb{R}(1,1,1)$.

4 - Soit $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ où $\boldsymbol{u}_1 = (1,0,-1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (2,-1,0)$ et $\boldsymbol{u}_3 = (1,1,1)$. D'après la question précédente, $\boldsymbol{u}_1$ est un vecteur propre associé à $\lambda_1 = -4$, $\boldsymbol{u}_2$ est un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 0$ et $\boldsymbol{u}_3$ est un vecteur propre associé à $\lambda_3 = 4$. On obtient : $\mathrm{D} = \mathrm{diag}\,(-4,0,4)$.

5 - Relativement à $\mathcal{C}$, $f^3 - 9f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ s'écrit $\mathrm{D}^3 - 9\mathrm{D} + \mathrm{I}_3$. D'où : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \mathrm{diag}\,(-27,1,29)$. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)\mathrm{P}$. D'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{P}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g)\,\mathrm{P}^{-1}$. On obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 28 \\ 7 & 15 & 7 \\ 14 & 28 & -13 \end{pmatrix}.$$

Remarque : on a bien sûr aussi : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{A}^3 - 9\mathrm{A} + \mathrm{I}_3$.

Solution de l'exercice 6

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le système (S) s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

2 - Calculons les valeurs propres de A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En ajoutant la troisième colonne à la deuxième colonne, puis en factorisant par $1-\lambda$ dans la deuxième colonne, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Il suffit alors de développer par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}}_{=-\lambda-1} - 3\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0}.$$

D'où $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3) = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{-1, 1, 2\}$. Pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à 1. La matrice A est ainsi diagonalisable. Une base $\mathcal{C}$ de vecteurs propres de A est

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

3 - $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{diag}\,(-1, 1, 2)$.

4 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = \mathrm{P} \times \mathrm{diag}\,((-1)^n, 1, 2^n) \times \mathrm{P}^{-1}$. D'où

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n + (-1)^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & (-1)^{n+1} - 2^n + 2 & (-1)^n + 2^n - 1 \end{pmatrix}.$$

5 - De $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2 \times (-1)^{n+1} + 3 \times 2^n, \ v_n = 4 - 3 \times 2^n, \ w_n = 4 - 3 \times 2^n + 2 \times (-1)^{n+1}.$$

Cinquième partie

Calcul différentiel

CHAPITRE 13

Continuité des fonctions réelles d'une variable réelle

13.1 L'ensemble des applications de D dans $\mathbb{R}$

13.1.1 Propriétés algébriques

Soit D un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de D dans $\mathbb{R}$. On désigne momentanément par $\times_{\mathbb{R}}$ et $+_{\mathbb{R}}$ le produit et la somme dans le corps $\mathbb{R}$.

On munit $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ de 2 lois de composition interne $+$ et $\times$ définies par

$$(\forall (f,g) \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R})^2) \quad (\forall x \in D) \quad \begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) +_{\mathbb{R}} g(x),\\ (f \times g)(x) &= f(x) \times_{\mathbb{R}} g(x).\end{aligned}$$

La loi $+$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes :

1. elle est associative : $\forall (f,g,h) \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R})^3 \quad (f+g)+h = f+(g+h)$;
2. elle est commutative : $\forall (f,g) \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R})^2 \quad f+g = g+f$;
3. elle possède pour élément neutre l'application nulle :
$$0_{\mathcal{A}(D,\mathbb{R})} : x \in D \mapsto 0 \in \mathbb{R} ;$$
4. tout élément f de $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ possède un symétrique dans $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ qui est l'application notée $-f$ définie par : $x \in D \mapsto -f(x) \in \mathbb{R}$.

La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes :

5. elle est associative : $\forall (f,g,h) \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R})^3 \quad (f \times g) \times h = f \times (g \times h)$;
6. elle est distributive par rapport à la loi $+$:
$$\forall (f,g,h) \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R})^3 \quad f \times (g+h) = (f \times g) + (f \times h) ;$$
7. elle est commutative : $\forall (f,g) \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R})^2 \quad f \times g = g \times f$;
8. elle possède pour élément neutre l'application : $1_{\mathcal{A}(D,\mathbb{R})} : x \in D \mapsto 1 \in \mathbb{R}$.

On résume les propriétés qui viennent d'être énoncées pour les lois de composition interne $+$ et $\times$ par la proposition suivante.

PROPOSITION 13.1 *L'ensemble $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ muni des lois $+$ et $\times$ est un anneau commutatif*[1].

Remarque L'ensemble structuré $(\mathcal{A}(D,\mathbb{R}),+,\times)$ n'est pas un corps car une fonction réelle n'a pas nécessairement de symétrique pour la loi $\times$ (voir la proposition 13.3 ci-après).

On munit également $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ d'une loi de composition externe $\cdot$ définie par

$$(\forall f \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}) \qquad (\forall x \in D \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times_{\mathbb{R}} f(x)).$$

Cette loi possède les propriétés suivantes :

9. $\forall (f,g) \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R})^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$;
10. $\forall f \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R}) \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (\lambda +_{\mathbb{R}} \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$;
11. $\forall f \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R}) \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (\lambda \times_{\mathbb{R}} \mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f)$;
12. $1 \cdot f = f$.

On peut donc énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 13.2 *L'ensemble $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ muni de la loi de composition interne $+$ et de la loi de composition externe $\cdot$ est un espace vectoriel*[2] *sur le corps des réels.*

Si on se restreint aux applications ne s'annulant en aucun point de l'ensemble D, alors on peut définir un symétrique pour la loi $\times$.

PROPOSITION 13.3 *Si $g \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ vérifie $(\forall x \in D \ g(x) \neq 0)$ alors g admet un symétrique pour la loi produit $\times$ qui est l'application notée $1/g$ définie par*

$$x \in D \longmapsto \frac{1}{g(x)} \in \mathbb{R}.$$

Remarques

1. Il ne faut pas utiliser la notation g^{-1} pour désigner le symétrique de g pour la loi $\times$. Cette notation est réservée pour désigner la bijection réciproque de g (lorsque celle-ci existe).

2. On note $\dfrac{f}{g}$ ou encore f/g, l'application $f \times 1/g$ et $f - g$ l'application $f + (-g)$.

---

[1] La définition d'un anneau est donnée p. 66.

[2] La définition d'un espace vectoriel est donnée p. 309.

DÉFINITION 13.1 *Soient f une application de D dans $\mathbb{R}$, J un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ telle que $f(D) \subset J$ et g une application de J dans $\mathbb{R}$. On appelle composée des applications f et g, et on note $g \circ f$, l'application définie par*[3]

$$x \in D \longmapsto g(f(x)).$$

Remarque Il ne faut pas confondre l'application $g \circ f$ qui est la composée des applications f et g et l'application $f \circ g$ qui est la composée des applications g et f. La composition d'applications n'est pas commutative. Ainsi, si l'on considère

$$f : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \sqrt{t} \qquad \text{et} \qquad g : t \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(t)$$

alors $g \circ f : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \cos(\sqrt{t})$ et

$$f \circ g : t \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [(4n-1)\tfrac{\pi}{2}, (4n+1)\tfrac{\pi}{2}] \longmapsto \sqrt{\cos(t)}.$$

On remarquera également que l'ensemble de définition de $g \circ f$ n'est pas obligatoirement identique à celui de f. On peut schématiser la composition des applications $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante

$$\begin{array}{ccccc} D & \longrightarrow & f(D) \subset J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) & \longmapsto & z = g(y) = g(f(x)) \end{array}$$

Relation d'ordre sur $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$

On définit[4] sur $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ la relation $\leqslant$ par

$$\forall (f, g) \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R})^2 \quad \Big(f \leqslant g \Longleftrightarrow (\forall x \in D \quad f(x) \leqslant_{\mathbb{R}} g(x))\Big)$$

où $\leqslant_{\mathbb{R}}$ désigne la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre[5] sur $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$:

- elle est réflexive : $\forall f \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R}) \quad f \leqslant f$;
- elle est anti-symétrique : $\forall (f, g) \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R})^2 \quad (f \leqslant g \text{ et } g \leqslant f) \Longrightarrow f = g$;
- elle est transitive : $\forall (f, g, h) \in (\mathcal{A}(D, \mathbb{R}))^3 \quad (f \leqslant g \text{ et } g \leqslant h) \Longrightarrow f \leqslant h$.

La relation $\leqslant$ est une relation compatible avec les lois $+$ et $\times$:

---

(3) On pourra se reporter à la définition 2.18, page 40, et aux remarques qui lui font suite.

(4) On a introduit les notations $+_{\mathbb{R}}$, $\times_{\mathbb{R}}$ et $\leqslant_{\mathbb{R}}$ pour les lois et la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ afin de bien mettre en évidence la manière dont étaient définies les lois de composition internes et la relation d'ordre sur $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ à partir des lois de composition internes et de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Ultérieurement nous noterons $+$, $\times$ et $\leqslant$ les lois et la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, le contexte permettant de décider s'il s'agit des lois sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$.

(5) Voir la définition 3.1 p. 94.

– $\forall (f,g,h) \in (\mathcal{A}(D,\mathbb{R}))^3 \quad (f \leqslant g \implies f+h \leqslant g+h)$;
– $\forall (f,g,h) \in (\mathcal{A}(D,\mathbb{R}))^3 \quad \big((f \leqslant g) \text{ et } (0 \leqslant h) \implies f \times h \leqslant g \times h\big)$.

Ces propriétés découlent de manière directe des propriétés de la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$, voir page 100.

La relation n'est pas une relation d'ordre total[6]. En effet, considérons les applications $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$. On a

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) \geqslant_{\mathbb{R}} g(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x \notin [0,1] \quad f(x) \leqslant_{\mathbb{R}} g(x).$$

Par conséquent on n'a ni $f \leqslant g$, ni $g \leqslant f$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque On écrit aussi $g \geqslant f$ au lieu de $f \leqslant g$. On définit également la relation $<$ sur $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ par

$$\forall (f,g) \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R})^2 \quad \Big(f < g \iff \big(\forall x \in D \quad f(x) <_{\mathbb{R}} g(x)\big)\Big)$$

et on écrit aussi $g > f$ au lieu de $f < g$.

13.1.2 Monotonicité, parité et périodicité

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est *paire* si[7] : $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$.
La représentation graphique d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

On dit que f est *impaire* si[7] : $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$.
La représentation graphique d'une fonction impaire admet l'origine du repère comme axe de symétrie.

On dit que f est *périodique* s'il existe un réel T strictement positif tel que[8]

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x).$$

On appelle *période* (fondamentale) de f le plus petit réel T strictement positif, s'il existe[9], satisfaisant la relation précédente.

---

(6) Voir la définition 3.2 p. 95.

(7) Ces définitions se généralisent à une application définie sur un intervalle de centre 0 de la forme $]-b,b[, b \in \mathbb{R}_+^*$ et à une application définie sur un ensemble de la forme $\mathbb{R} \setminus]-b,b[, b \in \mathbb{R}_+^*$.

(8) Cette définition s'étend à une application définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in D \implies x+T \in D)$.

(9) Une fonction périodique n'admet pas nécessairement de période fondamentale. Considérons l'application

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Elle est périodique puisque si r est un rationnel alors d'une part pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $x+r \in \mathbb{Q}$ et $f(x+r) = 1 = f(x)$ et d'autre part pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $x+r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(x+r) = 0 = f(x)$. Par contre elle n'admet pas de période (fondamentale) puisque la borne inférieure de l'ensemble $\mathbb{Q}_+^*$ est 0.

Exemple La fonction sinus est impaire et périodique, de période 2π et la fonction cosinus est paire et périodique, de période 2π.

Exercice 1 Montrer que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x - \mathrm{E}(x)$ est périodique de période 1.

Soient D un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est *croissante* sur D si

$$\forall\,(x_1, x_2) \in D^2 \quad \big(x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)\big).$$

On dit que f est *strictement croissante* sur D si

$$\forall\,(x_1, x_2) \in D^2 \quad \big(x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)\big).$$

On dit que f est *décroissante* sur D si

$$\forall\,(x_1, x_2) \in D^2 \quad \big(x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \geqslant f(x_2)\big).$$

On dit que f est *strictement décroissante* sur D si

$$\forall\,(x_1, x_2) \in D^2 \quad \big(x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)\big).$$

On dit que f est *monotone* sur D si f est croissante sur D ou si f est décroissante sur D, autrement dit si

$$\begin{aligned} &\Big(\forall\,(x_1, x_2) \in D^2 \quad \big(x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)\big)\Big) \\ \text{ou} \quad &\Big(\forall\,(x_1, x_2) \in D^2 \quad \big(x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \geqslant f(x_2)\big)\Big). \end{aligned}$$

La place des quantificateurs est extrêmement importante. Ainsi l'assertion

$$\forall\,(x_1, x_2) \in D^2 \quad \Big(\begin{aligned} &\big(x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)\big) \quad \text{ou} \\ &\big(x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \geqslant f(x_2)\big) \end{aligned} \Big)$$

est vraie pour toute application définie sur D et ne traduit pas le fait que f est monotone sur D.

On dit que f est *strictement monotone* sur D si f est strictement croissante sur D ou si f est strictement décroissante sur D.

Remarque La négation de l'assertion « f est monotone sur D » est : « f n'est pas croissante sur D et f n'est pas décroissante sur D ». Sous forme d'assertion quantifiée, cela se traduit par :

$$\begin{aligned} &\big(\exists (x_1, x_2) \in D^2 \quad (x_1 \leqslant x_2 \text{ et } f(x_1) > f(x_2))\big) \\ \text{et} \quad & \\ &\big(\exists (x'_1, x'_2) \in D^2 \quad (x'_1 \leqslant x'_2 \text{ et } f(x'_1) < f(x'_2))\big). \end{aligned}$$

Ainsi l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x\,(x-2)$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\big(-1 \leqslant 0 \text{ et } f(-1) > f(0)\big) \quad \text{et} \quad \big(1 \leqslant 3 \text{ et } f(1) < f(3)\big).$$

Exemples

1. La fonction sinus est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. En effet, voir page 157, quels que soient x_1, x_2 dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avec $x_1 < x_2$, on a

$$\sin(x_2) - \sin(x_1) = 2 \sin\left(\tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)\right) \cos\left(\tfrac{1}{2}(x_2 + x_1)\right)$$

avec $\frac{1}{2}(x_2 - x_1) \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\frac{1}{2}(x_2 + x_1) \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La fonction cosinus est strictement positive sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et la fonction sinus est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. On en déduit que $\sin\left(\frac{1}{2}(x_2 - x_1)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(x_2 + x_1)\right) > 0$ puis que $\sin(x_2) > \sin(x_1)$. D'après la définition, cela permet de conclure que la fonction sinus est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2. Montrons que la fonction partie entière, voir page 110, est croissante sur $\mathbb{R}$. Soient x et y deux réels tels que $x \leqslant y$. Notons $n = \mathrm{E}(x)$; on a $x \in [n, n+1[$. Procédons par disjonction de cas.

- Ou bien $y \in [n, n+1[$ et dans ce cas $\mathrm{E}(y) = n = \mathrm{E}(x)$.
- Ou bien $y \notin [n, n+1[$ et dans ce cas, il existe $p \in \mathbb{Z}$ avec $p > n$ tel que $y \in [p, p+1[$. On a $\mathrm{E}(y) = p > n = \mathrm{E}(x)$.

Dans tous les cas, $\mathrm{E}(y) \geqslant \mathrm{E}(x)$, ce qui permet d'affirmer que la fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Montrer que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

Proposition 13.4

✗ *La somme de 2 applications paires (resp. impaires) est une application paire (resp. impaire). Le produit de 2 applications paires ou de 2 applications impaires est une application paire. Le produit d'une application paire et d'une application impaire est une application impaire.*

✗ *La somme et le produit de 2 applications périodiques de même période T est une une application périodique.*

✗ *La somme de 2 applications croissantes (resp. décroissantes) est une application croissante (resp. décroissante).*

Démonstration Ces propriétés se démontrent sans difficulté en revenant aux définitions. Considérons par exemple deux applications f et g paires. L'application $h = f + g$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = h(x).$$

On en déduit que h est une application paire, autrement dit que la somme de 2 applications paires est une application paire. □

Remarque La somme (resp. le produit) de 2 applications périodiques de même période T est une une application périodique, mais la période de cette application n'est pas nécessairement égale à T. Par exemple, les fonctions $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto -\cos(x)$ sont périodiques de période 2π et $f+g$ qui est la fonction nulle est périodique mais n'a pas de période, $f \times g$ est périodique de période π.

Le produit de 2 applications monotones n'est pas nécessairement une application monotone. Par exemple, l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x\,(x-2)$ est le produit des deux applications strictement croissantes $g_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x$ et $g_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto x-2$ mais comme cela a été indiqué à la remarque précédente, il ne s'agit pas d'une application monotone.

Proposition 13.5 *Soient f et g deux applications définies sur $\mathbb{R}$.*

✗ *Si f est périodique alors $g \circ f$ est une application périodique.*

✗ *Si f est croissante (resp. décroissante) et g est croissante (resp. décroissante) alors $g \circ f$ est une application croissante.*

✗ *Si f est croissante (resp. décroissante) et g est décroissante (resp. croissante) alors $g \circ f$ est une application décroissante.*

✗ *Si f est paire alors $g \circ f$ est une application paire (sans hypothèse sur la parité g). Si f est impaire et g est paire (resp. impaire) alors $g \circ f$ est paire (resp. impaire).*

Démonstration Ces propriétés se démontrent en revenant aux définitions. Montrons la première propriété, la vérification des autres propriétés est laissée en exercice. Si f est périodique alors il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quelle que soit l'application g définie sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (g \circ f)(x+T) = g(f(x+T)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

On en déduit que $g \circ f$ est une application périodique[10]. □

13.1.3 Applications bornées

✗ On dit que $f \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ est *majorée* sur D si :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \qquad f(x) \leqslant M.$$

Si f est majorée sur D alors on appelle *borne supérieure de f sur D* et on note[11] $\sup_{x\in D} f(x)$ la borne supérieure de l'image de D par f. On a donc

$$\sup_{x\in D} f(x) = \sup\,\{f(x) \mid x \in D\} = \sup f(D).$$

[10] On ne peut toutefois pas affirmer que $g \circ f$ possède la même période que f ; par exemple, la fonction cosinus est périodique de période 2π et la fonction $x \mapsto \cos^2(x)$ est périodique de période π.

[11] La variable x est une variable muette et on peut tout aussi bien écrire $\sup\limits_{t\in D} f(t)$.

Rappelons les propriétés de la borne supérieure[12] :

1. $\forall x \in D \quad f(x) \leqslant \sup\limits_{t \in D} f(t)$,
2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in D \quad f(x) > \sup\limits_{t \in D} f(t) - \varepsilon.$

✗ On dit que $f \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ est *minorée* sur D si :

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \qquad f(x) \geqslant m.$$

Si f est minorée sur D alors on appelle *borne inférieure de* f sur D et on note $\inf_{x \in D} f(x)$ la borne inférieure de l'image de D par f. On a donc

$$\inf_{x \in D} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in D\} = \inf f(D).$$

Rappelons les propriétés de la borne inférieure[12] :

1. $\forall x \in D \quad f(x) \geqslant \inf\limits_{t \in D} f(t)$,
2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in D \quad f(x) < \inf\limits_{t \in D} f(t) + \varepsilon.$

✗ On dit que $f \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ est *bornée* sur D si elle est à la fois majorée sur D et minorée sur D, autrement dit si

$$\exists (M, m) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in D \qquad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

De manière équivalente[13], l'application f est bornée sur D si

$$\exists K \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad |f(x)| \leqslant K.$$

On dit que $f \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ est bornée en $x_0 \in D$ si f est bornée sur un voisinage[14] de x_0.

Remarque En utilisant les règles de négation d'une assertion quantifiée[15], on obtient qu'une application $f \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ n'est pas *majorée* sur D si : $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists x \in D\ f(x) > M$. Elle n'est pas majorée si $\forall m \in \mathbb{R}\ \exists x \in D\ f(x) < m$. Enfin, elle n'est pas bornée $\forall K \in \mathbb{R}_+^*\ \exists x \in D\ |f(x)| > K$.

Exemples

1. Les applications sinus et cosinus sont bornées sur $\mathbb{R}$ car

$$\big(\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1\big) \quad \text{et} \quad \big(\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1\big).$$

2. L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^x$ est minorée et sa borne inférieure est 0. Elle n'est pas majorée car quel que soit le réel M, le réel $x = \ln(1 + |M|)$ est tel que $\mathrm{e}^x = |M| + 1 > M$.

---

[12] Voir la proposition 3.2 p. 101.

[13] Ces deux assertions se déduisent l'une de l'autre en considérant d'une part $m = -K$ et $M = K$ et d'autre part $K = \max(|m|, |M|)$.

[14] Voir la définition 3.10 p. 116.

[15] Voir le chap. 1 p. 14.

3. L'application $x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1/x$ n'est pas bornée en 0. Pour le prouver, raisonnons par l'absurde. Considérons un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 et supposons que f soit bornée sur $\mathcal{V}$, c'est-à-dire supposons que

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad |f(x)| = |1/x| \leqslant M.$$

On déduit de l'inégalité $|1/x| \leqslant M$ que $|x| \geqslant 1/M$, ce qui implique que x appartient à l'ensemble $E =]-\infty, 1/M] \cup [1/M, +\infty[$. Cela contredit le fait que $x \in \mathcal{V}$ car E n'est pas un voisinage de 0.

PROPOSITION 13.6 *Soient f et g deux applications définies sur D.*

✗ *Si f et g sont majorées sur D et si $f \leqslant g$ sur D alors*

$$\sup_{x\in D} f(x) \leqslant \sup_{x\in D} g(x).$$

✗ *Si f et g sont minorées sur D et si $f \leqslant g$ sur D alors*

$$\inf_{x\in D} f(x) \leqslant \inf_{x\in D} g(x).$$

✗ *f est minorée si et seulement si $(-f)$ est majorée et*

$$\inf_{x\in D} f(x) = -\sup_{x\in D}(-f(x)).$$

Démonstration Ces propriétés se démontrent en revenant à la définition de la borne supérieure (resp. borne inférieure) d'une fonction et en utilisant les propriétés de la borne supérieure[16] (resp. borne inférieure) d'un ensemble. Démontrons la première de ces relations. Pour tout $x \in D$, on a d'après les hypothèses $f(x) \leqslant g(x)$ et par définition de la borne supérieure on a $g(x) \leqslant \sup_{t\in D} g(t)$. On en déduit que $M = \sup_{t\in D} g(t)$ est un majorant de $f(D)$. Comme par définition $\sup_{t\in D} f(t)$ est le plus petit des majorants de $f(D)$ on a nécessairement $\sup_{t\in D} f(t) \leqslant M$. La première relation est démontrée. La vérification des autres relations est laissée en exercice. □

PROPOSITION 13.7 *Soient f et g deux applications définies sur D et λ un réel positif.*

✗ *Si f est majorée sur D alors $\lambda \cdot f$ est majorée sur D et*

$$\sup_{x\in D}(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \sup_{x\in D} f(x).$$

✗ *Si f et g sont majorées sur D alors $f+g$ est majorée sur D et*

$$\sup_{x\in D}\big((f+g)(x)\big) \leqslant \sup_{x\in D} f(x) + \sup_{x\in D} g(x).$$

✗ *Si f et g sont majorées* et à valeurs positives *sur D alors $f \times g$ est majorée sur D et*

$$\sup_{x\in D}\big((f\times g)(x)\big) \leqslant \sup_{x\in D} f(x) \times \sup_{x\in D} g(x).$$

[16] Voir la proposition 3.2 p. 101.

Démonstration Ces propriétés se démontrent en revenant à la définition de la borne supérieure d'une fonction et en utilisant les propriétés de la borne supérieure[16] d'un ensemble. Montrons la deuxième de ces relations. On a

$$\sup_{x\in D}\big((f+g)(x)\big) = \sup\{f(x)+g(x) \mid x \in D\}.$$

Or, pour tout $x \in D$, $f(x) \leqslant \sup_{t\in D} f(t)$ et $g(x) \leqslant \sup_{t\in D} g(t)$. On en déduit que

$$f(x)+g(x) \leqslant M \quad \text{où } \mathrm{M} = \sup_{t\in D} f(t) + \sup_{t\in D} g(t)$$

et par conséquent M est un majorant de l'ensemble $\{f(x)+g(x) \mid x \in D\}$. Comme la borne supérieure de cet ensemble est, par définition, le plus petit des majorants, on a nécessairement

$$\sup_{x\in D}\big((f+g)(x)\big) \leqslant M.$$

La deuxième propriété est démontrée. La vérification des autres relations est laissée en exercice. □

Exemple Soient $f : x \in [0,1] \mapsto x$ et $g : x \in [0,1] \mapsto 1-x$. On a

$$\sup_{x\in[0,1]} \big(f+g\big)(x) = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{x\in[0,1]} f(x) + \sup_{x\in[0,1]} g(x) = 1+1 = 2,$$

et

$$\sup_{x\in[0,1]} \big(f\times g\big)(x) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \Big(\sup_{x\in[0,1]} f(x)\Big) \times \Big(\sup_{x\in[0,1]} g(x)\Big) = 1.$$

On désigne par $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ qui sont bornées sur D. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$. Pour $f \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)|$.

Proposition 13.8 *Pour tout $(f,g) \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R})^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :*

1. $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$;
2. $\|\lambda \cdot f\|_\infty = |\lambda| \; \|f\|_\infty$;
3. $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$;
4. $\|f\times g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \times \|g\|_\infty$.

Démonstration Les propriétés 2 à 4 découlent des relations données à la proposition 13.7 en les considérant avec $|f|$ et $|g|$. Démontrons la première propriété. Si f est l'application nulle, alors

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)| = \sup\big\{|f(x)| \;;\; x \in D\big\} = \sup\{0\} = 0.$$

Réciproquement, si $\|f\|_\infty = 0$ alors $|f|$ est une application majorée par 0, *i.e.*

$$\forall x \in D \quad |f(x)| \leqslant 0.$$

Comme $|f|$ est positive, on a nécessairement $|f(x)| = 0$ pour tout $x \in D$, autrement dit[17] $f(x) = 0$. L'application f est l'application nulle. □

Remarque Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels. Toute application $N : \mathbf{u} \in E \mapsto N(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^+$ vérifiant les 3 premières conditions de la proposition 13.8, à savoir : pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $N(\mathbf{u}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{u} = 0$,
2. $N(\lambda \,.\, \mathbf{u}) = |\lambda| \; N(\mathbf{u})$,
3. $N(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leqslant N(\mathbf{u}) + N(\mathbf{v})$,

est appelée une *norme* sur E. Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un *espace vectoriel normé*. Cette notion est détaillée dans le *Cours de deuxième année*, chap. 7.

13.2 Limites

13.2.1 Définitions

Définition 13.2 *Soient D un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ un point adhérent*[18] *à D. On dit que l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet pour limite le réel ℓ en x_0 si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \; \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(\big(x \in D \;\; \textit{et} \;\; |x - x_0| \leqslant \eta \big) \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \Big).$$

Exemples

1. Considérons l'application $f : x \in \,]-1, 1[\, \mapsto 2x/(x+2)$ et montrons qu'elle a pour limite 0 en 0. Pour $x \in \,]-1, 1[$ on a $1 \leqslant 2 + x \leqslant 3$ et par conséquent

$$\forall x \in \,]-1, 1[\qquad |f(x)| \leqslant 2|x|.$$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la quantité $|f(x) - 0|$ peut être rendue plus petite que ε en prenant x tel que $2|x| \leqslant \varepsilon$. On a ainsi établi que pour tout réel strictement

[17] Voir la proposition 3.7 p. 108.

[18] Pour la définition d'un point adhérent à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, voir la définition 3.13 p. 119. On rappelle que l'on note $\overline{D}$ l'adhérence de l'ensemble D, c'est-à-dire l'ensemble des points adhérents à D. Le fait d'envisager un point x_0 adhérent à l'ensemble de définition D de f (et non seulement appartenant à D) est indispensable pour pouvoir considérer par exemple la limite en 0 de l'application $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

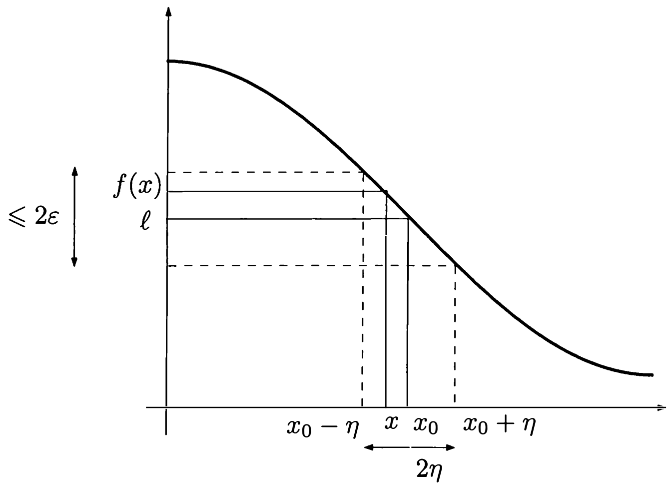


Fig. 1 Illustration de l'assertion « l'application f admet pour limite ℓ en x_0 » : pour tout réel strictement positif ε, on peut trouver un réel strictement positif η tel que $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [x_0-\eta, x_0+\eta]$.

positif ε, on peut trouver un réel strictement positif η ($\eta = \frac{1}{2}\varepsilon$ convient) tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Big(\big(x \in]-1,1[\text{ et } |x| \leqslant \eta\big) \implies |f(x)-0| \leqslant \varepsilon\Big).$$

D'après la définition 13.2, on en conclut que f admet 0 pour limite en 0.

2. L'application $S : x \in]0,+\infty[\mapsto 1$ admet pour limite 1 en 0 puisque pour tout réel strictement positif ε, on peut trouver un réel strictement positif η ($\eta = \varepsilon$ convient) tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Big(\big(x \in]0,+\infty[\text{ et } |x| \leqslant \eta\big) \implies \underbrace{|S(x)-1|}_{=0} \leqslant \varepsilon\Big).$$

Remarques

1. On exprime aussi sous forme d'assertion quantifiée le fait que l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet pour limite le réel ℓ en x_0 de la manière suivante :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(|x-x_0| \leqslant \eta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon\big). \tag{1}$$

2. L'assertion (1) est équivalente à

$$\forall \widetilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(|x-x_0| \leqslant \eta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \tfrac{1}{2}\widetilde{\varepsilon}\big) \tag{2}$$

et on peut bien entendu remplacer $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{3}$ ou tout autre réel strictement positif. En effet, si l'assertion (1) est vraie pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, elle est vraie pour

$\varepsilon = \frac{1}{2}\widetilde{\varepsilon}$ où $\widetilde{\varepsilon}$ désigne un réel strictement positif quelconque et inversement, si l'assertion (2) est vraie pour tout $\widetilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^*$, elle est vraie pour $\widetilde{\varepsilon} = 2\varepsilon$ où ε désigne un réel strictement positif quelconque. Ces formes alternatives correspondant à la définition 13.2 seront largement utilisées dans les raisonnements.

3. Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. D'après la définition 13.2, l'application f de D dans $\mathbb{R}$ n'admet pas le réel ℓ pour limite en x_0 si[19]

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in D \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \ \text{ et } \ |f(x) - \ell| > \varepsilon\big).$$

Le fait que l'application f de D dans $\mathbb{R}$ n'admette pas de limite en x_0 s'exprime sous forme d'assertion quantifiée de la manière suivante :

$$\forall \ell \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in D \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \ \text{ et } \ |f(x) - \ell| > \varepsilon\big).$$

Exemple Montrons que l'application

$$S : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

n'admet pas de limite en 0 (voir la figure 2). D'une part, pour tout réel ℓ non nul, il existe un réel strictement positif ε ($\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell|$ convient) tel que

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in \mathbb{R} \qquad \big(|x - 0| \leqslant \eta \ \text{ et } \ |S(x) - \ell| = |\ell| > \varepsilon\big)$$

(par exemple $x = 0$ convient). Ainsi, S n'admet pas un réel non nul pour limite en 0. D'autre part, elle n'admet pas non plus 0 comme limite en 0 car en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ en considérant le réel $x = \eta$, on a

$$|x - 0| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad |S(x)| = 1 > \varepsilon.$$

EXERCICE 3 Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. Montrer que f admet pour limite 0 en x_0 si et seulement si $|f|$ admet pour limite 0 en x_0, autrement dit montrer que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0.$$

Que peut-on dire si f admet une limite non nulle en x_0 ?

---

[19] Cette assertion est la négation de l'assertion

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big)$$

exprimant que l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet pour limite en x_0 le réel ℓ.

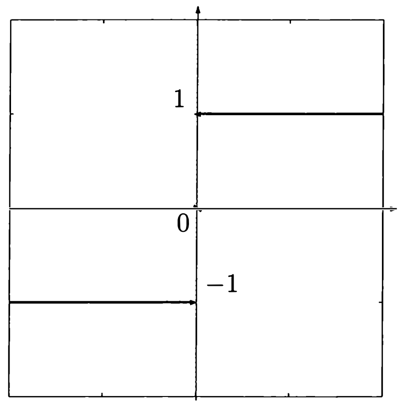


Fig. 2 Représentation graphique de la fonction signe S.

La notion de limite pour une application donnée est étroitement liée à l'ensemble de départ de l'application considérée. Ainsi dans l'exemple précédent l'application S de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'a pas de limite en 0. Par contre l'application S_+ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie comme la restriction de S à $]0,+\infty[$ admet 1 pour limite en 0 et l'application S_- de $]-\infty,0]$ dans $\mathbb{R}$ définie comme la restriction de S à $]-\infty,0[$ admet -1 pour limite en 0 (voir la figure 2).

PROPOSITION 13.9 *Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. Si l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet une limite en x_0 alors cette limite est unique.*

Démonstration Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'application f admette 2 deux réels ℓ_1 et ℓ_2 distincts pour limite en x_0 et considérons le réel strictement positif $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2|$. D'après la définition 13.2, d'une part

$$\exists \eta_1 \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta_1 \implies |f(x) - \ell_1| \leqslant \varepsilon\big)$$

et d'autre part

$$\exists \eta_2 \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta_2 \implies |f(x) - \ell_2| \leqslant \varepsilon\big).$$

Notons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$; en utilisant la première inégalité triangulaire [20], pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D$ on obtient

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \leqslant |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leqslant 2\varepsilon \leqslant \tfrac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|.$$

[20] Voir la proposition 3.7 p. 108.

La relation $|\ell_1 - \ell_2| \leqslant \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$ étant impossible si $\ell_1 \neq \ell_2$, on aboutit à une contradiction. Cela signifie que l'hypothèse de deux limites distinctes pour f en x_0 est absurde. On a ainsi démontré que si l'application f admettait une limite en x_0 celle-ci était nécessairement unique. □

Puisque lorsque l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet un réel ℓ pour limite en $x_0 \in \overline{D}$ celui ci est unique on peut introduire, sans ambiguïté possible, un symbole pour désigner cette limite. On désigne par $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x)$ la limite de l'application f de D dans $\mathbb{R}$ en $x_0 \in \overline{D}$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur l'ensemble de départ de l'application f, on écrit plus simplement $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Remarque Dans la définition 13.2, on peut indifféremment écrire des inégalités « larges » ou « strictes » ($\leqslant$ ou $<$). En effet,

$$|x - x_0| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |x - x_0| \leqslant \eta.$$

Réciproquement, s'il existe un réel $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in D$, $|x - x_0| \leqslant \eta$ implique que $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ alors pour tout réel $\eta' \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\eta' < \eta$ la condition $|x - x_0| < \eta'$ implique aussi $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. De même,

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Réciproquement pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, s'il existe un réel $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in D$, $|x - x_0| \leqslant \eta$ implique $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ alors on peut trouver $\eta' \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\eta' < \eta$ tel que $|x - x_0| \leqslant \eta'$ implique $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

> **EXERCICE 4** Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. Montrer que f admet pour limite ℓ en x_0 si et seulement si $-f$ admet pour limite $-\ell$ en x_0, autrement dit montrer que
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} -f(x) = -\ell.$$

Il est possible de définir la notion de limite d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$ et de définir la notion de limite pour une application non bornée en x_0.

✗ Soient D un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. On dit que l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet pour limite $+\infty$ en x_0 et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = +\infty$ si, voir la figure 3,

$$\forall \kappa \in \mathbb{R} \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \Big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant \kappa\Big).$$

✗ On dit que l'application f de $]a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ admet pour limite le réel ℓ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si[(21)]

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]a, +\infty[\quad \big(x \geqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big).$$

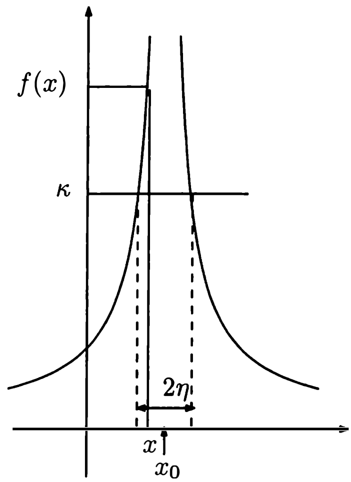


Fig. 3 Illustration de l'assertion « l'application f admet pour limite $+\infty$ en x_0 » : pour tout réel κ, on peut trouver un réel η strictement positif tel que $f(x) \geqslant \kappa$ pour tout $x \in [x_0-\eta, x_0+\eta]$.

✗ On dit que l'application f de $]a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si[21]

$$\forall \kappa \in \mathbb{R} \quad \exists \eta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]a, +\infty[\quad \big(x \geqslant \eta \implies f(x) \geqslant \kappa\big).$$

✗ On dit que l'application f de $]-\infty, b[$ dans $\mathbb{R}$ admet pour limite le réel ℓ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ si[22]

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]-\infty, b[\quad \big(x \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big).$$

✗ On dit que l'application f de $]-\infty, b[$ dans $\mathbb{R}$ admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si[22]

$$\forall \kappa \in \mathbb{R} \quad \exists \eta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]-\infty, b[\quad \big(x \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant \kappa\big).$$

On remarquera que les assertions quantifiées intervenant dans les définitions des différentes situations possibles en ce qui concerne la limite de f ont une

(21) On peut, de manière équivalente, prendre $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ dans cette définition.

(22) On peut, de manière équivalente, prendre $\eta \in \mathbb{R}_-^*$ dans cette définition.

forme très voisine et sont construites à l'aide de différents blocs quantifiés. La « limite en x_0 » est traduite par le bloc « $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D \ |x - x_0| \leqslant \eta$ », la « limite en $+\infty$ » fait intervenir le bloc « $\exists \eta \in \mathbb{R} \ \forall x \in]a, +\infty[\ x \geqslant \eta$ ». De même, la « limite vaut ℓ » est traduite par le bloc « $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \cdots \ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ » et la « limite vaut $+\infty$ » est traduite par le bloc « $\forall \kappa \in \mathbb{R} \ \cdots \ f(x) \geqslant \kappa$ ».

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. On dit que l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet pour limite $-\infty$ en x_0 si l'application $-f$ admet pour limite $+\infty$ en x_0. De même, on dit que f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si l'application $-f$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$). On ne particularisera donc pas le cas d'une application ayant pour limite $-\infty$ dans l'énoncé des résultats de ce chapitre.

Remarques

1. On dit que l'application f admet une limite finie en $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si cette limite est un réel.

2. On montre que si f est une application admettant une limite finie en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) alors cette limite est unique. Cette vérification est laissée en exercice (s'inspirer de la démonstration de la proposition 13.9 en prenant la définition idoine).

> **EXERCICE 5** Montrer que si une fonction périodique admet pour limite en $+\infty$ le réel ℓ alors il s'agit d'une fonction constante, la constante étant égale à ℓ (on pourra utiliser la proposition 3.12, page 113).

13.2.2 Propriétés

PROPOSITION 13.10 *Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. Si l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet un réel pour limite en x_0 alors f est bornée sur (l'intersection de D avec) un voisinage de x_0.*

Démonstration Supposons que f admette le réel ℓ pour limite en x_0. D'après la définition 13.2

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big).$$

Prenons $\varepsilon = 1$; il existe un réel strictement positif η tel que pour tout $x \in D$,

$$|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant 1.$$

On en déduit que pour $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap D$ on a[23]

$$|f(x)| = |f(x) - \ell + \ell| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|.$$

L'application f est donc bornée sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap D$. □

---

[23] On utilise l'inégalité triangulaire, voir la proposition 3.7 p. 108.

On a un résultat analogue dans le cas d'une limite en $\pm\infty$: si f admet un réel pour limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors f est bornée sur un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

La proposition suivante fait le lien entre les notions de limite pour une suite et pour une application. On rappelle que l'on note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

PROPOSITION 13.11 *Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. L'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en x_0 si et seulement si pour toute suite réelle $(u_n)_n$ d'éléments de D convergeant vers x_0 la suite de terme général $f(u_n)$ tend vers ℓ.*

Démonstration On suppose que $\ell \in \mathbb{R}$, le cas des limites valant $\pm\infty$ se traite de manière analogue en prenant la définition idoine pour la limite donnée page 601.

$\trianglerighteq$ Supposons que f admette pour limite ℓ en x_0 et considérons une suite $(u_n)_n$ convergeant vers x_0. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Puisque f admet pour limite ℓ en x_0,

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big)$$

et puisque la suite $(u_n)_n$ converge vers x_0 [24]

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \implies |u_n - x_0| \leqslant \eta)\,.$$

Pour $n \geqslant N$ on a $|u_n - x_0| \leqslant \eta$ donc $|f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \implies |f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon)\,,$$

ce qui d'après la définition 5.1 page 172 signifie que la suite de terme général $f(u_n)$ tend vers ℓ.

$\trianglerighteq$ Pour montrer la réciproque, raisonnons par l'absurde. Supposons que pour toute suite réelle $(u_n)_n$ convergeant vers x_0 la suite de terme général $f(u_n)$ tend vers ℓ et que f n'admet pas pour limite ℓ en x_0. Montrons que l'on aboutit à une contradiction. La négation de l'assertion « f admet pour limite ℓ en x_0 » s'écrit :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists y_\eta \in D \quad \big(|y_\eta - x_0| \leqslant \eta \text{ et } |f(y_\eta) - \ell| > \varepsilon\big).$$

Pour cet ε, en prenant pour η des valeurs de la forme $1/n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists y_n \in D \quad \big(|y_n - x_0| \leqslant 1/n \text{ et } |f(y_n) - \ell| > \varepsilon\big).$$

On dispose donc d'une suite $(y_n)_n$ qui converge[25] vers x_0 mais pour laquelle la suite de terme général $f(y_n)$ ne converge[26] pas vers ℓ. C'est en contradiction avec nos hypothèses. □

---

[24] Voir la définition 5.1 p. 172 ; on prend pour première variable de l'assertion quantifiée le réel η défini dans l'assertion précédente.

[25] Cela résulte du théorème 5.1, p. 185, puisque l'on a $x_0 - 1/n \leqslant y_n \leqslant x_0 + 1/n$.

[26] Voir la définition 5.1, p. 172, de la divergence d'une suite.

Remarques

1. La proposition 13.11 se généralise au cas des limites en $\pm\infty$: une condition nécessaire et suffisante pour que l'application f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) admette pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) est que pour toute suite réelle $(u_n)_n$ tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) la suite de terme général $f(u_n)$ tend vers ℓ.

2. De la proposition 13.11, on déduit que si l'on trouve une suite $(u_n)_n$ qui tend vers x_0 et pour laquelle la suite de terme général $f(u_n)$ diverge alors la fonction f n'a pas de limite en x_0.

3. On peut également prouver que la fonction f n'a pas de limite en x_0 en exhibant deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergeant toutes les deux vers x_0 mais pour lesquelles les suites de terme général $f(u_n)$ et $f(v_n)$ tendent vers deux réels distincts.

Exemples

1. L'application $f : x \in]-1,0[\cup]0,1[\mapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0. En effet, la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 1/(n\pi)$ converge vers 0 mais la suite de terme général $f(u_n)$ diverge puisque $f(u_n) = (-1)^n$.

2. Montrons que l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x\sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. Considérons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Cette suite tend vers $+\infty$ et la suite de terme général $f(u_n) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ tend vers $+\infty$. Par ailleurs, considérons la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = 2(n+1)\pi$. Cette suite tend vers $+\infty$ et la suite de terme général $f(u_n) = 0$ converge vers 0. La proposition 13.11 indique que f n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 6 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

Théorème 13.1 (Théorème d'encadrement)
Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. Soient f, g_1, g_2, trois applications de D dans $\mathbb{R}$. On suppose que g_1 et g_2 admettent pour limite en x_0 les réels ℓ_1 et ℓ_2.

✗ *Si pour tout $x \in D$ on a $\big(g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x)\big)$ et si f admet une limite en x_0 alors*

$$\ell_1 \leqslant \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) \leqslant \ell_2.$$

✗ *Si pour tout $x \in D$ on a $\big(g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x)\big)$ et si $\ell_1 = \ell_2$ alors f admet une limite en x_0 et*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = \ell_1.$$

Démonstration $\trianglerighteq$ Soit $(u_n)_n$ une suite de D convergeant vers $x_0 \in \overline{D}$. D'après les hypothèses, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$g_1(u_n) \leqslant f(u_n) \leqslant g_2(u_n).$$

D'après la proposition 13.11, puisque f admet une limite ℓ en x_0, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers ℓ. De même, puisque g_1 et g_2 admettent pour limite en x_0 les réels ℓ_1 et ℓ_2, on a

$$\lim_{n\to+\infty} g_1(u_n) = \ell_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} g_2(u_n) = \ell_2.$$

D'après le théorème 5.1 p. 185, on en déduit que

$$\ell_1 \leqslant \ell \leqslant \ell_2.$$

⊵ Supposons que $\ell_1 = \ell_2$. D'après ce qui précède, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers ℓ_1. Ce résultat est acquis pour toute suite $(u_n)_n$ convergeant vers x_0. D'après la proposition 13.11, on en déduit d'une part que f admet une limite en x_0 et d'autre part que cette limite est ℓ_1. □

Remarques

1. On peut énoncer un résultat analogue au théorème d'encadrement dans le cas des limites en $+\infty$ et $-\infty$.

2. On se convaincra que l'hypothèse « f admet une limite en x_0 » est indispensable dans le premier énoncé, mais ne l'est plus dans le second en lisant attentivement la démonstration de la proposition.

Exemple Intéressons-nous à la limite en 0 de l'application $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ la mesure en radian[27] d'un angle de sommet O (voir la figure 4) et $\mathcal{C}$ le cercle centré en O de rayon $R = OA = 1$.

Il est clair que l'aire du triangle OAP est strictement plus petite que l'aire du secteur angulaire OAP, elle-même strictement plus petite que l'aire du triangle OAE, autrement dit[28] on a,

$$\frac{1}{2}\, OA \times CP \;<\; \frac{x}{2} \;<\; \frac{1}{2}\, OA \times AE.$$

Or, $OA = 1$, $OC = \cos(x)$, $CP = \sin(x)$ et $AE = \tan(x)$. On a donc

$$0 < \sin(x) < x < \tan(x).$$

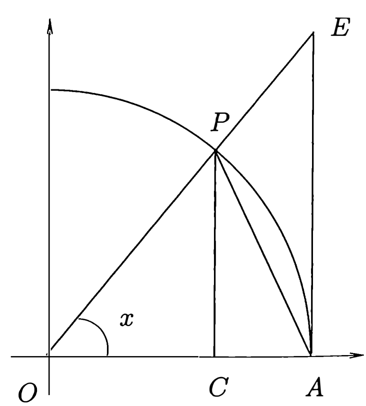


Fig. 4 Notations utilisées.

---

(27) On appelle radian l'unité d'angle telle que la mesure de l'angle plat soit π. Dans ce cours, tous les angles sont mesurés en radians.

(28) On rappelle que l'aire du triangle est égale à la moitié du produit de la base par la hauteur du triangle et que l'aire du secteur angulaire d'angle de mesure α radian et de rayon R vaut $\frac{\alpha}{2\pi}$ fois l'aire du disque de rayon R, soit $\alpha R^2/2$.

On en déduit que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{autrement dit que} \quad \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

La parité des fonctions sinus et cosinus implique que

$$\forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \tfrac{\pi}{2}[\qquad \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Comme $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$, le théorème d'encadrement permet de conclure que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Par « passage à la limite » certaines inégalités strictes peuvent devenir des inégalités larges, *i.e.* même si pour tout $x \in]a, b[$ on a $g_1(x) < f(x) < g_2(x)$, on ne peut pas conclure que $\ell_1 < \lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) < \ell_2$.

Un contre-exemple est fourni par l'application $f : x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{x+1}$. On a $0 < f(x) < 1$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ mais $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

Théorème 13.2 *Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. Soient f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$ telles que*

$$\forall x \in D \quad f(x) \geqslant g(x).$$

1. Si $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

2. Si $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = -\infty$.

Démonstration Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans D et convergeant vers x_0. D'après les hypothèses, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f(u_n) \geqslant g(u_n). \tag{3}$$

⊵ Puisque g tend vers $+\infty$ en x_0, la proposition 13.11 indique que la suite de terme général $g(u_n)$ tend vers $+\infty$. D'après la proposition 5.15, page 186, on déduit de la relation (3) que la suite de terme général $f(u_n)$ tend vers $+\infty$. Ce résultat est vrai pour toute suite $(u_n)_n$ convergeant vers x_0. D'après la proposition 13.11 cela implique que

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$

⊵ La seconde assertion de la proposition se déduit de la première assertion et de l'équivalence

$$\big(\forall x \in D \quad f(x) \geqslant g(x)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\forall x \in D \quad -g(x) \geqslant -f(x)\big).$$

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to x_0} -f(x) = +\infty$ et on en déduit d'après la première partie de la démonstration que $\lim_{x\to x_0} -g(x) = +\infty$. On a donc $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$. □

Le résultat du théorème 13.2 reste exact si $x_0 = +\infty$ ou si $x_0 = -\infty$.

13.2.3 Opérations algébriques sur les fonctions admettant une limite

Proposition 13.12 (Cas des limites finies)
Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, x_0 un point adhérent à D et f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$. Si f a pour limite ℓ en x_0 et g a pour limite ℓ' en x_0 alors,

1. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell|$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{x \to x_0} (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \ell$;
3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \ell + \ell'$;
4. $\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x) = \ell\, \ell'$.
5. *Si de plus on suppose que $\ell' \neq 0$ alors* $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}(x)\right) = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Démonstration $\trianglerighteq$ Supposons que f admette pour limite ℓ en x_0 ; on a

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big). \tag{4}$$

D'après la seconde inégalité triangulaire[29], on a $\big||f(x)| - |\ell|\big| \leqslant |f(x) - \ell|$. L'assertion (4) implique donc que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies ||f(x)| - |\ell|| \leqslant \varepsilon\big).$$

D'après la définition 13.2, ceci signifie que l'application $|f|$ admet pour limite en x_0 le réel $|\ell|$.

$\trianglerighteq$ La seconde assertion résulte de l'égalité suivante pour $x \in D$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $|(\lambda \cdot f)(x)| = |\lambda|\,|f(x)|$.

$\trianglerighteq$ Supposons que f admette pour limite ℓ en x_0 et que g admette pour limite ℓ' en x_0 et considérons un réel strictement positif ε. En utilisant la première inégalité triangulaire, on obtient pour tout $x \in D$

$$\big|(f(x) + g(x)) - (\ell + \ell')\big| = \big|(f(x) - \ell) + (g(x) - \ell')\big| \leqslant \big|f(x) - \ell\big| + \big|g(x) - \ell'\big|.$$

D'après la définition 13.2, on a[30]

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta' \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta' \implies |g(x) - \ell'| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon\big),\\ \text{et} \quad &\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon\big). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout réel $x \in D$ tel que $|x - x_0| \leqslant \tau$ où $\tau = \min\{\eta, \eta'\}$ on a

$$\big|(f(x) + g(x)) - (\ell + \ell')\big| \leqslant \big|f(x) - \ell\big| + \big|g(x) - \ell'\big| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

---

(29) Voir la proposition 3.7 p. 108.
(30) Voir la remarque de la page 598.

On a donc établi que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \tau \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(|x - x_0| \leqslant \tau \implies |(f+g)(x) - (\ell + \ell')| \leqslant \varepsilon\big).$$

D'après la définition 13.2, on en conclut que $f + g$ admet pour limite $\ell + \ell'$ en x_0.

$\trianglerighteq$ La démonstration de la quatrième assertion fait l'objet de l'exercice 7. La dernière assertion est admise. □

Le résultat de la proposition 13.12 reste exact si $x_0 = +\infty$ ou si $x_0 = -\infty$.

Remarque Dans le cas où $\ell' = 0$, la limite du quotient f/g dépend du comportement des fonctions f et g au voisinage de x_0. Si $\ell \in \mathbb{R}^*$ et si g est de signe constant au voisinage de x_0 alors f/g tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes de g et de ℓ. Si $\ell = 0$, on a une forme indéterminée et on ne peut rien conclure sans transformer l'écriture de f/g.

Exemple Considérons les applications

$$f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{\sin(x)}{x} \qquad \text{et} \qquad g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x).$$

On a $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. D'après la proposition 13.12 on en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad \text{autrement dit que} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1.$$

Exercice 7 Soient f et g deux applications définies sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. On suppose que f admet pour limite ℓ en x_0 et que g admet pour limite ℓ' en x_0.
1 - Montrer que pour tout $x \in D$ on a

$$|f(x)g(x) - \ell\ell'| \leqslant |f(x) - \ell|\,|g(x) - \ell'| + |\ell'|\,|f(x) - \ell| + |\ell|\,|g(x) - \ell'|.$$

2 - En déduire que l'application $f \times g$ admet pour limite $\ell\ell'$ en x_0 (on pourra s'inspirer de ce qui a été fait dans la démonstration de la proposition 13.12).

En ce qui concerne les fonctions ayant pour limite $\pm\infty$ en x_0, on a les résultats suivant que nous admettrons[31].

[31] Leur démonstration est assez semblable à ce qui a été fait pour démontrer la proposition 13.12 et requiert uniquement comme adaptation de prendre la définition idoine de la limite.

PROPOSITION 13.13 (Cas des limites infinies)
Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. Soient f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$.

1. *Si* $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *avec* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *alors*
$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty.$$
2. *Si* $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *avec* $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ *alors*
$$\lim_{x \to x_0} (f \times g)(x) = +\infty.$$
3. *Si* $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *avec* $\ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ *alors*
$$\lim_{x \to x_0} (f \times g)(x) = -\infty.$$
4. *Si* $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *avec* $\ell \in \mathbb{R}$ *alors*
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = 0.$$

Le résultat de la proposition **13.13** reste exact si $x_0 = +\infty$ ou si $x_0 = -\infty$.

On ne peut absolument rien conclure de manière générale en ce qui concerne les fonctions qui n'ont pas de limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$). Par exemple les fonctions

$$f : x \longmapsto \sin(x) \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto 1 + \sin(x)$$

n'ont pas de limite en $+\infty$. La fonction $f+g$ n'a pas non plus de limite en $+\infty$ mais la fonction $f-g$ admet pour limite 1 en $+\infty$. Par ailleurs, si f admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en x_0 et g n'admet pas de limite en x_0, alors les fonctions $f+g$ et $f \times g$ n'ont pas de limite en x_0.

On peut résumer les propriétés qui ont été énoncées sous forme de tableaux. Le tableau suivant indique la limite éventuelle de la fonction $f+g$ relativement aux valeurs de la limite des fonctions f et g. On écrit IND pour *forme indéterminée* lorsque les hypothèses ne permettent pas de conclure.

$f \quad + \quad g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Le tableau suivant indique la limite éventuelle de la fonction $f \times g$ relativement aux valeurs de la limite des fonctions f et g.

$f \times g$	$\ell' > 0$	$\ell' = 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = 0$	0	0	0	IND	IND
$\ell < 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	IND	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	IND	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Le tableau suivant indique la limite éventuelle de la fonction f/g relativement aux valeurs de la limite des fonctions f et g.

$f \;/\; g$	$\ell' > 0$	$\ell' = 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	ℓ/ℓ'	IND $(\pm\infty)$	ℓ/ℓ'	0	0
$\ell = 0$	0	IND	0	0	0
$\ell < 0$	ℓ/ℓ'	IND $(\pm\infty)$	ℓ/ℓ'	0	0
$+\infty$	$+\infty$	IND $(\pm\infty)$	$-\infty$	IND	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND $(\pm\infty)$	$+\infty$	IND	IND

Les seules méthodes valables pour le calcul de limites sont celles qui découlent de manière directe de l'utilisation de l'une des règles énoncées dans cette partie[32]. Tout calcul utilisant un résultat autre que ceux énoncés dans le cours doit faire l'objet d'une justification. Il existe de nombreuses méthodes de raisonnement incorrectes qui aboutissent à la valeur attendue pour la limite. Bien entendu le calcul est alors sans valeur.

Nous admettons le résultat suivant concernant la limite de la composée de 2 applications.

---

(32) Nous compléterons l'arsenal des méthodes utilisables pour le calcul de limites dans les chapitres suivants consacrés à la comparaison locale de fonctions et aux développements limités.

PROPOSITION 13.14 (Limite de la composée de 2 applications) *Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, x_0 un point adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f une application de D dans $\mathbb{R}$, D' un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que $f(D) \subset D'$ et g une application de D' dans $\mathbb{R}$. Si f admet pour limite y_0 en x_0 et si g admet pour limite ℓ en y_0 alors $g \circ f$ admet pour limite ℓ en x_0.*

Le résultat de la proposition 13.14 reste exact si $x_0 = +\infty$ ou si $x_0 = -\infty$.

Un cas particulier important de la proposition 13.14 est celui où $D \subset D'$ et où f est l'injection canonique[33] de D dans D'. Dans ce cas $g \circ f$ est la restriction de g à l'ensemble D :

$$g \circ f : \quad x \in D \longmapsto x \in D' \longmapsto g(x) \in \mathbb{R}.$$

D'après la proposition 13.14 si g admet pour limite ℓ en $x_0 \in \overline{D}$ alors l'application $g \circ f = g|_D$ admet également pour limite ℓ en x_0. La réciproque est bien entendu fausse.

Exemple Considérons les ensembles $D =]0, +\infty[$, $D' = \mathbb{R}$ et l'application $g : x \in D' \mapsto x^2$. On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in D'}} g(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} g|_D(x) = 0$.

Sous ces mêmes hypothèses, supposons maintenant que x_0 soit un point d'accumulation de D' et que $D = D' \setminus \{x_0\}$. Dans le cas où l'application $g|_D$ admet pour limite ℓ en x_0 sans que g ait une limite en x_0, on note

$$\ell = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x).$$

Exemple L'application $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ n'a pas de limite en 0 mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g(x) = 0$.

On remarquera que si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = \ell$ et si $g(x_0) = \ell$ alors g a pour limite ℓ en x_0.

Supposons à présent que x_0 est un point d'accumulation de $D = D' \cap]x_0, +\infty[$. Dans le cas où l'application $g|_D$ admet pour limite ℓ en x_0, on note

$$\ell = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} g(x) \quad \text{ou} \quad \ell = \lim_{x \to x_0^+} g(x)$$

et on dit que $g|_D$ admet ℓ pour limite à droite en x_0. De la même manière, dans le cas où x_0 est un point d'accumulation de $D = D' \cap] -\infty, x_0[$ et où l'application $g|_D$ admet pour limite ℓ en x_0, on note

$$\ell = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} g(x) \quad \text{ou} \quad \ell = \lim_{x \to x_0^-} g(x)$$

[33] C'est-à-dire l'application injective $x \in D \mapsto x \in D'$.

et on dit que $g|_D$ admet ℓ pour limite à gauche en x_0.

On remarquera que si g admet le réel ℓ pour limite à gauche et à droite en x_0 et si $g(x_0) = \ell$ alors g admet pour limite ℓ en x_0. On peut exprimer à l'aide d'assertions quantifiées les notions de limite à gauche et de limite à droite.

DÉFINITION 13.3 (Limite à gauche et limite à droite)
Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D.

✗ *On dit que l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet pour limite à droite le réel ℓ en x_0 si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(0 < x - x_0 \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big).$$

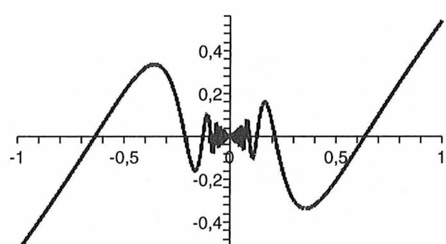
✗ *On dit que l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet pour limite à gauche le réel ℓ' en x_0 si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \big(0 < x_0 - x \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell'| \leqslant \varepsilon\big).$$

Exemples

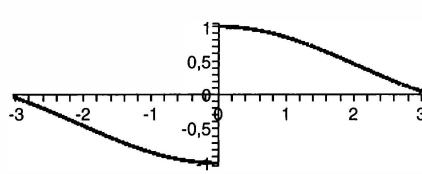
1. L'application $f : x \in]-1, 0[\cup]0, 1[\mapsto x\cos(\frac{1}{x})$ admet 0 pour limite à droite en 0. En effet, pour tout réel x non nul on a $|f(x)| \leqslant x$. On en déduit que quel que soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un réel $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ (il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$) tel que $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in]0, \eta]$. On vérifie de même que l'application f admet 0 pour limite à gauche en 0.

```
> f:=x->x*cos(1/x):
> limit(f(x),x=0,right);
                    0
> plot(f(x),x=-1..1);
```



2. L'application $g : x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[\mapsto \frac{1}{x}\,|\sin x|$ admet 1 pour limite à droite en 0 et -1 pour limite à gauche. Cet exemple sera détaillé par la suite.

```
> g:=x->abs(sin(x))/x:
> limit(g(x),x=0,left);
              -1
> limit(g(x),x=0,right);
              1
> plot(g(x),x=-Pi..Pi,discont=true);
```



Remarque Soient f une application de D dans $\mathbb{R}$, D' un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que $f(D) \subset D'$ et g une application de D' dans $\mathbb{R}$. La proposition 13.14

indique que pour $x_0 \in D$,

$$\text{si} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \quad \text{et} \quad \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell.$$

On a donc

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to f(x_0)} g(y).$$

On dit parfois que l'on effectue le « changement de variable » $y = f(x)$ dans la limite. En particulier,

$$\lim_{x \to 0} g(y_0 + x) = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

Exemples

1. Considérons les applications $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(x)/x$ et $g : y \in \mathbb{R} \mapsto y^2$ de sorte que $g \circ f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto (\sin(x)/x)^2$. On a $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ et $\lim_{y \to 1} g(y) = 1$ et on en déduit que

$$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 = \lim_{y \to 1} g(y) = 1.$$

2. Considérons les applications $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{2}x \in \mathbb{R}^*$ et $g : y \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(y)/y$ de sorte que $g \circ f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2}{x} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. On a $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{y \to 0} g(y) = 1$ et on en déduit que

$$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{y \to 0} g(y) = 1.$$

Exercice 8 Déterminer la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto x\,\mathrm{E}(1/x)$ où E désigne la fonction partie entière.

13.2.4 Limites usuelles

✗ Indiquons quelques limites usuelles (d'autres seront données ultérieurement).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1.$$

On a déjà déterminé précédemment la valeur de la première et la troisième limite. Pour obtenir la seconde limite, on part de la relation

$$\cos(x) = \cos\left(2\,\tfrac{1}{2}x\right) = 1 - 2\sin^2\left(\tfrac{1}{2}x\right)$$

qui permet d'écrire

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{2\sin^2(\frac{1}{2}x)}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{\frac{1}{2}x} \right)^2.$$

En utilisant la proposition 13.14 et la première des limites usuelles rappelées, on obtient[34]

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{\frac{1}{2}x}\right)^2=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

✗ La limite d'une fonction rationnelle[35] (quotient de deux fonctions polynomiales) en $+\infty$ et $-\infty$ est la même que celle du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur. Autrement dit,

1. si le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, la limite de la fonction rationnelle est 0 ;
2. si le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur, la limite de la fonction rationnelle est égale au quotient des coefficients des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur ;
3. si le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, la limite de la fonction rationnelle est $\pm\infty$ selon le signe du numérateur et du dénominateur au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple On obtient immédiatement, en appliquant les règles précédentes, les valeurs des limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x^3}{x^2+3x^4}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^3}{x-3x^3}=-\frac{1}{3},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x^4}{x+3x^3}=+\infty.$$

✗ La limite d'une fonction rationnelle en 0 est la même que celle du quotient des monômes de plus bas degré du numérateur et du dénominateur. Autrement dit,

1. si la valuation du polynôme au numérateur est supérieure à la valuation du polynôme au dénominateur, la limite de la fonction rationnelle est 0 ;
2. si la valuation du polynôme au numérateur est égale à la valuation du polynôme au dénominateur, la limite de la fonction rationnelle est égale au quotient des coefficients des monômes de plus bas degré du numérateur et du dénominateur ;
3. si la valuation du polynôme au numérateur est inférieure à la valuation du polynôme au dénominateur, la fonction rationnelle n'a pas de limite (finie) en 0.

Exemple On obtient immédiatement, en appliquant les règles précédentes, les valeurs des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x^3}{x+x^2+x^4}=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x^3}{2x^2+x^4}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+4x^3}{-3+2x^2+x^4}=-\frac{1}{3}.$$

---

[34] Lorsque x tend vers 0, $t=\frac{1}{2}x$ tend également vers 0.

[35] Voir le chap. 7.

✗ On donne par ailleurs les limites suivantes concernant les fonctions logarithme et exponentielle. Ces résultats sont démontrés au chap. 14, voir la proposition 14.4, page 665 et la proposition 14.7, page 669.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0; \qquad \lim_{x\to 0^+} x \ln(x) = 0; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Exercice 9 Étudier la limite éventuelle des fonctions suivantes aux extrémités de leur ensemble de définition :

1 - $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$

2 - $f : x \mapsto \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}$

3 - $f : x \mapsto \dfrac{x\cos^2(x)}{\sin(x)}$

4 - $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$

5 - $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x^2-x}$

6 - $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1} - x$

7 - $f : x \mapsto x^2\sin(1/x)$

8 - $f : x \mapsto \sin(x)\ln(x)$

13.3 Continuité

13.3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 13.4 *Soit f une application définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.*

✗ *On dit que f est continue en x_0 si f admet pour limite $f(x_0)$ en x_0, autrement dit si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in I \quad \big(|x-x_0| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon\big).$$

✗ *On dit que x_0 est un point de discontinuité pour f si f n'est pas continue en x_0, c'est-à-dire si*[36]

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in I \quad \big(|x-x_0| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad |f(x)-f(x_0)| > \varepsilon\big).$$

✗ *On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en x_0 pour tout $x_0 \in I$. On note $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ continues sur I.*

Pour une illustration graphique de la définition de la continuité, on pourra se reporter à la figure 1, page 598.

Exemples

1. Montrons que l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire montrons que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f est continue en x_0. Commençons par remarquer que pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| \leqslant \eta|x + x_0| \leqslant \eta(2|x_0| + \eta).$$

Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\eta(2|x_0| + \eta) \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire tel que $\eta \leqslant \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon),$$

ce qui d'après la définition 13.4 permet d'affirmer que f est continue en x_0.

2. Montrons que l'application signe définie par $S(x) = -1$ si $x < 0$, $S(0) = 0$ et $S(x) = 1$ si $x > 0$ n'est pas continue en $x_0 = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $|f(x) - f(0)| = 1$, voir la figure 5. Ainsi, en considérant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $x \in \mathbb{R}$ (le réel $x = \frac{1}{2}\eta$ convient) tel que

$$|x| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(0)| = 1 > \varepsilon.$$

La définition 13.4 permet de conclure que S n'est pas continue en 0.

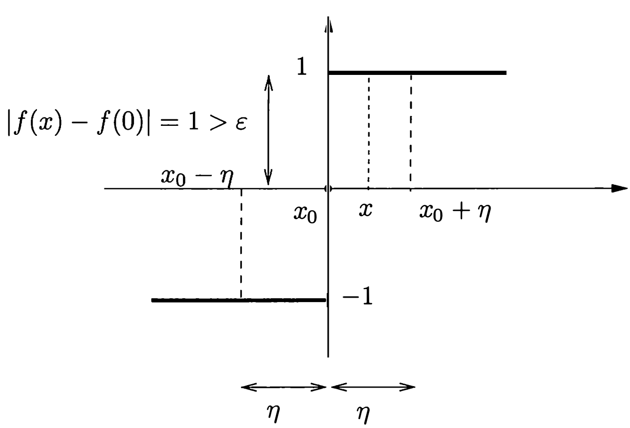


Fig. 5 La fonction signe n'est pas continue en 0.

Par contre, cette application est continue sur $]-\infty, 0[$ (et sur $]0, +\infty[$) puisque pour tout $x_0 \in]-\infty, 0[$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ en considérant le réel $\eta = 1$, on a[37]

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| = 0 \leqslant \varepsilon).$$

(36) On notera que cette assertion quantifiée est la négation de la précédente.

(37) On remarquera qu'ici l'assertion est vraie quelque soit la valeur de η.

Plus généralement, ce raisonnement montre que toute application constante sur un intervalle ouvert est continue sur cet intervalle.

3. La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$. En effet si x_0 et x sont deux réels, on a

$$\sin(x) - \sin(x_0) = 2\cos\left(\tfrac{1}{2}(x+x_0)\right)\,\sin\left(\tfrac{1}{2}(x-x_0)\right)$$

donc[38] : $|\sin(x) - \sin(x_0)| \leqslant 2\left|\sin\left(\tfrac{1}{2}(x-x_0)\right)\right| \leqslant |x - x_0|$.

Par conséquent, pour tout réel strictement positif ε, il existe un réel strictement positif η (il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$) tel que pour tout réel x,

$$|x - x_0| \leqslant \eta \implies |\sin(x) - \sin(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques

1. Un réel x_0 est qualifié de point de discontinuité de première espèce de f, s'il est point de discontinuité de f et si f admet un réel pour limite à gauche et à droite en x_0. Les autres points de discontinuité sont qualifiés de points de discontinuité de seconde espèce.

2. Graphiquement le fait que f soit une application continue sur l'intervalle I d'extrémités a et b se traduit par le fait que la représentation graphique de f joint les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ sans interruption dans le tracé.

Exercice 10 Montrer, en ayant recours à la définition 13.4, que la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 13.5 *Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*

✗ *Soit x_0 un élément de I tel que I constitue un voisinage à gauche[39] de x_0. On dit que f est* **continue à gauche** *en $x_0 \in I$ si $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, autrement dit si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in I \quad (0 < x_0 - x \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon).$$

✗ *Soit x_0 un élément de I tel que I constitue un voisinage à droite[39] de x_0. On dit que f est* **continue à droite** *en $x_0 \in I$ si $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, autrement dit si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in I \quad (0 < x - x_0 \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon).$$

---

[38] On rappelle que pour tout réel t on a $|\sin(t)| \leqslant |t|$.

[39] La définition de voisinage à gauche (resp. à droite) est donnée p. 117.

Remarques

1. Il résulte des propriétés des limites que l'application f est continue à droite en x_0 et est continue à gauche en x_0 si et seulement si f est continue en x_0.

2. La notion de continuité d'une application sur un intervalle a été introduite dans le cas d'un intervalle ouvert, voir la définition 13.4. On dit que f est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et est continue à droite en a et à gauche en b.

Exemples

1. L'application $f : x \in [-\pi,\pi\,] \mapsto \begin{cases} \sin(x)/|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue à droite en 0 puisque, voir page 614,

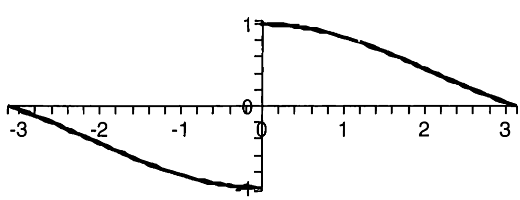
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Elle n'est pas continue à gauche puisque $\lim_{x\to 0^-} \sin(x)/|x| = -1$. Par ailleurs, elle est continue à droite en $-\pi$ et elle est continue à gauche en π puisque

$$\lim_{x\to -\pi^+} \frac{\sin(x)}{|x|} = 0 = f(-\pi) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin(x)}{|x|} = 0 = f(\pi).$$

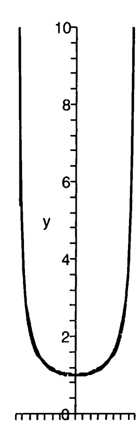
L'application f est continue sur $[-\pi, 0[$ et sur $[0, \pi]$. Illustrons la situation en ayant recours à MAPLE.

```
> f:= x-> piecewise(x=0,1,sin(x)/abs(x)):
> plot(f(x),x=-Pi..Pi,discont=true);
```



2. Considérons l'application $f : x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \begin{cases} \tan(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x \in \{0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\} \end{cases}$

Elle est continue en 0 puisque, voir page 614, $\lim_{x\to 0} \tan(x)/x = 1$. Cette application n'est pas continue à gauche en $-\frac{\pi}{2}$ car $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \tan(x)/x = -\infty \neq 1$ et elle n'est pas continue à droite en $\frac{\pi}{2}$ car $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan(x)/x = +\infty \neq 1$. Comme l'indique la proposition 13.10, l'application f n'étant pas bornée au voisinage de $-\frac{\pi}{2}$, ni au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, on ne peut espérer qu'elle ait une limite en ces points.



Illustrons la situation en ayant recours à MAPLE.

```
> f:=x->piecewise(x=0,1,x=Pi/2,1,x=-Pi/2,1,tan(x)/x):
> plot(f(x),x=-Pi/2..Pi/2,y=0..10);
```

Nous allons déduire des résultats établis lors de l'étude des limites, un certain nombre de propriétés concernant les applications continues. Ainsi, le résultat suivant découle de la proposition 13.10.

PROPOSITION 13.15 *Soient f une application définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0 alors f est bornée sur (l'intersection de I avec) un voisinage de x_0 .*

Exemples

1. L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \sin(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue en 0 car $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1 = f(0)$. D'après la proposition 13.15, elle est donc bornée sur un voisinage de 0. Une étude de cette application permettrait d'établir qu'elle est en fait bornée sur $\mathbb{R}$.

2. L'application $x \in]0, +\infty[\mapsto 1/x \in \mathbb{R}$ n'est pas continue en 0 car elle n'est pas bornée en 0 (voir page 594).

Le résultat énoncé à la proposition 13.15, comme ceux qui suivront, pourraient également être formulés avec une conclusion inchangée pour une application continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ en considérant la continuité à droite en a et à gauche en b.

PROPOSITION 13.16 *Soient f une application définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ alors f ne s'annule pas dans un voisinage de x_0.*

Démonstration L'application f étant continue en x_0, d'après la définition 13.4

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in I \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}\,|f(x_0)|$; il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in I \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \tfrac{1}{2}\,|f(x_0)|\big)\,.$$

Soit $\mathcal{V} = I \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$; il s'agit d'un voisinage de x_0. Pour $x \in \mathcal{V}$, en utilisant la seconde inégalité triangulaire[40], on obtient

$$|f(x_0)| - |f(x)| \leqslant \big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leqslant |f(x) - f(x_0)| \leqslant \tfrac{1}{2}\,|f(x_0)|.$$

On en déduit que pour $x \in \mathcal{V}$ on a $|f(x)| \geqslant \frac{1}{2}\,|f(x_0)| > 0$, autrement dit que f ne s'annule pas sur l'ensemble $\mathcal{V}$ qui est un voisinage de x_0. □

PROPOSITION 13.17 *Soient f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. L'application f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite réelle $(u_n)_n$ d'éléments de I convergeant vers x_0, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$.*

[40] Voir la proposition 3.7 p. 108.

Démonstration Ce résultat découle de la proposition 13.11. □

La proposition 13.17 est peu pratique à utiliser pour montrer qu'une application est continue. Par contre, elle est très utile pour établir qu'une application n'est pas continue : s'il existe une suite $(u_n)_n$ qui converge vers x_0 sans que la suite de terme général $f(u_n)$ ne converge vers $f(x_0)$ alors x_0 est un point de discontinuité de f.

Exemples

1. La fonction partie entière E n'est pas continue en 0 car la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = -1/n$ converge vers 0 mais la suite de terme général $\mathrm{E}(u_n)$ qui est la suite constante égale à -1 converge vers -1 et $\mathrm{E}(0) = 0 \neq -1$.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

L'application f n'est continue en aucun point. Pour le vérifier, raisonnons par l'absurde.

⊵ Supposons que f est continue en $x_0 \in \mathbb{Q}$ et considérons une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui converge[41] vers x_0. D'après la proposition 13.17, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$. Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(u_n) = u_n$. La suite de terme général $f(u_n)$ converge donc aussi vers x_0. Par unicité de la limite on doit avoir $f(x_0) = x_0$. C'est impossible puisque $f(x_0) = x_0^2 + 1 \neq x_0$ (l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle). Puisque l'on aboutit à une contradiction, cela signifie que notre hypothèse est erronée ; l'application f n'est donc pas continue en $x_0 \in \mathbb{Q}$.

⊵ Supposons à présent que f est continue en $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et considérons une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui converge[42] vers x_0. D'après la proposition 13.17, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$. Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(u_n) = u_n^2 + 1$ et la suite de terme général $f(u_n)$ converge donc aussi vers $x_0^2 + 1$. Par unicité de la limite d'une suite, on doit avoir $f(x_0) = x_0^2 + 1$. C'est impossible puisque $f(x_0) = x_0 \neq x_0^2 + 1$. On obtient là encore une contradiction. L'application f n'est donc pas continue en $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Finalement f n'est continue nulle part. Bien entendu, ceci implique qu'il est impossible d'en obtenir une représentation graphique de la façon usuelle.

Il arrive parfois qu'une fonction f définie sur un ensemble $]a, x_0[\cup]x_0, b[$ soit continue sur son ensemble de définition et admette une limite en x_0. C'est le cas par exemple de la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ qui est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et qui admet pour limite 1 en 0. La représentation graphique d'une telle fonction ne présente pas de « discontinuité visuelle » au point $(0, 1)$ et on a envie de la considérer comme la restriction à l'ensemble $]a, x_0[\cup]x_0, b[$ d'une fonction continue sur $]a, b[$. Ces constatations motivent la définition suivante.

---

[41] Une telle suite existe d'après la proposition 3.15, p. 115 car $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

[42] Une telle suite existe d'après la proposition 3.15, p. 115 car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 13.6 (Prolongement par continuité)
Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ *et* $x_0 \in]a,b[$. *Étant donnée une application* f *continue sur* $]a,x_0[\cup]x_0,b[$ *et admettant pour limite en* x_0 *le réel* ℓ, *l'application* $\widetilde{f}$ *définie sur* $]a,b[$ *par*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a,x_0[\cup]x_0,b[\\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est une application continue sur $]a,b[$ *appelée prolongement par continuité de l'application* f *en* x_0.

Exemple Le prolongement par continuité en 0 de $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(x)/x$ est l'application $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Remarque Il est fréquent de confondre au niveau des notations l'application f et son prolongement par continuité en notant également f ce dernier.

13.3.2 Opérations algébriques sur les applications continues

PROPOSITION 13.18 *Soient* λ *un réel et* f *et* g *deux applications définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *Si* f *et* g *sont continues en* $x_0 \in I$ *(resp. sur* I*) alors on a les propriétés suivantes :*

1. $|f|$ *est continue en* x_0 *(resp. sur* I*) ;*
2. $f+g$ *est continue en* x_0 *(resp. sur* I*) ;*
3. $f \times g$ *est continue en* x_0 *(resp. sur* I*) ;*
4. $\lambda \cdot f$ *est continue en* x_0 *(resp. sur* I*) ;*
5. *si de plus* $g(x_0) \neq 0$ *(resp.* g *ne s'annule pas sur* I*) alors* f/g *est continue en* x_0 *(resp. sur* I*).*

Démonstration Ce résultat découle de la proposition 13.12. □

Exemples

1. On a démontré précédemment que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. En utilisant la troisième assertion de la proposition 13.18, on peut montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur à 2 l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$. La troisième et la quatrième assertion de la proposition 13.18 permettent alors d'en déduire que toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, la cinquième des assertions permet d'établir qu'une fonction rationnelle est continue en tout réel qui n'est pas un pôle de la fraction rationnelle.

2. Nous avons établi que les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction cosinus s'annulant pour $x = (k + \frac{1}{2})\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on déduit de la cinquième assertion de la proposition 13.18 que la fonction tangente est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

On a les résultats suivants concernant la composition d'applications continues. Ces résultats découlent de la proposition 13.14.

PROPOSITION 13.19 *Soient I un intervalle ouvert, f une application de I dans $\mathbb{R}$, J une partie de $\mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset J$ et g une application de J dans $\mathbb{R}$. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Si f est continue en x_0 (resp. sur I) et si g est continue en y_0 (resp. sur J) alors $g \circ f$ est continue en x_0 (resp. sur I).*

COROLLAIRE 13.1 *Soient f une application définie au voisinage de x_0 et g une application définie au voisinage de $y_0 = f(x_0)$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ et si g est continue en y_0 alors $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$.*

Exemple Puisque $\lim_{x \to 0} \sin(x)/x = 1$ et que la fonction exponentielle est continue en 1, on en déduit que $\lim_{x \to 0} \exp(\sin(x)/x) = \mathrm{e}$.

EXERCICE 11 Montrer que l'application

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

13.3.3 Continuité sur un intervalle

BOLZANO, Bernhard (1781, Prague - 1848, Prague).

Après des études de théologie et de mathématiques, Bolzano est ordonné prêtre en 1805. Professeur de sciences de la religion, il consacre son temps libre à l'étude des mathématiques. Bolzano s'est intéressé à la logique mathématique et à une refonte rigoureuse de la théorie des fonctions d'une variable réelle où il définit clairement les concepts de continuité et de dérivabilité. Bolzano donna avant Weierstrass, par une construction géométrique, un exemple de fonction continue en tout point, dérivable en aucun point. Il publia une démonstration du théorème des valeurs intermédiaires en 1817.

Dans cette section a et b désignent deux réels tels que $a < b$. On rappelle qu'une application est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, si elle est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et qu'elle est continue à droite en a et à gauche en b.

Théorème 13.3 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration $\trianglerighteq$ Supposons que $f(a) < 0$ et que $f(b) > 0$. L'ensemble

$$F = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leqslant 0\}$$

est une partie non vide ($a \in F$) et majorée (par b) de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne supérieure c telle que $c \leqslant b$. Nous allons montrer que $f(c) = 0$.

$\trianglerighteq$ Puisque c est borne supérieure de F, d'après la proposition 3.2 page 101,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x_\varepsilon \in F \quad c - \varepsilon < x_\varepsilon \leqslant c.$$

En considérant des réels ε de la forme $\varepsilon = 1/n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ dans l'assertion précédente, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n \in F \quad c - 1/n < x_n \leqslant c.$$

Le théorème d'encadrement[43] indique que la suite $(x_n)_n$ converge vers c. Comme f est continue en c, d'après la proposition 13.17, la suite de terme général $f(x_n)$ converge vers $f(c)$. Or, puisque $x_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(x_n) \leqslant 0$. On en déduit d'après le théorème 13.1 que $f(c) \leqslant 0$. Cela implique en particulier que $c < b$ car $c \in F$ et b qui est un majorant de F n'appartient pas à F puisque $f(b) > 0$.

$\trianglerighteq$ Considérons la suite $(y_n)_n$ de terme général

$$y_n = c + \frac{b - c}{n}.$$

Puisque $c < b$ la suite $(y_n)_n$ est strictement décroissante et converge vers c. Comme f est continue en c, d'après la proposition 13.17, la suite de terme général $f(y_n)$ converge vers $f(c)$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \notin F$ on a $f(y_n) > 0$. D'après le théorème 13.1, on en déduit que $f(c) \geqslant 0$.

Finalement pour le réel c on a $f(c) \geqslant 0$ et $f(c) \leqslant 0$. Cela implique que $f(c) = 0$. Le théorème est démontré dans le cas où $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

$\trianglerighteq$ Dans le cas où $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ le résultat se déduit de ce qui précède en appliquant ce qui vient d'être démontré à l'application $-f$. $\square$

[43] Voir le théorème 5.1 p. 185.

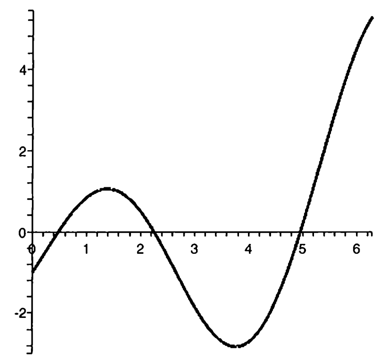
Remarques

1. Le réel $c \in]a, b[$ pour lequel $f(c) = 0$ n'est pas nécessairement unique.

2. On peut démontrer que si f est une application continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)\, f(b) \leqslant 0$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. En effet, si $f(a)\, f(b) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$ et si $f(a)\, f(b) = 0$ alors ou bien $f(a) = 0$ ou bien $f(b) = 0$ donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple Considérons l'application $f : x \in [0, 2\pi] \mapsto \sin(x) + (x - 1)\cos(x)$. Cette application est continue car les fonctions sinus et cosinus ainsi que la fonction polynomiale $x \mapsto x - 1$ sont continues sur $[0, 2\pi]$. Puisque $f(0) = -1 < 0$ et $f(2\pi) = 2\pi - 1 > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) un réel $c \in]0, 2\pi[$ tel que $f(c) = 0$. On peut avoir recours à MAPLE pour illustrer la situation.

```
> f:=x-> sin(x)+(x-1)*cos(x):
> plot(f(x),x=0..2*Pi);
```



Comme on peut l'observer sur la figure, le réel c n'est pas unique. On peut obtenir avec MAPLE des valeurs approchées des 3 réels annulant f sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

```
> fsolve(f(x)=0,x=0..1);
                              0.4797310073
> fsolve(f(x)=0,x=2..3);
                              2.246791377
> fsolve(f(x)=0,x=4..5);
                              4.959757475
```

Le théorème des valeurs intermédiaires admet la généralisation suivante (appelée théorème des valeurs intermédiaires généralisé).

PROPOSITION 13.20 *Soit f une application continue sur l'intervalle $[a, b]$.*

- *Si $f(a) < f(b)$ alors étant donné un élément γ de $[f(a), f(b)]$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.*
- *Si $f(a) > f(b)$ alors étant donné un élément γ de $[f(b), f(a)]$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.*

Démonstration Supposons $f(a) < f(b)$ et considérons un élément γ appartenant à $]f(a), f(b)[$. La fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - \gamma$ est continue sur $[a, b]$ et

$$g(a) \times g(b) = \underbrace{(f(a) - \gamma)}_{<0} \underbrace{(f(b) - \gamma)}_{>0} < 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$. Si $\gamma = f(a)$ (resp. si $\gamma = f(b)$) alors $g(a) = 0$ (resp. $g(b) = 0$). On en déduit que quel que soit $\gamma \in [f(a), f(b)]$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, autrement dit tel que $f(c) = \gamma$. Dans le cas où $f(a) > f(b)$ un raisonnement en tout point similaire, où les rôles de $f(a)$ et $f(b)$ sont inversés, permet d'établir le résultat. □

PROPOSITION 13.21 *L'image par une application continue d'un intervalle est un intervalle.*

Démonstration Soient I un intervalle et f une application de I dans $\mathbb{R}$ continue. Notons $J = f(I)$ l'image de I par f. D'après la définition 3.9, page 116, pour montrer que J est un intervalle, il faut montrer l'assertion suivante :

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad \big((\alpha \in J \quad \text{et} \quad \beta \in J \quad \text{et} \quad \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta) \implies \gamma \in J\big).$$

Considérons trois réels α,β et γ tels que α et β appartiennent à J et $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$. Si $\alpha = \beta$ alors nécessairement $\gamma = \alpha = \beta$ donc γ appartient à J. Supposons à présent que $\alpha < \beta$. Puisque α et β appartiennent à $J = f(I)$, il existe deux réels a et b dans l'intervalle I tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Comme $\alpha = f(a) < \beta = f(b)$, d'après la proposition 13.20, pour tout réel $\gamma \in [\alpha, \beta]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\gamma = f(c)$. Le réel γ est donc l'image par f d'un réel c de l'intervalle $[a, b]$, et donc de l'intervalle I puisque $a \in I$ et $b \in I$. On en conclut que $\gamma \in f(I)$ donc que $\gamma \in J$. □

Nous admettons le théorème suivant qui indique qu'une application continue sur un intervalle fermé et borné est bornée et atteint ses bornes.

THÉORÈME 13.4 *Soit f une application continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$. L'application f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes, i.e.*

$$\exists\ (x_1, x_2) \in [a, b]^2 \quad \textit{tel que} \quad f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad \textit{et} \quad f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Dans le théorème 13.4, l'hypothèse qui impose à l'intervalle d'être fermé est indispensable. Par exemple la fonction $x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0, 1]$ mais n'est pas bornée sur l'intervalle $]0, 1]$. De même elle est continue sur $]1, 2[$ et bornée sur $]1, 2[$ mais n'atteint pas ses bornes sur l'intervalle $]1, 2[$ (sa borne inférieure est atteinte en 2 et sa borne supérieure en 1).

Remarques

1. D'après la proposition 13.21, l'image par une application continue d'un intervalle est un intervalle. De plus, d'après le théorème 13.4, l'image par une application continue d'un intervalle fermé et borné est un intervalle qui est fermé et borné. Par contre, l'image d'un intervalle ouvert (borné ou non) par une application continue n'est pas nécessairement un intervalle ouvert. Par exemple, l'image par la fonction sinus de l'intervalle ouvert $]\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[$ est l'intervalle fermé $[-1, 1]$.

2. Le théorème 13.4 indique que l'image par une application continue d'un intervalle $[a, b]$ fermé et borné est un intervalle qui est fermé et borné. En général, cet intervalle n'est pas $[f(a), f(b)]$. Toutefois, si f est une application continue et croissante (resp. décroissante) sur un intervalle $[a, b]$ alors on a $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ (resp. $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$).

Exercice 12 L'objet de cet exercice est de démontrer une variante du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'un intervalle non borné.
1 - Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer qu'il existe un réel c tel que $f(c) = 0$.
2 - En déduire[44] qu'un polynôme de degré impair possède nécessairement une racine réelle.

13.3.4 Continuité uniforme

Considérons une application f continue sur un intervalle I. Si l'on se reporte à la définition de la continuité, voir page 616, en choisissant une valeur $x_0 \in I$ et un réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$ on ait $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Le réel η dépend du réel ε et en général de x_0 et il varie si l'on choisit une autre valeur dans I pour x_0. Dans certains cas, on peut trouver un réel η strictement positif qui reste le même pour toute valeur x_0 choisie dans l'intervalle I. On dit alors que l'application f est uniformément continue sur I.

De manière plus précise, on définit l'uniforme continuité de la manière suivante.

Définition 13.7 *Soit f une application définie sur un intervalle I. On dit que f est uniformément continue sur I si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall (x, x_0) \in I^2 \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\big).$$

[44] Voir la proposition 6.10 p. 254.

Exemple Montrons que l'application $f : x \in [0,1] \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[0,1]$. Soient $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x,x_0) \in [0,1]^2$ avec $|x - x_0| \leqslant \eta$. On a

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = (x + x_0)\,|x - x_0| \leqslant 2\eta.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ (par exemple $\eta = \frac{1}{2}\varepsilon$) tel que pour tout $(x,x_0) \in [0,1]^2$ avec $|x - x_0| \leqslant \eta$ on a $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. D'après la définition 13.7, cela signifie que f est uniformément continue sur $[0,1]$.

La comparaison de la position de l'expression $(\forall x_0 \in I)$ entre la définition de l'uniforme continuité (définition 13.7) et la définition de la continuité (définition 13.4) aboutit au résultat suivant.

PROPOSITION 13.22 *Soit f une application définie sur l'intervalle I. Si f est uniformément continue sur I alors f est continue sur I.*

Remarque La réciproque est fausse : une application peut être continue sur un intervalle sans être uniformément continue sur cet intervalle. Par exemple l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour vérifier que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, montrons que[45]

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big(|x - y| \leqslant \eta \ \text{ et } \ |x^2 - y^2| > \varepsilon\big).$$

Prenons $\varepsilon = 1$ et pour $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque, déterminons un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x > 0$ et $y > x$ tel que $|x - y| \leqslant \eta$ et $|x^2 - y^2| > 1$. Le couple (x,y) recherché doit donc vérifier $y - x \leqslant \eta$ et $y^2 - x^2 > 1$. Pour $y = x + \eta$ on a

$$y^2 - x^2 = 2\eta x + \eta^2 > 2\eta x$$

donc $y^2 - x^2 > 1$ si $x \geqslant \frac{1}{2\eta}$. On en conclut que pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, le couple $(x,y) = (\frac{1}{2\eta}, \eta + \frac{1}{2\eta})$ vérifie $|x - y| \leqslant \eta$ et $|x^2 - y^2| > 1$.

De même, on peut vérifier que l'application $x \in]0,1[\mapsto 1/x$ est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

On a toutefois le résultat suivant, que nous admettons, qui indique qu'une application continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue sur cet intervalle.

THÉORÈME 13.5 (Théorème de Heine[46])
Une application continue sur un intervalle fermé et borné est uniformément continue sur cet intervalle.

[45] Cette assertion quantifiée est la négation de l'assertion quantifiée donnée à la définition 13.7.

Un autre critère pour établir l'uniforme continuité d'une application est associé à la notion d'application lipschitzienne[47].

DÉFINITION 13.8 (Application lipschitzienne)
Soit f une application définie sur un intervalle I. On dit que f est lipschitzienne de rapport K sur I si

$$\exists K \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall (x,y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

On dit que f est contractante sur I si f est lipschitzienne de rapport K sur I avec $K \in]0,1[$.

Exemple Montrons que la fonction sinus est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a[48]

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\tfrac{1}{2}(x+y)\right) \sin\left(\tfrac{1}{2}(x-y)\right).$$

Compte tenu du fait que la fonction cosinus est bornée par 1 et que pour tout réel t, on a[49] $|\sin(t)| \leqslant |t|$, on obtient

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant 2\left|\sin\left(\tfrac{1}{2}(x-y)\right)\right| \leqslant |x-y|.$$

La fonction sinus est donc lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de constante de Lipschitz $K = 1$. On montrerait de même que la fonction cosinus est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 13.23 *Si f est une application lipschitzienne sur un intervalle I donné alors elle est uniformément continue sur I (et en particulier, elle est continue sur I).*

Démonstration Supposons que f est lipschitzienne sur l'intervalle I, *i.e.* supposons que

$$\exists K \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall (x,y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

---

(46) HEINE, Heinrich Eduard (1821, Berlin - 1881, Halle). Mathématicien allemand connu pour les résultats qu'il a obtenu en analyse réelle (théorème de Heine-Borel notamment) et sur les fonctions spéciales (polynômes de Legendre, fonctions de Bessel, etc).

(47) LIPSCHITZ, Rudolf (1832, Königsberg - 1903, Bonn). Mathématicien allemand célèbre pour ses travaux concernant l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle. C'est dans ce contexte qu'il a introduit les fonctions qui portent son nom. Il était également un spécialiste de la géométrie différentielle.

(48) Voir le formulaire de trigonométrie donné p. 157.

(49) Cette relation est évidente pour $t \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ car la fonction sinus est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$. On peut établir cette relation pour $t \in [-1,1]$ en étudiant la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$ sur $[-1,1]$ ou plus simplement sur $[0,1]$ compte tenu de sa parité.

Montrons que f est uniformément continue sur I, *i.e.* montrons que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall (x, x_0) \in I^2 \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x, x_0) \in I^2$; on a

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant L\,|x - x_0|.$$

On en déduit que si $|x - x_0| \leqslant \varepsilon/L$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ ($\eta = \varepsilon/L$ convient) tel que pour tout $(x, x_0) \in I^2$ avec $|x - x_0| \leqslant \eta$ on a $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. D'après la définition 13.7, on en conclut que f est uniformément continue sur I. □

13.4 Étude des suites récurrentes

Définition 13.9 *Soit f une application définie sur un ensemble D. On appelle point fixe de f tout réel $\zeta \in D$ tel que $f(\zeta) = \zeta$.*

Remarques

1. Un point fixe de f est donc une solution de l'équation $f(x) = x$. C'est aussi un zéro de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

2. Si $f(D) \cap D = \emptyset$ alors f ne peut pas avoir de point fixe dans D.

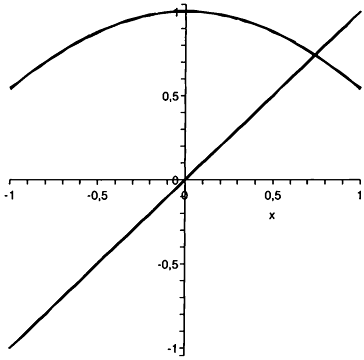
3. Géométriquement les points fixes de f sont les abscisses des points d'intersection de la représentation graphique de f et de la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Exemples

1. Le réel 0 est un point fixe de la fonction sinus car $\sin(0) = 0$.

2. Comme la fonction cosinus a pour image l'intervalle $[-1, 1]$, si elle admet des points fixes, ceux-ci appartiennent nécessairement à l'intervalle $[-1, 1]$. Considérons l'application $g : x \in [-1, 1] \mapsto \cos(x) - x$. Cette application est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$. Elle est strictement positive sur $[-1, 0]$ car $f(0) = 1$; elle n'admet donc aucun zéro sur $[-1, 0]$. Comme $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = \cos(1) - 1 < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires indique qu'il existe au moins un réel $c \in]0, 1[$ tel que $g(c) = 0$. Le fait que g soit strictement décroissante sur $[0, 1]$ assure l'unicité de ce réel c. On en conclut que la fonction g admet un unique zéro, ce qui signifie que la fonction cosinus admet un unique point fixe c et que celui-ci appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
Illustrons la situation avec MAPLE.

```
> solve(cos(x)=x);
                        RootOf(_Z - cos(_Z))
> fsolve(cos(x)=x);
                            0.7390851332
> plot([cos(x),x],x=-1..1);
```



EXERCICE 13 L'objet de cet exercice est l'étude des conditions d'existence d'un point fixe pour une application f définie sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$ (*i.e.* telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$).

1 - On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et on considère l'application $g : x \in [a,b] \mapsto f(x) - x$. Montrer que $g(a) \geqslant 0$ et que $g(b) \leqslant 0$. En déduire que l'application f admet un point fixe dans $[a,b]$.
2 - On suppose que f est croissante sur $[a,b]$ et on considère l'ensemble $\Omega = \{x \in [a,b] \mid f(x) \geqslant x\}$.
a) Montrer que Ω admet une borne supérieure $M \in [a,b]$.
b) Montrer que $M \in \Omega$. (On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.)
c) En déduire que f admet pour point fixe M.
3 - Une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$ décroissante admet-elle nécessairement un point fixe ?

Soit f une application définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$. On peut définir une suite $(u_n)_n$ par la donnée conjointe :

1. de son terme initial $u_0 = \alpha$ où α est un élément de I ;
2. d'une relation de récurrence de la forme : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

On dit alors que la suite $(u_n)_n$ est définie par récurrence. Un certain nombre de propriétés de la suite $(u_n)_n$, que nous allons détailler, découlent des propriétés de l'application f.

PROPOSITION 13.24 *Si la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers le réel ℓ et si f est continue en ℓ alors ℓ est un point fixe de f.*

Démonstration Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers le réel ℓ alors la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = u_{n+1}$ converge elle aussi vers ℓ. D'après la proposition 13.17, puisque la fonction f est continue en ℓ, la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$. Or, les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont égales puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme il y a unicité de la limite d'une suite, on en déduit que $f(\ell) = \ell$, autrement dit que ℓ est un point fixe de f. □

PROPOSITION 13.25 *Soit f une application définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$ et soit $(u_n)_n$ la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = \alpha & (\text{où } \alpha \in I) \\ u_{n+1} = f(u_n) & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

✗ *Si l'application f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_n$ est monotone. Plus précisément, elle est croissante si $f(\alpha) \geqslant \alpha$ et décroissante si $f(\alpha) \leqslant \alpha$.*

✗ *Si l'application f est décroissante sur I alors la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes d'indices pairs et la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes d'indices impairs extraites de $(u_n)_n$ sont monotones de sens de variation opposés.*

Démonstration ⊵ Supposons que f est croissante sur I avec $f(\alpha) \geqslant \alpha$ et montrons que la suite $(u_n)_n$ est croissante, c'est-à-dire montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la quantité $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ est positive. Utilisons un raisonnement par récurrence. Pour $n = 0$, la propriété est vraie puisque $u_1 - u_0 = f(\alpha) - \alpha$ et que par hypothèse $f(\alpha) \geqslant \alpha$. Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$ donné on ait $f(u_k) \geqslant u_k$ et montrons que aussi $f(u_{k+1}) \geqslant u_{k+1}$. On a

$$f(u_{k+1}) - u_{k+1} = f(f(u_k)) - f(u_k).$$

Par hypothèse f est croissante et $f(u_k) \geqslant u_k$ ce qui implique que $f(f(u_k)) \geqslant f(u_k)$, c'est-à-dire que $f(u_{k+1}) \geqslant u_{k+1}$. La propriété est donc héréditaire ce qui conclut notre raisonnement par récurrence. Sur le même principe, on montre que si $f(\alpha) \leqslant \alpha$ alors la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

⊵ Désignons par $(v_n)_n$ la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes d'indices pairs extraite de la suite $(u_n)_n$. On a $v_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f(f(v_n)).$$

Notons g la fonction $f \circ f$. D'après la proposition 13.5, puisque f est décroissante l'application g est croissante. En utilisant la première partie de la proposition, on en déduit que la suite $(v_n)_n$ est monotone et que son sens de monotonie dépend du signe de $g(v_0) - v_0$.
Désignons par $(w_n)_n$ la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes d'indices impairs extraite de la suite $(u_n)_n$. On a $w_0 = f(\alpha)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = f(f(w_n)) = g(w_n).$$

En utilisant la première partie de la proposition, on en déduit que la suite $(w_n)_n$ est monotone et que son sens de variation dépend du signe de $g(w_0) - w_0$.

Si on suppose que $g(\alpha) \geqslant \alpha$ alors d'après la première partie de la proposition, on peut en déduire que la suite $(v_n)_n$ est croissante. La condition $g(\alpha) \geqslant \alpha$

implique aussi, puisque f est décroissante, que $f(g(\alpha)) \leqslant f(\alpha)$ ou de manière équivalente, puisque $g = f \circ f$, que

$$g(f(\alpha)) = f(f(f(\alpha))) \leqslant f(\alpha).$$

On a donc $g(w_0) \leqslant w_0$, ce qui implique, d'après la première partie de la proposition, que la suite $(w_n)_n$ est décroissante. On en conclut que si $g(\alpha) \leqslant \alpha$ alors la suite $(v_n)_n$ est croissante et la suite $(w_n)_n$ est décroissante.

On démontrerait sur le même principe que si $g(\alpha) \leqslant \alpha$ alors la suite $(v_n)_n$ est décroissante et la suite $(w_n)_n$ est croissante. Finalement, on a établi que les deux suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont monotones, de sens de variation opposé. □

Théorème 13.6 (Théorème du point fixe de Cauchy)
Soient I un intervalle fermé et f une application de I dans $\mathbb{R}$, contractante[(50)] *sur I et telle que $f(I) \subset I$.*

✗ *L'application f admet un unique point fixe $\zeta \in I$.*

✗ *De plus, pour tout réel $\alpha \in I$, la suite réelle $(u_n)_n$ définie par*

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

converge vers ζ.

Démonstration ⊵ Montrons tout d'abord que f ne peut pas admettre deux points fixes ζ et η distincts. Puisque f est une application contractante[(50)] sur I, il existe un réel $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|.$$

On a alors,

$$|\zeta - \eta| = |f(\zeta) - f(\eta)| \leqslant k\,|\zeta - \eta|$$

et par conséquent : $(k-1)\,|\zeta - \eta| \geqslant 0$. Puisque $k \in [0, 1[$, on a $k - 1 \leqslant 0$ ce qui impose que $|\zeta - \eta| = 0$, c'est-à-dire que $\eta = \zeta$.

⊵ Considérons la suite réelle $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarquons que puisque $u_0 \in I$ et que $f(I) \subset I$, on a $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons, en ayant recours à un raisonnement par récurrence, que

$$\forall i \in \mathbb{N} \qquad |u_{i+1} - u_i| \leqslant k^i\,|u_1 - u_0|.$$

[(50)] Voir la définition 13.8.

On a $|u_1 - u_0| \leqslant k^0|u_1 - u_0|$ car $k^0 = 1$ ce qui initialise la récurrence. Supposons la relation vraie pour un entier i donné ; en utilisant le fait que f est contractante de rapport k, on obtient

$$|u_{i+2} - u_{i+1}| = |f(u_{i+1}) - f(u_i)| \leqslant k\,|u_{i+1} - u_i| \leqslant k^{i+1}\,|u_1 - u_0|,$$

ce qui prouve l'hérédité de la propriété et achève le raisonnement par récurrence.

Ces résultats préliminaires établis, montrons que la suite $(u_n)_n$ converge en établissant qu'il s'agit d'une suite de Cauchy[51]. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \geqslant n$. En utilisant la première inégalité triangulaire[52] et les propriétés des progressions géométriques[53], on obtient

$$\begin{aligned}
|u_m - u_n| &= \left|\sum_{i=n}^{m-1} u_{i+1} - u_i\right| \leqslant \sum_{i=n}^{m-1} |u_{i+1} - u_i| \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{m-1} k^i\,|u_1 - u_0| = |u_1 - u_0|\,k^n \sum_{j=0}^{m-n-1} k^j \\
&= |u_1 - u_0|\,k^n\,\frac{1-k^{m-n}}{1-k} \leqslant \frac{k^n}{1-k}\,|u_1 - u_0|.
\end{aligned}$$

Puisque $k \in [0,1[$, la suite de terme général $v_n = \frac{k^n}{1-k}\,|u_1 - u_0|$ est une suite à termes positifs qui converge vers 0. On a donc

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N \implies |v_n| \leqslant \varepsilon\big).$$

Compte tenu du fait que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \geqslant n$ on a $|u_m - u_n| \leqslant v_n$, on en déduit que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \big((n \geqslant N \text{ et } m \geqslant N) \implies |u_m - u_n| \leqslant \varepsilon\big).$$

D'après la définition 5.8, page 198, la suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy. Le théorème 5.5, page 199, indique que la suite $(u_n)_n$ converge. De plus, comme I est un intervalle fermé, la proposition 5.3, page 174, indique que la limite ζ de la suite $(u_n)_n$ appartient à I. Pour conclure, remarquons que puisque[54] f est une application contractante sur I, elle est continue sur I ce qui d'après la proposition 13.24 assure que ζ est un point fixe de f. □

Exemple Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8)$ où u_0 est un réel positif donné. Il est aisé de vérifier en utilisant par exemple un raisonnement par récurrence que cette suite est à termes strictement positifs. Introduisons l'application $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{1}{6}(x^2 + 8)$.

[51] Voir la définition 5.8 p. 198.
[52] Voir la proposition 3.7 p. 108.
[53] Voir la proposition 5.21 p. 202.
[54] Voir la proposition 13.23 p. 629.

On vérifie facilement que l'application f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et qu'elle admet pour tableau de variation :

x	0		2		4		$+\infty$
f	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit, d'après la proposition 13.25, que la suite $(u_n)_n$ est monotone et que le sens de monotonie de la suite dépend du signe de $f(u_0) - u_0$.

Par ailleurs, d'après la proposition 13.24 si la suite $(u_n)_n$ converge alors sa limite ne peut être que l'un des points fixes de l'application f. Déterminons ces points fixes en résolvant l'équation $f(x) = x$. On a

$$f(x) = x \iff \tfrac{1}{6}x^2 - x + \tfrac{8}{6} = 0 \iff x^2 - 6x + 8 = 0.$$

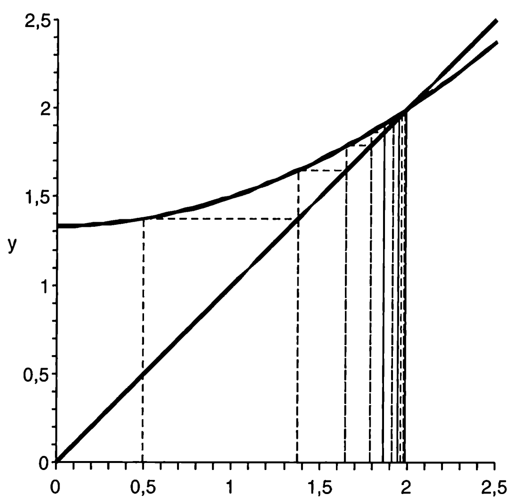
Les points fixes de f sont donc 2 et 4.

Envisageons maintenant les différents comportements possibles de la suite.

1. Si $u_0 \in [0, 2[$ alors
$$f(u_0) - u_0 = \tfrac{1}{6}(u_0 - 4)(u_0 - 2) > 0.$$
La suite est donc croissante. Par ailleurs, on constate à partir du tableau de variation de f que $f([0, 2[) \subset [0, 2[$. Cela nous assure que la suite $(u_n)_n$ est bornée. D'après le théorème 5.2, page 189, la suite $(u_n)_n$ converge. Puisqu'elle est majorée par 2 et que les seules limites possibles pour cette suite sont les réels 2 et 4, on en déduit que si $u_0 \in [0, 2]$, la suite $(u_n)_n$ converge vers 2.
2. Si $u_0 = 2$ alors la suite $(u_n)_n$ est constante puisque $f(2) = 2$.
3. Si $u_0 \in]2, 4[$ alors
$$f(u_0) - u_0 = \tfrac{1}{6}(u_0 - 4)(u_0 - 2) > 0.$$
La suite est donc décroissante. Par ailleurs, il est aisé de vérifier à partir du tableau de variation de f que $f(]2, 4[) \subset]2, 4[$. Cela nous assure que la suite $(u_n)_n$ est minorée. D'après le théorème 5.2, la suite $(u_n)_n$ converge. Puisqu'elle est minorée par 2 et que les seules limites possibles pour cette suite sont les réels 2 et 4, on en déduit que si $u_0 \in]2, 4[$, la suite $(u_n)_n$ converge vers 2.
4. Si $u_0 = 4$ alors la suite $(u_n)_n$ est constante puisque $f(4) = 4$.
5. Si $u_0 \in]2, 4[$ alors
$$f(u_0) - u_0 = \tfrac{1}{6}(u_0 - 4)(u_0 - 2) < 0.$$
La suite est donc décroissante. Par ailleurs, il est aisé de vérifier à partir du tableau de variation de f que $f(]4, +\infty[) \subset]4, +\infty[$. Puisque la suite $(u_n)_n$ est croissante (et non constante), qu'elle est minorée par 4 et que les seules limites possibles pour cette suite sont les réels 2 et 4, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ diverge et qu'elle tend vers $+\infty$.

Le programme MAPLE suivant permet de représenter graphiquement le comportement de la suite $(u_n)_n$ selon la valeur de u_0. La figure proposée ici correspond au choix $u_0 = \frac{1}{2}$. Nous pouvons observer, comme cela a été établi que la suite $(u_n)_n$ converge vers 2.

```
> with(plottools):
> f:=x->(x^2+8)/6:
> N:=10: u[0]:=1/2:
> for i from 1 to N do
     u[i]:=evalf(f(u[i-1])):
  end:
> for i from 0 to N-1 do
     L1[i]:=line([u[i],0],[u[i],u[i+1]],linestyle=3):
     L2[i]:=line([u[i],u[i+1]],[u[i+1],u[i+1]],linestyle=3):
     L3[i]:=line([u[i+1],u[i+1]],[u[i+1],0],linestyle=3):
  end:
> G1:=plot([f(x),x], x=0..2.5, y= 0..2.5):
> L:=seq(L1[i],i=0..N-1),seq(L2[i],i=0..N-1),seq(L3[i],i=0..N-1):
> plots[display]({L,G1},scaling=constrained);
```



13.5 La dichotomie ou l'art de couper en deux

On considère une application f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On désire calculer les solutions (on appelle ces solutions les zéros de f) de l'équation

$$(\mathcal{E}) \quad f(x) = 0.$$

Une telle équation peut admettre plusieurs solutions (voire une infinité), une seule solution, ou pas de solution du tout. Dans de nombreux cas, il est impossible de calculer explicitement ces solutions. On cherche alors à obtenir une valeur approchée, arbitrairement précise, de ces solutions par une méthode d'approximation.

Une étude détaillée de la fonction f peut permettre de savoir si l'équation $(\mathcal{E})$ admet des solutions et, le cas échéant, le nombre de solutions. De plus, à partir du tableau de variation de f et du théorème des valeurs intermédiaires, on peut en général localiser chaque zéro de f dans un intervalle $]a,b[$ de sorte que dans un intervalle donné, il n'y ait qu'un seul zéro. Supposons donc que l'équation $(\mathcal{E})$ admette une solution unique, que l'on note β, dans un intervalle $]a,b[$ donné. Supposons de plus que f est continue sur l'intervalle $]a,b[$ et que l'on a

$$f(a) \times f(b) < 0.$$

Notons x_0 le centre de l'intervalle $]a,b[$, *i.e.* $x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$. Calculons $f(x_0)$ et comparons son signe avec $f(a)$. Les trois cas suivants sont possibles :

1. Si $f(a) \times f(x_0) < 0$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, β appartient à l'intervalle $]a,x_0[$.
2. Si $f(a) \times f(x_0) > 0$ alors β appartient à l'intervalle $]x_0,b[$.
3. Si $f(a) \times f(x_0) = 0$ alors $\beta = x_0$. Dans ce cas, le zéro de f a été trouvé.

On s'aperçoit qu'on a pu améliorer la localisation du zéro de f : on avait localisé β dans un intervalle $]a,b[$ de longueur $h = b-a$, on sait à l'issue de cette dichotomie[55] que β est dans l'intervalle $]a,x_0[$ (cas 1) ou dans l'intervalle $]x_0,b[$ (cas 2) qui sont de longueur $h/2$. On peut bien entendu répéter le processus pour localiser le zéro de f dans des intervalles de longueurs $h/4$, $h/8$, $h/16, \ldots$ jusqu'à obtenir un intervalle de longueur égale à la précision souhaitée pour la valeur approchée de β (par exemple 10^{-3}).

On possède donc un algorithme relativement simple à mettre en œuvre pour construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers β. L'algorithme se formalise de la façon suivante : on définit $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{1}{2}(a_0+b_0)$. À partir de l'intervalle $I_0 =]a_0,b_0[$, on construit une suite de sous-intervalles $I_n =]a_n,b_n[$, $n \in \mathbb{N}$, vérifiant :

$$I_n \subset I_{n-1} \subset \cdots \subset I_1 \subset I_0.$$

Les bornes a_n et b_n de l'intervalle I_n sont obtenues par récurrence de la manière suivante :

- $a_n = a_{n-1}$ et $b_n = x_{n-1}$ si $f(a_{n-1})f(x_{n-1}) < 0$,
- $a_n = x_{n-1}$ et $b_n = b_{n-1}$ si $f(a_{n-1})f(x_{n-1}) > 0$,

et on définit l'itéré suivant par $x_n = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$, voir la figure 6. Par le choix qui est fait pour les bornes de l'intervalle I_n, on préserve à l'étape n la condition

$$f(a_n) \times f(b_n) < 0$$

qui d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous assure que $\beta \in I_n$.

[55] Terme issu du grec ancien et signifiant « division en deux parties égales ».

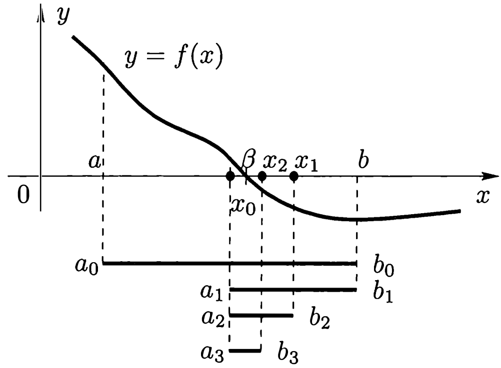


Fig. 6 Interprétation graphique de la méthode de dichotomie.

À chaque étape, la longueur ℓ_n de l'intervalle I_n est divisée par 2. On a donc $\ell_n = \frac{1}{2}\ell_{n-1}$ et on déduit par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \ell_n = \frac{\ell_0}{2^n} = \frac{b-a}{2^n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\beta \in I_n$, $x_n \in I_n$ et par conséquent

$$0 \leqslant |x_n - \beta| \leqslant \ell_n.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \ell_n = 0$, on déduit du théorème d'encadrement que $\lim_{n\to\infty} x_n = \beta$. Cela établit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de dichotomie converge vers β.

En pratique, il est rarement possible d'atteindre la limite. On se fixe donc la précision ε souhaitée pour l'approximation de β (par exemple 10^{-3}) et on décide d'arrêter les itérations à l'étape n_ε si la longueur ℓ_{n_ε} de l'intervalle I_{n_ε} est inférieure à ε. Ce critère d'arrêt[56] est justifié par le fait que

$$|x_{n_\varepsilon} - \beta| \leqslant \ell_{n_\varepsilon} \leqslant \varepsilon.$$

Cela nous donne d'ailleurs une information *a priori* sur le nombre d'itérations n_ε à effectuer pour atteindre la précision ε. En effet, pour obtenir $|x_{n_\varepsilon} - \beta| \leqslant \varepsilon$, il suffit que

$$\frac{b-a}{2^{n_\varepsilon}} \leqslant \varepsilon \quad \text{autrement dit que} \quad n_\varepsilon \geqslant \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right).$$

[56] Bien évidemment, il existe d'autres tests d'arrêts. Par exemple, nous pourrions décider d'interrompre les itérations dès que $f(x_{n_\varepsilon}) \leqslant \varepsilon$, ou dès que $|x_{n_\varepsilon+1} - x_{n_\varepsilon}| \leqslant \varepsilon$.

Illustrons l'utilisation de la méthode de dichotomie avec MAPLE pour résoudre l'équation $\cos(x) = x$. Nous avons établi page 630 que cette équation admet une unique solution et que celle-ci appartient à l'intervalle $[0, 1]$. Le programme MAPLE suivant permet d'obtenir une valeur approchée de la solution avec une précision inférieure à $\varepsilon = 10^{-6}$.

```
> restart: # on résout f(x)=0 sur [a,b]
> f:=x->cos(x)-x:
> a:=0: b:=1: eps:=1E-6:
> N:=log[2]((b-a)/eps): # nombre d'itérations requises pour
                        # la précision eps souhaitée
> for n from 1 to N while f(c)<> 0 do
    c:=(a+b)/2;
    if evalf(f(c)*f(a)) > 0 then a:=c:
    else b:=c:
    end if:
    printf("Intervalle I_%g pour n = %g : [ %8.6f,%8.6f] \n",
            n,n,a,b);
  end do:
> printf("\n L'approximation obtenue est c = %g
            et on a f(c) = %g",c,f(c)) ;
```

```
Intervalle I_1 pour n = 1   : [ 0.500000,1.000000]
Intervalle I_2 pour n = 2   : [ 0.500000,0.750000]
Intervalle I_3 pour n = 3   : [ 0.625000,0.750000]
Intervalle I_4 pour n = 4   : [ 0.687500,0.750000]
Intervalle I_5 pour n = 5   : [ 0.718750,0.750000]
Intervalle I_6 pour n = 6   : [ 0.734375,0.750000]
Intervalle I_7 pour n = 7   : [ 0.734375,0.742188]
Intervalle I_8 pour n = 8   : [ 0.738281,0.742188]
Intervalle I_9 pour n = 9   : [ 0.738281,0.740234]
Intervalle I_10 pour n = 10 : [ 0.738281,0.739258]
Intervalle I_11 pour n = 11 : [ 0.738770,0.739258]
Intervalle I_12 pour n = 12 : [ 0.739014,0.739258]
Intervalle I_13 pour n = 13 : [ 0.739014,0.739136]
Intervalle I_14 pour n = 14 : [ 0.739075,0.739136]
Intervalle I_15 pour n = 15 : [ 0.739075,0.739105]
Intervalle I_16 pour n = 16 : [ 0.739075,0.739090]
Intervalle I_17 pour n = 17 : [ 0.739082,0.739090]
Intervalle I_18 pour n = 18 : [ 0.739082,0.739086]
Intervalle I_19 pour n = 19 : [ 0.739084,0.739086]

L'approximation obtenue est c = 0.739084 et on a f(c) = 1.4885e-06
```

13.6 Exercices de synthèse

Exercice 14 *Soit f une application injective de I dans $\mathbb{R}$, continue sur I.*

1 - On suppose que f n'est pas strictement monotone sur I. Montrer que dans ce cas, il existe 4 réels a, b, x, y dans I avec $x < y$ et $a < b$ tels que

$$f(x) > f(y) \quad \textit{et} \quad f(a) < f(b).$$

2 - On considère l'application

$$\Phi : \lambda \in [0,1] \longmapsto f((1-\lambda)b + \lambda y) - f((1-\lambda)a + \lambda x).$$

Montrer qu'il existe un réel $\lambda_0 \in]0,1[$ tel que $\Phi(\lambda_0) = 0$.

3 - Montrer que la relation $\Phi(\lambda_0) = 0$ est incompatible avec l'hypothèse « f une application injective ». En déduire qu'une application injective de I dans $\mathbb{R}$ continue est nécessairement strictement monotone.

Exercice 15

1 - Montrer que l'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{|x|+1}$ est lipschitzienne[57] *de rapport 1 sur $\mathbb{R}$.*

2 - Montrer qu'une application f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ si et seulement si l'ensemble

$$\left\{ \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \;\middle|\; (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \neq x_2 \right\}$$

est borné. En déduire que l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

3 - Montrer que toute application lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4 - Montrer que la somme de 2 applications lipschitziennes est une application lipschitzienne mais que le produit de 2 applications lipschitziennes n'est pas nécessairement une application lipschitzienne.

Exercice 16 *Soit f une application continue sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\|f\|_\infty$ le réel $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.*

1 - Justifier que $\|f\|_\infty$ est égale à la valeur maximale prise par $|f|$ sur l'intervalle $[0,1]$.

Pour $t \in [0,1]$, on définit l'ensemble

$$\Omega_t = \Big\{ |f(x) - f(y)| \mid (x,y) \in [0,1]^2 \quad |x - y| \leqslant t \Big\}.$$

2 - Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ l'ensemble Ω_t est majoré.

[57] Voir la définition 13.8 page 629.

Pour $t \in [0,1]$, *on note* $\omega(t)$ *la borne supérieure de l'ensemble* Ω_t. *L'application* $\omega : t \in [0,1] \mapsto \omega(t)$ *est appelé le* module de continuité de f.

3 - Calculer $\omega(0)$ *et montrer que* $\omega : t \in [0,1] \mapsto \omega(t)$ *est une application croissante.*

4 - Montrer que le module de continuité de l'application $f : x \in [0,1] \mapsto \sqrt{x}$ *est* $\omega : t \in [0,1] \mapsto \sqrt{t}$.

13.7 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x - E(x)$ est périodique puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = (x+1) - (E(x)+1) = x - E(x) = f(x).$$

Montrons que la période de f est 1 en montrant qu'il ne peut pas exister de réel $T \in]0,1[$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout réel x. Remarquons que si $T \in]0,1[$ alors $E(T) = 0$ et

$$f(0+T) = T - E(T) = T \neq 0 = f(0).$$

L'application f est donc périodique de période 1.

Solution de l'exercice 2

Montrons, en utilisant la définition, que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Pour $(x_1, x_2) \in [0,\pi]^2$ avec $x_1 < x_2$, on a[58]

$$\cos(x_1) - \cos(x_2) = 2 \sin\left(\tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)\right) \sin\left(\tfrac{1}{2}(x_2 + x_1)\right)$$

avec $\frac{1}{2}(x_2 - x_1) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\frac{1}{2}(x_2 + x_1) \in]0,\pi[$. Or, la fonction sinus est strictement positive sur $]0,\pi[$ donc

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)\right) \sin\left(\tfrac{1}{2}(x_2 + x_1)\right) > 0$$

et par conséquent $\cos(x_1) > \cos(x_2)$. Cela permet de conclure que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

Solution de l'exercice 3

1 - L'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet pour limite 0 en $x_0 \in \overline{D}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \qquad \left(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - 0| \leqslant \varepsilon\right).$$

---

[58] Voir le formulaire de trigonométrie p. 157.

L'application $|f|$ de D dans $\mathbb{R}$ admet pour limite 0 en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies \big||f(x)| - 0\big| \leqslant \varepsilon\big).$$

Or pour tout $x \in D$, $\big||f(x)| - 0\big| = |f(x)| = |f(x) - 0|$. Les deux assertions quantifiées sont donc les mêmes. On en déduit que la fonction f définie sur D admet pour limite 0 en x_0 si et seulement si la fonction $|f|$ admet pour limite 0 en x_0.

2 - D'après la seconde inégalité triangulaire[59], on a pour tout $\ell \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in D$,

$$\big||f(x)| - |\ell|\big| \leqslant |f(x) - \ell|.$$

Donc, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big)$$

alors

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies \big||f(x)| - |\ell|\big| \leqslant \varepsilon\big).$$

Autrement dit, si la fonction f définie sur D admet pour limite ℓ en $x_0 \in \overline{D}$ alors la fonction $|f|$ admet pour limite $|\ell|$ en x_0. Dans le cas où $\ell \neq 0$, la réciproque est fausse. Par exemple la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

n'a pas de limite en 0 mais $|f|$ qui est la fonction constante égale à 1 admet 1 pour limite en 0.

Solution de l'exercice 4

L'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet pour limite ℓ en $x_0 \in \overline{D}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big).$$

L'application $-f$ de D dans $\mathbb{R}$ admet pour limite $-\ell$ en $x_0 \in \overline{D}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |-f(x) - (-\ell)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Or pour tout $x \in D$,

$$|-f(x) - (-\ell)| = |-f(x) + \ell| = |f(x) - \ell|.$$

Les deux assertions quantifiées sont donc les mêmes. Ainsi la fonction f définie sur D admet pour limite ℓ en $x_0 \in \overline{D}$ si et seulement si a fonction $-f$ définie sur D admet pour limite $-\ell$ en x_0.

---

[59] Voir la proposition 3.7 p. 108.

Solution de l'exercice 5

Considérons une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période T et admettant en $+\infty$ pour limite ℓ. Montrons que pour tout réel x_0 on a $f(x_0) = \ell$. D'après la proposition 3.12 p. 113, pour montrer que $f(x_0) = \ell$, il suffit de montrer que pour tout réel strictement positif ε on a

$$|f(x_0) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et quelconque. Par hypothèse $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ce qui signifie que

$$\exists \kappa \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (x \geqslant \kappa \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon). \tag{5}$$

Soit n_0 un entier tel que $x_0 + n_0 T \geqslant \kappa$ (un tel entier existe, il suffit de prendre un entier supérieur à $(\kappa - x_0)/T$). D'après (5), on a

$$|f(x_0 + n_0 T) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Puisque f est périodique de période T, $f(x_0 + n_0 T) = f(x_0)$ ce qui implique que pour tout réel strictement positif ε on a

$$|f(x_0) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On en conclut que $f(x_0) = \ell$ pour tout réel x_0 ce qui signifie que f est la fonction constante égale à ℓ.

Solution de l'exercice 6

Considérons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$. Elle converge vers 0. Par contre la suite de terme général $f(u_n)$ diverge puisque

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) = \sin((2n+1)\pi/2) = (-1)^n.$$

D'après la proposition 13.11, on en conclut que f n'a pas de limite en 0.

Solution de l'exercice 7

On suppose que ℓ et ℓ' sont des réels non nuls. Le cas où ℓ ou ℓ' sont nuls nécessite une adaptation mineure du raisonnement qui n'est pas détaillée.

1 - On a pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \ell\ell'| &= |f(x)(g(x) - \ell') + \ell'(f(x) - \ell)| \\ &\leqslant |f(x)|\ |(g(x) - \ell')| + |\ell'|\ |(f(x) - \ell)|. \end{aligned}$$

Or

$$|f(x)| = |(f(x) - \ell) + \ell| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell|.$$

En combinant ces deux majorations, on obtient :

$$|f(x)g(x) - \ell\ell'| \leqslant |f(x) - \ell|\,|g(x) - \ell'| + |\ell'|\,|f(x) - \ell| + |\ell|\,|g(x) - \ell'|.$$

2 - Par hypothèse, f admet pour limite ℓ en x_0 ; autrement dit,

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big). \tag{6}$$

De même, par hypothèse, g admet pour limite ℓ' en x_0 ; autrement dit,

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |g(x) - \ell'| \leqslant \varepsilon\big). \tag{7}$$

On souhaite montrer que $f \times g$ admet pour limite $\ell\ell'$ en x_0 ; autrement dit que

$$\forall\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\eta' \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta' \implies |f(x)g(x) - \ell\ell'| \leqslant \varepsilon'\big).$$

Considérons un réel strictement positif ε' quelconque. D'après (6),

$$\exists\eta_1 \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \qquad \left(|x - x_0| \leqslant \eta_1 \implies |f(x) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3|\ell'|}\right)$$

et

$$\exists\eta_2 \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \qquad \left(|x - x_0| \leqslant \eta_2 \implies |f(x) - \ell| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon'}{3}}\right).$$

D'après (7),

$$\exists\eta_3 \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \qquad \left(|x - x_0| \leqslant \eta_3 \implies |g(x) - \ell'| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3|\ell|}\right)$$

et

$$\exists\eta_4 \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \qquad \left(|x - x_0| \leqslant \eta_4 \implies |g(x) - \ell'| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon'}{3}}\right).$$

Posons[60] $\eta' = \min\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ et prenons $x \in [x_0 - \eta', x_0 + \eta'] \cap D$. D'après la majoration de la question 1, on obtient

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - \ell\ell'| &\leqslant |f(x) - \ell|\,|g(x) - \ell'| + |\ell'|\,|f(x) - \ell| + |\ell|\,|g(x) - \ell'| \\
&\leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon'}{3}}\sqrt{\frac{\varepsilon'}{3}} + |\ell'|\frac{\varepsilon'}{3|\ell|'} + |\ell|\frac{\varepsilon'}{3|\ell|} \\
&= \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Finalement, on a établi que pour tout réel strictement positif ε', il existait un réel strictement positif η' tel que pour tout réel $x \in D$,

$$|x - x_0| \leqslant \eta' \implies |f(x)g(x) - \ell\ell'| \leqslant \varepsilon'.$$

D'après la définition 13.1, cela signifie que la fonction $f \times g$ admet pour limite $\ell\ell'$ en x_0.

Signalons que l'on peut également montrer ce résultat à partir de la majoration de la question 1 et du théorème d'encadrement.

---

[59] Les majorants introduits ci-dessus ($\frac{\varepsilon'}{3|\ell|}, \frac{\varepsilon'}{3|\ell'|}, \cdots$) peuvent paraître surprenant au premier abord. Dans la rédaction de la solution, ils n'apparaissent pas immédiatement mais sont ajustés dans un second passage pour obtenir « la valeur ε' » souhaitée afin de conclure l'exercice.

Solution de l'exercice 8

La fonction $f : x \mapsto x\,\mathrm{E}(\frac{1}{x})$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. D'après les propriétés de la fonction partie entière[61], on a pour tout réel x non nul

$$\tfrac{1}{x} \leqslant \mathrm{E}(\tfrac{1}{x}) < \tfrac{1}{x} + 1. \tag{8}$$

On en déduit que pour tout réel x strictement positif

$$1 \leqslant x\,\mathrm{E}(\tfrac{1}{x}) < 1 + x.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, f admet 1 pour limite à droite en 0. Pour tout réel x strictement négatif, on obtient d'après la relation (8)

$$1 \geqslant x\,\mathrm{E}(\tfrac{1}{x}) > 1 + x.$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que f admet 1 pour limite à gauche en 0. Finalement, f admet pour limite 1 en 0.

Solution de l'exercice 9

1 - La fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$ est définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. On a

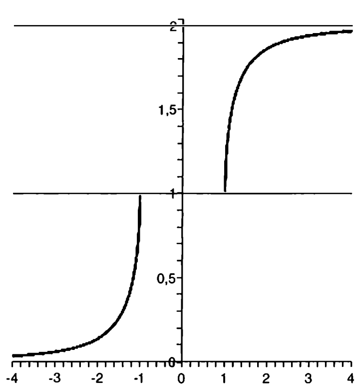
$$f(x) = \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x}{x} = \begin{cases} -\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ \sqrt{1-\frac{1}{x}}+1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

On en déduit que f admet pour limite 2 en $+\infty$ et 0 en $-\infty$. En 1 et -1, l'expression de f ne correspond pas à une forme indéterminée pour la limite ; on obtient par simple évaluation que f admet pour limite 1 en -1 et 1.

On peut illustrer ces calculs avec MAPLE.

```
> f:= x-> (sqrt(x^2-1)+x)/x:
> plot([f(x),1,2],x=-4..4]);

> limit(f(x),x=1,right);
            1
> limit(f(x),x=-1,left);
            1
> limit(f(x),x=+infinity);
            2
> limit(f(x),x=-infinity);
            0
```



2 - La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}$ est définie sur $[1, +\infty[$, les deux termes sous les radicaux devant être positifs simultanément. La limite de f en 1 est $-\sqrt{3}$. En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}$. On en déduit que f admet pour limite 0 en $+\infty$.

---

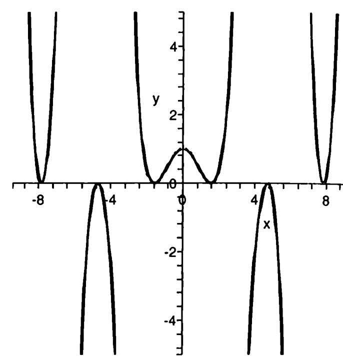
[61] Voir la proposition 3.10 p. 111.

3 - La fonction $f : x \mapsto \frac{x\cos^2(x)}{\sin(x)}$ est définie pour toute valeur de x telle que $\sin(x) \neq 0$. L'ensemble de définition est donc $D = \mathbb{R} \setminus E$ où $E = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On peut remarquer que f est une fonction paire ce qui permet de l'étudier uniquement sur $\mathbb{R}^+ \cap D$. Étudions la limite de f en $x_k = k\pi$ où $k \in \mathbb{N}$.
Si $k \neq 0$ alors le numérateur dans l'expression de $f(x)$ vaut $k\pi$ et le dénominateur tend vers 0 en x_k. On en déduit que f n'a pas de limite en x_k pour $k \in \mathbb{N}^*$. Si k est impair, elle tend vers $+\infty$ à gauche en x_k et vers $-\infty$ à droite en x_k et si k est pair elle tend vers $-\infty$ à gauche en x_k et vers $+\infty$ à droite en x_k. Considérons à présent la limite en $x_0 = 0$. On a

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\sin(x)}{x}} \cos^2(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad = \lim_{x\to 0} \cos^2(x) = 1.$$

On en déduit que f admet 1 pour limite en 0. Illustrons ces résultats avec MAPLE.

```
> f:= x-> x*cos(x)^2/(sin(x)):
> plot(f(x),x=-3*Pi..3*Pi,y=-5..5,
                     discont=true)
```




```
> assume(k,integer);
  additionally(k>0);
> limit(f(x),x=k*Pi);
            undefined
> limit(f(x),x=k*Pi,left);
            -infinity
> limit(f(x),x=k*Pi,right);
             infinity
```

On pourra être un peu surpris par les résultats indiqués par MAPLE qui ne semble pas distinguer le cas où k est pair et celui où k est impair.

4 - Pour étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$, on peut remarquer que $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$,

$$f(x) = \frac{|x-5|}{x-5} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 5 \\ -1 & \text{si } x < 5 \end{cases}.$$

On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ et que f n'a pas de limite en 5. La limite à gauche est -1 alors que la limite à droite est 1.

> On sera vigilant sur la simplification de $\sqrt{(x-5)^2}$. On rappelle que $\sqrt{u^2} = u$ uniquement si u est un réel positif. Sans hypothèse sur le signe de u, on a $\sqrt{u^2} = |u|$.

5 - La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2-x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \qquad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}\,\frac{1}{x-1}.$$

Comme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, la limite en 0 de f existe et vaut -1. De plus, f n'a pas de limite en $x = 1$. Plus précisément,

- la fonction f tend vers $-\infty$ à gauche en 1 car $\sin(1) > 0$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$
- et f tend vers $+\infty$ à droite en 1 car $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

6 - La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1} - x$ est définie pour tout réel x tel que $x^2 - 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire sur $D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. La limite de f en -1 vaut 1 et la limite de f en 1 vaut -1. On a

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty,$$

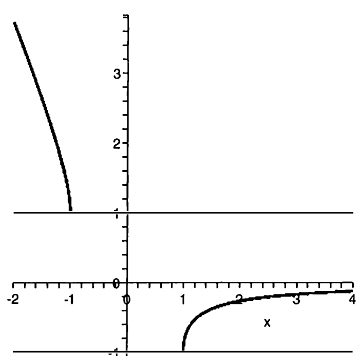
donc f tend vers $+\infty$ en $-\infty$. En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient pour $x \in D$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}+x = +\infty$, la fonction f admet pour limite 0 en $+\infty$.

```
> f:= x-> sqrt(x^2-1)-x:
> plot([f(x),1,-1],x=-2..4);

> limit(f(x),x=-infinity);
                         infinity
> limit(f(x),x=+infinity);
                            0
```

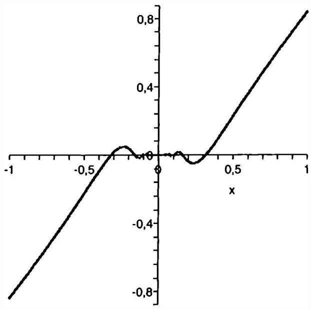


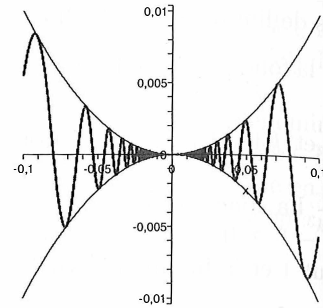
7 - La fonction $f : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et est impaire. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x)| \leqslant x^2$ donc, d'après le théorème d'encadrement, on peut affirmer que f admet 0 pour limite en 0. Par ailleurs,

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f(x) = x\,\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$, on en déduit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Illustrons la situation en ayant recours à MAPLE.

```
> f:= x-> x^2*sin(1/x):
> limit(f(x),x=0);
                                    0
> limit(f(x),x=+infinity);
                                 infinity
> plot(f(x),x=-1..1);
> plot([f(x),x^2,-x^2],x=-0.1..0.1);
```





8 - La fonction $f : x \mapsto \sin(x)\ \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x\ln(x)\,\frac{\sin x}{x}$. Comme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

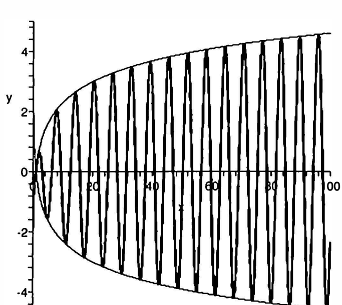
on en déduit que f admet pour 0 limite à droite en 0.

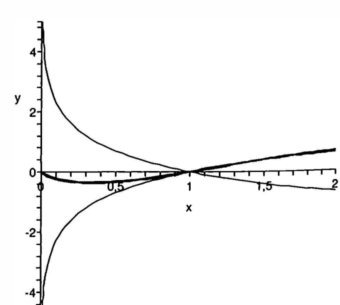
Considérons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$. Cette suite tend vers $+\infty$. D'après la proposition 13.11 p. 604, si f a une limite en $+\infty$ alors la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = f(u_n)$ converge vers cette limite. Or,

$$v_n = f((2n+1)\tfrac{\pi}{2}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + n\pi)\ \ln((2n+1)\tfrac{\pi}{2}) = (-1)^n\ \ln((2n+1)\tfrac{\pi}{2}).$$

La suite $(v_n)_n$ diverge car la sous-suite des termes d'indice pair tend vers $+\infty$ alors que la sous-suite des termes d'indice impair tend vers $-\infty$. On en conclut que f n'a pas de limite en $+\infty$. Illustrons la situation en ayant recours à MAPLE.

```
> f:=x-> sin(x)*ln(x):
> limit(f(x),x=0);
                              0
> limit(f(x),x=+infinity);
                          undefined
> plot([f(x),ln(x),-ln(x)],x=0..100,color=[blue,black,black]);
> plot([f(x),ln(x),-ln(x)],x=0..2,color=[blue,black,black]);
```





Solution de l'exercice 10

Montrons que la fonction cosinus est continue en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit x un réel ; on a[62]

$$\cos(x) - \cos(x_0) = -2\sin(\tfrac{1}{2}(x + x_0))\ \sin(\tfrac{1}{2}(x - x_0))$$

donc, puisque la fonction sinus est majorée par 1,

$$\left|\cos(x) - \cos(x_0)\right| \leqslant 2\ \left|\sin\tfrac{1}{2}(x - x_0)\right|.$$

Comme de plus, $|\sin(u)| \leqslant |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ (voir l'exemple de la p. 606), on obtient $|\cos(x) - \cos(x_0)| \leqslant |x - x_0|$. Par conséquent, pour tout réel strictement positif ε, il existe un réel strictement positif η (par exemple $\eta = \varepsilon$ convient) tel que pour tout réel x,

$$|x - x_0| \leqslant \eta \implies |\cos(x) - \cos(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

La fonction cosinus est donc continue en x_0 pour tout réel x_0 ; elle est par conséquent continue sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 11

L'application $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ puisque c'est la composée de l'application $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ qui est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et de la fonction sinus qui est continue sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que l'application $x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de deux applications continues sur ces intervalles. Par ailleurs, comme la fonction sinus est bornée par 1, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$0 \leqslant \left|x\sin(\tfrac{1}{x})\right| \leqslant x.$$

D'après le théorème d'encadrement[63], on en déduit que

$$\lim_{x \to 0} x\sin(\tfrac{1}{x}) = 0.$$

On peut donc conclure que l'application

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$. L'application f est le prolongement par continuité en 0 de l'application $x \in \mathbb{R}^* \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$.

---

[62] Voir le formulaire de trigonométrie p. 157.
[63] Voir le théorème 13.1 p. 605.

Solution de l'exercice 12

1 - Traduisons en termes d'assertion quantifiée les hypothèses

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

On a

$$\begin{aligned} &\forall\kappa_1 \in \mathbb{R} \quad \exists\eta_1 \in \mathbb{R}^- \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \big(x \leqslant \eta_1 \implies f(x) \leqslant \kappa_1\big) \\ \text{et} \quad &\forall\kappa_2 \in \mathbb{R} \quad \exists\eta_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \big(x \leqslant \eta_2 \implies f(x) \geqslant \kappa_2\big). \end{aligned}$$

En considérant les réels $\kappa_1 = -1$ et $\kappa_2 = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\exists\eta_1 \in \mathbb{R}^- \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \big(x \leqslant \eta_1 \implies f(x) \leqslant -1\big) \\ \text{et} \quad &\exists\eta_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \big(x \leqslant \eta_2 \implies f(x) \geqslant 1\big). \end{aligned}$$

On déduit de ces assertions quantifiées que $f(\eta_1) \leqslant -1$ et $f(\eta_2) \geqslant 1$ et par conséquent que $f(\eta_1)f(\eta_2) < 0$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur l'intervalle $[\eta_1, \eta_2]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe un réel $c \in [\eta_1, \eta_2]$ tel que $f(c) = 0$. Le résultat est démontré.

Sur le même principe, on montre que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_2$$

avec $\ell_1\ell_2 < 0$ alors il existe un réel c tel que $f(c) = 0$.

2 - Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair. La fonction polynomiale f associée à ce polynôme est continue sur $\mathbb{R}$ et

- si le coefficient du monôme de plus haut degré est positif, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
- si le coefficient du monôme de plus haut degré est négatif, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Dans le premier cas, le résultat de la question précédente indique qu'il existe un réel c tel que $f(c) = 0$. Cela signifie que c est racine de P. Dans le second cas, on peut appliquer le résultat de la question précédente à la fonction $-f$. Il existe un réel c tel que $-f(c) = 0$, autrement dit tel que $f(c) = 0$. Cela signifie là encore que c est racine de P. Dans tous les cas, le polynôme P a une racine réelle.

Solution de l'exercice 13

1 - Remarquons que puisque f est à valeurs dans $[a, b]$ on a $a \leqslant f(x) \leqslant b$ pour tout $x \in [a, b]$. On en déduit que $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et que $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. On a donc $g(a)g(b) \leqslant 0$. Procédons par disjonction de cas : ou bien $g(a)g(b) = 0$, ou bien $g(a)g(b) < 0$.

- Dans le premier cas, $g(a)g(b) = 0$ implique que $g(a) = 0$ ou que $g(b) = 0$, autrement dit que $f(a) = a$ ou que $f(b) = b$. Il y a donc bien existence d'un point fixe (a ou b).

- Dans le second cas, on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. L'application g est continue sur $[a,b]$ car f est continue sur $[a,b]$. Il existe par conséquent un réel $c \in]a,b[$ tel que $g(c) = 0$ autrement dit tel que $f(c) = c$. Dans ce cas aussi on a établi l'existence d'un point fixe.

On en conclut que si f est une application continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$ alors f admet un point fixe.

2 - a) Puisque f est à valeurs dans $[a,b]$ on a $a \leqslant f(x) \leqslant b$ pour tout $x \in [a,b]$. En particulier $f(a) \geqslant a$, donc Ω est non vide. De plus, Ω est majoré par b. D'après la proposition 3.2 p. 101, on peut affirmer que l'ensemble Ω admet une borne supérieure M. Remarquons que l'on a $M \geqslant a$ car $a \in \Omega$. De plus, ou bien $f(b) = b$ et alors $M = b$, ou bien $f(b) < b$ et $M \leqslant b$ car $b \notin \Omega$. On a donc bien $M \in [a,b]$.

On a donc établi l'existence d'une borne supérieure pour l'ensemble Ω. D'après la proposition 3.2 p. 101, cette borne supérieure M vérifie

$$(\forall x \in \Omega \quad x \leqslant M) \quad \text{et} \quad (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x_\varepsilon \in \Omega \quad M - \varepsilon < x_\varepsilon).$$

b) Pour montrer que $M \in \Omega$, raisonnons par l'absurde et supposons que $M \notin \Omega$. On a alors $f(M) < M$ et comme M est la borne supérieure de Ω

$$\forall x \in \Omega \quad x \leqslant M.$$

Cela implique, puisque f est croissante que

$$\forall x \in \Omega \quad x \leqslant f(x) \leqslant f(M),$$

autrement dit que $f(M)$ est un majorant de Ω. On a alors $f(M) \geqslant M$ car M est le plus petit des majorants de Ω. Ce résultat contredit l'hypothèse $f(M) < M$. Finalement on peut conclure que $M \in \Omega$, autrement dit que M est l'élément maximum de Ω.

c) Remarquons que puisque $M \in \Omega$ on a $f(M) \geqslant M$. L'application f étant croissante, cela implique que $f(f(M)) \geqslant f(M)$, autrement dit que $f(M) \in \Omega$. Comme M est la borne supérieure de Ω on a forcément $f(M) \leqslant M$. Les relations $f(M) \geqslant M$ et $f(M) \leqslant M$ permettent de conclure que $f(M) = M$, autrement dit que M est un point fixe de f.

3 - Une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$ décroissante n'admet pas nécessairement de point fixe comme le prouve le contre-exemple suivant :

$$f : x \in [0,1] \longmapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Solution de l'exercice 14

1 - L'application f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante sur I ou si elle est strictement décroissante sur I, autrement dit si

$$\begin{aligned} &\Big(\forall (x,y) \in I^2 \quad (x < y \implies f(x) < f(y))\Big) \\ \text{ou} \quad &\Big(\forall (x,y) \in I^2 \quad (x < y \implies f(x) > f(y))\Big). \end{aligned}$$

On en déduit, en prenant la négation de cette assertion composée[64], que f n'est pas strictement monotone sur I si

$$\begin{aligned} &\Big(\exists (x,y) \in I^2 \quad \big(x < y \text{ et } f(x) \geqslant f(y)\big)\Big) \\ \text{et} \quad &\Big(\exists (a,b) \in I^2 \quad \big(a < b \text{ et } f(a) \leqslant f(b)\big)\Big). \end{aligned}$$

On prend soin de distinguer les variables par des lettres distinctes car le couple (x, y) satisfaisant la première condition n'est pas nécessairement le même que celui satisfaisant la deuxième condition.

Comme f est injective, si $x \neq y$ (resp. $a \neq b$) alors $f(x) \neq f(y)$ (resp. $f(a) \neq f(b)$). Ainsi, on peut affirmer que

$$\begin{aligned} &\Big(\exists (x,y) \in I^2 \quad \big(x < y \text{ et } f(x) > f(y)\big)\Big) \\ \text{et} \quad &\Big(\exists (a,b) \in I^2 \quad \big(a < b \text{ et } f(a) < f(b)\big)\Big), \end{aligned}$$

autrement dit qu'il existe 4 réels a, b, x, y dans I avec $x < y$ et $a < b$ tels que $\big(f(x) > f(y) \text{ et } f(a) < f(b)\big)$.

2 - L'application $\Phi : \lambda \in [0,1] \mapsto f((1-\lambda)b+\lambda y) - f((1-\lambda)a+\lambda x)$ est continue sur $[0,1]$ car f est continue sur I et pour tout $\lambda \in [0,1]$

i) le réel $(1-\lambda)b + \lambda y$ est compris entre b et y donc appartient à I ;

ii) le réel $(1-\lambda)a + \lambda x$ est compris entre a et x donc appartient à I.

On a $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ et puisque Φ est continue sur $[0,1]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe un réel $\lambda_0 \in]0,1[$ tel que $\Phi(\lambda_0) = 0$.

3 - On a

$$\Phi(\lambda_0) = 0 \iff f((1-\lambda_0)b + \lambda_0 y) = f((1-\lambda_0)a + \lambda_0 x).$$

Puisque f est injective sur I, cela implique que

$$(1-\lambda_0)b + \lambda_0 y = (1-\lambda_0)a + \lambda_0 x$$

soit encore

$$(1-\lambda_0)(b-a) = \lambda_0(x-y).$$

Puisque $\lambda_0 \in]0,1[$, les réels λ_0 et $1-\lambda_0$ sont strictement positifs. Par ailleurs, puisque $a < b$ et que $x < y$, on a

$$(1-\lambda_0)(b-a) > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_0(x-y) < 0.$$

L'égalité $(1-\lambda_0)(b-a) = \lambda_0(x-y)$ est donc impossible.

Cette contradiction a été obtenue sous l'hypothèse qu'une application injective de I dans $\mathbb{R}$ continue n'était pas strictement monotone. On peut donc en conclure qu'une application injective de I dans $\mathbb{R}$ continue est nécessairement strictement monotone.

---

[64] Voir p. 14 les règles de négation d'une assertion quantifiée.

Solution de l'exercice 15

1 - Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{|x_1| + 1} - \frac{1}{|x_2| + 1} \right| = \left| \frac{|x_2| - |x_1|}{(|x_1| + 1)(|x_2| + 1)} \right|.$$

Or $|x_1| + 1 \geqslant 1$ et $|x_2| + 1 \geqslant 1$ donc

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \big| \, |x_2| - |x_1| \, \big| \leqslant |x_1 - x_2|$$

d'après la seconde inégalité triangulaire. On en déduit que l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{|x|+1}$ est lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}$.

2 - Supposons que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de rapport $k \in \mathbb{R}^+$; pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k|x_1 - x_2|$$

et on en déduit que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_1 \neq x_2$,

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leqslant k.$$

Cela implique que l'ensemble

$$E_f = \left\{ \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \;\Big|\; (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \neq x_2 \right\}$$

est borné par k.

- Intéressons-nous à la réciproque. Notons $D = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \right\}$ et supposons que l'ensemble E_f est borné, *i.e.* supposons que

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \forall e \in E_f \quad |e| \leqslant M,$$

autrement dit que

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus D \quad \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leqslant M.$$

Soient x_1 et x_2 deux réels. Ou bien $x_1 \neq x_2$ et dans ce cas

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leqslant M;$$

ou bien $x_1 = x_2$ et dans ce cas

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 0 = M|x_1 - x_2|.$$

Dans les deux cas, on a $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|$. L'application f est donc lipschitzienne de rapport M sur $\mathbb{R}$.

- Considérons l'application $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$. On a

$$\begin{aligned} E_g &= \left\{ \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} \;\middle|\; (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \neq x_2 \right\} \\ &= \left\{ x_1 + x_2 \;\middle|\; (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \neq x_2 \right\}. \end{aligned}$$

L'ensemble E_g n'est pas borné car

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus D \quad |x_1 + x_2| > M.$$

Il suffit en effet de prendre $x_1 = 1 + \frac{1}{2}M$ et $x_2 = \frac{1}{2}M$. On en déduit que l'application g n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

3 - Soit f application lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de rapport k.
- Si $k = 0$ l'application f est constante sur $\mathbb{R}$ et par conséquent est continue sur $\mathbb{R}$.
- Supposons $k > 0$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, notons $\eta = \varepsilon / k$; puisque f est lipschitzienne de rapport k, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x - x_0| \leqslant \eta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0| \leqslant k\,\eta = k\,\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a établi l'assertion

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\big),$$

ce qui, d'après la définition 13.4 indique que l'application f est continue sur $\mathbb{R}$.
- On peut également démontrer que l'application f est continue sur $\mathbb{R}$ en remarquant que puisque f est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 \leqslant |f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0|.$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

On a donc $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ce qui traduit le fait que f est continue en x_0 (et cela est vrai pour tout réel x_0).

4 - Soient f et g deux applications lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ de rapport respectifs k et k' et soient x_1, x_2 deux réels. L'application $f + g$ vérifie,

$$\begin{aligned} \big|(f+g)(x_2) - (f+g)(x_1)\big| &= \big|f(x_2) + g(x_2) - f(x_1) - g(x_1)\big| \\ &\leqslant \big|f(x_2) - f(x_1)\big| + \big|g(x_2) - g(x_1)\big| \\ &\leqslant k\,|x_1 - x_2| + k'\,|x_1 - x_2| \\ &= (k + k')|x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

On en déduit que si f et g sont deux applications lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ de rapports respectifs k et k' alors l'application $f + g$ est lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ de rapport $k + k'$.

- Nous avons vu que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x$ était lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ mais que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ n'était pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. On en déduit que le produit de 2 applications lipschitziennes n'est pas nécessairement une application lipschitzienne.

Solution de l'exercice 16

1 - Puisque f est continue sur l'intervalle $[0, 1]$ et que la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $|f|$ est continue sur $[0,1]$. L'intervalle $[0, 1]$ étant un intervalle fermé et borné, on en déduit d'après le théorème 13.4 que $|f|$ est une application bornée sur $[0, 1]$ et qu'elle atteint ses bornes :

$$\exists x_1 \in [0,1] \quad |f(x_1)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

2 - Pour $(x, y) \in [0,1]^2$, on a d'après la première inégalité triangulaire

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) + (-f(y))| \leqslant |f(x)| + |-f(y)| = |f(x)| + |f(y)|.$$

On en déduit que pour tout $t \in [0,1]$, l'ensemble

$$\Omega_t = \big\{|f(x) - f(y)| \;\big|\; (x,y) \in [0,1]^2 \ \text{ et } \ |x-y| \leqslant t\big\}$$

est majoré par $2\|f\|_\infty$. Cet ensemble admet donc une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

3 - Considérons l'application $\omega : t \in [0,1] \mapsto \omega(t)$ où $\omega(t)$ désigne la borne supérieure de l'ensemble Ω_t. On a

$$\begin{aligned}
\omega(0) &= \sup \Omega_0 = \sup\big\{|f(x) - f(y)| \;\big|\; (x,y) \in [0,1]^2 \ \text{ et } \ |x-y| \leqslant 0\big\} \\
&= \sup\big\{|f(x) - f(y)| \;\big|\; (x,y) \in [0,1]^2 \ \text{ et } \ x = y\big\} \\
&= \sup\big\{0\big\} = 0.
\end{aligned}$$

Considérons deux réels t_1, t_2 dans $[0, 1]$ tels que $t_1 \leqslant t_2$ et comparons les valeurs $\omega(t_1)$ et $\omega(t_2)$. Comme $t_1 \leqslant t_2$, l'ensemble Ω_{t_1} est inclus dans l'ensemble Ω_{t_2} puisque tous les couples $(x,y) \in [0,1]^2$ vérifiant $|x-y| \leqslant t_1$ vérifient automatiquement $|x-y| \leqslant t_2$. Cela implique que la borne supérieure de Ω_1 est nécessairement plus petite que la borne supérieure de Ω_2 car tous les majorants de Ω_2 (et donc le plus petit d'entre eux $\omega(t_2)$) sont aussi des majorants de Ω_1 (et par conséquent ils sont plus grands que le plus petit des majorants de Ω_1 qui est $\omega(t_1)$). Puisque $\omega(t_1) \leqslant \omega(t_2)$ pour tous réels t_1, t_2 dans $[0, 1]$ tels que $t_1 \leqslant t_2$, on en déduit que l'application ω est croissante.

4 - Si $f : x \in [0,1] \mapsto \sqrt{x}$ alors pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\Omega_t = \big\{|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \;\big|\; (x,y) \in [0,1]^2 \ \text{ et } \ |x-y| \leqslant t\big\}.$$

Soient $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $|x-y| \leqslant t$. Sans perte de généralité, on peut supposer que[65] $y \geqslant x$. On a alors

$$|x-y| \leqslant t \iff 0 \leqslant y - x \leqslant t \iff 0 \leqslant y \leqslant t + x.$$

[65] Étant donnés deux réels, on peut toujours dénommer x le plus petit des deux et y le plus grand.

Cela implique que

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \sqrt{y}-\sqrt{x} \leqslant \sqrt{t+x}-\sqrt{x}.$$

En utilisant l'inégalité $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$ valable[66] pour tous réels positifs a et b, on obtient

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{t}.$$

Cela permet d'affirmer que $\sqrt{t}$ est un majorant de Ω_t. Remarquons que si $y=t$ et $x=0$ on a bien $|x-y| \leqslant t$ et que dans ce cas $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \sqrt{t}$. On en déduit que $\sqrt{t} \in \Omega_t$ et que par conséquent $\sqrt{t}$ est l'élément maximal de Ω_t. C'est donc aussi la borne supérieure.

---

[66] Puisque a et b sont positifs,

$$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b} \iff (a+b) \leqslant (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2.$$

Il est aisé de vérifier que cette dernière inégalité est vraie puisqu'en développant le carré, on obtient $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$.

CHAPITRE 14

Fonctions usuelles

14.1 Application réciproque

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application définie sur I et $J = f(I)$. On s'intéresse aux conditions d'existence d'une bijection réciproque pour f, c'est-à-dire à l'existence d'une application f^{-1} de J dans I telle que

$$\big(\forall x \in I \quad f^{-1}(f(x)) = x\big) \quad \text{et} \quad \big(\forall y \in J \quad f(f^{-1}(y)) = y\big).$$

L'application f est, par définition[(1)], une surjection de I dans $J = f(I)$. On cherche donc à établir des critères, simples à utiliser, permettant de s'assurer qu'une application définie sur un intervalle I est injective[(2)].

PROPOSITION 14.1 *Soit I un intervalle et f une application définie sur I. Si f est continue et strictement monotone sur I alors f est une bijection de I dans $J = f(I)$ et admet une bijection réciproque f^{-1} de J dans I qui possède les propriétés suivantes :*

1. *f^{-1} est strictement monotone sur J et de même sens de monotonie que f ;*
2. *f^{-1} est continue sur J.*

Démonstration Rappelons[(3)] que l'image J de l'intervalle I par l'application continue f est un intervalle. Supposons que f est strictement croissante sur I, le cas où f est strictement décroissante se traite d'une manière analogue.

$\trianglerighteq$ Pour montrer que f est injective, considérons $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $x_1 \neq x_2$ et montrons que[(4)] $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si x_1 est différent de x_2 alors on a $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$. Dans le premier cas, puisque f est strictement croissante, cela implique[(5)] que $f(x_1) < f(x_2)$ et dans le deuxième cas que $f(x_1) > f(x_2)$. Dans

---

(1) Voir la définition 2.20 p. 43.

(2) Voir la définition 2.19 p. 42.

(3) Voir la proposition 13.21 p. 626.

(4) On cherche à montrer la contraposée de l'assertion quantifiée définissant une application injective, voir la définition 2.19 p. 42.

(5) Voir la définition donnée p. 591.

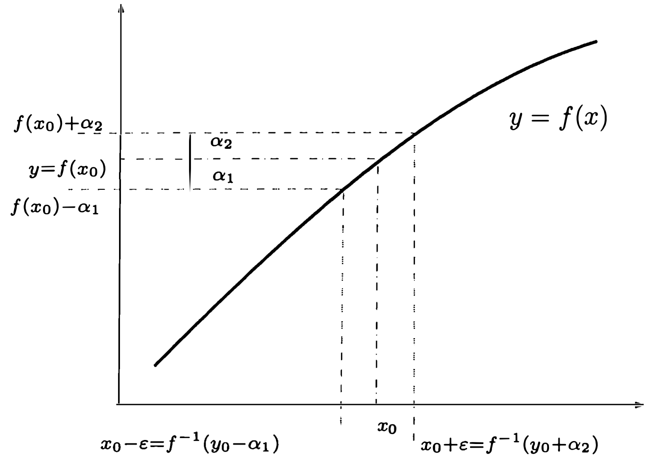


Fig. 1 Situation considérée.

tous les cas on a $f(x_1) \neq f(x_2)$ et par conséquent f est injective. L'application f est donc une bijection de I dans $J = f(I)$.

$\trianglerighteq$ Montrons que si f est strictement croissante sur I alors f^{-1} est strictement croissante sur J, *i.e.* montons[(5)] que si f est strictement croissante sur I alors

$$\forall (y_1, y_2) \in J^2 \quad \big(y_1 < y_2 \implies f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)\big).$$

Pour $(y_1, y_2) \in J^2$ avec $y_1 < y_2$ considérons les réels $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. On a $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Si $y_1 < y_2$, comme f est strictement croissante, on a nécessairement $x_1 < x_2$, c'est-à-dire $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. On en conclut que f^{-1} est strictement croissante sur J.

$\trianglerighteq$ Montrons à présent que f^{-1} est continue sur J. Soit $y_0 \in J$ et $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$. On suppose que y_0 appartient à l'intérieur de l'intervalle J, la démonstration s'adapte aisément en prenant les définitions de la continuité à gauche ou à droite dans le cas où y_0 est l'une des extrémités de l'intervalle J. Pour montrer que f^{-1} est continue en y_0, il faut montrer[(6)] que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on peut trouver $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $y \in [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$ on ait

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$; comme f est continue et strictement croissante on a $f(x) \in [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$ (en supposant ε assez petit pour que l'on ait

[(6)] Voir la définition 13.4 p. 616.

$[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \subset I$). Considérons les réels strictement positifs $\alpha_1 = y_0 - f(x_0-\varepsilon)$ et $\alpha_2 = f(x_0+\varepsilon) - y_0$, voir la figure 1.

On a

- d'une part $y_0 - \alpha_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ d'où $x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_0 - \alpha_1)$;
- et d'autre part $y_0 + \alpha_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ d'où $x_0 + \varepsilon = f^{-1}(y_0 + \alpha_2)$.

Pour $y \in [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$ où $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ on a $y_0 - \alpha_1 \leqslant y \leqslant y_0 + \alpha_2$. Puisque f^{-1} est strictement croissante,

$$f^{-1}(y_0 - \alpha_1) \leqslant f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y_0 + \alpha_2),$$

ce qui s'écrit encore

$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y_0) + \varepsilon.$$

Finalement, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, le réel $\eta = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ est strictement positif et on a

$$\forall y \in J \quad \left(|y - y_0| \leqslant \eta \implies |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leqslant \varepsilon\right)$$

ce qui permet de conclure que f^{-1} est continue en y_0 pour tout $y_0 \in J$ et par conséquent que f^{-1} est continue sur J. □

Remarques

1. On a établi à l'exercice 14, page 640, qu'une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui est continue et injective est nécessairement strictement monotone sur I.

2. Dans un repère orthonormé les représentations graphiques de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice, *i.e.* la droite d'équation $y = x$, voir la figure 2. En effet, si (x, y) est appartient au graphe de f alors $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$, ce qui montre que (y, x) appartient au graphe de f^{-1}.

Proposition 14.2 *Soient I et J deux intervalles ouverts et f une bijection de I dans J. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et de dérivée non nulle, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Démonstration Pour montrer que l'application f^{-1} est dérivable en y_0, il faut montrer que[7] la quantité

$$\Delta_{f^{-1}}(y) = \frac{f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)}{y_0 - y}$$

[7] On pourra consulter la définition 16.1, p. 747.

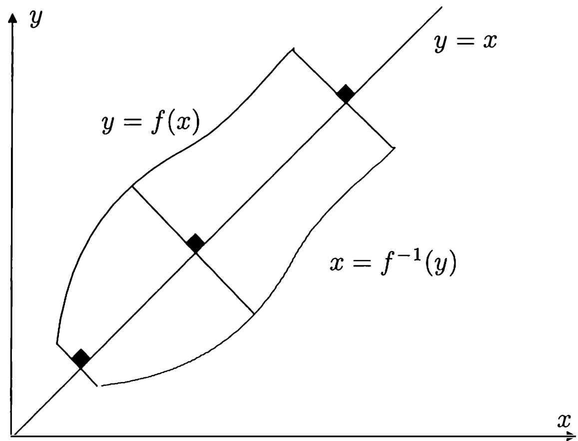


Fig. 2 Allure de la représentation graphique d'une application bijective et de sa bijection réciproque.

admet une limite lorsque y tend vers y_0. Cette limite, dans la mesure où elle existe, sera la dérivée de f^{-1} en y_0. Pour tout $y \in J$, on a

$$\Delta_{f^{-1}}(y) = \frac{f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)}{y_0 - y} = \frac{x_0 - f^{-1}(y)}{y_0 - y} = \frac{x_0 - f^{-1}(y)}{f(x_0) - f(f^{-1}(y))}.$$

Comme f est continue en x_0, d'après la proposition 14.1, l'application f^{-1} est continue en y_0 ; on a donc

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$

Par conséquent la limite en y_0 de $\Delta_{f^{-1}}(y)$ coïncide avec la limite en x_0 de

$$\delta_f(x) = \frac{x_0 - x}{f(x_0) - f(x)}.$$

Par hypothèse l'application f étant dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0)$ non nulle, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(x_0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \delta_f(x) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

On obtient finalement que

$$\lim_{y \to y_0} \Delta_{f^{-1}}(y) = \lim_{x \to x_0} \delta_f(x) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

ce qui indique que f^{-1} est dérivable en y_0 avec $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$. □

Exercice 1 Soit f une bijection de I dans J. Montrer que si f est impaire, alors la bijection réciproque f^{-1} est elle aussi une application impaire. Que dire si f est paire ?

Exemple Considérons les fonctions puissances $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si n est un entier impair alors l'application f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et a pour image $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. D'après la proposition 14.1, elle admet une bijection réciproque f_n^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, voir la figure 3. Par ailleurs, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'_n : x \in \mathbb{R} \mapsto nx^{n-1}$. Puisque $f'_n(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ et que $f_n(0) = 0$, la proposition 14.2 indique que f_n^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- Si n est un entier pair alors l'application f_n est continue mais n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Toutefois l'application f_n restreinte à $\mathbb{R}^+$ est strictement croissante. D'après la proposition 14.1, elle admet une bijection réciproque f_n^{-1} définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, voir la figure 3. Par ailleurs, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée $f'_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto nx^{n-1}$. Puisque $f'_n(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ et que $f_n(0) = 0$, la proposition 14.2 indique que f_n^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$. L'application f_n restreint à $\mathbb{R}^-$ est strictement décroissante et admet également sur cet intervalle une bijection réciproque. Cette bijection réciproque définie sur $\mathbb{R}^-$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, voir la figure 3.

Définition 14.1 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle*[8] *fonction racine n-ième l'application qui est sur $\mathbb{R}^+$ la bijection réciproque de la fonction puissance entière d'exposant n. On la note $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ou $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$.*

On remarquera que la fonction racine n-ième est définie uniquement sur $\mathbb{R}^+$ bien que les fonctions puissances entières admettent également des bijections réciproques sur $\mathbb{R}^-$. Cette bijection réciproque sur $\mathbb{R}^-$ ne doit pas être appelée fonction racine n-ième, ni être notée $\sqrt[n]{\ }$.

Remarques

1. En utilisant la proposition 14.2, on établit que l'application racine n-ième est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et qu'elle admet pour dérivée l'application

$$y \in \mathbb{R}^*_+ \longmapsto (\sqrt[n]{y})' \quad \text{où} \quad (\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{y}}{n\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n}} = \frac{\sqrt[n]{y}}{ny}.$$

[8] Pour $n = 2$, la fonction racine 2-ième est la fonction racine carrée $\sqrt{\ }$.

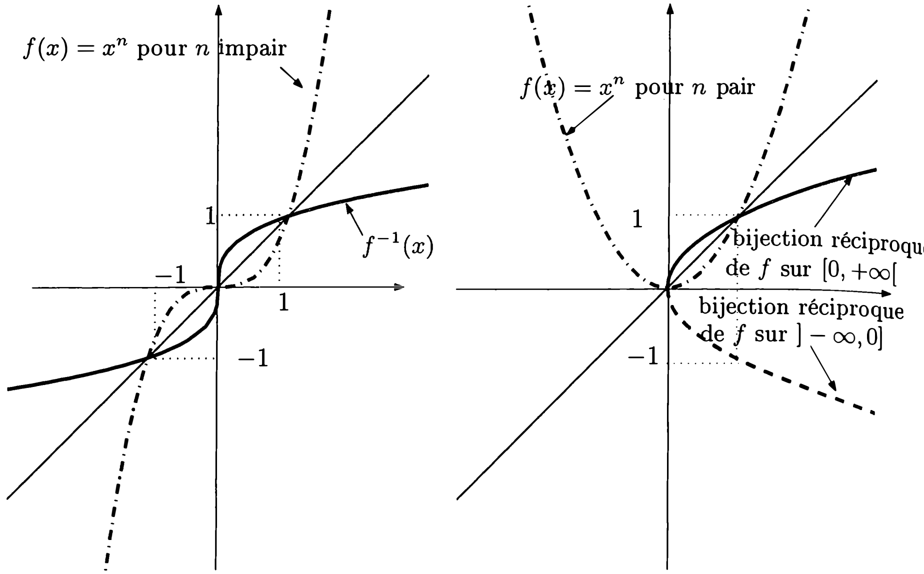


Fig. 3 À gauche : représentation graphique de la bijection réciproque de la fonction puissance d'exposant entier impair. À droite : représentation graphique des bijections réciproques de la fonction puissance d'exposant entier pair sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$.

2. Pour $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ avec $\alpha = m/n$, $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, on définit la fonction puissance d'exposant rationnel α comme la composée de la fonction puissance entière d'exposant n et de la bijection réciproque de la fonction puissance entière d'exposant m, *i.e.*

$$x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto x^\alpha \quad \text{où } x^\alpha = (x^m)^{1/n}\,.$$

3. Pour $\beta \in \mathbb{Q}_-^*$ avec $\beta = -\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$, on définit la fonction puissance d'exposant rationnel négatif β par

$$x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto x^\beta \quad \text{où } x^\beta = \frac{1}{x^\alpha} = \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha.$$

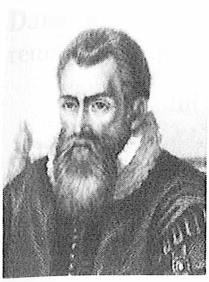
Nous définirons ultérieurement les fonctions puissance d'exposant réel.

EXERCICE 2 Montrer que l'application $f : x \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto 1/\sin(x)$ est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ dans un intervalle que l'on déterminera. Calculer la dérivée de la bijection réciproque f^{-1} et tracer les représentations graphiques de f et de f^{-1}.

14.2 Fonctions logarithmes

14.2.1 La fonction logarithme népérien

NAPIER, John (1550, Edimbourg - 1617, Edimbourg).



Le mathématicien écossais John Napier, plus connu sous son nom francisé de Néper, était préoccupé par le fait que le progrès scientifique était freiné par les calculs longs et pénibles. Connu de ses contemporains comme théologien, ses activités mathématiques ne constituaient toutefois qu'un passe temps. Il lui faudra plus de vingt ans de réflexion pour mettre au point sa découverte des logarithmes qu'il publie en 1614. Utilisé par les astronomes et les commerçants, ce nouvel instrument rendant les calculs plus simples et plus rapides s'est propagé très rapidement.

DÉFINITION 14.2 *On appelle fonction logarithme népérien et on note* ln *ou* log *la primitive sur* $]0,+\infty[$ *de l'application* $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1/x$ *qui s'annule en* $x = 1$, *autrement dit la fonction vérifiant*

$$\forall x \in]0,+\infty[\qquad \Big(\ln(x)\Big)' = \frac{1}{x} \qquad \textit{et} \qquad \ln(1) = 0.$$

Remarques

1. Par abus de notation, on note souvent $\ln x$ ce que l'on devrait écrire $\ln(x)$.

2. D'après la définition 14.2, la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0,+\infty[$. Il s'agit par conséquent[9] d'une application continue sur $]0,+\infty[$. La dérivée de la fonction logarithme népérien est strictement positive sur $]0,+\infty[$; la fonction logarithme népérien est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Comme la fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, d'après la proposition 14.1, il s'agit d'une bijection de $]0,+\infty[$ dans son image qui est $\mathbb{R}$. On en déduit qu'il existe un unique réel, noté e, tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

PROPOSITION 14.3 *Pour* $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ *et* $\alpha \in \mathbb{Q}$, *on a*

1. $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$;

2. $\ln(1/x) = -\ln(x)$;

3. $\ln(y/x) = \ln(y) - \ln(x)$;

4. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

[9] Voir la proposition 16.2 p. 751.

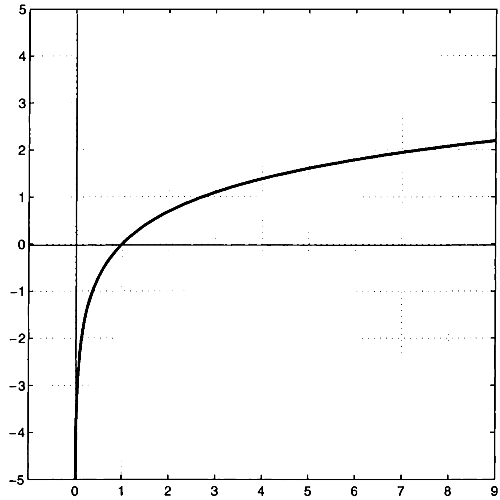


Fig. 4 Représentation graphique de la fonction logarithme népérien.

Démonstration $\trianglerighteq$ La première de ces relations se démontre en revenant à la définition de la fonction logarithme népérien. Pour $y \in]0, +\infty[$ fixé, dérivons par rapport à x la fonction $g : x \mapsto \ln(x \times y)$. On obtient,

$$g'(x) = \big(\ln(x \times y)\big)' = \frac{y}{x\,y} = \frac{1}{x} = \big(\ln(x)\big)'.$$

Les fonctions g et ln ont mêmes dérivées sur $\mathbb{R}_+^*$ et sont toutes les deux continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Il existe donc un réel c tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \ln(x) + c$. Or, $\ln(1) = 0$ d'où $g(1) = \ln(y) = c$. On a donc pour tout $y \in]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y). \tag{1}$$

Les autres relations se démontrent en utilisant cette relation.

$\trianglerighteq$ Pour $x \in]0, +\infty[$ on a l'égalité $1 = x\,\frac{1}{x}$. En utilisant la relation (1), on obtient

$$0 = \ln(1) = \ln\left(x\,\tfrac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\tfrac{1}{x}\right),$$

ce qui prouve que $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.

$\trianglerighteq$ Pour $(x, y) \in]0, +\infty[\,^2$ on a l'égalité $x = y\,\frac{x}{y}$. En utilisant la relation (1), on obtient

$$\ln(x) = \ln\left(y\,\tfrac{x}{y}\right) = \ln(y) + \ln\left(\tfrac{x}{y}\right),$$

ce qui prouve que $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

$\trianglerighteq$ Un raisonnement par récurrence utilisant la relation (1) permet d'établir que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \ln(x^n) = n \ln(x).$$

On vérifie ensuite que la relation est vraie pour tout entier relatif en écrivant pour tout entier relatif n strictement négatif, $x^n = 1/x^{-n}$. En utilisant la seconde relation de la proposition et le fait que $-n$ est un entier naturel, on obtient

$$\ln(x^n) = \ln\left(\tfrac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln(x^{-n}) = -(-n)\ln(x) = n\ln(x).$$

Dans un deuxième temps, on prouve la relation pour les racines n-ième en remarquant que $y = x^{1/n}$ si et seulement si $y^n = x$. On obtient

$$\ln(y^n) = \ln(x) \qquad \text{ou encore} \qquad n\ln(y) = \ln(x).$$

Cela implique que

$$\ln(y) = \ln\left(x^{1/n}\right) = \tfrac{1}{n}\ln(x).$$

On obtient la relation dans le cas général d'un rationnel α en posant $\alpha = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. On a d'après ce qui précède,

$$\ln(x^\alpha) = \ln\left((x^p)^{1/q}\right) = \tfrac{1}{q}\ \ln(x^p) = \tfrac{1}{q}\ p\ \ln(x) = \alpha\ln(x).$$

La dernière propriété est démontrée. □

Remarques

1. Si $(x, y) \in]-\infty, 0[^2$ alors $x \times y \in]0, +\infty[$. Le terme $\ln(x \times y)$ est donc bien défini et on a $\ln(x \times y) = \ln(|x|) + \ln(|y|)$.

2. On a la majoration suivante (que l'on peut établir en étudiant la fonction $x \mapsto \ln(x) - x$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(x) < x.$$

Exercice 3 Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln(2) = 0$;
2. $\ln(x + 2) + \ln(x - 4) - 2\ln(x + 1) = 0$.

Proposition 14.4

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ \ln(x) = 0; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Démonstration ⊵ Pour montrer que la fonction logarithme admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, montrons[10] que pour tout réel $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ il existe un réel $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si x est un réel supérieur à η alors $\ln(x) \geqslant \kappa$.

[10] Voir la définition p. 602.

Soient $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$, $n = \mathrm{E}(\frac{\kappa}{\ln(2)}) + 1$ et $\eta = 2^n$. Puisque la fonction logarithme est croissante, pour tout $x \geqslant \eta$ on a

$$\ln(x) \geqslant \ln(\eta) = n\ln(2) > \kappa.$$

Ainsi, pour tout réel $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$, si x est un réel supérieur à $\eta = 2^n$ où $n = \mathrm{E}(\frac{\kappa}{\ln(2)}) + 1$ alors $\ln(x) \geqslant \kappa$, ce qui permet d'affirmer que la fonction logarithme admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$

$\trianglerighteq$ En utilisant les propriétés du logarithme énoncées à la proposition 14.3, on obtient

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{t\to+\infty} \ln\left(\tfrac{1}{t}\right) = -\lim_{t\to+\infty} \ln(t) = -\infty.$$

$\trianglerighteq$ Pour tout $t \in]1, +\infty[$ on a $\frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$. Ainsi, en utilisant la définition 14.2, on obtient pour tout $x \in]1, +\infty[$

$$0 < \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t}\right]_1^x = 2(\sqrt{x} - 1) < 2\sqrt{x}.$$

On en déduit que pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

D'après le théorème d'encadrement (théorème 13.1, page 605), on en conclut que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

$\trianglerighteq$ En utilisant les propriétés du logarithme énoncées à la proposition 14.3 et le changement de variable $t = 1/x$, on obtient

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \lim_{t\to+\infty} -\frac{\ln(t)}{t} = 0.$$

$\trianglerighteq$ La fonction logarithme étant dérivable en 1 de dérivée 1, on a par définition de la dérivée(11),

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \ln'(1) = 1.$$

□

14.2.2 La fonction logarithme de base a

DÉFINITION 14.3 *Pour $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on appelle fonction logarithme de base a l'application*

$$\log_a : x \in]0, +\infty[\longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

(11) Voir la définition 16.1 p. 747.

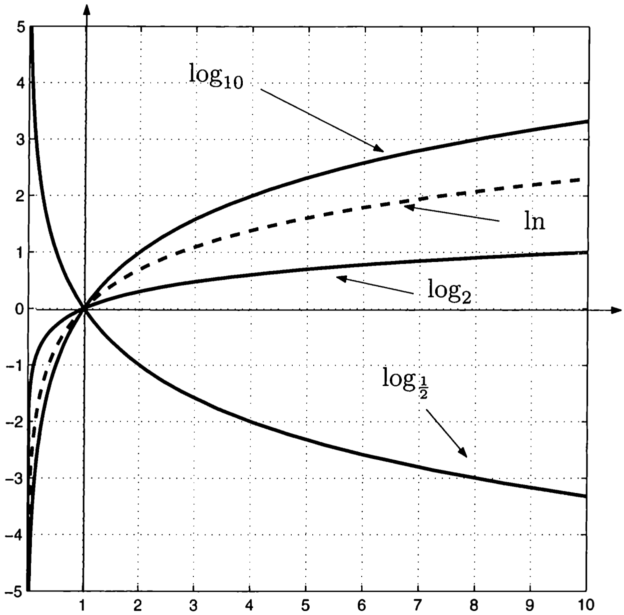


Fig. 5 Représentation graphique des fonctions logarithme népérien et logarithmes de base a pour $a = \frac{1}{2}$, $a = 2$ et $a = 10$.

Remarques

1. La fonction logarithme de base a vérifie des relations analogues à celles énoncées dans la proposition 14.3 pour la fonction logarithme népérien.

2. Dans les sciences de l'ingénieur, on a souvent recours au logarithme base 10 et au logarithme base 2.

EXERCICE 4 Déterminer en fonction de la valeur de a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x); \qquad \lim_{x\to0^+} \log_a(x);$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a(x)}{x}; \qquad \lim_{x\to0^+} x\log_a(x); \qquad \lim_{x\to0} \frac{\log_a(1+x)}{x}.$$

14.3 Fonctions exponentielles

14.3.1 La fonction exponentielle

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et son image est $\mathbb{R}$. D'après la proposition 14.1, elle admet une fonction

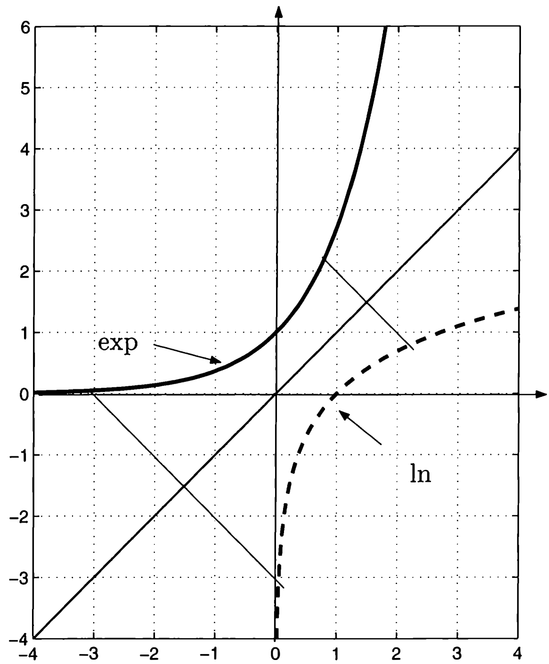


Fig. 6 Représentation graphique de la fonction logarithme népérien et de sa bijection réciproque, la fonction exponentielle.

réciproque appelée fonction exponentielle[12] et notée exp qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'image $]0, +\infty[$.

Les relations données à la proposition 2.5, page 45, s'écrivent

$$\big(\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \exp(\ln(x)) = x\big) \quad \text{et} \quad \big(\forall y \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp(y)) = y\big).$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\ln(x) = y \Longleftrightarrow x = \exp(y).$$

En particulier, puisque $\ln(1) = 0$ on a $\exp(0) = 1$ et puisque $\ln(e) = 1$ on a $\exp(1) = e$. On utilise aussi la notation e^x au lieu de $\exp(x)$.

Proposition 14.5 *La fonction exponentielle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et a pour dérivée l'application*

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x).$$

[12] On ne peut pas ne pas donner la blague, dont on trouvera de nombreuses variantes sur les forums mathématiques de l'internet : exponentielle et logarithme sont au restaurant ; qui va payer l'addition ?

Démonstration La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. D'après la proposition 14.2, on a pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = \exp(x)$

$$(\exp(x))' = \frac{1}{(\ln(y))'} = \frac{1}{1/y} = y = \exp(x).$$

La fonction exponentielle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée lui est égale. □

PROPOSITION 14.6 *Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$, on a*

1. $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$;
2. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$;
3. $\exp(y - x) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(x)}$;
4. $\exp(\alpha x) = \Big(\exp(x)\Big)^{\alpha}$.

Démonstration Ces relations découlent des propriétés du logarithme népérien. Démontrons la première relation ; les autres relations se démontrent sur le même principe et sont laissées en exercice. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\ln\big(\exp(x) \times \exp(y)\big) \;=\; \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) \;=\; x + y.$$

On en déduit, puisque la fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme, que $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$. □

EXERCICE 5 Résoudre l'équation $e^{2x} - e^{x} - 6 = 0$.

PROPOSITION 14.7 *On a les limites suivantes :*

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to -\infty} x \, \exp(x) = 0; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

Démonstration ⊵ Pour montrer que la fonction exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, utilisons la définition de la limite[13] et montrons que pour tout réel κ, il existe un réel η tel que $\exp(x) \geqslant \kappa$ si $x \geqslant \eta$. Seul le cas où κ est positif

[13] Voir p. 602.

est à considérer puisque la fonction exponentielle est à valeurs positives. On a $\kappa = \exp(\ln(\kappa))$ et puisque la fonction exponentielle est strictement croissante,

$$\exp(x) \geqslant \kappa \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geqslant \ln(\kappa).$$

Ainsi pour tout $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$, on trouve un réel η (il suffit de prendre η plus grand que $\ln(\kappa)$) tel que $\exp(x) \geqslant \kappa$ si $x \geqslant \eta$.

⊵ En utilisant le changement de variable $t = -x$ et les propriétés de la fonction exponentielle précédemment démontrées, on obtient

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{t\to+\infty} \exp(-t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\exp(t)} = 0.$$

⊵ Pour montrer que $\lim_{x\to+\infty} \exp(x)/x = +\infty$, considérons le changement de variable $y = \exp(x)$. On a $x = \ln(y)$ et quand x tend vers $+\infty$, $y = \exp(x)$ tend vers $+\infty$. D'après la proposition 13.14, page 612, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{\ln(y)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{\ln(y)}{y}}.$$

D'après la proposition 14.4, on a $\lim_{y\to+\infty} \ln(y)/y = 0$ et sur $]1, +\infty[$ la fonction $y \mapsto \ln(y)/y$ est strictement positive. D'après la proposition 13.13, page 610, on en conclut que $\lim_{x\to+\infty} \exp(x)/x = +\infty$.

⊵ En utilisant le changement de variable $t = -x$, on obtient

$$\lim_{x\to-\infty} x\exp(x) = \lim_{t\to+\infty} -t\exp(-t) = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{\dfrac{\exp(t)}{t}}.$$

Comme $\lim_{t\to+\infty} \exp(t)/t = +\infty$, on en conclut que $\lim_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$.

⊵ La dérivée de la fonction exponentielle en 0 vaut 1. Par définition de la dérivée(14), on a

$$\lim_{x\to0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x} = \exp(0) = 1.$$

La proposition est démontrée. □

EXERCICE 6

1 - Montrer que $x(1-x) \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

2 - En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x^2/n} \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^x$$

et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

(14) Voir la définition 16.1 p. 747.

14.3.2 La fonction exponentielle de base a

Pour $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, la fonction logarithme de base a est continue sur $]0,+\infty[$, strictement monotone (croissante si $a > 1$, décroissante si $a < 1$), d'image $\mathbb{R}$. Elle admet donc une bijection réciproque appelée *fonction exponentielle de base* a qui est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (croissante si $a > 1$, décroissante si $a < 1$), d'image $]0,+\infty[$.

La fonction exponentielle de base a est l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x\ln(a))$. En effet, compte tenu du fait que la fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \log_a(\exp(x\ln(a))) = \frac{\ln(\exp(x\ln(a)))}{\ln(a)} = x,$$

$$\forall y \in]0,+\infty[\qquad \exp(\log_a(y)\ln(a)) = \exp(\ln(y)) = y.$$

On note $a^x = \exp(x\ln(a))$.

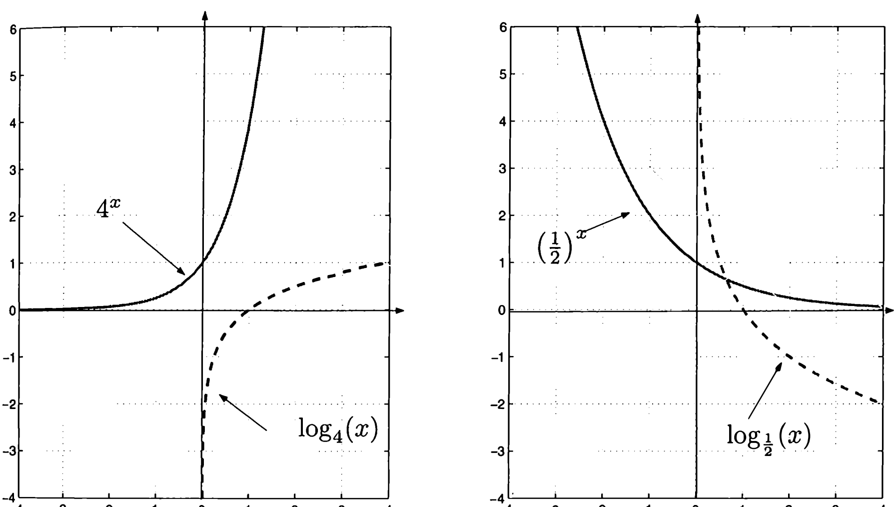


Fig. 7 Représentation graphique des fonctions exponentielle, exponentielle de base a pour $a = \frac{1}{2}$ et $a = 4$.

La fonction exponentielle de base a vérifie des propriétés analogues à celles énoncées dans la proposition 14.6 pour la fonction exponentielle.

EXERCICE 7 Déterminer selon la valeur de $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} a^x; \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x}; \qquad \lim_{x\to-\infty} x\,a^x; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}.$$

14.4 Fonctions puissances

Nous avons défini à la page 661 les fonctions puissances d'exposant rationnel. Dans ce paragraphe nous allons définir les fonctions puissances d'exposant réel.

Définition 14.4 *Pour tout réel α, on appelle fonction fonction puissance d'exposant α l'application qui à $x \in]0, +\infty[$ associe le réel noté x^α défini par*

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

Remarque Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la proposition 14.6,

$$\exp(\alpha \ln(x)) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\alpha} \ln(x)\right) = \prod_{k=1}^{\alpha} \exp(\ln(x)) = \prod_{k=1}^{\alpha} x = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ fois}}.$$

La définition que l'on a donnée de la fonction puissance d'exposant réel est donc bien cohérente dans le cas d'un exposant α entier avec la définition des fonctions polynomiales $x \mapsto x^\alpha$. On remarquera toutefois que cette définition ne donne un sens à x^α que pour x strictement positif alors que la définition par récurrence des fonctions polynomiales $x \mapsto x^\alpha$ donne un sens à x^α pour tout réel x. On peut vérifier que cette définition est également cohérente avec la définition des fonctions puissances d'exposant rationnel donnée à la page 662.

Proposition 14.8

✗ *Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction fonction puissance d'exposant α est une application continue sur $]0, +\infty[$ et strictement monotone (croissante si $\alpha > 0$ et décroissante si $\alpha < 0$).*

✗ *Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée : $x \in]0, +\infty[\mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.*

✗ *On a*

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 & si\ \alpha < 0 \\ 1 & si\ \alpha = 0 \\ +\infty & si\ \alpha > 0 \end{cases}$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & si\ \alpha < 0 \\ 1 & si\ \alpha = 0 \\ 0 & si\ \alpha > 0 \end{cases}.$$

Démonstration ⊵ Les fonctions exponentielle et logarithme sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ respectivement. La fonction puissance est continue en tant que composée des deux applications $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \alpha \ln(x) \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R} \mapsto e^y$ qui sont continues sur leur ensemble de définition (voir la proposition 13.19 page 623).

⊵ Les fonctions exponentielle et logarithme sont croissantes. Si $\alpha > 0$ la fonction puissance d'exposant α est croissante en tant que composée de 2 applications croissantes (voir la proposition 13.5 page 593). Si $\alpha < 0$ la fonction puissance d'exposant α est décroissante en tant que composée d'une application décroissante et d'une application croissante.

$\trianglerighteq$ Les fonctions exponentielle et logarithme sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ respectivement. La fonction puissance est donc dérivable en tant que composée des deux applications $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \alpha \ln(x) \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^y$, voir la proposition 16.4 page 754. De plus, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\left(x^\alpha\right)' = \left(\exp(\alpha \ln(x))\right)' = \frac{\alpha}{x}\exp(\alpha\ln(x)).$$

Or $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\exp(\ln(x))} = \exp(-\ln(x))$ d'où

$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha\exp(-\ln(x)) \times \exp(\alpha\ln(x)) = \alpha\exp((\alpha-1)\ln(x)) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$\trianglerighteq$ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}$. Les résultats concernant les limites se déduisent de manière directe des limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions logarithme et exponentielle (voir les propositions 14.4 et 14.7). □

Remarque On observera que les propriétés de la fonction puissance d'exposant réel données à la proposition 14.8 généralisent les propriétés « bien connues » de la fonction puissance d'exposant entier.

Exercice 8 Soient I un intervalle et u, v deux applications dérivables sur I. On suppose que u ne prend que des valeurs strictement positives sur I.
1 - Montrer que l'application f définie sur I par $x \in I \mapsto (u(x))^{v(x)}$ est dérivable sur I, puis calculer sa dérivée.
2 - Étudier la fonction $g : x \mapsto x^{1/x}$.

Proposition 14.9 *Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ on a les relations suivantes :*

1. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha\, x^\beta$;
2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha$;
3. $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$;
4. $x^{\alpha\,\beta} = (x^\alpha)^\beta = \left(x^\beta\right)^\alpha$.

Démonstration Ces relations se démontrent en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle données à la proposition 14.6. Vérifions la première relation ; pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} x^{\alpha+\beta} &= \mathrm{e}^{(\alpha+\beta)\ln(x)} = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)+\beta\ln(x)} = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}\;\mathrm{e}^{\beta\ln(x)} \\ &= \left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)^\alpha \left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)^\beta = x^\alpha\, x^\beta. \end{aligned}$$

Les autres relations se démontrent d'une manière analogue et sont laissées en exercice. □

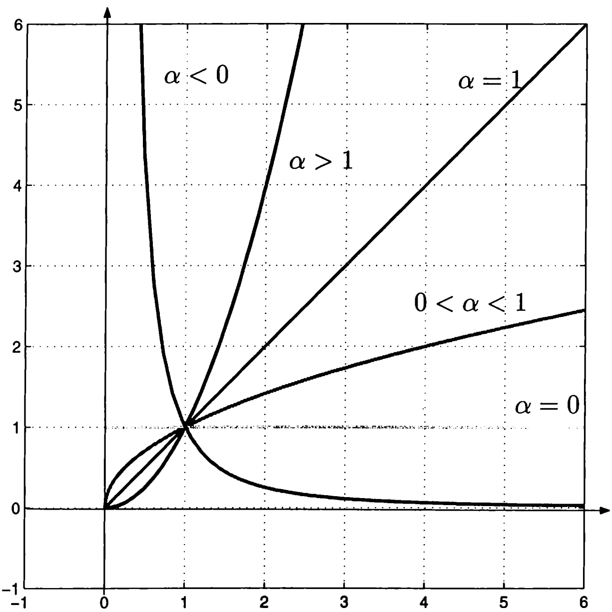


Fig. 8 Représentation graphique des fonctions puissances d'exposant α suivant la valeur de α.

Exercice 9 Il y a manifestement une erreur dans le calcul suivant. Indiquer où est commise l'erreur.

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\frac{1}{2}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Remarque Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, les applications $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}} \in \mathbb{R}_+^*$ sont bijections réciproques l'une de l'autre.

14.5 Comparaison locale des fonctions logarithme, exponentielle et puissances

Proposition 14.10 *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, *on a*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\beta \, |\ln(x)|^\alpha = 0.$$

Démonstration $\trianglerighteq$ Remarquons que pour $\alpha \in \mathbb{R}^-$ on a

$$\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = \frac{1}{x^\beta\ (\ln(x))^{|\alpha|}}$$

et, puisque $\beta > 0$ et $|\alpha| \geqslant 0$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\beta\ (\ln(x))^{|\alpha|} = +\infty$. Cela implique que $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x))^\alpha/x^\beta = 0$.

$\trianglerighteq$ Supposons que $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in]1,+\infty[$ on a

$$\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}\ln(x^{\beta/\alpha})}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln(x^{\beta/\alpha})}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha$$

Puisque $\beta/\alpha > 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} x^{\beta/\alpha} = +\infty$. D'après la proposition 13.14, page 612, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^{\beta/\alpha})}{x^{\beta/\alpha}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

puis que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \lim_{y\to 0} y^\alpha.$$

On conclut en utilisant la proposition 14.8 que $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x))^\alpha/x^\beta = 0$.

$\trianglerighteq$ En effectuant le changement de variable $t = 1/x$ et en utilisant la proposition 13.14, page 612, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} x^\beta\ |\ln(x)|^\alpha &= \lim_{t\to+\infty} (\tfrac{1}{t})^\beta\ |\ln(\tfrac{1}{t})|^\alpha = \lim_{t\to+\infty} \tfrac{1}{t^\beta}\ |-\ln(t)|^\alpha \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{|\ln(t)|^\alpha}{t^\beta} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln(t))^\alpha}{t^\beta}.\end{aligned}$$

On conclut en utilisant la première partie de la démonstration. □

On dit que les puissances du logarithme sont dominées par les puissances d'exposant strictement positif en $+\infty$ et en 0.

Proposition 14.11 *Pour tout* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, *on a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta\ e^{\alpha x} = 0.$$

Démonstration $\trianglerighteq$ En effectuant le changement de variable $t = e^x$, on obtient $e^{\alpha x} = t^\alpha$, $x^\beta = (\ln(t))^\beta$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^\alpha}{(\ln(t))^\beta} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\frac{(\ln(t))^\beta}{t^\alpha}} = +\infty,$$

puisque la fonction $t \in]1, +\infty[\mapsto (\ln(t))^\beta / t^\alpha$ est positive et admet, d'après la proposition 14.10, pour limite 0 en $+\infty$.

$\trianglerighteq$ En effectuant le changement de variable $t = -x$ et en utilisant la première partie de la démonstration, on obtient

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^\beta \, \mathrm{e}^{\alpha x} = \lim_{t \to +\infty} |t|^\beta \, \mathrm{e}^{-\alpha t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^\beta}{\mathrm{e}^{\alpha t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha t}}{t^\beta}} = 0.$$

□

On résume souvent la proposition 14.11 en disant que les puissances d'exposant strictement positif sont dominées par la fonction exponentielle en $\pm\infty$.

14.6 Fonctions hyperboliques

Toute application f définie sur $\mathbb{R}$ peut être décomposée de manière unique en une somme de 2 fonctions, l'une paire, l'autre impaire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$ où

$$f_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad f_i : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On vérifie sans difficulté que f_p est une fonction paire et que f_i est une fonction impaire et on montre que cette décomposition est unique.

On appelle *fonction sinus hyperbolique* la partie impaire de la fonction exponentielle et *fonction cosinus hyperbolique* la partie paire. On appelle *fonction tangente hyperbolique* le quotient de la fonction sinus hyperbolique par la fonction cosinus hyperbolique. La proposition suivante est alors évidente.

PROPOSITION 14.12

✗ *La fonction sinus hyperbolique notée* sh *ou* sinh *vérifie*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

✗ *La fonction cosinus hyperbolique notée* ch *ou* cosh *vérifie*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

✗ *La fonction tangente hyperbolique notée* th *ou* tanh *vérifie*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

Remarque Par abus de notation on écrit souvent $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ et $\operatorname{th} x$ ce que l'on devrait écrire $\operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{th}(x)$.

PROPOSITION 14.13

✗ *La fonction sinus hyperbolique est une application définie sur* $\mathbb{R}$, *continue, strictement croissante, impaire, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée la fonction cosinus hyperbolique. Son image est* $\mathbb{R}$.

✗ *La fonction cosinus hyperbolique est une application définie sur* $\mathbb{R}$, *continue, paire, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée la fonction sinus hyperbolique. Son image est* $[1, +\infty[$.

✗ *La fonction tangente hyperbolique est une application définie sur* $\mathbb{R}$, *continue, impaire, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée l'application* $x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - \operatorname{th}^2(x)$. *Son image est* $]-1, 1[$.

Démonstration Ces propriétés se démontrent en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle. Intéressons-nous à la fonction tangente hyperbolique, l'étude des fonctions sinus et cosinus hyperboliques est laissée en exercice. La fonction tangente hyperbolique est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

⊵ La fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas, on déduit de la proposition 13.18, page 622, que th est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x} = -\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = -\operatorname{th}(x).$$

⊵ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{th}(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}.$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{e}^{-2x} \geqslant 0$, on en déduit que $1 - \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1$ et que $0 \leqslant \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2x}} \leqslant 1$. Il en résulte que $\operatorname{th}(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a$0 \leqslant \mathrm{e}^{2x}$, on en déduit que $-1 \leqslant \mathrm{e}^{2x} - 1$ et $0 \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1} \leqslant 1$. Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\operatorname{th}(x) \geqslant -1$.

⊵ En utilisant les règles de dérivation d'un quotient[(15)], on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\operatorname{th}(x))' = \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right)' = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\,(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\,(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}.$$

[(15)] Voir la proposition 16.3 p. 753.

Après simplification, il vient

$$(\operatorname{th}(x))' = 1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$$

ou encore $(\operatorname{th}(x))' = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$. □

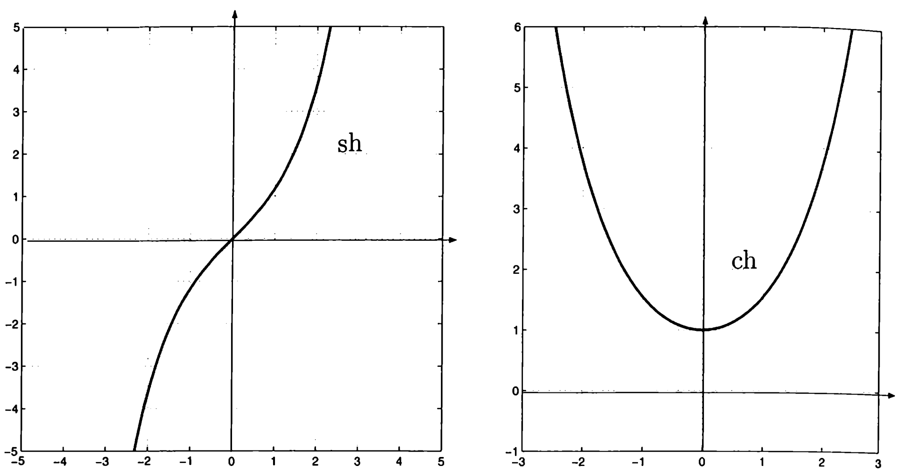


Fig. 9 Représentation graphique des fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique.

Remarques

1. On peut également exprimer la dérivée de la fonction tangente hyperbolique de la manière suivante : $\big(\operatorname{th}(x)\big)' = 1/\operatorname{ch}^2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On vérifie facilement à partir de l'expression des fonctions hyperboliques à l'aide de la fonction exponentielle[16] que

$$\operatorname{sh}(0) = 0, \qquad \operatorname{ch}(0) = 1, \qquad \operatorname{th}(0) = 0.$$

3. On vérifie également que

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1,$$

et que

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1.$$

---

[16] Voir la proposition 14.12 p. 676.

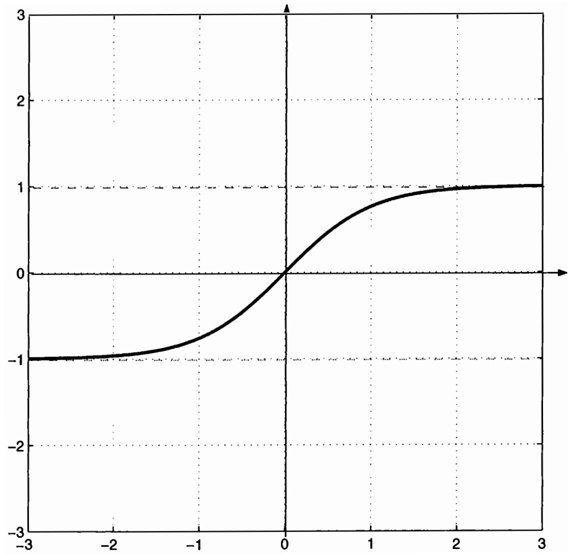


Fig. 10 Représentation graphique de la fonction tangente hyperbolique.

On peut regrouper les résultats précédents sous forme de tableaux.

- Fonction sinus hyperbolique :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$	$+\infty$	$+$	1	$+$	$+\infty$
					$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$			0	$\nearrow$	
	$-\infty$	$\nearrow$			

- Fonction cosinus hyperbolique :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			1		

- Fonction tangente hyperbolique :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$	0	$+$	1	$+$	0
					1
				$\nearrow$	
$\mathrm{th}(x)$			0		
		$\nearrow$			
	-1				

Exercice 10 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\left(\frac{1+\mathrm{th}(x)}{1-\mathrm{th}(x)}\right)^n = \frac{1+\mathrm{th}(nx)}{1-\mathrm{th}(nx)}.$$

Proposition 14.14 *Pour tout réel x, on a*

$$\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)=\mathrm{e}^x, \quad \mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)=\mathrm{e}^{-x}, \quad \mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1.$$

Démonstration Ces formules se démontrent par un simple calcul utilisant les expressions des fonctions hyperboliques à l'aide de la fonction exponentielle données à la proposition 14.12. □

Proposition 14.15 (Formules d'addition)
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a les relations suivantes :

- ✗ $\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\ \mathrm{sh}(y)$
- ✗ $\mathrm{ch}(x-y)=\mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}(y)-\mathrm{sh}(x)\ \mathrm{sh}(y)$
- ✗ $\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}(x)\ \mathrm{ch}(y)+\mathrm{ch}(x)\ \mathrm{sh}(y)$
- ✗ $\mathrm{sh}(x-y)=\mathrm{sh}(x)\ \mathrm{ch}(y)-\mathrm{ch}(x)\ \mathrm{sh}(y)$
- ✗ $\mathrm{th}(x+y)=\dfrac{\mathrm{th}(x)+\mathrm{th}(y)}{1+\mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$
- ✗ $\mathrm{th}(x-y)=\dfrac{\mathrm{th}(x)-\mathrm{th}(y)}{1-\mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$

Démonstration Ces formules se démontrent par un simple calcul utilisant les expressions des fonctions hyperboliques à l'aide de la fonction exponentielle données à la proposition 14.12. Montrons la première relation

$$\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\ \mathrm{sh}(y)$$

On obtient, en utilisant l'expression de cosinus hyperbolique et de sinus hyperbolique à l'aide de la fonction exponentielle, puis en développant

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y) &= \frac{1}{4}\Big(\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}\right)\\ &\qquad\qquad +\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}\right)\Big)\\ &= \frac{1}{4}\left(2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{y}+2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{-(x+y)}\right)\\ &= \mathrm{ch}(x+y).\end{aligned}$$

Les autres relations sont à démontrer en exercice sur le même modèle. □

COROLLAIRE 14.1 (Formules de duplication)
Pour tout réel x, on a

- ✗ $\mathrm{ch}(2x)=\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)$
- ✗ $\mathrm{sh}(2x)=2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)$
- ✗ $\mathrm{th}(2x)=\dfrac{2\,\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)}$

Les formules suivantes se déduisent des formules d'addition données à la proposition 14.15.

- ✗ $\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)=\frac{1}{2}\big(\mathrm{ch}(x+y)-\mathrm{ch}(x-y)\big)$
- ✗ $\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)=\frac{1}{2}\big(\mathrm{ch}(x+y)+\mathrm{ch}(x-y)\big)$
- ✗ $\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y)=\frac{1}{2}\big(\mathrm{sh}(x+y)+\mathrm{sh}(x-y)\big)$

On a aussi les formules de factorisation suivantes :

- ✗ $\mathrm{sh}(x)+\mathrm{sh}(y)=2\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$
- ✗ $\mathrm{sh}(x)-\mathrm{sh}(y)=2\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$
- ✗ $\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}(y)=2\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$
- ✗ $\mathrm{ch}(x)-\mathrm{ch}(y)=2\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$
- ✗ $\mathrm{th}(x)+\mathrm{th}(y)=\dfrac{\mathrm{sh}(x+y)}{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)}$
- ✗ $\mathrm{th}(x)-\mathrm{th}(y)=\dfrac{\mathrm{sh}(x-y)}{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)}$

Remarques

1. On comparera les relations concernant les fonctions hyperboliques à celles concernant les fonctions trigonométriques[17].

[17] Voir le formulaire de trigonométrie donné p. 157. La grande similarité des formules a son origine dans les liens existant entre fonctions hyperboliques et fonctions trigonométriques de la variable complexe. On pourra consulter pour plus de détails le *Cours de deuxième année* p. 208.

2. On déduit de la relation $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ que l'hyperbole d'équation $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \quad (a, b \in \mathbb{R}_+^*)$ admet pour représentation paramétrique[18]

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \varepsilon\, a\ \mathrm{ch}(t) \\ y & = & b\ \mathrm{sh}(t) \end{array} \right. \qquad (\varepsilon, t) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$$

ce qui explique le terminologie « fonctions hyperboliques ».

> **Exercice 11** On appelle fonction co-tangente hyperbolique le quotient de la fonction cosinus hyperbolique par la fonction sinus hyperbolique. Étudier cette fonction.

14.7 Fonctions circulaires réciproques

14.7.1 La fonction arc-sinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. L'image de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est $[-1, 1]$. La fonction sinus réalise donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$. On appelle *fonction arc-sinus* et on note arcsin ou $\sin^{-1}$ la bijection réciproque de l'application sinus sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

D'après la proposition 14.1, la fonction arc-sinus est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$, d'image $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a

$$\forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \qquad \arcsin(\sin(x)) = x$$

et

$$\forall y \in [-1, 1] \qquad \sin(\arcsin(y)) = y.$$

De plus

$$\forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad \forall y \in [-1, 1] \qquad \big(\sin(x) = y \iff x = \arcsin(y)\big).$$

On a ainsi

$\sin(0) = 0$	$\arcsin(0) = 0$
$\sin(\pi/6) = 1/2$	$\arcsin(1/2) = \pi/6$
$\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$	$\arcsin(1/\sqrt{2}) = \pi/4$
$\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$	$\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$
$\sin(\pi/2) = 1$	$\arcsin(1) = \pi/2$

Par ailleurs, puisque la fonction sinus est impaire, la fonction arc-sinus est elle aussi impaire[19].

---

[18] Voir le chap. 11 du *Cours de deuxième année* pour l'étude des courbes paramétrées dans le plan.

[19] Voir l'exercice 1 p. 661.

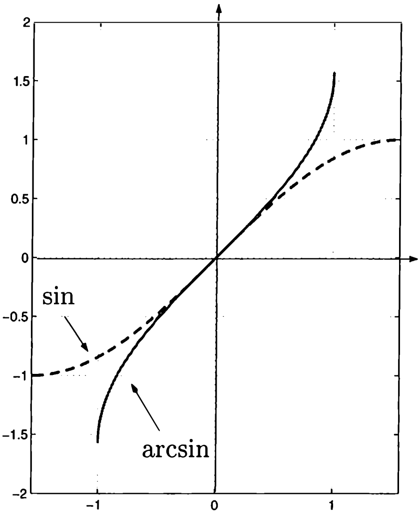


Fig. 11 Représentation graphique des fonctions sinus et arc-sinus.

Remarque La fonction sinus est continue et strictement monotone sur chaque intervalle $[n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}]$, $n \in \mathbb{Z}$. Elle admet donc une bijection réciproque pour chacun de ces intervalles. Attention, pour $n \in \mathbb{Z}^*$, la fonction arc-sinus n'est pas la bijection réciproque de la fonction sinus sur $[n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}]$. On peut montrer que la bijection réciproque de la fonction sinus sur l'intervalle $[n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}]$, $n \in \mathbb{Z}^*$ est l'application

$$x \in [-1, 1] \longmapsto n\pi + (-1)^n \arcsin(x).$$

La relation $\arcsin(\sin(x)) = x$ n'est vraie que si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On se gardera de faire des simplifications trop rapides ! Si $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on utilise la périodicité de la fonction sinus pour se ramener à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Par exemple,

$$\arcsin(\sin(\tfrac{3\pi}{2})) = \arcsin(\sin(-\tfrac{\pi}{2})) = -\tfrac{\pi}{2}.$$

Par contre pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $\sin(\arcsin(x)) = x$.

EXERCICE 12 Il a été établi dans l'exercice 2, page 662, que l'application $f : x \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto 1/\sin(x)$ est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ dans $]1, +\infty[$. Exprimer la bijection réciproque f^{-1} à l'aide de la fonction arc-sinus.

PROPOSITION 14.16 *La fonction arc-sinus est dérivable sur* $]-1, 1[$ *de dérivée l'application*

$$x \in]-1, 1[\longmapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Démonstration D'après la proposition 14.2, puisque sinus est dérivable et que cette dérivée ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, la fonction arc-sinus est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et on a pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\big(\arcsin(x)\big)'=\frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

On remarquera que sinus est de dérivée nulle en $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.
Pour $y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a $\cos(y)>0$ et d'après la relation $\cos^2(y)+\sin^2(y)=1$, on en déduit que $\cos(y)=+\sqrt{1-\sin^2(y)}$. Puisque pour tout $x\in]-1,1[$ on a $y=\arcsin(x)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on obtient

$$\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}=\sqrt{1-x^2}.$$

On peut conclure que pour tout $x\in]-1,1[$, on a $\big(\arcsin(x)\big)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\square$

Exemple Montrons que pour tout $x\in[-1,1]$ on a

$$\cos^2\left(\tfrac{1}{2}\arcsin(x)\right)=\tfrac{1}{2}\Big(1+\sqrt{1-x^2}\Big).$$

⊵ Une première méthode consiste à utiliser l'identité $\cos^2(\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ qui permet dans un premier temps d'établir que

$$\cos^2\left(\tfrac{1}{2}\arcsin(x)\right)=\tfrac{1}{2}\left(1+\cos(\arcsin(x))\right).$$

Puisque pour tout $x\in[-1,1]$ on a $\arcsin(x)\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, le réel $\cos(\arcsin(x))$ est positif et d'après la relation $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$, on obtient

$$\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}=\sqrt{1-x^2}$$

ce qui permet d'établir l'égalité.

⊵ Une seconde méthode consiste à considérer les fonctions

$$f:x\in[-1,1]\longmapsto\cos^2\left(\tfrac{1}{2}\arcsin(x)\right)\quad\text{et}\quad g:x\in[-1,1]\longmapsto\tfrac{1}{2}\Big(1+\sqrt{1-x^2}\Big).$$

Ces deux fonctions sont continues et dérivables sur $]-1,1[$. Pour tout $x\in]-1,1[$ on a

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left(-2x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right)=-\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

et

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(\tfrac{1}{2}\arcsin(x)\right)'\left(-2\sin\left(\tfrac{1}{2}\arcsin(x)\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}\arcsin(x)\right)\right)\\&=-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\sin\left(2\left(\tfrac{1}{2}\arcsin(x)\right)\right)=-\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Puisque f et g sont continues sur $[-1,1]$ et admettent la même dérivée sur $]-1,1[$, on en déduit[20] que ces deux fonctions sont égales à une constante près, *i.e.* qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [-1,1]$

$$f(x) = g(x) + C.$$

Pour $x = 0$ on a $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$ donc $C = 0$ et les deux fonctions f et g sont égales sur $[-1,1]$.

EXERCICE 13 Étudier la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

14.7.2 La fonction arc-cosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$. L'image de l'intervalle $[0,\pi]$ est $[-1,1]$. La fonction cosinus réalise donc une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. On appelle *fonction arc-cosinus* et on note arccos ou $\cos^{-1}$ la bijection réciproque de l'application cosinus sur $[0,\pi]$.

D'après la proposition 14.1, la fonction arc-cosinus est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$, d'image $[0,\pi]$. On a

$$\forall x \in [0,\pi] \qquad \arccos(\cos(x)) = x$$

et

$$\forall y \in [-1,1] \qquad \cos(\arccos(y)) = y.$$

De plus,

$$\forall x \in [0,\pi] \quad \forall y \in [-1,1] \qquad \big(\cos(x) = y \iff x = \arccos(y)\big).$$

On a ainsi

$\cos(0) = 1$	$\arccos(1) = 0$
$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$	$\arccos(\sqrt{3}/2) = \pi/6$
$\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$	$\arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$
$\cos(\pi/3) = 1/2$	$\arccos(1/2) = \pi/3$
$\cos(\pi/2) = 0$	$\arccos(0) = \pi/2$
$\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$	$\arccos(-\sqrt{3}/2) = 5\pi/6$
$\cos(3\pi/4) = -1/\sqrt{2}$	$\arccos(-1/\sqrt{2}) = 3\pi/4$
$\cos(2\pi/3) = -1/2$	$\arccos(-1/2) = 2\pi/3$
$\cos(\pi) = -1$	$\arccos(-1) = \pi$

[20] Voir la proposition 16.10 p. 771. L'application $f-g$ est continue sur $]-1,1[$, à dérivée nulle ; il s'agit donc d'une application constante.

La relation $\arccos(\cos(x)) = x$ n'est vraie que si $x \in [0, \pi]$. On se gardera de faire des simplifications hâtives ! Si $x \notin [0, \pi]$, on utilise la périodicité de la fonction cosinus pour se ramener à l'intervalle $[0, \pi]$. Par exemple,

$$\arccos(\cos(-\tfrac{\pi}{4})) = \arccos(\cos(\tfrac{\pi}{4})) = \tfrac{\pi}{4}.$$

Par contre on a toujours $\cos(\arccos(x)) = x$ lorsque ces quantités sont définies, *i.e.* pour tout $x \in [-1, 1]$.

Proposition 14.17 *La fonction arc-cosinus est dérivable sur* $]-1, 1[$ *de dérivée l'application*

$$x \in]-1, 1[\longmapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration D'après la proposition 14.2, puisque cosinus est dérivable sur $]0, \pi[$ et que sa dérivée ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, la fonction arc-cosinus est dérivable sur $]0, \pi[$ et pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$\big(\arccos(x)\big)' = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}.$$

On remarquera que cosinus est de dérivée nulle en π et $-\pi$. Pour $y \in]0, \pi[$, on a $\sin(y) > 0$ et d'après la relation $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$, on obtient que $\sin(y) = +\sqrt{1-\cos^2(y)}$. On a donc

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$

On en conclut que $\big(\arccos(x)\big)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1, 1[$. □

Proposition 14.18 *Pour* $x \in [-1, 1]$ *on a :* $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration Considérons la fonction $f : x \mapsto \arccos(x) + \arcsin(x)$. Elle est définie et continue sur $[-1, 1]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[-1, 1]$. Elle est dérivable sur $]-1, 1[$ car les fonctions arc-sinus et arc-cosinus sont dérivables sur $]-1, 1[$. Pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$f'(x) = (\arccos(x))' + (\arcsin(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

On en déduit que[21] f est constante sur $[-1, 1]$. Comme

$$f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \tfrac{\pi}{2},$$

la valeur de la constante est $\frac{\pi}{2}$. On a donc $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$. □

[21] Voir la proposition 16.10 p. 771.

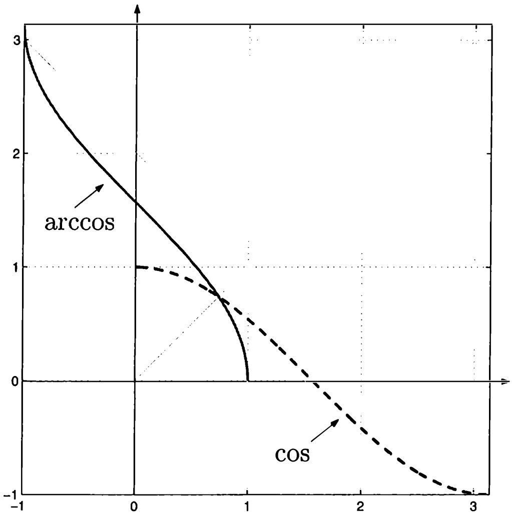


Fig. 12 Représentation graphique des fonctions cosinus et arc-cosinus.

14.7.3 La fonction arc-tangente

Rappelons que la fonction tangente est définie comme le quotient de la fonction sinus par la fonction cosinus. Cette fonction est définie sur l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1)\,\tfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Elle est périodique, de période π. Elle est continue et dérivable sur son ensemble de définition et pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$\big(\tan(x)\big)' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

La représentation graphique de la fonction tangente est donnée à la figure 13.

Considérons la fonction tangente en restriction à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle est continue et strictement croissante sur cet intervalle et a pour image $\mathbb{R}$. La fonction tangente réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. On appelle *fonction arc-tangente* et on note arctan ou $\tan^{-1}$ la fonction réciproque de l'application tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction arc-tangente est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a

$$\forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\qquad \arctan(\tan(x)) = x$$

et

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \tan(\arctan(y)) = y.$$

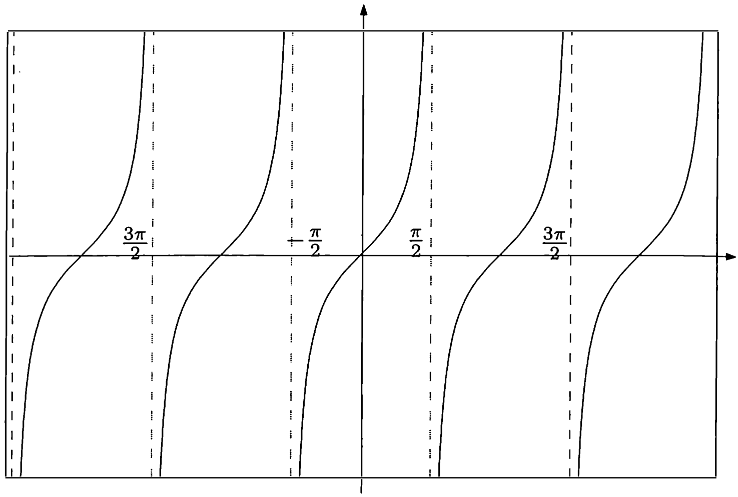


Fig. 13 Représentation graphique de la fonction tangente sur l'intervalle $]-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi[$.

De plus,

$$\forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad \big(\tan(x) = y \iff x = \arctan(y)\big).$$

On a ainsi

$\tan(0) = 0$	$\arctan(0) = 0$
$\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$	$\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$
$\tan(\pi/4) = 1$	$\arctan(1) = \pi/4$
$\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$	$\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$

Par ailleurs, puisque la fonction tangente est impaire, la fonction arc-tangente est elle aussi impaire[22].

Remarque La fonction tangente est continue et strictement croissante sur chaque intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$, $n \in \mathbb{Z}$. Elle admet donc une bijection réciproque pour chacun de ces intervalles. Attention, pour $n \in \mathbb{Z}^*$, la fonction arc-tangente n'est pas la bijection réciproque de la fonction tangente sur $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

(22) Voir l'exercice 1 p. 661.

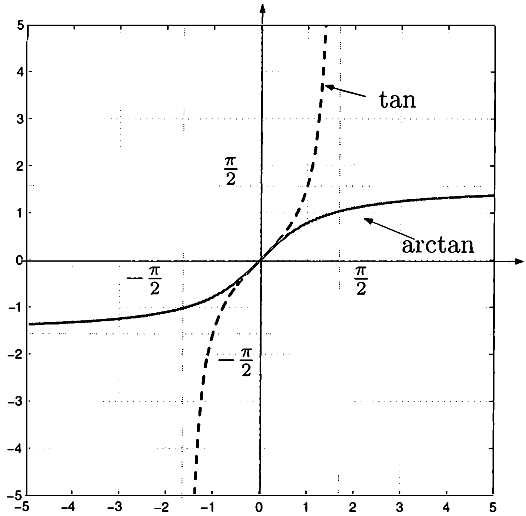


Fig. 14 Représentation graphique des fonctions tangente et arc-tangente.

Proposition 14.19 *La fonction arc-tangente est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée l'application*

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration Puisque la fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que sa dérivée ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, d'après la proposition 14.2 la fonction arc-tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\big(\arctan(x)\big)' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

La proposition est démontrée. □

Proposition 14.20 ✗ *Pour tout réel x strictement positif on a*

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

✗ *Pour tout réel x strictement négatif on a*

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Démonstration Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})$. Cette application est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et la fonction arc-tangente est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)' \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\,\frac{x^2}{x^2+1} = 0.$$

On en déduit[23] que l'application f est une application constante sur chacun des intervalles où elle est continue, à savoir sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. L'application f n'est pas prolongeable par continuité en 0 puisque

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \arctan(\tfrac{1}{x}) = \lim_{t\to -\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan(\tfrac{1}{x}) = \lim_{t\to +\infty} \arctan(t) = +\frac{\pi}{2}.$$

On en déduit qu'il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que

$$\big(\forall x \in]-\infty,0[\quad f(x) = C_1\big) \qquad \text{et} \qquad \big(\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = C_2\big).$$

Comme

$$f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad f(-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2},$$

on en déduit que[24] $C_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $C_2 = \frac{\pi}{2}$. □

14.8 Fonctions hyperboliques réciproques

14.8.1 La fonction argument sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et son image est $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle *fonction argument sinus hyperbolique* et on note argsh (ou encore argsinh ou $\sinh^{-1}$) la fonction réciproque de l'application sinus hyperbolique.

La fonction argument sinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et a pour image $\mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{argsh}(\operatorname{sh}(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(y)) = y.$$

De plus

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \big(y = \operatorname{sh}(x) \iff x = \operatorname{argsh}(y)\big).$$

[23] Voir la proposition 16.10 p. 771.

[24] On aurait aussi pu déterminer la valeur des constantes C_1 et C_2 en remarquant que, puisque f est constante sur $]-\infty,0[$, on a $C_1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ et puisque f est constante sur $]0,+\infty[$ on a $C_2 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Par ailleurs, puisque la fonction sinus hyperbolique est impaire, la fonction argument sinus hyperbolique est elle aussi impaire[25].

PROPOSITION 14.21 *La fonction argument sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée l'application*

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Démonstration D'après la proposition 14.2, puisque la fonction sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée la fonction cosinus hyperbolique qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction argument sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(\operatorname{argsh}(x))' = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{argsh}(x))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x))}.$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}^2(y) - \operatorname{sh}^2(y) = 1$, d'où $\operatorname{ch}(y) = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(y)}$ car la fonction cosinus hyperbolique est positive. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) = \sqrt{1 + (\operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(x)))^2} = \sqrt{1+x^2}$$

ce qui établit la relation. $\square$

PROPOSITION 14.22

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Démonstration Nous allons donner deux méthodes pour établir ce résultat.

⊵ La fonction

$$f : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ et par conséquent $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ car il s'agit de la composée de l'application $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction logarithme qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle admet pour dérivée[26]

$$f'(x) = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

[25] Voir l'exercice 1 p. 661.

[26] Utiliser la formule de dérivation composée (voir la proposition 16.4 p. 754) puis simplifier.

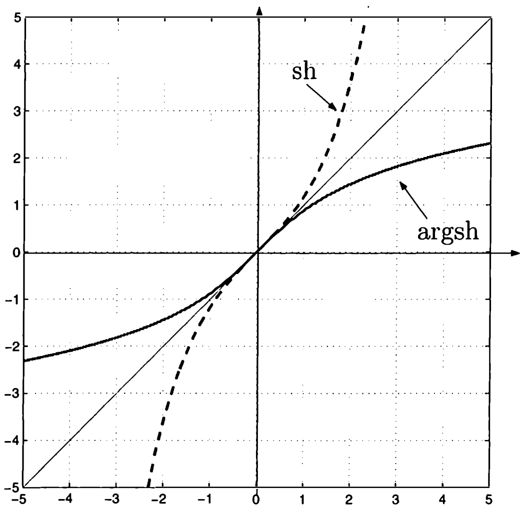


Fig. 15 Représentation graphique des fonctions sinus hyperbolique et argument sinus hyperbolique.

Ainsi f et argsh sont 2 fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ayant même dérivée sur $\mathbb{R}$. Ces 2 fonctions sont donc[27] égales à une constante réelle C près, *i.e.*

$$\exists C \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

Puisque $\operatorname{sh}(0) = 0$ on a $\operatorname{argsh}(0) = 0$. Par ailleurs $f(0) = \ln(1) = 0$. Cela permet d'établir que $C = 0$.

$\trianglerighteq$ On peut également démontrer le résultat en remarquant que $y = \operatorname{argsh}(x)$ si et seulement si $x = \operatorname{sh}(y)$. Compte tenu de la définition de la fonction sinus hyperbolique, pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a

$$x = \operatorname{sh}(y) \iff \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}) = x \iff \mathrm{e}^{2y} - 2x\mathrm{e}^y - 1 = 0.$$

Posons $Y = \mathrm{e}^y \in \mathbb{R}_+^*$; on a $Y^2 - 2xY - 1 = 0$. Cette équation polynomiale du second degré admet deux racines réelles distinctes (son discriminant qui vaut $4x^2 + 4$ est strictement positif) qui sont :

$$x + \sqrt{x^2+1} > 0 \qquad \text{et} \qquad x - \sqrt{x^2+1} < 0.$$

Comme $Y > 0$, la seule expression possible pour Y est $x + \sqrt{x^2+1}$. On en déduit que $Y = \mathrm{e}^y = x + \sqrt{x^2+1}$ ce qui implique que $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. On

[27] Voir la proposition 16.10 p. 771. L'application $f - g$ est continue sur $\mathbb{R}$, à dérivée nulle ; il s'agit donc d'une application constante.

a donc établi que

$$x = \mathrm{sh}(y) \iff y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Comme par ailleurs $y = \mathrm{argsh}(x)$ si et seulement si $x = \mathrm{sh}(y)$, on en conclut que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$ □

14.8.2 La fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction cosinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et l'image de l'intervalle $[0,+\infty[$ par la fonction cosinus hyperbolique est $[1,+\infty[$. La fonction cosinus hyperbolique réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$. On appelle *fonction argument cosinus hyperbolique* et on note argch (ou encore argcosh ou $\cosh^{-1}$) la fonction réciproque de l'application cosinus hyperbolique.

La fonction argument cosinus hyperbolique est définie sur $[1,+\infty[$. Elle est continue sur $[1,+\infty[$, elle est strictement croissante et a pour image $[0,+\infty[$. On a

$$\forall x \in [0,+\infty[\qquad \mathrm{argch}(\mathrm{ch}(x)) = x$$

et

$$\forall y \in [1,+\infty[\qquad \mathrm{ch}(\mathrm{argch}(y)) = y.$$

De plus

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad \forall y \in [1,+\infty[\qquad \big(y = \mathrm{ch}(x) \iff x = \mathrm{argch}(y)\big).$$

Proposition 14.23 *La fonction argument cosinus hyperbolique est dérivable sur* $]1,+\infty[$ *et admet pour dérivée l'application*

$$x \in \,]1,+\infty[\,\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Démonstration La rédaction de la preuve est laissée en exercice ; on s'inspirera de celle de la proposition 14.21. □

Proposition 14.24

$$\forall x \in \,]1,+\infty[\qquad \mathrm{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Démonstration La rédaction de la preuve est laissée en exercice ; on s'inspirera de celle de la proposition 14.22. □

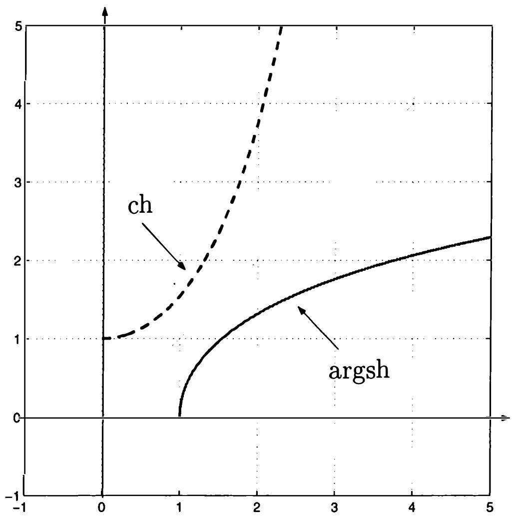


Fig. 16 Représentation graphique des fonctions cosinus hyperbolique et argument cosinus hyperbolique.

14.8.3 La fonction argument tangente hyperbolique

La fonction tangente hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et son image est $]-1,1[$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. On appelle *fonction argument tangente hyperbolique* et on note argth (ou encore argtanh ou $\tanh^{-1}$) la fonction réciproque de l'application tangente hyperbolique.

La fonction argument tangente hyperbolique est définie sur $]-1,1[$. Elle est continue sur $]-1,1[$, strictement croissante et a pour image $\mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{argth}(\operatorname{th}(x)) = x$$

et

$$\forall y \in]-1,1[\qquad \operatorname{th}(\operatorname{argth}(y)) = y.$$

De plus

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]-1,1[\qquad \big(y = \operatorname{th}(x) \iff x = \operatorname{argth}(y)\big).$$

Par ailleurs, puisque la fonction tangente hyperbolique est impaire, la fonction argument tangente hyperbolique est elle aussi impaire[28].

[28] Voir l'exercice 1 p. 661.

PROPOSITION 14.25 *La fonction argument tangente hyperbolique est dérivable sur* $]-1,1[$ *et admet pour dérivée l'application*

$$x \in]-1,1[\longmapsto \frac{1}{1-x^2}.$$

Démonstration La rédaction de la preuve est laissée en exercice ; on s'inspirera de celle de la proposition 14.21. □

PROPOSITION 14.26

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Démonstration Pour $y \in \mathbb{R}$, la relation

$$\operatorname{th}(y) = \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}} = \frac{\mathrm{e}^{2y} - 1}{\mathrm{e}^{2y} + 1}$$

permet d'établir que

$$\frac{1 + \operatorname{th}(y)}{1 - \operatorname{th}(y)} = \mathrm{e}^{2y}.$$

Puisque la fonction tangente hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ de bijection réciproque la fonction argument tangente hyperbolique, pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe un unique réel $x \in]-1,1[$ tel que $y = \operatorname{argth}(x)$. On déduit de ce qui précède que

$$\exp(2y) = \exp(2\operatorname{argth}(x)) = \frac{1 + \operatorname{th}(\operatorname{argth}(x))}{1 - \operatorname{th}(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1+x}{1-x} = \exp\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right).$$

Puisque la fonction exponentielle est injective sur $\mathbb{R}$, cela implique que

$$2\operatorname{argth}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Comme dans la preuve de la proposition 14.22, on peut également établir le résultat en étudiant les deux fonctions argth et $x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. □

EXERCICE 14 Montrer que la fonction co-tangente hyperbolique étudiée à l'exercice 11 réalise une bijective de son ensemble de définition dans un ensemble que l'on précisera. On appelle fonction argument co-tangente hyperbolique sa bijection réciproque. Étudier cette fonction.

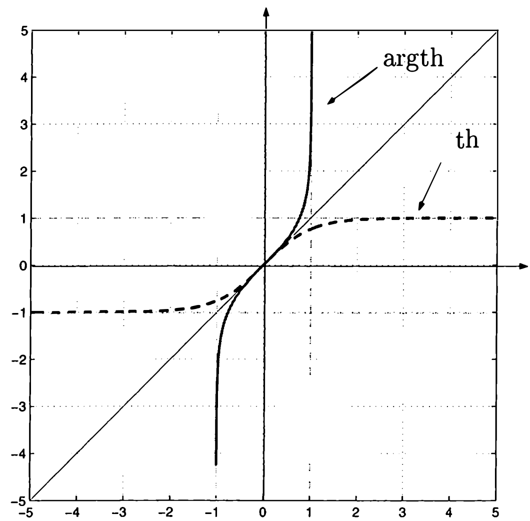


Fig. 17 Représentation graphique des fonctions tangente hyperbolique et argument tangente hyperbolique.

14.9 Exercices de synthèse

Exercice 15

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse à l'étude des solutions de l'équation

$$(\mathcal{E}_n) \quad x + \ln(x) = n$$

On note f la fonction définie par $f(x) = x + \ln(x)$.

1 - Donner le tableau de variation de la fonction f en indiquant toutes les limites utiles.

2 - Montrer que f définit une bijection. Donner les propriétés de la bijection réciproque f^{-1} qui peuvent être déduites des propriétés de f.

3 - Montrer que l'équation $(\mathcal{E}_n)$ admet une unique solution (que l'on note x_n). Que vaut x_1 ? Montrer que la suite $(x_n)_n$ est strictement croissante et qu'elle tend vers $+\infty$.

4 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(x_n) \leqslant f(n)$ puis montrer que $x_n \leqslant n$.

5 - On considère la fonction ϕ définie par $\phi(x) = f(x - \ln(x)) - x$. Quel est l'ensemble de définition de ϕ ? Donner le tableau de variation sur l'intervalle $[1, +\infty[$ de la fonction ϕ en indiquant toutes les limites utiles.

6 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(n - \ln(n)) \leqslant n$ puis en déduire que $x_n \geqslant n - \ln(n)$.

7 - Soit $(a_n)_n$ *la suite de terme général* $a_n = \frac{1}{n}(x_n - n)$. *Montrer que la suite* $(a_n)_n$ *converge vers* 0.

8 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :* $n\,a_n + \ln(n) = -\ln(a_n + 1)$ *; en déduire que* $\lim_{n\to+\infty} \big(n\ a_n + \ln(n)\big) = 0$.

9 - Montrer que $x_n = n - \ln(n) + \varepsilon_n$ *avec* $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Exercice 16

On considère la fonction f *définie par*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

1 - Déterminer sur quel ensemble f *est continue puis indiquer si* f *peut être prolongée par continuité. On justifiera très précisément chaque résultat.*

2 - Étudier la fonction f.

3 - Tracer la représentation graphique de f.

4 - a) Montrer que pour $x \in]0,1]$ *on a* $f(x) = \arccos(x)$.

b) Donner une expression plus simple de f *sur l'intervalle* $[-1, 0[$.

Exercice 17 *On considère le filtre passe-bas représenté sur la figure suivante où* v_1 *et* v_2 *désignent les tensions sinusoïdales d'entrée et de sortie. On a* $R = 100\,\Omega$, $R_L = 1000\,\Omega$ *et* $C = 0.2\mu F$.

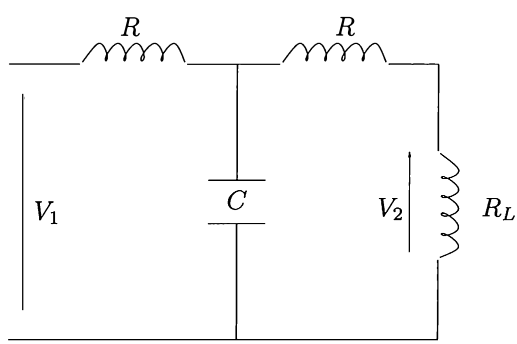


Fig. 18 *Filtre passe-bas considéré.*

L'atténuation complexe en fonction de la fréquence ν *est donnée par*

$$A(\nu) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{R_L}{2R + R_L + 2\pi i\nu RC(R_L + R)}.$$

1 - Calculer le module de l'atténuation complexe et étudier la fonction $\nu \mapsto |A(\nu)|$. *Déterminer la valeur maximale* M *du module de l'atténuation complexe.*

2 - On appelle bande passante d'un filtre, l'ensemble des fréquences ν telles que

$$\frac{M}{\sqrt{2}} \leqslant |A(\nu)| \leqslant M.$$

Déterminer la bande passante du filtre passe-bas considéré ici.

3 - On note $\widehat{A}$ le module de l'atténuation complexe exprimé en décibels,

$$\widehat{A}(\nu) = 20 \log_{10} |A(\nu)|.$$

Étudier la fonction $\nu \mapsto \widehat{A}(\nu)$ et tracer sa représentation graphique.

4 - On s'intéresse au déphasage ϕ qui est défini comme l'argument du complexe A. Montrer que

$$\phi(\nu) = -\arctan(k\nu) \qquad \text{où } k = 2\pi RC \frac{R_L + R}{R_L + 2R}.$$

Étudier la fonction $\nu \mapsto \phi(\nu)$ et tracer sa représentation graphique.

14.10 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

Pour montrer que f^{-1} est impaire, il vaut vérifier que pour tout $y \in J$ on a $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$. Soit y un élément de J et x l'élément de I défini par $x = f^{-1}(y)$; on a $y = f(x)$ et puisque f est impaire : $y = -f(-x)$. On en déduit que $f(-x) = -y$ autrement dit que $-x = f^{-1}(y)$. Puisque $x = f^{-1}(y)$, on a bien $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

Une application paire n'est pas injective puisque $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in I$. Il n'existe donc aucune bijection qui soit paire.

Solution de l'exercice 2

1 - L'application $f : x \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto 1/\sin(x)$ est continue (resp. dérivable) sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ car la fonction sinus est continue (resp. dérivable) sur cet intervalle et ne s'annule pas. Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$f'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}.$$

Puisque la fonction cosinus est strictement positive sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, l'application f est strictement décroissante sur cet intervalle. Elle est à valeurs dans $f(]0, \frac{\pi}{2}[) =]1, +\infty[$. D'après la proposition 14.1, on peut affirmer que f est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ dans $]1, +\infty[$.

2 - Pour calculer la dérivée de la bijection réciproque f^{-1} nous utilisons la proposition 14.2. Remarquons tout d'abord que la dérivée de f ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. L'application f^{-1} est donc dérivable sur $]1, +\infty[$ de dérivée en $y \in]1, +\infty[$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = -\frac{\sin^2\left(f^{-1}(y)\right)}{\cos\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Puisque f et f^{-1} sont bijection réciproque l'une de l'autre, on a $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in]1, +\infty[$, autrement dit

$$y = \frac{1}{\sin\left(f^{-1}(y)\right)} \qquad \text{ce qui implique que} \qquad \sin\left(f^{-1}(y)\right) = \frac{1}{y}.$$

Comme $f^{-1}(y) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et que cosinus est positif sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a également d'après la relation $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$,

$$\cos\left(f^{-1}(y)\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(f^{-1}(y)\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}.$$

Finalement, on en déduit que pour tout $y \in]1, +\infty[$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = -\frac{1}{y^2\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}} = -\frac{|y|}{y^2\sqrt{y^2 - 1}} = -\frac{1}{y\sqrt{y^2 - 1}}.$$

Puisque f est une application continue strictement décroissante, d'après la proposition 14.1, l'application f^{-1} est elle aussi continue et strictement décroissante. De plus les représentations graphiques de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

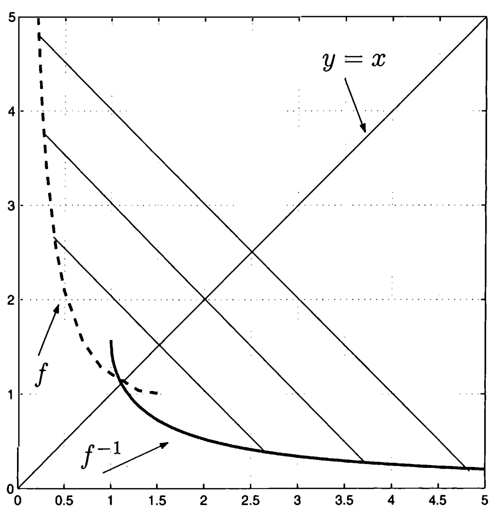


Fig. 19 Représentation graphique de $f : x \mapsto 1/\sin(x)$ et de sa bijection réciproque.

Solution de l'exercice 3

1 - Les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_1) : \ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln(2) = 0$ vérifient nécessairement $x^2 - 1 > 0$ et $2x - 1 > 0$. Elles appartiennent donc à $]1, +\infty[$. Pour $x \in]1, +\infty[$, d'après la proposition 14.3 on a

$$\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln(2) = \ln\left(\frac{2(x^2 - 1)}{2x - 1}\right).$$

Les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_1)$ sont donc les réels de l'intervalle $]1,+\infty[$ vérifiant

$$\frac{2(x^2-1)}{2x-1}=1,$$

autrement dit $2x^2-2x-1=0$. Les solutions de cette équation sont

$$x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Seul x_1 appartient à l'intervalle $]1,+\infty[$, donc l'équation $(\mathcal{E}_1)$ admet pour unique solution $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

2 - Les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_2)$: $\ln(x+2)+\ln(x-4)-2\ln(x+1)=0$ vérifient nécessairement $x+2>0$, $x-4>0$ et $x+1>0$. Elles appartiennent donc à $]4,+\infty[$. Pour $x\in]4,+\infty[$, d'après la proposition 14.3, on a

$$\ln(x+2)+\ln(x-4)-2\ln(x+1)=\ln\left(\frac{(x+2)(x-4)}{(x+1)^2}\right).$$

Les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_2)$ sont donc les réels de l'intervalle $]4,+\infty[$ vérifiant

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+1)^2}=1,$$

autrement dit $(x+2)(x-4)=(x+1)^2$. Cette équation admet pour unique solution $x_0=-9/4$. Puisque x_0 n'appartient pas à l'intervalle $]4,+\infty[$, on en conclut que l'équation $(\mathcal{E}_2)$ n'admet pas de solution.

Solution de l'exercice 4

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $a\in]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ on a

$$\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Si $a\in]0,1[$ alors $\ln(a)<0$ et si $a\in]1,+\infty[$ alors $\ln(a)>0$. On déduit de la proposition 14.4 que

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\ln(a)}=\begin{cases}-\infty & \text{si } a\in]0,1[\\ +\infty & \text{si } a\in]1,+\infty[\end{cases};$$

$$\lim_{x\to0^+}\log_a(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\ln(a)}=\begin{cases}+\infty & \text{si } a\in]0,1[\\ -\infty & \text{si } a\in]1,+\infty[\end{cases};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(a)}\frac{\ln(x)}{x}=0 \quad \forall a\in]0,1[\cup]1,+\infty[;$$

$$\lim_{x\to0^+}x\log_a(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln(a)}x\ln(x)=0 \quad \forall a\in]0,1[\cup]1,+\infty[;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\ln(a)}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln(a)} \quad \forall a\in]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

Solution de l'exercice 5

Pour résoudre l'équation $e^{2x} - e^x - 6 = 0$, introduisons l'inconnue auxiliaire $X = e^x$ et cherchons dans un premier temps les solutions de l'équation $X^2 - X - 6 = 0$. Cette équation polynomiale du second degré admet pour solutions $X = -2$ et $X = 3$. Seule la seconde est positive, donc l'équation proposée admet pour unique solution $x = \ln(3)$.

Solution de l'exercice 6

1 - Considérons l'application f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + x) - x$. L'application f est dérivable sur $[0, +\infty[$ car la fonction logarithme est dérivable sur $[1, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$

On en déduit que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. On a donc $f(x) \leqslant f(0)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. Comme $f(0) = 0$, pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a $f(x) \leqslant 0$. On en conclut que

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad \ln(1 + x) \leqslant x.$$

Considérons à présent l'application $g : x \in [0, +\infty[\mapsto \ln(1 + x) - x(1 - x)$. L'application g est dérivable sur $[0, +\infty[$ car la fonction logarithme est dérivable sur $[1, +\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x) + x = \frac{x(1 + 2x)}{1+x}.$$

Sur $[0, +\infty[$ l'application g' est positive et par conséquent g est croissante. On a donc $g(x) \geqslant g(0)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. Comme $g(0) = 0$ on a $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. On en conclut que

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad \ln(1 + x) \leqslant x(1 - x).$$

2 - Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, le réel x/n étant positif, la relation établie à la question précédente indique que

$$\frac{x}{n}\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leqslant \frac{x}{n}.$$

En multipliant chaque membre par n, on obtient

$$x - \frac{x^2}{n} \leqslant n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leqslant x.$$

On a $n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)$ et la fonction exponentielle étant croissante, on obtient

$$e^x\, e^{-x^2/n} \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^x.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} x^2/n = 0$ et que $e^0 = 1$, le théorème d'encadrement indique que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Solution de l'exercice 7

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a : $a^x = \exp(x\ln(a))$.

Si $a \in]0,1[$ alors $\ln(a) < 0$ et si $a \in]1,+\infty[$ alors $\ln(a) > 0$. On déduit de la proposition 14.7 que

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \exp(x\ln(a)) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \in]0,1[\\ 0 & \text{si } a \in]1,+\infty[\end{cases} ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \exp(x\ln(a)) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in]0,1[\\ +\infty & \text{si } a \in]1,+\infty[\end{cases} ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln(a)\frac{\exp(x\ln(a))}{x\ln(a)} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in]0,1[\\ +\infty & \text{si } a \in]1,+\infty[\end{cases} ;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} x\exp(x\ln(a)) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\ln(a)}\,(x\ln(a))\,\exp(x\ln(a)) \\ &= \begin{cases} -\infty & \text{si } a \in]0,1[\\ 0 & \text{si } a \in]1,+\infty[\end{cases} ; \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to0} \ln(a)\,\frac{\exp(x\ln(a))-1}{x\ln(a)} = \ln(a) \quad \forall a \in]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

Solution de l'exercice 8

1 - Puisque u ne prend que des valeurs strictement positives sur I, l'application f est définie sur I et on a

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \exp\left(v(x)\ln(u(x))\right).$$

L'application u étant dérivable sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction logarithme étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I en tant que composée de 2 applications dérivables[(29)]. Puisque v est dérivable sur I, le produit $v \times (\ln\circ u)$ est une application dérivable sur I. Enfin puisque la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, on en conclut que f est dérivable sur I en tant que composée d'applications dérivables. En utilisant les règles de dérivation d'une application composée[(29)], on obtient pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(v(x)\ln(u(x))\right)'\ \exp\left(v(x)\ln(u(x))\right) \\ &= \left(v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)\ \exp\left(v(x)\ln(u(x))\right) \\ &= \left(v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)\ f(x). \end{aligned}$$

---

(29) Voir la proposition 16.4 p. 754.

2 - La fonction $g : x \mapsto x^{1/x}$ correspond au cas particulier de l'étude précédente où $u : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x$ et $v : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1/x$. On en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée l'application g' définie par

$$g'(x) = \left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right) \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = \left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right) x^{1/x}.$$

On a $g'(x) = 0$ si et seulement si $\ln(x) = 1$ et g' est positive sur $]0, \mathrm{e}[$ et négative sur $]e, +\infty[$. On en déduit que l'application g est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Intéressons-nous aux limites de g en 0 et en $+\infty$. On a

$$g(x) = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Comme $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)/x = -\infty$ et que la fonction exponentielle a pour limite 0 en $-\infty$, on a[30] $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$. Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)/x = 0$ et la fonction exponentielle prend la valeur 1 en 0 ; on a donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

Intéressons-nous maintenant aux limites de g' en $+\infty$ (nous ne disposons pas pour le moment de critère permettant d'établir simplement la limite de g' en 0). On a

$$g'(x) = \left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right) \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0$$

et que

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = \lim_{t\to 0^+} \mathrm{e}^t = 1,$$

on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$. La représentation graphique de l'application g possède la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote en $+\infty$. L'équation $g(x) = 1$ n'admet qu'une solution qui est $x = 1$. On en déduit que la représentation graphique de l'application g coupe son asymptote en $+\infty$ au point d'abscisse 1.

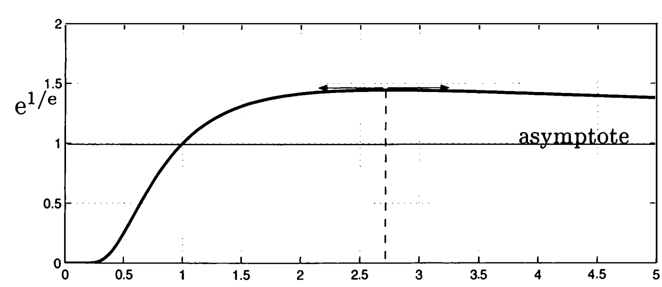


Fig. 20 Représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^{1/x}$.

[30] Voir la proposition 13.14 p. 612.

Solution de l'exercice 9

L'erreur est

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\frac{1}{2}} \underbrace{=}_{\dots ici} ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

La relation $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$ est valable

1. pour tout réel x si α et β sont des entiers ;
2. uniquement pour les réels x strictement positifs si α et β ne sont pas des entiers (voir la proposition 14.9).

On a ici $\alpha = 2 \in \mathbb{N}$ et $\beta = 1/2 \notin \mathbb{N}$ donc on ne peut pas utiliser cette relation avec un réel négatif.

Solution de l'exercice 10

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. La relation proposée est triviale si $n = 0$. Supposons $n \in \mathbb{N}^*$; on a

$$\left(\frac{1 + \mathrm{th}(x)}{1 - \mathrm{th}(x)}\right)^n = \left(\frac{\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}\right)^n = \left(\frac{2\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^{-x}}\right)^n = \mathrm{e}^{2nx}$$

et

$$\frac{1 + \mathrm{th}(nx)}{1 - \mathrm{th}(nx)} = \frac{\mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)}{\mathrm{ch}(nx) - \mathrm{sh}(nx)} = \left(\frac{2\mathrm{e}^{nx}}{2\mathrm{e}^{-nx}}\right)^n = \mathrm{e}^{2nx}.$$

Par transitivité de la relation d'égalité, le résultat est établi.

Solution de l'exercice 11

La fonction cosinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction sinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ et s'annule uniquement en 0. La fonction co-tangente hyperbolique est donc définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est impaire car la fonction sinus hyperbolique est impaire et la fonction cosinus hyperbolique est paire. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car la fonction cosinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule uniquement en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\coth'(x) = \left(\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\right)' = \frac{\mathrm{sh}^2(x) - \mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{sh}^2(x)} = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}.$$

On a aussi

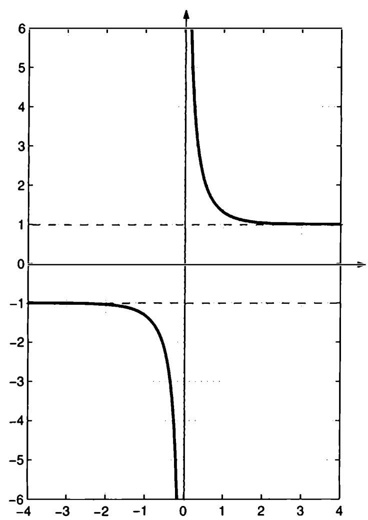
$$\coth'(x) = 1 - \frac{1}{\mathrm{th}^2(x)} = 1 - \coth^2(x).$$

On en déduit que la fonction co-tangente hyperbolique est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Le tableau de variation de la fonction co-tangente hyperbolique est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote en $+\infty$. On a la représentation graphique suivante :



Solution de l'exercice 12

L'application $f : x \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto 1/\sin(x) \in]1, +\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque f^{-1} vérifie

$$\forall x \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\quad \forall y \in]1, +\infty[\qquad \Big(y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)\Big).$$

Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$y = \frac{1}{\sin(x)} \iff \sin(x) = \frac{1}{y}.$$

Comme $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et qu'en restriction à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la fonction sinus admet la fonction arc-sinus comme bijection réciproque, on a

$$\sin(x) = \frac{1}{y} \iff x = \arcsin(1/y).$$

On en conclut que $f^{-1} : y \in]1, +\infty[\mapsto \arcsin(1/y)$.

Solution de l'exercice 13

Ensemble de définition

Désignons par ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = 2x/(1+x^2)$. On a $f = \arcsin \circ \psi$. La fonction arc-sinus étant définie sur $[-1,1]$, la quantité $f(x)$ est définie pour tout réel x tel que $\psi(x) \in [-1,1]$. Or,

$$\frac{2x}{1+x^2} \in [-1,1] \Longleftrightarrow \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 1 \iff 2|x| \leqslant 1+x^2 \iff x^2 - 2|x| + 1 \geqslant 0$$
$$\iff \big(|x|-1\big)^2 \geqslant 0.$$

La relation $\big(|x|-1\big)^2 \geqslant 0$ étant vraie pour tout réel x, on en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$. L'application f est continue sur $\mathbb{R}$ car[31] c'est la composée de l'application ψ qui est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$ et de l'application arc-sinus qui est continue sur $[-1,1]$.

Propriétés de la fonction

La fonction f est impaire car[32] c'est la composée de la fonction ψ qui est impaire avec la fonction arc-sinus qui est elle aussi impaire.

Étude de la dérivée

La fonction arc-sinus étant dérivable sur $]-1,1[$, la fonction f est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\psi(x) \in]-1,1[$. D'après le calcul précédent,

$$\frac{2x}{1+x^2} \in]-1,1[\iff \big(|x|-1\big)^2 > 0.$$

L'ensemble de dérivabilité de f est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Calculons la dérivée de f en $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ en utilisant la formule de dérivation composée[33]

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2(1-x^2)}{1+x^2}\,\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2}{1+x^2}\,\frac{1-x^2}{|1-x^2|}.$$

Compte tenu de la parité de la fonction f, on se contente de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$. Sur cet intervalle, la dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \quad \text{si } 0 \leqslant x < 1 \quad \text{et} \quad f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} \quad \text{si } x > 1.$$

Cette fonction est positive sur $[0,1[$ et admet pour limite le réel 2 en 0 et pour limite le réel 1 en 1. Elle est négative sur $]1,+\infty[$ et admet pour limite le réel -1 en 1 et pour limite 0 en $+\infty$. La fonction f est donc croissante sur $[0,1[$ et décroissante sur $]1,+\infty[$. Puisque la fonction ψ prend la valeur 1 en 1 et que la fonction arc-sinus est continue en 1, on a[34]

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

---

[31] Voir la proposition 13.19 p. 623.

[32] Voir la proposition 13.5 p. 593.

[33] On prendra garde aux simplifications hâtives.

[34] Voir le corollaire 13.1 p. 623.

Par ailleurs la fonction ψ tend vers 0 en $+\infty$ et prend la valeur 0 en 0. Comme la fonction arc-sinus est continue en 0 avec $\arcsin(0) = 0$, on a

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

L'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	2	$+$	$+1 \,\Vert\, -1$	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0

Recherche de points particuliers

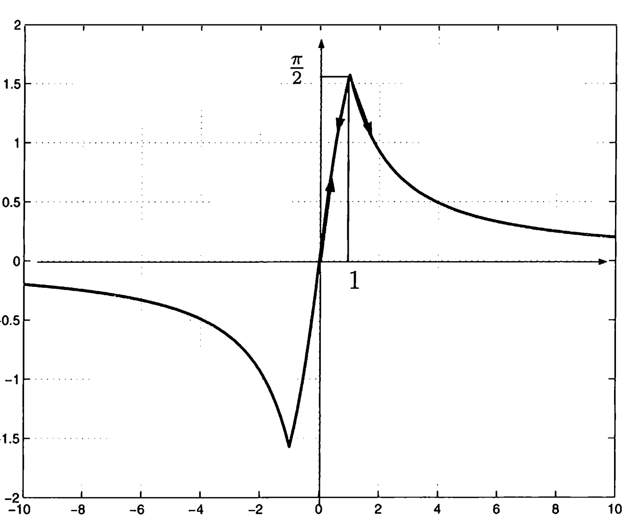
L'étude qui précède indique que la représentation graphique de f possède un point anguleux en $(1, f(1))$. D'après le tableau de variation, les demi-tangentes auront pour pentes 1 à gauche du point anguleux et -1 à droite.

La courbe ne possède pas de point d'inflexion puisque la dérivée seconde de f qui est l'application

$$f'' : x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[\longmapsto \begin{cases} -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

ne s'annule jamais. La fonction f est concave sur $[0, 1[$ et convexe sur $]1, +\infty[$.

Représentation graphique



Solution de l'exercice 14

La fonction co-tangente hyperbolique a été étudiée au cours de l'exercice 11. Elle est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]1,+\infty[$. Elle est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ et elle est à valeurs dans $]-\infty,-1[$. La fonction co-tangente hyperbolique est donc une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. La bijection réciproque de la fonction co-tangente hyperbolique est continue, strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et elle est continue, strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. Le tableau de variation de la fonction argument co-tangente hyperbolique déduit de ces considérations est le suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	0

La fonction co-tangente hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée l'application $x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1-\coth^2(x)$, et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. La proposition 14.2 indique que la fonction argument co-tangente hyperbolique est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et que pour tout $y \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ on a

$$\operatorname{argcoth}'(y) = \frac{1}{\coth'(\operatorname{argcoth}(y))} = \frac{1}{1-\coth^2(\operatorname{argcoth}(y))} = \frac{1}{1-y^2}.$$

La représentation graphique de la fonction argument co-tangente hyperbolique s'obtient en prenant le symétrique, par rapport à la droite $y=x$, de la représentation graphique de la fonction co-tangente hyperbolique.

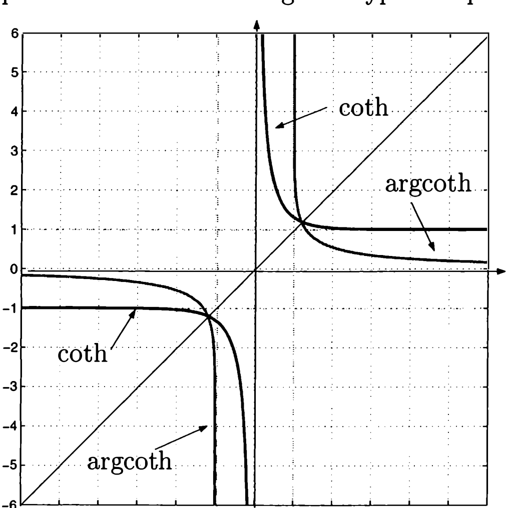


Fig. 21 Représentation graphique des fonctions co-tangente hyperbolique et argument co-tangente hyperbolique.

Solution de l'exercice 15

1 - La fonction $f : x \mapsto x + \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est continue et dérivable sur cet intervalle, de dérivée l'application $f' : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1 + 1/x$. L'application f' étant strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que l'application f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition se déduisent aisément de celles de la fonction logarithme.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2 - L'application f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque f^{-1} est une application continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (voir la proposition 14.1). Par ailleurs, puisque l'application f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après la proposition 14.2 sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1 + \frac{1}{f^{-1}(y)}}.$$

On déduit de ces considérations le tableau de variation suivant pour f^{-1} :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3 - Puisque f définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$,

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists!\, x \in \mathbb{R}_+^* \quad y = f(x)$$

en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists!\, x_n \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x_n) = n. \tag{2}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $(\mathcal{E}_n)$ admet une unique solution x_n. Le réel x_1 est solution de l'équation $(\mathcal{E}_1)$

$$x + \ln(x) = 1.$$

Cette équation admet pour solution évidente 1. Puisque la solution de cette équation est unique on en déduit que $x_1 = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la relation (2) $x_n = f^{-1}(n)$. Puisque la fonction f^{-1} est strictement croissante, on en déduit que la suite $(x_n)_n$ est strictement croissante. De plus

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} f^{-1}(n) = +\infty.$$

4 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(n) \geqslant 0$ et

$$f(n) = n + \ln(n) \geqslant n = f(x_n).$$

Puisque l'application f est strictement croissante[35] cela implique que $n \geqslant x_n$.

5 - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a[36] $\ln(x) < x$. Puisque f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ on en déduit que ϕ est-elle même définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, puisque les applications logarithme et f sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant les règles de dérivation d'une application composée[37], on obtient

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \big(x - \ln(x)\big)' \, f'(x - \ln(x)) - 1 = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x - \ln(x)}\right) - 1 \\ &= \frac{\ln(x) - 1}{x(x - \ln(x))}.\end{aligned}$$

Intéressons-nous à la fonction ϕ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Dans l'expression de ϕ' donnée par la relation précédente, le dénominateur est strictement positif puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a[38] $\ln(x) < x$. Le signe de $\phi'(x)$ dépend donc de celui de $\ln(x) - 1$. Ce réel est strictement négatif si $x \in [1, e[$ et strictement positif si $x \in]e, +\infty[$. De plus

$$\phi'(1) = \frac{\ln(1) - 1}{1 - \ln(1)} = -1, \qquad \phi(1) = f(1) - 1 = 0$$

et $$\phi(e) = f(e-1) - e = (e-1) + \ln(e-1) - e = \ln\left(\frac{e-1}{e}\right).$$

Par ailleurs, pour tout $x \in [1, +\infty[$

$$\phi'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{x(x - \ln(x))} = \left(\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\,\frac{1}{1 - \frac{\ln(x)}{x}}$$

et comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)/x = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x) = 0$. Enfin,

$$\phi(x) = f(x - \ln(x)) - x = \ln\left(\frac{x - \ln(x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

et comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)/x = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$. On est en mesure de dresser le tableau de variation de ϕ :

x	1		e		$+\infty$
$\phi'(x)$	-1	$-$	0	$+$	0
$\phi(x)$	0	$\searrow$	$\ln\left(\frac{e-1}{e}\right)$	$\nearrow$	0

[35] Voir p. 591 la traduction sous forme d'assertion quantifié de l'assertion « f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ » : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \big(x < y \implies f(x) < f(y)\big)$. On utilise ici la contraposée : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \big(f(x) \geqslant f(y) \implies x \geqslant y\big)$.

[36] On le vérifie par exemple en étudiant la fonction $x \mapsto x - \ln(x)$.

[37] Voir la proposition 16.4 p. 754.

[38] Voir p. 665.

6 - Le tableau de variation de ϕ indique que $\phi(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\phi(n) = f(n - \ln(n)) - n \leqslant 0$ et par conséquent

$$f(n - \ln(n)) \leqslant n = f(x_n).$$

Puisque la fonction f est croissante, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $x_n \geqslant n - \ln n$.

7 - D'après les questions 4 et 6, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n - \ln(n) \leqslant x_n \leqslant n.$$

On en déduit que

$$-\frac{\ln(n)}{n} \leqslant \underbrace{\frac{x_n}{n} - 1}_{= a_n} \leqslant 0.$$

D'après le théorème d'encadrement[39], on conclut que la suite $(a_n)_n$ converge vers 0.

8 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $na_n + \ln(n) = x_n - n + \ln(n)$. Comme $f(x_n) = n = x_n + \ln(x_n)$, on a $x_n - n = -\ln(x_n)$ et

$$na_n + \ln(n) = \ln(n) - \ln(x_n) = -\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) = -\ln(a_n + 1).$$

Comme la suite $(a_n)_n$ tend vers 0 et que la fonction logarithme vaut 0 en 1, la proposition 13.11 p. 604 indique que $\lim_{n\to+\infty} n\, a_n + \ln(n) = 0$.

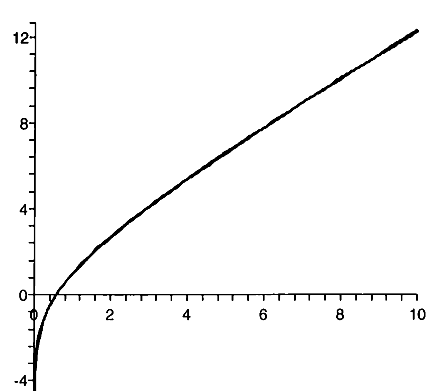
9 - D 'après la question précédente, la suite $(\varepsilon_n)_n$ de terme général

$$\varepsilon_n = x_n - n + \ln(n) = (na_n + n) - n + \ln(n) = na_n + \ln(n)$$

admet pour limite 0. Par conséquent, $x_n = n - \ln(n) + \varepsilon_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Interprétation : lorsque n est grand la solution de l'équation $(\mathcal{E}_n)$: $x + \ln(x) = n$ vaut approximativement $n - \ln(n)$. On peut illustrer cette étude en ayant recours à MAPLE.

```
> f:= x-> x+ln(x):
> plot(f,0..10);
```



[39] Voir le théorème 5.1 p. 185.

```
> for i from 1 to 4 do
    n:=10^i;
    solex := fsolve(f(x)=n,x);
    solap := evalf(n-ln(n));
    eps := solex-solap;
  end do;
```

```
n := 10                       n := 1000
solex := 7.929420095          solex := 993.0991695
solap := 7.697414907          solap := 993.0922447
eps := 0.232005188            eps := 0.0069248

n := 100                      n := 10000
solex := 95.44148665          solex := 9990.790581
solap := 95.39482981          solap := 9990.789660
eps := 0.04665684             eps := 0.000921
```

Solution de l'exercice 16

1 - La fonction arc-tangente est continue sur $\mathbb{R}$. Désignons par g la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}/x$. Cette fonction est définie sur $D = [-1, 0[\cup]0, 1]$. Elle est continue sur D en tant que quotient de deux applications continues sur cet ensemble, la fonction au dénominateur ne s'annulant pas sur D. On en déduit que la fonction f est continue sur D en tant que composée de l'application g continue sur cet ensemble, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de la fonction arc-tangente qui est continue sur $\mathbb{R}$. On a par ailleurs

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$$

et

$$\lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que f n'est pas prolongeable par continuité en 0 puisqu'elle admet deux réels distincts pour limites à gauche et à droite en 0.

2 - La fonction f est impaire car les fonctions g et arc-tangente sont impaires. On se contentera donc d'étudier l'application f sur l'intervalle $]0, 1]$. L'application f est dérivable sur $]0, 1[$ car c'est la composée de l'application g qui est dérivable sur $]0, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction arc-tangente qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in]0, 1[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x)\ \frac{1}{1+g(x)^2} \\ &= \frac{(\sqrt{1-x^2})'x - \sqrt{1-x^2}}{x^2}\ \frac{x^2}{x^2+(1-x^2)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Bien que la quantité $-1/\sqrt{1-x^2}$ soit définie pour $x = 0$ l'application f n'est pas dérivable en 0 puisqu'elle n'est pas définie en 0 et qu'elle ne peut être prolongée par continuité en 0. Insistons sur le fait qu'un calcul formel de la dérivée d'une fonction ne permet pas de déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction.

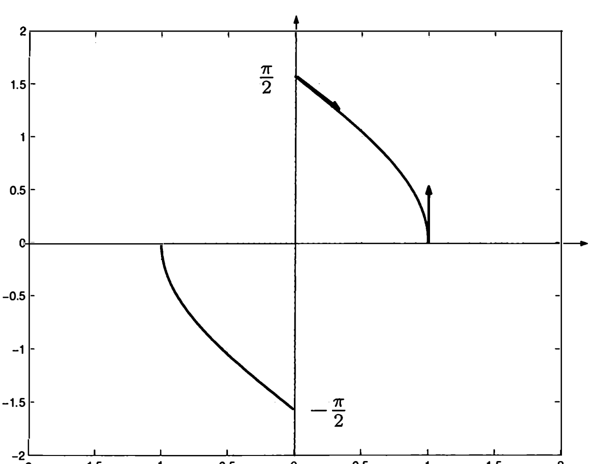
La dérivée de f est strictement négative sur l'intervalle $]0, 1[$; on en déduit que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$. Par ailleurs, on a clairement

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty.$$

Le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		1
$f'(x)$	-1	$-$	$-\infty$
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

3 - Il résulte du tableau de variation que la représentation graphique de f présente une demi-tangente de pente -1 en 0 et une demi-tangente verticale en 1.



4 - Pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\arccos(x))'.$$

On en déduit que les applications f et arc-cosinus sont « égales à une constante près » sur $]0, 1[$ (et sur $]0, 1]$ puisque ces deux fonctions sont continues sur $]0, 1]$), *i.e.*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]0, 1] \quad f(x) = C + \arccos(x).$$

Or $f(1) = 0$ et $\arccos(1) = 0$ donc la constante vaut 0 et pour tout $x \in]0, 1]$ on a $f(x) = \arccos(x)$. Compte tenu de la relation $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ valable pour tout $x \in [-1, 1]$, on a aussi $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ pour tout $x \in]0, 1]$. Enfin, puisque f est impaire sur l'intervalle $[-1, 0[$ on a

$$f(x) = -\arccos(-x).$$

Sur $[-1, 0[$, on a aussi $f(x) = -\pi + \arccos(x) = -\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Solution de l'exercice 17

1 - On a

$$|A(\nu)| = \frac{R_L}{\sqrt{(2R + R_L)^2 + (2\pi\nu RC)^2(R_L + R)^2}}.$$

2 - Notons $\alpha = 2R + R_L$ et $\beta = 2\pi RC(R_L + R)$ et considérons la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{R_L}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}.$$

Cette application est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$f'(x) = \frac{-2\beta R_L x}{(\alpha^2 + \beta^2 x^2)^{3/2}}.$$

L'application f est donc décroissante sur $[0, +\infty[$. Elle atteint par conséquent sa valeur maximale en 0. Cette valeur maximale est

$$M = \frac{R_L}{\alpha} = \frac{R_L}{2R + R_L}.$$

3 - La bande passante du filtre est l'ensemble des fréquences ν telles que

$$\frac{M}{\sqrt{2}} \leqslant |A(\nu)| \leqslant M.$$

Nous avons montré à la question précédente que la fonction $\nu \mapsto |A(\nu)|$ est décroissante et que $|A(0)| = M$. On en déduit que la bande passante du filtre est l'intervalle $[0, \nu^*]$ où

$$|A(\nu^*)| = \frac{M}{\sqrt{2}}.$$

Résolvons cette équation. On a

$$\begin{aligned}
|A(\nu^*)| = \frac{R_L}{\sqrt{2}(2R + R_L)} \quad &\iff \quad \alpha^2 + \beta^2 \nu^{*2} = 2(2R + R_L)^2 \\
&\iff \quad \nu^{*2} = \frac{2(2R + R_L)^2 - \alpha^2}{\beta^2} \\
&\iff \quad \nu^* = \frac{1}{2\pi RC} \frac{R_L + 2R}{R_L + R}.
\end{aligned}$$

4 - Considérons la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = 20 \log_{10}(f(x)) = \frac{20}{\ln(10)} \Big(\ln(R_L) - \tfrac{1}{2} \ln \left(\alpha^2 + \beta^2 x^2 \right) \Big).$$

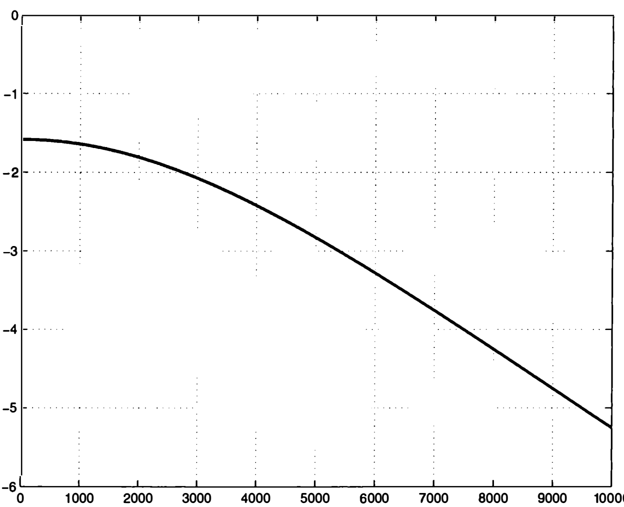
Cette application est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$g'(x) = -\frac{20}{\ln(10)} \, \frac{\beta^2 x}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}.$$

On a par conséquent le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$	$\frac{20}{\ln(10)} \ln \left(\frac{R_L}{\alpha} \right)$	$\searrow$	$-\infty$

La représentation graphique du module de l'atténuation complexe exprimée en décibels en fonction de la fréquence est la suivante.



5 - On a

$$A(\nu) = \frac{R_L}{\alpha + \mathrm{i}\beta\nu} = \frac{R_L(\alpha - \mathrm{i}\beta\nu)}{\alpha^2 + \beta\nu^2} = \frac{R_L \alpha}{\alpha^2 + \beta\nu^2} - \mathrm{i}\frac{R_L \beta \nu}{\alpha^2 + \beta\nu^2}.$$

On en déduit que

$$\tan(\Phi(\nu)) = -\frac{\beta\nu}{\alpha} = -\frac{2\pi RC(R_L + R)}{2R + R_L}\, \nu$$

et

$$\Phi(\nu) = \arctan\left(-\frac{2\pi RC(R_L + R)}{2R + R_L}\, \nu \right) = -\arctan\left(\frac{2\pi RC(R_L + R)}{2R + R_L}\, \nu \right)$$

car la fonction arc-tangente est impaire.

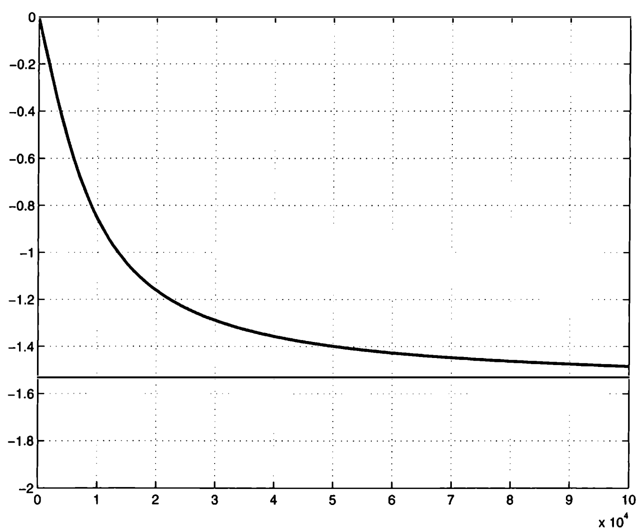
Étudions la fonction Φ sur $[0, +\infty[$. Elle est strictement décroissante sur cet intervalle car la fonction arc-tangente est croissante sur $[0, +\infty[$. Elle est continue, dérivable sur $[0, +\infty[$, de dérivée l'application

$$\Phi'(x) : x \in [0, +\infty[\longmapsto -\frac{k}{1 + k^2x^2}.$$

On a le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$\Phi'(x)$	$-k$	$-$	0
$\Phi(x)$	0	$\searrow$	$-\pi/2$

La représentation graphique du déphasage en fonction de la fréquence est la suivante.



CHAPITRE 15

Comparaison locale de fonctions

15.1 Prépondérance et Domination

Pour $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, on dit qu'une fonction f est définie *au voisinage de* x_0 s'il existe un voisinage[1] V de x_0 tel que f soit définie sur $V \setminus \{x_0\}$. Si f est définie *sur* un voisinage de x_0 alors elle est définie *au* voisinage de x_0. Une fonction définie *au* voisinage de x_0 est définie *sur* un voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0.

Exemple Les fonctions $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto \sin(x)/x$ sont définies au voisinage de 0 mais pas sur un voisinage de 0.

DÉFINITION 15.1 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0. On dit que f est négligeable[2] devant ϕ au voisinage de x_0 (ou encore que ϕ est prépondérante devant f au voisinage de x_0) s'il existe un voisinage V de x_0 et une application ϵ définie sur $V \setminus \{x_0\}$ telle que,*

$$\left\{\begin{array}{ll} & \forall x \in V \setminus \{x_0\} \qquad f(x) = \epsilon(x) \times \phi(x), \\ \textit{et} & \\ & \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0. \end{array}\right.$$

On note $f = o_{x_0}(\phi)$ ou $f(x) = o_{x_0}(\phi(x))$ ou $f = o(\phi)$ au voisinage de x_0.

On remarquera que d'après la définition 15.1, la seule fonction négligeable devant la fonction nulle est la fonction nulle elle même.

[1] Voir les définitions 3.10 p. 116 et 3.14 p. 120.

[2] En physique on utilise également une notion de « quantité négligeable devant une autre » mais avec un sens légèrement différent : une quantité A est négligeable devant une quantité B si le rapport A/B est assez petit, cet assez petit dépendant de la situation physique considérée (par exemple de la précision des mesures réalisées).

Exemples

1. Les fonctions $x \mapsto \ln(|x|)$ et $x \mapsto -1/|x|$ sont définies sur $\mathbb{R}^*$; elle sont donc définies au voisinage de 0. On a $\lim_{x\to 0} \ln(|x|) = \lim_{x\to 0} -1/|x| = -\infty$ et $\ln(|x|) = o_0(-1/|x|)$ car

$$\ln(|x|) = -\frac{\epsilon(x)}{|x|} \quad \text{avec} \quad \epsilon(x) = -|x|\ln(|x|) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

2. On a $\sin(x) = o_0(\cos(x))$ car pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a $\sin(x) = \epsilon(x)\cos(x)$ où $\epsilon : x \mapsto \tan(x)$ vérifie $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.
3. On a $\sin(x) = o_0(\sqrt{|x|})$ car pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $\sin(x) = \epsilon(x)\sqrt{|x|}$ où la fonction ϵ qui est définie par $\epsilon(x) = \sin(x)/\sqrt{|x|}$ vérifie $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$ car

$$|\epsilon(x)| = \sqrt{|x|}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

4. On a $\ln(x) = o_{+\infty}(x)$ car pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\ln(x) = \epsilon(x)\,x$ où $\epsilon : x \mapsto \ln(x)/x$ a pour limite 0 en $+\infty$.

La notation $f = o_{x_0}(g)$ peut laisser croire que $o_{x_0}(g)$ est une fonction. Ce n'est pas le cas. On devrait écrire $f \in o_{x_0}(g)$ où $o_{x_0}(g)$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions négligeables devant g au voisinage de x_0. L'emploi du symbole = est lié au fait que l'on a un certain nombre de relations algébriques entre fonctions négligeables (voir la proposition 15.2) qu'il est commode d'exprimer en utilisant le symbole d'égalité. On a par ailleurs $\sin(x) = o_0(\cos(x))$ et $\sin(x) = o_0(\sqrt{|x|})$, mais écrire $o_0(\cos(x)) = o_0(\sqrt{|x|})$ n'a pas de sens.

La proposition suivante résulte de la définition 15.1.

PROPOSITION 15.1 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0. Si ϕ ne s'annule pas au voisinage de x_0 alors*

$$f = o_{x_0}(\phi) \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = 0.$$

Remarque En utilisant la notion de limite à gauche (resp. à droite), il est naturel de définir la notion de prépondérance dans un voisinage à gauche (resp. à droite) du réel x_0 de la manière suivante.

- On dit que f est négligeable devant ϕ à gauche de x_0 et on note $f = o_{x_0^-}(\phi)$ si $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{\phi(x)} = 0$.
- On dit que f est négligeable devant ϕ à droite de x_0 et on note $f = o_{x_0^+}(\phi)$ si $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{\phi(x)} = 0$.

Par exemple $\sin(x) = o_{0^+}(\sqrt{x})$ et $\ln(x) = o_{0^+}(-\frac{1}{x})$.

PROPOSITION 15.2 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, g, ϕ, ψ quatre applications définies au voisinage de x_0. On a,*

1. $$\left\{\begin{array}{l} f = o_{x_0}(\phi) \\ g = o_{x_0}(\phi) \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad f + g = o_{x_0}(\phi)\,;$$

2. $$f = o_{x_0}(\phi) \quad \Longrightarrow \quad \lambda \cdot f = o_{x_0}(\phi)\,;$$

3. $$\left\{\begin{array}{l} f = o_{x_0}(\phi) \\ g = o_{x_0}(\psi) \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad f \times g = o_{x_0}(\phi \times \psi)\,;$$

4. $$\left\{\begin{array}{l} f = o_{x_0}(\phi) \\ \phi = o_{x_0}(\psi) \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad f = o_{x_0}(\psi)\ .$$

Démonstration Ces propriétés se démontrent en revenant à la définition de la relation de négligeabilité. Démontrons la première propriété ; les autres propriétés sont à vérifier en exercice sur le même modèle. D'après la définition 15.1, si $f = o_{x_0}(\phi)$ et $g = o_{x_0}(\phi)$ alors il existe un voisinage V de x_0 et une application ϵ définie sur $D = V \setminus \{x_0\}$ telle que,

$$\forall x \in D \qquad f(x) = \epsilon(x)\ \phi(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$$

et il existe une application σ définie sur D telle que,

$$\forall x \in D \qquad g(x) = \sigma(x)\ \phi(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to x_0} \sigma(x) = 0.$$

On a donc pour tout $x \in D$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \epsilon(x)\ \phi(x) + \sigma(x)\ \phi(x) = (\epsilon(x) + \sigma(x))\ \phi(x)$$

avec, d'après les hypothèses,

$$\lim_{x \to x_0} (\epsilon(x) + \sigma(x)) = 0.$$

Soit $\mu : x \in D \mapsto \epsilon(x) + \sigma(x)$. On a donc pour tout $x \in D$,

$$(f+g)(x) = \mu(x)\ \phi(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \mu(x) = 0.$$

D'après la définition 15.1, on en déduit que $f + g = o(\phi)$. □

Remarques

1. En prenant $\lambda = -1$ dans la deuxième propriété, on obtient en particulier que

$$f = o_{x_0}(\phi) \qquad \Longrightarrow \qquad -f = o_{x_0}(\phi).$$

On a donc

$$\begin{cases} f = o_{x_0}(\phi) \\ g = o_{x_0}(\phi) \end{cases} \implies g - f = o_{x_0}(\phi)$$

ce que l'on écrit aussi $g = f + o_{x_0}(\phi)$.

2. Si f et ϕ ne s'annulent pas au voisinage de x_0 et si $f = o_{x_0}(\phi)$ alors $1/\phi = o_{x_0}(1/f)$. On sera attentif au renversement de la relation de négligeabilité.

On se gardera de faire des simplifications hasardeuses lors de la manipulation de relations de négligeabilité. Ainsi, si $f = o_{x_0}(\phi)$ et $g = o_{x_0}(\phi)$ alors on a $f + g = o_{x_0}(\phi)$ (voir la démonstration précédente) mais on n'écrira pas $f + g = 2o_{x_0}(\phi)$. De même, on a $f - g = o_{x_0}(\phi)$ et on n'écrira surtout pas $f - g = 0$. Rappelons que la notation $f = o_{x_0}(\phi)$ est là pour signifier qu'au voisinage de x_0 la fonction f est égale à $\epsilon \times \phi$ où ϵ est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers x_0. La notation $g = o_{x_0}(\phi)$ signifie quant à elle qu'au voisinage de x_0 la fonction g est égale à $\epsilon \times \phi$ où ϵ est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers x_0 sans que ce soit nécessairement la même fonction que pour f (et en général ces 2 fonctions sont différentes ; on pourra les noter ϵ_f et ϵ_g pour les distinguer). Il est alors clair qu'au voisinage de x_0

$$(f - g)(x) = (\epsilon_f(x) - \epsilon_g(x))\,\phi(x) \neq 0.$$

Par exemple, on a

$$\sin(x) = x + o_0(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(3x) = 3x + o_0(x)$$

donc d'après la proposition 15.2, $\sin(x) + \sin(3x) = 4x + o_0(x)$. On n'écrira pas $\sin(x) + \sin(3x) = 4x + 2o_0(x)$. La proposition 15.2 indique aussi que $\sin(x) - \sin(3x) = -2x + o_0(x)$ mais on n'écrira surtout pas que $\sin(x) - \sin(3x) = -2x$. On se préservera de telles erreurs d'une part en se rappelant de la signification très particulière du symbole d'égalité utilisé avec la relation de négligeabilité et d'autre part en confrontant le résultat obtenue à la définition de la relation de négligeabilité.

Exemples usuels

✗ Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Il résulte de la proposition 14.8, page 672, que[3]

$$x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta) \quad \text{si } \alpha < \beta \qquad \text{et} \qquad x^\alpha = o_{0^+}(x^\beta) \quad \text{si } \alpha > \beta.$$

En effet $\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha-\beta} = 0$ si et seulement si $\alpha - \beta < 0$ et $\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha-\beta} = 0$ si et seulement si $\alpha - \beta > 0$.

Par exemple, $x = o_{+\infty}(x^2)$, $x^2 = o_0(x)$ et $x = o_{0^+}(\sqrt{x})$.

---

(3) On se place dans un voisinage à droite de 0 car on envisage ici des fonctions puissances pouvant être d'exposant réel. Bien entendu dans le cas de fonctions puissances d'exposant entier, la relation est vraie au voisinage de 0.

✗ Nous avons établi à la proposition 14.10, page 674, que pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\beta \, |\ln(x)|^\alpha = 0.$$

On peut encore exprimer ces relations sous la forme

$$(\ln(x))^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta) \qquad \text{et} \qquad |\ln(x)|^\alpha = o_{0^+}(\tfrac{1}{x^\beta}).$$

Par exemple, $\ln(x) = o_{+\infty}(\sqrt{x})$ et $|\ln(x)| = o_{0^+}(\frac{1}{\sqrt{x}})$, $|\ln(x)|^\pi = o_{0^+}(\frac{1}{\sqrt{x}})$.

✗ Nous avons également établi à la proposition 14.10 que pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} |x|^\beta \, e^{\alpha x} = 0.$$

On peut encore exprimer ces relations sous la forme

$$x^\beta = o_{+\infty}(e^{\alpha x}) \qquad \text{et} \qquad |x|^\beta = o_{-\infty}(e^{-\alpha x}).$$

Par exemple, $x^2 = o_{+\infty}(e^x)$ et $x^2 = o_{-\infty}(e^{-x})$.

DÉFINITION 15.2 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0. On dit que f est dominée par ϕ au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une application C définie sur $V \setminus \{x_0\}$ telle que,*

$$\begin{cases} & \forall x \in V \setminus \{x_0\} \qquad f(x) = C(x)\ \phi(x), \\ \text{et} & \\ & C \text{ est bornée sur } V \setminus \{x_0\}. \end{cases}$$

On note $f = O_{x_0}(\phi)$ ou $f(x) = O_{x_0}(\phi(x))$ ou encore $f = O(\phi)$ au voisinage de x_0.

Remarque On peut montrer que f est dominée par ϕ au voisinage de x_0 si et seulement s'il existe un réel positif M tel que pour tout $x \in V \setminus \{x_0\}$ on ait $|f(x)| \leqslant M|\phi(x)|$.

Exemples

1. On a $x\sin(x) = O_0(x)$ car $x\sin(x) = C(x)\,x$ où $C : x \mapsto \sin(x)$ est bornée au voisinage de 0 (pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(x)| \leqslant 1$).
2. On a $\sin(x) = O_0(\cos(x))$ car $\sin(x) = C(x)\cos(x)$ avec $C : x \mapsto \tan(x)$ et la fonction tangente est bornée[4] au voisinage de 0.

Dire que f est dominée par ϕ au voisinage de x_0 ne signifie pas que l'on a $f \leqslant \phi$ au voisinage de x_0 ; par exemple[5] $2x = O_0(x)$. Il ne faut donc pas se laisser abuser par la signification dans le langage usuel du terme « dominé ».

[4] En effet la fonction tangente est continue en 0 et nous avons établi à la proposition 13.15 p. 620, qu'une application continue en un point était bornée sur un voisinage de ce point.

[5] La relation $x = O_0(2x)$ est également vraie.

On a la proposition suivante qui est une simple réécriture de la définition 15.2.

PROPOSITION 15.3 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0. On suppose que ϕ ne s'annule pas au voisinage de x_0. Une condition nécessaire et suffisante pour que $f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$ est que l'application $x \mapsto f(x)/\phi(x)$ soit bornée au voisinage de x_0.*

Remarques

1. On rappelle (voir la proposition 13.10, page 603) que si une application définie au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ admet une limite finie en x_0 alors cette application est bornée sur un voisinage de x_0. Ainsi,

$$\left(\exists \ell \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \ell\right) \quad \Longrightarrow \quad f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi).$$

2. On a les mêmes propriétés algébriques pour la relation de domination $\mathcal{O}$ que celles énoncées à la proposition 15.2 pour la relation de négligeabilité o. De plus,

$$f = o_{x_0}(\phi) \qquad \Longrightarrow \qquad f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi).$$

15.2 Équivalence

15.2.1 Définition et propriétés

DÉFINITION 15.3 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0. On dit que f est équivalente à ϕ au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une application Λ définie sur $V \setminus \{x_0\}$ telle que,*

$$\begin{cases} \forall x \in V \setminus \{x_0\} \qquad f(x) = \Lambda(x)\ \phi(x), \\ \textit{et} \\ \lim\limits_{x \to x_0} \Lambda(x) = 1. \end{cases}$$

On note $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} \phi(x)$ ou encore $f \sim \phi$ au voisinage de x_0.

Il résulte de la définition 15.3 que la seule fonction équivalente à la fonction nulle est la fonction nulle. Tout calcul aboutissant au résultat $f \underset{x_0}{\sim} 0$ est donc erroné si f n'est pas égale à la fonction nulle.

Exemples

1. On a $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ car pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $\sin(x) = \Lambda(x)\, x$ où $\Lambda : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ vérifie $\lim_{x \to 0} \Lambda(x) = 1$, voir page 606.
2. On a $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ car pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $\mathrm{e}^x = \Lambda(x)\, x$ où $\Lambda : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ vérifie $\lim_{x \to 0} \Lambda(x) = 1$, voir la proposition 14.7, page 669.

3. On a $x^3 + 2x^2 - 1 \underset{+\infty}{\sim} x^3$ car pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $x^3 + 2x^2 - 1 = \Lambda(x)\ x^3$ où $\Lambda : x \mapsto 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}$ vérifie $\lim_{x\to+\infty} \Lambda(x) = 1$.

> **Exercice 1** Montrer que $\mathrm{E}(x) \underset{-\infty}{\sim} x$ et que $\mathrm{E}(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ où E désigne la fonction partie entière.

Remarque Il est correct d'après la définition d'écrire $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 - \frac{1}{2}x^2$ puisque $\cos(x) = \Lambda(x)(1 - \frac{1}{2}x^2)$ où $\Lambda : x \mapsto \frac{2\cos(x)}{2-x^2}$ vérifie $\lim_{x\to 0} \Lambda(x) = 1$. Toutefois cela n'a pas d'intérêt car on a aussi, $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 - \frac{1}{2003}x^{2003}$. En pratique, un équivalent ne doit comporter qu'un seul terme si l'un des deux est négligeable devant l'autre. En effet si $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ alors quelle que soit la fonction g vérifiant $g = o_{x_0}(\phi)$, on a $f \underset{x_0}{\sim} \phi + g$. Par contre, il est sensé d'écrire $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$ mais cette fois-ci on n'a pas $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2003}x^{2003}$.

On a la proposition suivante qui est une simple réécriture de la définition 15.3.

Proposition 15.4 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0. Si ϕ ne s'annule pas au voisinage de x_0 alors*

$$f \underset{x_0}{\sim} \phi \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = 1.$$

Remarque En utilisant la notion de limite à gauche (resp. à droite), on peut définir la notion d'équivalence à gauche (resp. à droite) de x_0.

- On dit que f est équivalente à ϕ à gauche de x_0 et on note $f \underset{x_0^-}{\sim} \phi$ si $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{\phi(x)} = 1$.
- On dit que f est équivalente à ϕ à droite de x_0 et on note $f \underset{x_0^+}{\sim} \phi$ si $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{\phi(x)} = 1$.

Par exemple $|\sin(x)| \underset{0^+}{\sim} x$ et $|\sin(x)| \underset{0^-}{\sim} -x$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 15.4.

Corollaire 15.1 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0. S'il existe un réel ℓ non nul tel que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0} \phi(x) = \ell$ alors $f \underset{x_0}{\sim} \phi$.*

En d'autres termes, deux applications ayant en x_0 la même limite, supposée non nulle, sont équivalentes.

Proposition 15.5 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0. On suppose que ϕ ne s'annule pas au voisinage de x_0. On a les propriétés suivantes :*

1. $f \underset{x_0}{\sim} \phi \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi) \\ \phi = \mathcal{O}_{x_0}(f) \end{cases}$

2. $f \underset{x_0}{\sim} \phi \quad \Longleftrightarrow \quad (f - \phi) = o_{x_0}(\phi)$

Démonstration $\trianglerighteq$ Si $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ alors il existe une application Λ définie au voisinage de x_0 sur un ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$, où V désigne un voisinage de x_0, telle que pour tout $x \in D$,

$$f(x) = \Lambda(x)\ \phi(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow x_0} \Lambda(x) = 1.$$

L'application Λ est définie au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et a une limite en x_0 ; d'après la proposition 13.10, page 603, elle est bornée sur un voisinage de x_0. D'après la définition 15.2 cela signifie que $f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$. Puisque f et ϕ ne s'annulent pas sur D, l'application Λ ne s'annule pas non plus sur D et pour tout $x \in D$, on a

$$\phi(x) = \frac{1}{\Lambda(x)}\ f(x).$$

Puisque l'application Λ admet pour limite 1 en x_0, il existe un voisinage W de x_0 tel que[(6)] pour tout $x \in W$ on ait $\frac{1}{2} < \Lambda(x) < \frac{3}{2}$. On en déduit que pour tout $x \in W$ on a $\frac{2}{3} < 1/\Lambda(x) < 2$ et donc l'application $1/\Lambda$ est elle aussi bornée sur un voisinage de x_0. D'après la définition 15.2, on en conclut que $\phi = \mathcal{O}_{x_0}(f)$.

$\trianglerighteq$ Supposons que $f \underset{x_0}{\sim} \phi$. D'après la définition 15.3, il existe une application Λ définie au voisinage de x_0 sur un ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$, où V désigne un voisinage de x_0, telle que pour tout $x \in D$,

$$f(x) = \Lambda(x)\ \phi(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow x_0} \Lambda(x) = 1.$$

On en déduit que pour tout $x \in D$,

$$(f - \phi)(x) = \Lambda(x)\ \phi(x) - \phi(x) = (\Lambda(x) - 1)\, \phi(x).$$

(6) En effet, d'après la définition 13.2 p. 597, si Λ admet pour limite 1 en x_0 alors

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad \left(|x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |\Lambda(x) - 1| \leqslant \tfrac{1}{2}\right).$$

(On a considéré ici le réel $\varepsilon = \frac{1}{2}$.) On a donc $\frac{1}{2} < \Lambda(x) < \frac{3}{2}$ pour tout $x \in W$ où $W = D \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$.

Désignons par ϵ l'application définie sur D par $\epsilon(x) = \Lambda(x) - 1$. Pour tout $x \in D$ on a $(f - \phi)(x) = \epsilon(x)\phi(x)$ et $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$. D'après la définition 15.1 cela permet d'affirmer que $(f - \phi) = o_{x_0}(\phi)$.

Réciproquement supposons que $(f - \phi) = o_{x_0}(\phi)$. Il existe alors une application ϵ définie au voisinage de x_0 sur un ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$, où V désigne un voisinage de x_0, telle que pour tout $x \in D$,

$$(f - \phi)(x) = \epsilon(x)\ \phi(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0.$$

On en déduit que pour tout $x \in D$,

$$f(x) = (\epsilon(x) + 1)\,\phi(x).$$

Désignons par Λ l'application définie sur D par $\Lambda(x) = \epsilon(x) + 1$. Pour tout $x \in D$ on a $f(x) = \Lambda(x)\phi(x)$ et $\lim_{x \to x_0} \Lambda(x) = 1$. D'après la définition 15.3, cela permet d'affirmer que $f \underset{x_0}{\sim} \phi$. □

Remarque La réciproque de la première propriété de la proposition 15.5 est fausse : prenons pour f et ϕ les fonctions constantes égales respectivement à 1 et à 2. Au voisinage de 0 on a $f = \mathcal{O}(\phi)$ et $\phi = \mathcal{O}(f)$ mais on n'a pas $f \sim \phi$.

15.2.2 Opérations sur les équivalents

Les principales propriétés des équivalents sont données dans la proposition suivante. Nous n'en donnons pas la démonstration qui consiste à revenir à la définition de la relation d'équivalence et qui ne contient pas de difficulté. On pourra s'inspirer de la démonstration de la proposition 15.5.

Proposition 15.6 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g, ϕ, ψ quatre applications définies au voisinage de x_0 sur un ensemble D et ne s'annulant pas sur D. On a les propriétés suivantes,*

1. $f \underset{x_0}{\sim} f$ *(la relation est réflexive) ;*
2. $f \underset{x_0}{\sim} \phi \implies \phi \underset{x_0}{\sim} f$ *(la relation est symétrique) ;*
3. $\left\{\begin{array}{l} f \underset{x_0}{\sim} \phi \\ \phi \underset{x_0}{\sim} \psi \end{array}\right. \implies f \underset{x_0}{\sim} \psi$ *(la relation est transitive) ;*
4. $\left\{\begin{array}{l} f \underset{x_0}{\sim} \phi \\ g \underset{x_0}{\sim} \psi \end{array}\right. \implies f \times g \underset{x_0}{\sim} \phi \times \psi$ *;*
5. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f \underset{x_0}{\sim} \phi \implies f^n \underset{x_0}{\sim} \phi^n$.
6. $f \underset{x_0}{\sim} \phi \implies 1/f \underset{x_0}{\sim} 1/\phi$.

Remarque D'après la proposition 15.6, la relation $\underset{x_0}{\sim}$ est une relation d'équivalence[7] sur l'ensemble des fonctions définies au voisinage de x_0 et ne s'annu-

(7) Voir la définition 2.28 p. 57.

lant pas au voisinage de 0 : elle est réflexive, symétrique et transitive.

En général $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ et $g \underset{x_0}{\sim} \psi$ n'implique pas que $f+g \underset{x_0}{\sim} \phi+\psi$. Ainsi $x+x^2 \underset{0}{\sim} x$ et $-x+x^3 \underset{0}{\sim} -x$ mais $(x+x^2)+(-x+x^3)=x^2+x^3 \underset{0}{\sim} x^2$. On se gardera donc bien d'additionner des équivalents sans prendre de précautions.

Sous certaines hypothèses sur les fonctions manipulées, il est toutefois possible de sommer les équivalents.

Règle 1 : si $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ et $g \underset{x_0}{\sim} \psi$ et si ϕ et ψ sont de même signe au voisinage de x_0 (strictement positives ou strictement négatives) alors $f+g \underset{x_0}{\sim} \phi+\psi$.

Démonstration Si $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ et si $g \underset{x_0}{\sim} \psi$ alors il existe deux applications Λ_f et Λ_g définies au voisinage de x_0 sur un ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$, où V désigne un voisinage de x_0, telles que pour tout $x \in D$

$$\begin{aligned} & f(x) = \Lambda_f(x)\,\phi(x) && \text{avec} && \lim_{x\to x_0}\Lambda_f(x)=1 \\ \text{et}\quad & g(x) = \Lambda_g(x)\,\psi(x) && \text{avec} && \lim_{x\to x_0}\Lambda_g(x)=1. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= \Lambda_f(x)\,\phi(x)+\Lambda_g(x)\,\psi(x)\\ &= \left(\Lambda_f(x)\,\frac{\phi(x)}{\phi(x)+\psi(x)}+\Lambda_g(x)\,\frac{\psi(x)}{\phi(x)+\psi(x)}\right)(\phi(x)+\psi(x)).\end{aligned}$$

Désignons par Γ l'application

$$x\in D \longmapsto \Lambda_f(x)\,\frac{\phi(x)}{\phi(x)+\psi(x)}+\Lambda_g(x)\,\frac{\psi(x)}{\phi(x)+\psi(x)}.$$

On a

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \Lambda_f(x)+(\Lambda_g(x)-\Lambda_f(x))\,\frac{\psi(x)}{\phi(x)+\psi(x)}\\ &= \Lambda_f(x)+(\Lambda_g(x)-\Lambda_f(x))\,A(x) \qquad \text{où} \qquad A(x)=\frac{1}{1+\frac{\phi(x)}{\psi(x)}}.\end{aligned}$$

Puisque ϕ et ψ sont supposées de même signe au voisinage de x_0, la quantité $A(x)$ reste bornée dans un voisinage de x_0 (elle est minorée par 0 et est majorée par 1). On en déduit que $\lim_{x\to x_0}(\Lambda_g(x)-\Lambda_f(x))\,A(x)=0$ et par conséquent que $\lim_{x\to x_0}\Gamma(x)=1$. Comme $f(x)+g(x)=\Gamma(x)\,(\phi(x)+\psi(x))$ et que Γ a pour limite 1 en x_0, on en conclut que $f+g \underset{x_0}{\sim} \phi+\psi$. □

Exemple Au voisinage de $+\infty$ les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ et $g : x \mapsto x$ sont strictement positives et on a $\sqrt{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} x$. On en déduit que

$$x + \sqrt{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} 2x.$$

Règle 2 : s'il existe deux réels c_1 et c_2 tels que $f \underset{x_0}{\sim} c_1\,\phi$ et $g \underset{x_0}{\sim} c_2\,\phi$ et

✗ si $c_1 + c_2 \neq 0$ alors $f + g \underset{x_0}{\sim} (c_1 + c_2)\,\phi$;

✗ si $c_1 + c_2 = 0$ alors $f + g = o_{x_0}(\phi)$.

Démonstration Si $f \underset{x_0}{\sim} c_1\,\phi$ et $g \underset{x_0}{\sim} c_2\,\phi$ alors on peut trouver un voisinage V de x_0 et deux applications Λ_1 et Λ_2 définies sur l'ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$ telles que pour tout $x \in D$,

$$f(x) = c_1\,\Lambda_1(x)\,\phi(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \Lambda_1(x) = 1;$$

$$\text{et} \qquad g(x) = c_2\,\Lambda_2(x)\,\phi(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \Lambda_2(x) = 1.$$

Pour tout $x \in D$, on a

$$f(x) + g(x) = \big(c_1\,\Lambda_1(x) + c_2\,\Lambda_2(x)\big)\,\phi(x). \tag{1}$$

⊵ Si $c_1 + c_2 \neq 0$ alors, d'après la relation (1), pour tout $x \in D$ on a

$$f(x) + g(x) = \Gamma(x)\,(c_1 + c_2)\,\phi(x) \quad \text{où} \quad \Gamma(x) = \frac{c_1\,\Lambda_1(x) + c_2\,\Lambda_2(x)}{c_1 + c_2}.$$

Comme Λ_1 et Λ_2 ont pour limite 1 en x_0, on a $\lim_{x \to x_0} \Gamma(x) = 1$ et la définition 15.3 permet de conclure que $f + g \underset{x_0}{\sim} (c_1 + c_2)\,\phi$.

⊵ Si $c_1 + c_2 = 0$ alors comme Λ_1 et Λ_2 ont pour limite 1 en x_0, on a $\lim_{x \to x_0}\big(c_1\,\Lambda_1(x) + c_2\,\Lambda_2(x)\big) = c_1 + c_2 = 0$. Compte tenu de la relation (1), la définition 15.1 permet de conclure que $f + g = o_{x_0}(\phi)$. □

Exemple On a $x^2 - 3x \underset{0}{\sim} -3x$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $x^2 - 3x + \sin(x) \underset{0}{\sim} 2x$ et $x^2 - 3x + 3\sin(x) = o_0(x)$.

Règle 3 : si $f = o_{x_0}(\phi)$ alors $f + \phi \underset{x_0}{\sim} \phi$.

Démonstration Si $f = o_{x_0}(\phi)$ alors il existe une application ϵ définie au voisinage de x_0 sur un ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$, où V désigne un voisinage de x_0, telle que pour tout $x \in D$,

$$f(x) = \epsilon(x)\,\phi(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 1.$$

On en déduit que pour tout $x \in D$,

$$f(x) + \phi(x) = (1 + \epsilon(x))\,\phi(x) = \Lambda(x)\,\phi(x)$$

où $\Lambda : x \in D \mapsto 1 + \epsilon(x)$. Comme l'application Λ admet pour limite 1 en x_0, d'après la définition 15.3 on a $f + \phi \underset{x_0}{\sim} \phi$. □

Exemples

1. Puisque $\sin(x) = o_{+\infty}(x)$ on a $\sin(x) + x \underset{+\infty}{\sim} x$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(2x) = \ln(x) + \ln(2)$. Comme $\ln(2) = o_{+\infty}(\ln(x))$ on en déduit que $\ln(2x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

Règle 4 : si $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ et $g = o_{x_0}(\phi)$ alors $f + g \underset{x_0}{\sim} \phi$.

Démonstration Si $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ et $g = o_{x_0}(\phi)$ alors on peut trouver un voisinage V de x_0 et deux applications Λ et ϵ définies sur l'ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$ telles que pour tout $x \in D$,

$$\begin{array}{lll} & f(x) = \Lambda(x)\,\phi(x) & \text{avec } \lim\limits_{x \to x_0} \Lambda(x) = 1; \\ \text{et} & g(x) = \epsilon(x)\,\phi(x) & \text{avec } \lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0. \end{array}$$

On a donc

$$f(x) + g(x) = \big(\Lambda(x) + \epsilon(x)\big)\,\phi(x) \qquad \forall x \in D.$$

Puisque $\lim_{x \to x_0} \big(\Lambda(x) + \epsilon(x)\big) = 1$, d'après la définition 15.3 on a $f + g \underset{x_0}{\sim} \phi$. □

Exemples

1. Puisque $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et que $x^2 = o_0(x)$ on a $\sin(x) + x^2 \underset{0}{\sim} x$.

2. Puisque $\sqrt{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} x$ et que $\ln(x) = o_{+\infty}(x)$ on a $\ln(x) + \sqrt{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} x$.

Exercice 2

1 - Montrer que $\mathrm{ch}(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$ et que $\mathrm{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$ puis que $\mathrm{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{ch}(x)$.

2 - Donner des équivalents en 0 aux fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique.

Remarque Dans tous les autres cas, on justifiera le calcul de l'équivalent en revenant à la définition de la relation d'équivalence. Nous verrons au chap. 17 que les développements limités fournissent une alternative pour le calcul d'équivalents faisant intervenir des sommes.

15.2.3 Composition de fonctions équivalentes

Il est possible de composer à droite des fonctions équivalentes.

PROPOSITION 15.7 *Soient f et ϕ deux applications définies au voisinage de $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, ne s'annulant pas au voisinage de y_0. Soit h une application définie au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\left(f \underset{y_0}{\sim} \phi \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = y_0\right) \Longrightarrow f(h(x)) \underset{x_0}{\sim} \phi(h(x)).$$

Démonstration Puisque ϕ ne s'annule pas au voisinage de y_0, on a d'après la proposition 15.4,

$$f \underset{y_0}{\sim} \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{y \to y_0} \frac{f(y)}{\phi(y)} = 1.$$

Puisque $\lim_{x \to x_0} h(x) = y_0$, d'après la proposition 13.14, page 612, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(h(x))}{\phi(h(x))} = 1.$$

D'après la proposition 15.4, cela implique que $f(h(x)) \underset{x_0}{\sim} \phi(h(x))$. □

Exemples

1. Soit $h : x \mapsto \sin(x)$; on a $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$. Puisque[8] $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, on a $e^{h(x)} - 1 \underset{0}{\sim} h(x)$ c'est-à-dire $e^{\sin(x)} - 1 \underset{0}{\sim} \sin(x)$. Comme par ailleurs $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ on a aussi $e^{\sin(x)} - 1 \underset{0}{\sim} x$.
2. Soit $h : x \mapsto x^2$; on a $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. De l'équivalent $\mathrm{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{ch}(x)$, on déduit que $\mathrm{sh}(h(x)) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{ch}(h(x))$, autrement dit que $\mathrm{sh}(x^2) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{ch}(x^2)$.

On prendra garde que la composition à gauche de fonctions équivalentes n'est que rarement possible. La proposition 15.8 indique les deux situations usuelles où il est licite de composer à gauche des fonctions équivalentes. Dans tous les autres cas on justifiera le résultat, par exemple en revenant à la définition de l'équivalence.

PROPOSITION 15.8 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0 et supposée continues. On suppose que ϕ est strictement positive au voisinage de x_0 (pas nécessairement en x_0).*

✗ *Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} \phi(x)$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $(f(x))^\alpha \underset{x_0}{\sim} (\phi(x))^\alpha$.*

✗ *On suppose de plus que ϕ admet pour limite en x_0 le réel $\ell \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$ ou bien que ϕ tend vers $+\infty$ en x_0. Sous ces hypothèses, si $f(x) \underset{x_0}{\sim} \phi(x)$ alors $\ln(f(x)) \underset{x_0}{\sim} \ln(\phi(x))$.*

[8] Voir p. 722.

Démonstration Supposons que $f \underset{x_0}{\sim} \phi$; d'après la définition 15.3, il existe une application Λ définie au voisinage de x_0 sur un ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$, où V désigne un voisinage de x_0, telle que pour tout $x \in D$ on ait $f(x) = \Lambda(x)\ \phi(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} \Lambda(x) = 1$. Comme f est ϕ sont continues et que ϕ ne s'annule pas au voisinage de x_0, Λ est continue au voisinage de x_0. Le fait que Λ ait pour limite 1 en x_0 implique que[9] Λ ne s'annule pas au voisinage de x_0 et est strictement positive. Puisque par ailleurs ϕ est strictement positive, f est également strictement positive au voisinage de x_0.

⊵ Commençons par établir la seconde assertion. Pour $x \in V \setminus \{x_0\}$ on a

$$\ln(f(x)) = \ln\big(\Lambda(x)\phi(x)\big) = \ln\big(\Lambda(x)\big) + \ln\big(\phi(x)\big) = \Gamma(x)\ \ln\big(\phi(x)\big).$$

où $\Gamma : x \in D \longmapsto 1 + \dfrac{\ln\big(\Lambda(x)\big)}{\ln\big(\phi(x)\big)}$.

Comme la fonction Λ admet pour limite 1 en x_0 on a $\lim_{x\to x_0} \ln\big(\Lambda(x)\big) = 0$. Dans le cas où ϕ admet pour limite en x_0 le réel $\ell \in [0,1[\cup]1,+\infty[$ on a

$$\lim_{x\to x_0} \ln\big(\phi(x)\big) = \ln(\ell) \neq 0$$

et par conséquent $\lim_{x\to x_0} \Gamma(x) = 1$. Dans le cas où ϕ tend vers $+\infty$ en x_0 la fonction $x \mapsto \ln(\phi(x))$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et par conséquent $\lim_{x\to x_0} \Gamma(x) = 1$. On en déduit dans tous les cas que $\ln(f) \underset{x_0}{\sim} \ln(\phi)$.

⊵ Intéressons-nous maintenant à la première assertion. Pour $x \in D$, on a $f(x) = \Lambda(x)\phi(x)$ et par conséquent pour tout réel α,

$$\alpha \ln\big(f(x)\big) = \alpha \ln\big(\Lambda(x)\big) + \alpha \ln\big(\phi(x)\big).$$

On en déduit que

$$\underbrace{\exp(\alpha \ln(f(x)))}_{=f(x)^\alpha} = \underbrace{\exp(\alpha \ln(\Lambda(x)))}_{=\,\theta(x)}\ \underbrace{\exp(\alpha \ln(\phi(x)))}_{=\,\phi(x)^\alpha}.$$

Comme la fonction Λ admet pour limite 1 en x_0, on a $\lim_{x\to x_0} \theta(x) = 1$. D'après la définition 15.3, on en conclut que $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} \phi^\alpha$. □

Exemples

1. Considérons la fonction $f : x \mapsto 1+x^2$. Cette fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On a $1 + x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ d'où $\sqrt{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} x$ (car $\sqrt{x^2} = |x| = x$ dans tout voisinage de $+\infty$ inclus dans $]0,+\infty[$).

2. Considérons la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$ qui est strictement positive au voisinage de $+\infty$. On a $x+\sqrt{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} 2x$ d'où $\ln\big(f(x)\big) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2x)$. Par ailleurs

---

[9] Voir la proposition 13.16, page 620.

$\ln(2x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$ et[10] $\ln(f(x)) = \text{argsh}(x)$. On a donc

$$\text{argsh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x).$$

De la même manière, en utilisant la relation[11] $\text{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, on montre que $\text{argch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

Remarque Si ϕ admet pour limite 1 en x_0 et si $f(x) \underset{x_0}{\sim} \phi(x)$ alors on ne peut pas conclure que $\ln(f(x)) \underset{x_0}{\sim} \ln(\phi(x))$ comme le montre l'exemple suivant[12] : $1+x \underset{0}{\sim} 1+2x$ mais $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\ln(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x$ donc $\ln(1+x)$ n'est pas équivalent à $\ln(1+2x)$ au voisinage de 0.

Exercice 3 Déterminer un équivalent en $+\infty$ aux fonctions

$$x \longmapsto \ln(x^2+1) - \ln(x) \quad \text{et} \quad x \longmapsto \ln(x^2+1) - 2\ln(x).$$

On ne peut en général pas composer les équivalents avec la fonction exponentielle. Autrement dit, $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ n'implique pas nécessairement que $e^f \underset{x_0}{\sim} e^\phi$ comme le montre l'exemple suivant : $x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais e^{x+1} n'est pas équivalent à e^x au voisinage de $+\infty$ puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1$.

Toutefois si $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-\phi(x)\right) = 0$ alors $e^f \underset{x_0}{\sim} e^\phi$ puisque dans ce cas

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^{f(x)}}{e^{\phi(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{f(x)-\phi(x)} = 1.$$

15.2.4 Équivalents aux fonctions usuelles

✗ Si f est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0)$ alors[13]

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Si $f'(x_0) \neq 0$ alors on obtient

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)f'(x_0)} = 1.$$

---

[10] Voir la proposition 14.22 p. 691.

[11] Voir la proposition 14.24 p. 693.

[12] On utilisera la définition 15.3 pour établir les équivalences indiquées.

[13] Voir la définition 16.1 p. 747.

D'après la définition 15.3, cela signifie que

$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} (x - x_0)f'(x_0). \tag{2}$$

Cette relation permet d'obtenir les équivalents aux fonctions usuelles suivants (α désigne un réel non nul).

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	$\ln(x+1) \underset{0}{\sim} x$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$	
$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$	$\mathrm{sh}(x) \underset{0}{\sim} x$	$\tan(x) \underset{0}{\sim} x$	$\mathrm{th}(x) \underset{0}{\sim} x$
$\arcsin(x) \underset{0}{\sim} x$	$\mathrm{argsh}(x) \underset{0}{\sim} x$	$\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$	$\mathrm{argth}(x) \underset{0}{\sim} x$

Remarque Nous avons vu que l'on ne devait pas composer à gauche avec la fonction logarithme des fonctions équivalentes lorsque leur limite est 1. La relation $\ln(x + 1) \underset{0}{\sim} x$ permet de traiter ce cas. Si f admet pour limite 1 en 0 alors pour x au voisinage de 0 on a $f(x) = (f(x) - 1) + 1$ et d'après la proposition 15.7,

$$\ln(f(x)) = \ln(1 + (f(x) - 1)) \underset{0}{\sim} f(x) - 1.$$

Par exemple, en considérant $f : x \mapsto 1 + \tan(x)$, on obtient

$$\ln(1 + \tan(x)) \underset{0}{\sim} \tan(x) \underset{0}{\sim} x.$$

Une autre façon de procéder consiste à remarquer que la relation (2) appliquée à la fonction $x \mapsto \ln(x)$ en $x_0 = 1$ permet d'établir que $\ln(x) \underset{1}{\sim} (x - 1)$.

✗ En utilisant les égalités trigonométriques

$$1 - \cos(x) = 2\left(\sin(\tfrac{1}{2}x)\right)^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(x) - 1 = 2\left(\mathrm{sh}(\tfrac{1}{2}x)\right)^2,$$

on obtient les équivalents suivants.

$$\boxed{1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \mathrm{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}}$$

✗ Toute fonction polynomiale est équivalente en $\pm\infty$ à son monôme de plus haut degré. Toute fonction fraction rationnelle[14] est équivalente en $\pm\infty$ au quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

✗ Toute fonction polynomiale est équivalente en 0 à son monôme de plus bas degré. Toute fonction fraction rationnelle est équivalente en 0 au quotient des monômes de plus bas degré du numérateur et du dénominateur.

[14] Définie comme le quotient de 2 fonctions polynomiales, voir le chap. 7.

✗ Les équivalents suivants ont été établis à l'exercice 2 page 728 et dans les exemples de la page 730.

$$\mathrm{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^x \qquad \mathrm{ch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^x \qquad \mathrm{argsh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x) \qquad \mathrm{argch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$$

15.2.5 Changement de variable

Les équivalents usuels étant souvent donnés au voisinage de 0, il est parfois utile d'effectuer un changement de variable pour s'y ramener lorsque l'on cherche un équivalent au voisinage d'un réel différent de 0. La proposition suivante, qui est un corollaire de la proposition 15.7, en fournit le moyen.

PROPOSITION 15.9 *Soient f et ϕ deux applications définies au voisinage de 0 et h une application définie au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si*

$$f(t) \underset{0}{\sim} \phi(t) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = 0$$

alors

$$f(h(x)) \underset{x_0}{\sim} \phi(h(x)).$$

Remarque En pratique, on considère souvent les changements de variables suivants.

1. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, le changement de variable $t = h(x)$ où h est l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x - x_0$ ou l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x_0 - x$; au réel x dans un voisinage de x_0 on associe le réel t qui est dans un voisinage de 0.
2. Pour $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$, le changement de variable $t = h(x)$ où h est l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto 1/x$ qui au réel x dans un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) associe le réel t qui est dans un voisinage à droite (resp. à gauche) de 0. On utilise aussi le changement de variable défini par $h : x \in \mathbb{R} \mapsto -1/x$.

Exemples

1. Déterminons un équivalent au voisinage de 2 à la fonction $g : x \mapsto \ln(x-1)$. On considère le changement de variable défini par $h : x \mapsto x - 2$. Pour x dans un voisinage de 2, $t = x-2$ est dans un voisinage de 0. Soit f la fonction définie au voisinage de 0 par $f(t) = g(t+2)$. On a

$$f(t) = \ln(t+1) \quad \text{et} \quad \ln(t+1) \underset{0}{\sim} t.$$

On a donc $f(t) \underset{0}{\sim} \phi(t)$ où $\phi : t \mapsto t$. On en déduit que pour x au voisinage de 2, on a

$$g(x) = f(x-2) = f(h(x)) \underset{2}{\sim} \phi(h(x)) = \phi(x-2) = x - 2.$$

2. Déterminons un équivalent au voisinage de $+\infty$ à la fonction

$$g : x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}$$

en considérant[15] le changement de variable $t = h(x)$ où $h : x \mapsto 1/x$. Pour x dans un voisinage de $+\infty$, t est dans un voisinage à droite de 0. Soit f la fonction définie dans un voisinage à droite de 0 par $f(t) = g(1/t)$. On a

$$f(t) = \sqrt{\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}+\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\sqrt{1+\sqrt{t}}+1\right).$$

Comme $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\sqrt{t}}+1 = 2$, on en déduit que $f(t) \underset{0^+}{\sim} 2/\sqrt{t}$ puis en utilisant le changement de variable inverse $t = 1/x$ que $g(x) \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{x}$.

Exercice 4 Déterminer un équivalent dans un voisinage à gauche de $\frac{\pi}{2}$ à la fonction tangente. En déduire un équivalent en $+\infty$ à la fonction

$$f : x \longmapsto \tan\left(\frac{2\pi x}{4x+3}\right).$$

15.2.6 Application au calcul de limites

Proposition 15.10 *Deux fonctions équivalentes au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ont, ou bien la même limite, ou bien pas de limite en x_0.*

Démonstration Si $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ alors il existe une application Λ définie au voisinage de x_0 sur un ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$, où V désigne un voisinage de x_0, telle que pour tout $x \in D$

$$f(x) = \Lambda(x)\ \phi(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0} \Lambda(x) = 1.$$

Supposons que ϕ admette une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en x_0. On déduit des propositions 13.12 et 13.13 page 608, que f a pour limite ℓ en x_0. Inversement, puisque la relation d'équivalence est une relation symétrique, si on suppose que f admet pour limite ℓ en x_0 alors ϕ admet aussi pour limite ℓ en x_0. Puisqu'on a établi l'équivalence entre l'existence d'une limite pour f en x_0 et l'existence d'une limite pour ϕ en x_0, on en déduit que si l'une des deux fonctions n'a pas de limite en x_0 alors l'autre non plus. □

[15] On peut également remarquer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a

$$g(x) = 2\sqrt{x} \times \underbrace{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+1/\sqrt{x}}\right)}_{=\Lambda(x)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \Lambda(x) = 1$$

ce qui d'après la définition 15.3 permet d'affirmer que $g(x) \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{x}$.

Exemples

1. Déterminons la limite en 0 de $f : x \mapsto \ln(1+2\tan(x))/\sin(x)$.
On a

$$\ln(1+2\tan(x)) \underset{0}{\sim} 2\tan(x) \underset{0}{\sim} 2x$$

et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$. On en déduit que $f(x) \underset{0}{\sim} 2$ puis que $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$.

2. Déterminons la limite en $+\infty$ de $g : x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
On a

$$\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\right).$$

Comme $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, d'après la proposition 15.9 on a $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. On en déduit que

$$x\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1, \tag{3}$$

autrement dit, que $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$. Comme la fonction exponentielle est continue en 1, on déduit de la proposition 13.1, page 623, que

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(x\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\right) = \mathrm{e}.$$

On remarquera que l'on aurait également pu déduire de la relation (3) que

$$\exp\left(x\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^1$$

car $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 = 0$, ce qui signifie que nous sommes dans une situation où il est possible de composer un équivalent avec la fonction exponentielle[16].

Exercice 5 Calculer les limites suivantes :

1 - $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/\sin(x)}$ 2 - $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\,\mathrm{argch}\,(x\,\mathrm{sh}(1/x))$

15.2.7 Suites équivalentes

Nous avons défini page 171 une suite réelle comme une application d'un sous-ensemble infini $\mathbb{N}_1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On peut dès lors adapter aisément au cas des suites réelles la notion d'équivalence que nous avons introduit pour les fonctions réelles.

---

[16] Rappelons, voir p. 731, qu'en général il n'est pas possible de composer un équivalent avec la fonction exponentielle (ou plus exactement, quand on compose un équivalent avec la fonction exponentielle, on n'est pas certain que le résultat soit correct). La méthode employée ici pour déterminer la limite, basée sur la continuité de la fonction exponentielle, permet de s'affranchir de la vérification que la composition avec l'exponentielle est licite.

DÉFINITION 15.4 *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. On dit que la suite $(u_n)_n$ est équivalente à la suite $(v_n)_n$ (sous-entendu : lorsque n tend vers $+\infty$) s'il existe un entier naturel p et une suite $(\Lambda_n)_n$ convergeant vers 1 tels que pour tout entier n supérieur à p*

$$u_n = \Lambda_n \times v_n.$$

On écrit $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ou $(u_n)_n \sim (v_n)_n$.

Exemples

1. On a $(2n+1)^2 \underset{+\infty}{\sim} 4n^2$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(2n+1)^2 = 4n^2\Lambda_n \quad \text{où } \Lambda_n = \left(1+\tfrac{1}{2n}\right)^2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \Lambda_n = 1.$$

2. On a $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n+1) = \ln(n)\,\Lambda_n \quad \text{où } \Lambda_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$$

et $\lim_{n\to+\infty} \Lambda_n = 1$.

Il résulte de la définition 15.4 que si la suite $(v_n)_n$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang,

$$(u_n)_n \sim (v_n)_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Par ailleurs, toutes les propriétés de la relation d'équivalence pour les fonctions réelles au voisinage de $+\infty$, voir par exemple la proposition 15.6, sont également vraies pour la relation d'équivalence des suites.

PROPOSITION 15.11 *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites équivalentes. Ou bien les deux suites ont une même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ou bien les deux suites n'ont pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Démonstration Puisque la suite $(u_n)_n$ est équivalente à la suite $(v_n)_n$, il existe un entier p et une suite $(\Lambda_n)_n$ convergeant vers 1 tels que pour tout entier n supérieur à p

$$u_n = \Lambda_n \times v_n.$$

Si la suite $(v_n)_n$ admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors d'après les propositions 5.9, page 181 et 5.11, page 182, la suite $(u_n)_n$ admet aussi pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. En prenant la contraposée de l'assertion qui vient d'être démontrée, on établit que si la suite $(u_n)_n$ diverge alors la suite $(v_n)_n$ diverge aussi. La relation d'équivalence étant une relation symétrique, la proposition est démontrée. □

Exemples

1. La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = (n^2+1)/(n+1)$ tend vers $+\infty$ puisque $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

2. La suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = \ln(n+1)/(2n+1)^2$ converge vers 0 puisque $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)/(4n^2)$.

15.3 Exercices de synthèse

Exercice 6

1 - Montrer que $\dfrac{1}{x}\ln(x+1) - \dfrac{1}{x+1}\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

2 - En déduire que $\quad x^{\frac{1}{x+1}} - (x+1)^{\frac{1}{x}} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

Exercice 7

1 - Déterminer un équivalent au voisinage de 0 *à la fonction*

$$x \longmapsto \frac{1}{\tan(4x)} \ln\left(\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right).$$

2 - En déduire la limite en $\frac{\pi}{4}$ *de la fonction* $x \mapsto (\tan(x))^{\operatorname{cotan}(4x)}$.

Exercice 8 *Soit f la fonction définie par* $f(x) = \ln(1+\operatorname{th}(x))$.

1 - Étudier la fonction f et tracer aussi précisément que possible sa représentation graphique.

2 - Montrer que $f(x) \underset{0}{\sim} x$.

3 - Justifier que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Déduire de ce qui précède le tableau de variation de f^{-1} et tracer son graphe.

4 - Déterminer l'expression de $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in I$ et donner un équivalent à f^{-1} au voisinage de 0.

5 - Calculer la dérivée de f^{-1} de 2 manières différentes : en utilisant la relation liant les dérivées de f et de f^{-1} puis directement à partir de l'expression de f^{-1}.

15.4 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

Pour tout réel x non nul, on a

$$\mathrm{E}(x) = \Lambda(x)\, x \quad \text{où } \Lambda : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \mathrm{E}(x)/x.$$

Or pour tout réel x on a[17]

$$x - 1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x,$$

donc pour tout réel x non nul,

$$1 - \frac{1}{x} < \Lambda(x) \leqslant 1.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} \Lambda(x) = 1$ et par conséquent que $\mathrm{E}(x) \underset{-\infty}{\sim} x$. On a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} \Lambda(x) = 1$ et $\mathrm{E}(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.

Solution de l'exercice 2

1 - On a d'une part $\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ et d'autre part $\mathrm{e}^x = o_{-\infty}(\mathrm{e}^{-x})$ puisque

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0.$$

On est donc dans la situation de la règle 3, p. 727, et l'on peut écrire

$$\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \underset{-\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

L'argumentation pour vérifier la relation $\mathrm{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x$ est identique et utilise la relation $\mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$. Puisque la fonction cosinus hyperbolique est paire, on déduit de la proposition 15.9 que

$$\mathrm{ch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}.$$

La relation d'équivalence $\underset{+\infty}{\sim}$ étant transitive (voir la proposition 15.6) on a l'implication

$$\left(\mathrm{ch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{sh}(x).$$

2 - Comme $\mathrm{ch}(0) = 1$, on a $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{\sim} 1$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2x} = \mathrm{e}^{-x}\, \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x}.$$

---

[17] Voir la proposition 3.10 p. 111.

On a[18]

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}. = \lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{e}^{y}-1}{y} = 1$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 1$ ce qui permet d'affirmer que $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{\sim} x$.

Solution de l'exercice 3

1 - La fonction $x \mapsto \ln(x^2+1) - \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\ln(x^2+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Or $x + \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} x$ et cette quantité tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. D'après la proposition 15.8, on en déduit que

$$\ln(x^2+1) - \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x).$$

2 - La fonction $x \mapsto \ln(x^2+1) - 2\ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\ln(x^2+1) - 2\ln(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Cette fois-ci, on a $1+\frac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} 1$ et on ne peut donc pas utiliser la proposition 15.8. Toutefois $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc d'après la proposition 15.7 on a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Solution de l'exercice 4

1 - Afin de déterminer un équivalent dans un voisinage à gauche de $\frac{\pi}{2}$ à la fonction tangente ($u \mapsto \tan(u)$), considérons le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ et calculons un équivalent dans un voisinage à droite de 0 pour la fonction $\psi(t) = \tan(\frac{\pi}{2} - t)$. On a

$$\psi(t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - t)}{\cos(\frac{\pi}{2} - t)} = \frac{1}{\tan(t)}.$$

Or $\tan(t) \underset{0^+}{\sim} t$ d'où $\tan(u) \underset{\frac{\pi}{2}^-}{\sim} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - u}$.

2 - On a $\tan u \underset{\frac{\pi}{2}^-}{\sim} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - u}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\pi x}{4x+3} = \dfrac{\pi}{2}$. D'après la proposition 15.7, on en déduit que

$$\tan\left(\frac{2\pi x}{4x+3}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{4x+3}} = \frac{8x+3}{3\pi} \underset{+\infty}{\sim} \frac{8x}{3\pi}.$$

---

[18] Voir la proposition 14.7 p. 669 et p. 613 pour le changement de variable dans la limite.

Solution de l'exercice 5

1 - Les fonctions puissances d'exposant réel étant définies sur $]0,+\infty[$, la fonction

$$f : x \longmapsto \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid \pi \in \mathbb{Z}\}$ tel que $\frac{1+x}{1-x} \in]0,+\infty[$. L'ensemble de définition de f est donc $]-1,0[\cup]0,1[$. Remarquons que la limite de f en 0 constitue une forme indéterminée. Pour $x \in]-1,0[\cup]0,1[$, on a

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\sin(x)} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} - \frac{\ln(1-x)}{\sin(x)}\right).$$

Or

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, \qquad \ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x \quad \text{et} \quad \sin(x) \underset{0}{\sim} x$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{\sin(x)} = -1.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} - \frac{\ln(1-x)}{\sin(x)}\right) = 2$$

et par conséquent, puisque la fonction exponentielle est continue en 2, que

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{\sin(x)}} = \mathrm{e}^2.$$

Remarquons que l'usage des équivalents (dont la manipulation nécessite de nombreuses précautions calculatoires) est restreint à son minimum : une fois l'indétermination levée, on raisonne avec les limites dont l'emploi est plus familier et surtout moins sujet à erreur. On veillera à ne pas conclure trop rapidement en sommant brutalement les équivalents en 0 de $\ln(1+x)$ et de $-\ln(1-x)$.

On peut également procéder de manière un peu différente en remarquant que

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{2x}{1-x}$$

et que si x est au voisinage de 0 alors $u = 2x/(1-x)$ est également au voisinage de 0. Puisque $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ on en déduit que

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{0}{\sim} \frac{2x}{1-x} \underset{0}{\sim} 2x.$$

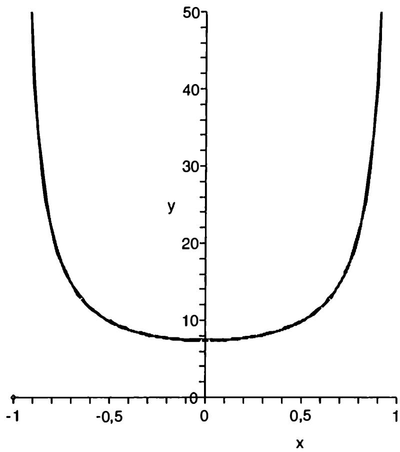
Par ailleurs, $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc

$$\frac{1}{\sin(x)} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{0}{\sim} 2$$

et on conclut là encore que $\lim_{x\to 0} f(x) = \mathrm{e}^2$ puisque la fonction exponentielle est continue en 2.

On peut visualiser la fonction f en ayant recours à MAPLE.

```
> f := x-> ( (1+x)/(1-x) )^(1/sin(x)):
> limit(f(x),x=0);
                                    exp(2)
> plot(f(x),x=-1..1,y=0..50,discont=true);
```



2 - Soit $f\,:\,x \mapsto x\,\text{argch}\,(x\,\text{sh}(1/x))$. Comme la fonction sh est impaire, la fonction f est impaire. La fonction argch est définie sur $[1,+\infty[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on a[(19)] $\text{sh}(y) \geqslant y$. On en déduit que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\text{sh}(\frac{1}{x}) \geqslant \frac{1}{x}$, ce qui permet d'affirmer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Remarquons que la limite de f en 0 est d'une forme indéterminée. Pour calculer cette limite, utilisons la relation (voir p. 733)

$$\text{argch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x).$$

Comme $\lim_{x\to 0^+} x\,\text{sh}(1/x) = +\infty$, la proposition 15.7 indique que

$$\text{argch}\,(x\,\text{sh}(1/x)) \underset{0+}{\sim} \ln(x\,\text{sh}(1/x)).$$

Puisque $\text{sh}(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,\text{e}^u$, on a $\text{sh}(1/x) \underset{0+}{\sim} \frac{1}{2}\,\text{e}^{1/x}$ et

$$x\ \text{sh}(1/x) \underset{0+}{\sim} \tfrac{1}{2}\,x\,\text{e}^{1/x}.$$

De plus, comme la limite en 0 de $x \mapsto x\,\text{sh}(1/x)$ est différente de 1, la proposition 15.8 indique que

$$\text{argch}\,(x\,\text{sh}(1/x)) \underset{0+}{\sim} \ln\left(\frac{xe^{1/x}}{2}\right).$$

On a

$$\ln\left(\frac{xe^{1/x}}{2}\right) = \ln(x) + \ln(e^{1/x}) - \ln(2) = \ln(x) + \frac{1}{x} - \ln(2)$$

(19) On établit cette inégalité, par exemple en étudiant l'application $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \text{sh}(x) - x$.

et $\ln(x) - \ln(2) = o_{0^+}(1/x)$ car $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x\ln(2) = 0$. On en déduit que

$$\operatorname{argch}(x\,\operatorname{sh}(1/x)) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x},$$

puis que $f(x) \underset{0^+}{\sim} 1$, ce qui permet de conclure que $\lim_{x\to 0^+} x \operatorname{argch}(x\,\operatorname{sh}(1/x)) = 1$. On peut visualiser la fonction f en ayant recours à MAPLE.

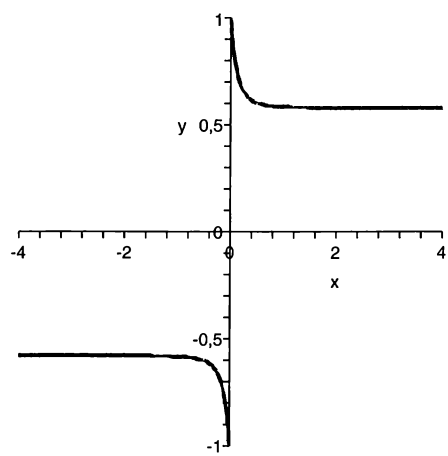
```
> f:=x->x*arccosh(x*sinh(1/x)):
> limit(f(x),x=0,right);
```

$$1$$

```
> limit(f(x),x=+infinity);
```

$$\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

```
> plot(f(x),x=-4..4,y=-1..1,discont=true);
```



Solution de l'exercice 6

1 - On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}\ln(x) &= \frac{1}{x+1}\ln(x+1)\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}\right)\\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\ln(x)\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}\right)\end{aligned}$$

car $x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$. Vérifions que

$$1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

en montrant que la limite du quotient de ces deux fonctions vaut 1. On a

$$x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}\right)=1+x-\frac{x\ln(x)}{\ln(x+1)}=1+\frac{x\ln(x+1)-x\ln(x)}{\ln(x+1)}$$
$$=1+\frac{x}{\ln(x+1)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Or

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x}\quad\text{et}\quad\frac{x}{\ln(x+1)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{x}{\ln(x)}$$

d'où

$$\frac{x}{\ln(x+1)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\ln(x)}.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x+1)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$$

puis que

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}\right)=1.$$

On peut donc conclure que

$$\frac{1}{x}\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\ln(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln(x)}{x^2}.$$

2 - On a

$$x^{\frac{1}{x+1}}-(x+1)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{\ln(x)}{x+1}\right)\left(1-\exp\left(\frac{\ln(x)}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x}\right)\right).$$

Comme la fonction $x\mapsto\exp\left(\frac{\ln(x)}{x+1}\right)$ admet pour limite 1 en $+\infty$, on a

$$\exp\left(\frac{\ln(x)}{x+1}\right)\underset{+\infty}{\sim}1.$$

Par ailleurs puisque $\mathrm{e}^u-1\underset{0}{\sim}u$ on a d'après la première partie de l'exercice,

$$\exp\left(\frac{\ln(x)}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x}\right)-1\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Finalement on peut conclure que

$$x^{\frac{1}{x+1}}-(x+1)^{\frac{1}{x}}\underset{+\infty}{\sim}-\frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Solution de l'exercice 7

1 - On a $\tan(4u) \underset{0}{\sim} 4u$. On a également pour $u \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$,

$$\ln\left(\frac{1+\tan(u)}{1-\tan(u)}\right) = \ln(1+\tan(u)) - \ln(1-\tan(u))$$

et

$$\ln(1+\tan(u)) \underset{0}{\sim} \tan(u) \underset{0}{\sim} u, \qquad \ln(1-\tan(u)) \underset{0}{\sim} -\tan(u) \underset{0}{\sim} -u$$

mais nous ne sommes pas dans une situation où il est licite de sommer les deux équivalents. Pour « lever cette indétermination » nous pouvons écrire

$$\ln\left(\frac{1+\tan(u)}{1-\tan(u)}\right) = \ln\left(\frac{(1+\tan(u))^2}{1-\tan^2(u)}\right) = 2\ln(1+\tan(u)) - \ln(1-\tan^2(u)).$$

On a $2\ln(1+\tan(u)) \underset{0}{\sim} 2u$, $-\ln(1-\tan^2(u)) \underset{0}{\sim} u^2$ et $u^2 = o_0(u)$ donc d'après la règle 3 page 727, on en déduit que

$$\ln\left(\frac{1+\tan(u)}{1-\tan(u)}\right) \underset{0}{\sim} 2u.$$

Une autre façon de procéder consiste à écrire

$$\ln\left(\frac{1+\tan(u)}{1-\tan(u)}\right) = \ln\left(1+\frac{2\tan(u)}{1-\tan(u)}\right) \underset{0}{\sim} \frac{2\tan(u)}{1-\tan(u)} \underset{0}{\sim} 2u.$$

Finalement,

$$\frac{1}{\tan(4u)} \ln\left(\frac{1+\tan(u)}{1-\tan(u)}\right) \underset{0}{\sim} \frac{2u}{4u} = \frac{1}{2}.$$

2 - La fonction $f : x \mapsto (\tan(x))^{\operatorname{cotan}(4x)}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$(\tan(x))^{\operatorname{cotan}(4x)} = \exp\left(\frac{\ln(\tan(x))}{\tan(4x)}\right).$$

On a

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{u\to 0} f(u+\tfrac{\pi}{4}) = \lim_{u\to 0} \exp\left(\frac{\ln(\tan(u+\frac{\pi}{4}))}{\tan(4u+\pi)}\right).$$

Or

$$\tan(u+\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1+\tan(u)}{1-\tan(u)} \qquad \text{et} \qquad \tan(4u+\pi) = \tan(4u),$$

donc

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{u\to 0} \exp\left(\frac{1}{\tan(4u)} \ln\left(\frac{1+\tan(u)}{1-\tan(u)}\right)\right).$$

D'après la question précédente, on a

$$\lim_{u\to 0} \frac{1}{\tan(4u)} \ln\left(\frac{1+\tan(u)}{1-\tan(u)}\right) = \frac{1}{2}.$$

La fonction exponentielle étant continue en $\frac{1}{2}$, on en déduit $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = e^{\frac{1}{2}}$.

Solution de l'exercice 8

1 - La fonction tangente hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est à valeurs dans $]-1,1[$. On a donc $0 < 1+\text{th}(x) < 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ car la fonction tangente hyperbolique est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction logarithme est continue sur $]0,2[$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée en $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1-\text{th}^2(x)}{1+\text{th}(x)} = 1-\text{th}(x).$$

La fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et par conséquent f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a le tableau de variation suivant :

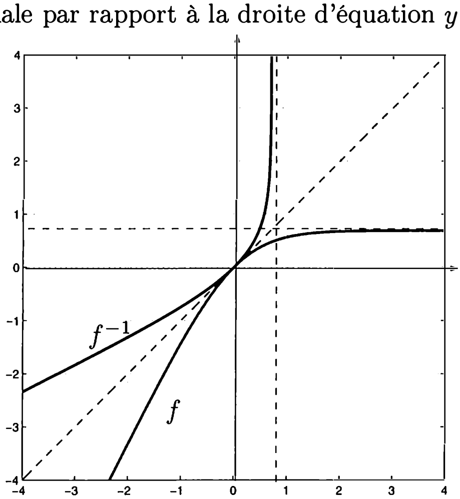
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	2	$+$	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(2)$

2 - On a $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ et $\lim\limits_{x\to 0} \text{th}(x) = 0$ donc $\ln(1+\text{th}(x)) \underset{0}{\sim} \text{th}(x)$. Puisque $\text{th}(x) \underset{0}{\sim} x$ on obtient $\ln(1+\text{th}(x)) \underset{0}{\sim} x$.

3 - L'application f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]-\infty, \ln 2[$. Sa bijection réciproque f^{-1} est une application continue et de même sens de monotonie. Elle admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\ln 2$
$f^{-1}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Les représentations graphiques de f^{-1} et de f sont symétriques l'une de l'autre, par la symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = x$.



4 - Les applications f et f^{-1} sont liées par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]-\infty, \ln 2[\qquad \Big(y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)\Big).$$

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} y = \ln(1+\mathrm{th}(x)) \quad &\Longleftrightarrow \quad 1+\mathrm{th}(x) = \mathrm{e}^y \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{th}(x) = \mathrm{e}^y - 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \mathrm{argth}(\mathrm{e}^y - 1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f^{-1} : y \in]-\infty, \ln 2[\longmapsto \mathrm{argth}(\mathrm{e}^y - 1).$$

On a $\mathrm{argth}(u) \underset{0}{\sim} (u)$ et $\lim\limits_{y \to 0} \mathrm{e}^y - 1 = 0$, donc $\mathrm{argth}(\mathrm{e}^y - 1) \underset{0}{\sim} \mathrm{e}^y - 1$. Puisque $\mathrm{e}^y - 1 \underset{0}{\sim} y$ on en conclut que $f^{-1}(y) \underset{0}{\sim} y$.

5 - En utilisant la proposition 14.2, on obtient pour tout $y \in]-\infty, \ln 2[$,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1 - \mathrm{th}(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2 - \mathrm{e}^y}.$$

Par ailleurs, par un calcul direct, on obtient

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(\mathrm{argth}(\mathrm{e}^y - 1)\right)' = \frac{\mathrm{e}^y}{1 - (\mathrm{e}^y - 1)^2} = \frac{1}{2 - \mathrm{e}^y}.$$

CHAPITRE 16

Dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle

16.1 Dérivée d'une fonction réelle

16.1.1 Définitions

DÉFINITION 16.1

✗ *Soient I un intervalle ouvert, x_0 un élément de I et f une application définie sur I. On dit que f est dérivable en x_0 si la quantité*

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite quand h tend vers 0. Cette limite, notée $f'(x_0)$, est appelée dérivée de f en x_0.

✗ *On dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert $J \subset I$ si pour tout $x \in J$, f est dérivable en x. On appelle dans ce cas dérivée de f et on note f' l'application de J dans $\mathbb{R}$ qui à $x \in J$ associe $f'(x)$ la dérivée de f en x.*

Exemples

1. La dérivée de l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ en x_0 vaut $2x_0$. En effet, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h$$

d'où $\lim_{h\to 0} \Delta_{x_0}(h) = 2x_0$.

2. La dérivée de la fonction sinus en x_0 vaut $\cos(x_0)$. En effet, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}\Delta_{x_0}(h) = \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} &= \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \cos(x_0)\,\frac{\sin(h)}{h} - \sin(x_0)\,\frac{1-\cos(h)}{h}.\end{aligned}$$

On a $\cos(h)-1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}h^2$ d'où $\frac{1}{h}(1-\cos(h)) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}h$ et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\sin(h)=1$. On en déduit que $\lim\limits_{h\to 0} \Delta_{x_0}(h)=\cos(x_0)$.

3. L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ est continue[1] sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0. En effet, pour tout $h\in\mathbb{R}^*$

$$\Delta_{x_0}(h)=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\sin(1/h)$$

et cette quantité n'a pas de limite[2] lorsque h tend vers 0.

Exercice 1 Montrer que la dérivée de la fonction cosinus en $x_0\in\mathbb{R}$ vaut $-\sin(x_0)$.

Remarques

1. La quantité $\Delta_{x_0}(h)=\frac{1}{h}(f(x_0+h)-f(x_0))$ est appelée *taux d'accroissement* de f entre x_0+h et x_0. Il résulte de la définition 16.1 que f a une limite en x_0 si son taux d'accroissement entre x_0+h et x_0 a une limite quand h tend vers 0.

2. La dérivée de f en x_0 est parfois notée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ et si f est dérivable en x_0 alors on obtient également en considérant le changement de variable $x=x_0+h$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

3. La tangente à la représentation graphique de f au point (x_0,y_0) a pour équation $y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$, voir la figure 1.

Exercice 2 Soit f une application dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0\in I$. Calculer les deux limites suivantes :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h^2)-f(x_0+h)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$

Définition 16.2 *Soient f une application définie sur un intervalle ouvert I et $x_0\in I$. On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 si la quantité*

$$\Delta_{x_0}(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

admet une limite à droite (resp. à gauche) en x_0. Cette limite est notée $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$) et elle est appelée dérivée à droite (resp. à gauche) de f en x_0.

[1] Voir l'exercice 11 p. 623.

[2] Voir l'exercice 6 p. 605.

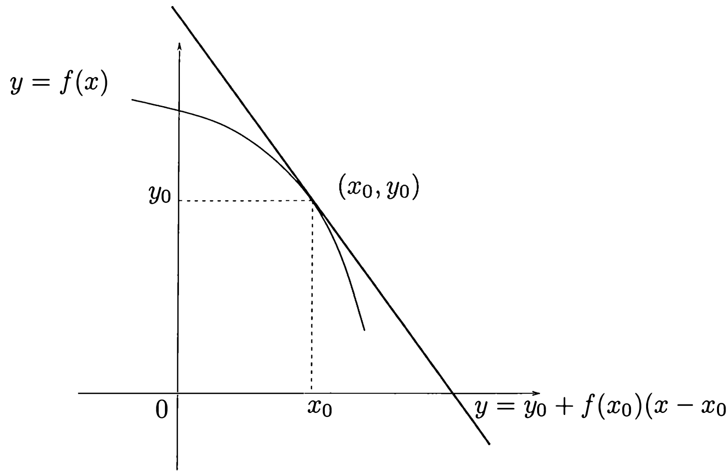


Fig. 1 Tangente en (x_0, y_0) à la représentation graphique de la fonction f.

Exemples

1. Considérons la fonction valeur absolue. Puisque pour tout $h \in \mathbb{R}^*$

$$\Delta_0(h) = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h},$$

on a $\lim_{h \to 0^+} \Delta_0(h) = 1$. La fonction valeur absolue est donc dérivable à droite en 0 de dérivée égale à 1. Par ailleurs, puisque $\lim_{h \to 0^-} \Delta_0(h) = -1$, la fonction valeur absolue est dérivable à gauche en 0 de dérivée égale à -1. Elle n'est pas dérivable en 0 car $\Delta_0(h)$ n'a pas de limite quand h tend vers 0.

2. Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto |\arctan(1/x)|$. Elle est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ car la fonction arc-tangente est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $J =]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ et la fonction valeur absolue est continue sur J. Elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{\pi}{2}$ car

$$\lim_{x \to 0^+} \arctan(1/x) = \lim_{t \to +\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$$

et f est paire. Pour $h \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\Delta_0(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|\arctan(1/h)| - \frac{\pi}{2}}{h} = \frac{\arctan(1/h) - \frac{\pi}{2}}{h}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a[(3)] $\arctan(1/x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$;

[(3)] Voir la proposition 14.20 p. 689.

on a donc

$$\Delta_0(h) = -\frac{\arctan(h)}{h} \underset{0+}{\sim} -1.$$

On en déduit que f est dérivable à droite en 0 de dérivée à droite $f'_d(0) = -1$. Un calcul en tout point similaire permet d'établir que f est dérivable à gauche en 0 de dérivée à gauche $f'_g(0) = 1$.

3. La fonction racine carré n'est pas dérivable à droite en 0 car pour $h \in \mathbb{R}_+^*$ la quantité

$$\Delta_0(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

n'a pas de limite à droite en 0 ; on a $\lim_{h \to 0^+} \Delta_0(h) = +\infty$.

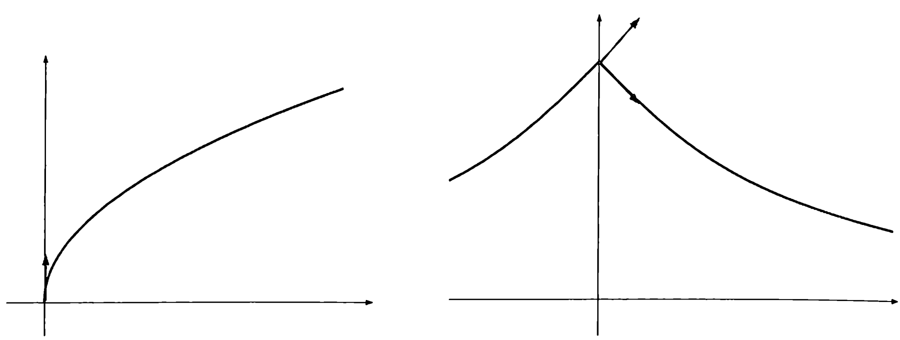


Fig. 2 Représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |\arctan(1/x)|$.

La proposition suivante résulte des propriétés des limites, voir page 613.

Proposition 16.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit dérivable en x_0 est qu'elle soit dérivable à droite en x_0 et dérivable à gauche en x_0 et que $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

Remarque On dit qu'une fonction f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$, si elle est dérivable en tout $x_0 \in]a, b[$ et si elle est dérivable à droite en a et à gauche en b.

Interprétation graphique

✗ Si $\lim_{h \to 0^\pm} \Delta_{x_0}(h) = \pm\infty$ alors la représentation graphique de f possède une demie tangente verticale au point (x_0, y_0). C'est le cas par exemple de la fonction racine carrée en $(0, 0)$, voir la figure 2.

✗ Si f est continue en x_0 et admet des dérivées à gauche et à droite en x_0 telles que $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ alors la représentation graphique de f présente un point anguleux en $(x_0, f(x_0))$. C'est le cas par exemple de la fonction valeur absolue en $(0, 0)$ ou de la fonction f définie par $f(x) = |\arctan(1/x)|$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = \frac{\pi}{2}$, voir la figure 2.

L'ensemble des points où une fonction est dérivable est appelé *l'ensemble de dérivabilité* de la fonction.

L'ensemble de dérivabilité n'est pas toujours identique à l'ensemble de définition de la fonction. Ainsi, la fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ mais elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (elle est dérivable à gauche et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en 0).

> L'ensemble de dérivabilité d'une fonction f n'est pas l'ensemble des réels x où l'expression de la dérivée $f'(x)$ a un sens. Par exemple, la dérivée de la fonction argument tangente hyperbolique est $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ et $\frac{1}{1-x^2}$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ mais la fonction argument tangente hyperbolique qui est définie sur $]-1, 1[$ ne peut pas avoir pour ensemble de dérivabilité $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

PROPOSITION 16.2 *Soient f une application définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Démonstration Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_0 + h \in I$. On peut écrire, vérifier que le membre de droite se simplifie,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Or, f étant dérivable en x_0, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

et par conséquent

$$\lim_{h \to 0} h\,\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0.$$

On a donc $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, ce qui d'après la définition signifie que f est continue en x_0. □

Remarque La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point. C'est le cas de la fonction valeur absolue en 0. On ne peut donc pas déduire l'ensemble de continuité d'une fonction à partir de son ensemble de dérivabilité (sauf si l'ensemble de dérivabilité coïncide avec l'ensemble de définition de la fonction).

> **EXERCICE 3** En utilisant la définition 16.1, justifier les résultats suivants :
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(h + 1)}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

16.1.2 Dérivées des fonctions usuelles

On rappelle les dérivées des fonctions usuelles et leur ensemble de dérivabilité.

f	Ens. de dérivabilité	$f'(x)$
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) \quad$ ou $\quad \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	e^x
$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch}(x)$
$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh}(x)$
$x \mapsto \operatorname{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$1 - \operatorname{th}^2(x) \quad$ ou $\quad \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$
$x \mapsto \arcsin(x)$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \mapsto \arccos(x)$	$]-1, 1[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \mapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$x \mapsto \operatorname{argsh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$x \mapsto \operatorname{argch}(x)$	$]1, +\infty[$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$x \mapsto \operatorname{argth}(x)$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

16.1.3 Propriétés algébriques de la dérivée

PROPOSITION 16.3 *Soient f et g deux application définies sur un intervalle ouvert I. Si f et g sont dérivables en $x_0 \in I$ (resp. sur I) alors*

- ✗ *$f+g$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

- ✗ *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda \cdot f$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et*

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda\ f'(x_0);$$

- ✗ *$f \times g$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et*

$$(f \times g)'(x_0) = f'(x_0)\ g(x_0) + f(x_0)\ g'(x_0);$$

- ✗ *si de plus $g(x_0) \neq 0$ (resp. g ne s'annule pas sur I), $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\ g(x_0) - f(x_0)\ g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Démonstration Ces relations se démontrent toutes en utilisant la définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement, voir la définition 16.1, et en exploitant les propriétés des limites. Démontrons la dernière relation ; les autres vérifications sont laissées en exercice. On a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0}\ \frac{g(x_0)f(x) - g(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)} \\
&= \frac{1}{x - x_0}\ \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)(g(x_0) - g(x))}{g(x)g(x_0)} \\
&= \frac{1}{g(x)}\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)}\ \frac{g(x_0) - g(x)}{x_0 - x}.
\end{aligned}$$

Étudions la limite du premier terme :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)}\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \left(\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)}\right) \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \\
&= \frac{1}{g(x_0)}\ f'(x_0),
\end{aligned}$$

car g étant dérivable en x_0, g est continue[(4)] en x_0 et puisque $g(x_0) \neq 0$, $1/g$ est continue en x_0 (voir la proposition 13.18, page 622).

Étudions la limite du second terme :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)}\,\frac{g(x_0)-g(x)}{x_0-x} &= \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)}\right)\left(\lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0)-g(x)}{x_0-x}\right)\\ &= \frac{f(x_0)}{g(x_0)^2}\, g'(x_0),\end{aligned}$$

car g étant dérivable en x_0, g est continue en x_0 et puisque $g(x_0) \neq 0$, $1/g$ est continue en x_0. On en déduit que

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{g(x_0)}\, f'(x_0) - \frac{f(x_0)}{g(x_0)^2}\, g'(x_0)\\ &= \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g(x_0)^2}.\end{aligned}$$

La relation est démontrée. □

Exemple La fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ car elle est définie comme le quotient de 2 fonctions, sinus et cosinus, dérivables sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la fonction cosinus ne s'annulant pas sur cet intervalle. D'après la quatrième relation de la proposition 16.3, la dérivée de la fonction tangente en $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est

$$\begin{aligned}\tan'(x_0) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x_0) &= \frac{\sin'(x_0)\ \cos(x_0) - \sin(x_0)\ \cos'(x_0)}{\cos(x_0)^2}\\ &= \frac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{1}{\cos^2(x_0)}.\end{aligned}$$

On a aussi $\tan'(x_0) = 1 + \tan^2(x_0)$.

Intéressons-nous à la dérivée en $x_0 = 0$ de la fonction tangente. La relation précédente indique que cette dérivée vaut 1. Le taux d'accroissement pour la fonction tangente entre 0 et h vaut

$$\Delta_0(h) = \frac{\tan(h) - \tan(0)}{h} = \frac{\tan(h)}{h}.$$

D'après la définition 16.1, on a donc $\lim_{h\to 0} \tan(h)/h = 1$.

Nous admettons le résultat suivant concernant la dérivation des applications composées.

Proposition 16.4 *Soient f une application définie sur un intervalle ouvert I, J une partie de $\mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset J$ et g une application de J dans $\mathbb{R}$. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0) \in J$. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en y_0 alors l'application composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0)).$$

[(4)] Voir la proposition 16.2 p. 751.

Exemples

1. Considérons l'application $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto \arcsin(\cos(x))$. On a $\phi = g \circ f$ où $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x) \in [-1, 1]$ et $g : x \in [-1, 1] \mapsto \arcsin(x)$. L'application ϕ est périodique de période 2π. L'application f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$ et l'application g étant dérivable sur $]-1, 1[$, d'après la proposition 16.4, l'application ϕ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 = f(x_0) \in]-1, 1[$, c'est-à-dire pour $x_0 \in \cup_{n\in\mathbb{Z}}]k\pi, (k+1)\pi[$. De plus,

$$\begin{aligned}\phi'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0)) &= -\sin(x_0)\ \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x_0)}}\\ &= -\frac{\sin(x_0)}{\sqrt{\sin^2(x_0)}} = -\frac{\sin(x_0)}{|\sin(x_0)|}.\end{aligned}$$

On peut avoir recours à MAPLE pour illustrer cet exemple. La commande `diff` permet le calcul de dérivée.

```
> f:=x-> arcsin(cos(x)):
> diff(f(x),x);
```

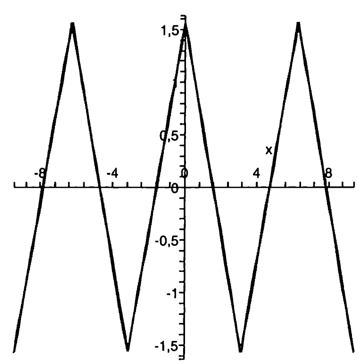
$$-\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$$

```
> simplify(%);
```

$$-\mathrm{csgn}(\sin(x))$$

La fonction csgn désigne sous MAPLE la fonction signe qui vaut -1 sur $\mathbb{R}_-^*$, 0 en 0 et 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

```
> plot(f(x),x=-3*Pi..3*Pi);
```



2. Calculons la dérivée de $f : x \mapsto (1+1/x^2)^x$. Les fonctions puissances d'exposant réel sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$; comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $1+1/x^2 \in [1, +\infty[$, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \exp\big(x\ln(1+1/x^2)\big).$$

L'application $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto 1+1/x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\phi' : x \in \mathbb{R}^* \mapsto -2/x^3$. L'application $\psi : x \mapsto \ln(1+1/x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $]1, +\infty[$ et la fonction logarithme est dérivable sur $]1, +\infty[$. D'après la proposition 16.4, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\psi'(x) = \phi'(x)\ \ln'(\phi(x)) = -\frac{2}{x^3}\ \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{x(x^2+1)}.$$

Comme ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, l'application f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\begin{aligned}f'(x) &= \big(x\,\psi(x)\big)'\ \exp'\big(x\,\psi(x)\big) = \big(\psi(x) + x\,\psi'(x)\big)\ \exp\big(x\,\psi(x)\big)\\ &= \left(x\ln\big(1+1/x^2\big) - \frac{2}{x^2+1}\right)\ \big(1+1/x^2\big)^x.\end{aligned}$$

EXERCICE 4 Déterminer sur quel ensemble les fonctions suivantes sont dérivables puis calculer leur dérivée.

1 - $f_1 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x+1}\right)$ 2 - $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$ 3 - $f_3 : x \mapsto x\ 2^x$

4 - $f_4 : x \mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ 5 - $f_5 : x \mapsto \cos(x)^{\frac{1}{x}}$

PROPOSITION 16.5 *Soit f une application dérivable sur $\mathbb{R}$.*

✗ *Si f est paire alors f' est impaire.*

✗ *Si f est impaire alors f' est paire.*

✗ *Si f est périodique alors f' est périodique.*

Démonstration ⊵ L'application $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée en $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = -f'(-x).$$

Supposons que f soit paire ; pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(-x) = g(x)$ et les fonctions f et g sont donc égales. Ceci implique qu'elles ont même dérivée sur $\mathbb{R}$, autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = g'(x)$. On peut donc conclure que si f est paire alors $f'(x) = -f'(-x)$. On a ainsi établi que la dérivée d'une application paire et dérivable est une application impaire. On peut montrer, par un raisonnement analogue, que la dérivée d'une application impaire et dérivable est une application paire.

⊵ La preuve de la troisième propriété de la proposition fait l'objet de l'exercice suivant. □

EXERCICE 5 Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors sa dérivée est une application périodique.

Comment étudier la dérivabilité d'une fonction ?

Considérons l'application f définie pour $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin(x)/x$ et par $f(0) = 1$. Cette application est continue sur $\mathbb{R}$. Déterminons son ensemble de dérivabilité.

⊵ Commençons, en utilisant les propriétés algébriques des fonctions dérivables, par déterminer sur quels intervalles ouverts l'application f est dérivable. Elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 0[$ car elle est définie comme le quotient des fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto x$ qui sont dérivables sur $]-\infty, 0[$, la fonction au dénominateur ne s'annulant pas sur $]-\infty, 0[$ (voir la proposition 16.3). Pour la même raison, elle est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$\trianglerighteq$ Intéressons-nous à la dérivabilité en 0. L'application f ayant été définie en 0 par prolongement par continuité, il convient pour étudier sa dérivabilité en 0 de revenir à la définition 16.1. On a

$$\Delta_0(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sin(h) - h}{h^2}.$$

L'étude des fonctions $x \mapsto x - \sin(x)$ et $x \mapsto x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3$ permet d'établir que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$0 \leqslant x - \sin(x) \leqslant \tfrac{1}{6}\, x^3.$$

On en déduit que pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, on a $-\frac{1}{6}\, h \leqslant \Delta_0(h) \leqslant 0$. Le théorème d'encadrement indique que la limite à droite en 0 de $\Delta_0(h)$ vaut 0. Comme $\Delta_0(-h) = -\Delta_0(h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit aussi que[(5)] la limite à gauche en 0 de $\Delta_0(h)$ vaut 0. Finalement, l'application f est dérivable en 0 de nombre dérivé $f'(0) = 0$. Elle admet donc pour ensemble de dérivabilité $\mathbb{R}$.

Ce n'est pas parce que l'on peut formellement calculer la dérivée en un point que la fonction considérée est dérivable en ce point. La détermination de l'ensemble de dérivabilité d'une fonction doit être effectuée préalablement à tout calcul en se basant sur les ensembles de dérivabilité des fonctions usuelles et sur les propriétés algébriques de la dérivée. Pour s'en convaincre il suffit de considérer les exemples suivants.

Exemples

1. L'application f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}\right)$ est dérivable sur $]1, +\infty[$. C'est en effet la composée de l'application

$$g : x \in]1, +\infty[\longmapsto \frac{x^2+1}{x^2-1} \in]0, +\infty[$$

qui est dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ avec d'une part la fonction racine carrée, qui est dérivable sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$, et d'autre part avec la fonction logarithme qui est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour $x \in]1, +\infty[$, on a

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x^2-1) \quad \text{d'où} \quad f'(x) = -\frac{2x}{x^4-1}.$$

On remarquera que l'expression donnant $f'(x)$ est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ mais l'ensemble de dérivabilité n'est pas $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, voir la mise en garde ci-dessus.

2. L'application $f : x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}\right)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. En vertu de la proposition 16.2, ou plus exactement de sa contraposée, l'application f ne peut pas être dérivable en 0. On a établi à l'exercice 4 que f est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$ et que pour $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, on a

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(5) Nous établirons plus simplement la limite en 0 de Δ_0 à la p. 780 en utilisant la Règle de L'Hôpital. On pourra également consulter l'exercice 11 p. 792.

La quantité $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est bien définie en 0 et vaut -1 mais f n'est pas dérivable en 0 donc -1 ne peut pas être la valeur de $f'(0)$ qui n'existe pas. Avant de se lancer dans le calcul de la dérivée d'une application, il faut donc déterminer avec soin quel est son ensemble de dérivabilité.

On n'a pas nécessairement $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$ et on ne peut pas conclure à la non dérivabilité d'une application de cette manière[6]. Pour s'en convaincre il suffit de considérer l'exemple suivant.

Exemple L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $f' : x \in \mathbb{R}^* \mapsto 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$. D'autre part, f est dérivable en 0 de dérivée 0 puisque

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0.$$

Par contre f' n'a pas de limite en 0 car la fonction cosinus n'a pas de limite en l'infini. On a donc une fonction dérivable en 0 pour laquelle la limite en 0 de $f'(x)$ n'existe pas.

Remarque On peut toutefois démontrer le résultat suivant (voir la proposition 16.9, page 770) : si f est continue en x_0, dérivable au voisinage de x_0 et si f' admet pour limite le réel ℓ en x_0 alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

16.1.4 Différentielle

La définition de la dérivée donnée à la définition 16.1, page 747, ne permet pas de généraliser de manière naturelle la notion de dérivée aux fonctions de plusieurs variables. Cette généralisation passe par la notion de différentielle que nous allons étudier dans le cas des fonctions d'une variable réelle. Le chap. 10 du *Cours de deuxième année* est consacré à l'étude de la différentielle.

Définition 16.3 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est différentiable en $x_0 \in I$ s'il existe une application ϵ définie dans un voisinage V de 0 et un réel α tel que*

$$\forall h \in V \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = \alpha\, h + h\,\epsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0.$$

L'application linéaire $\mathrm{d}f_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{d}f_{x_0} : h \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha h$$

est appelée différentielle de f en x_0.

---

[6] On remarquera que l'égalité $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$ a lieu si et seulement si f' est continue en x_0. Nous verrons que les fonctions pour lesquelles on a $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$ pour tout x_0 dans un ensemble D sont des applications qualifiées *de classe* C^1 sur D.

Exemple Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = 2x_0 h + h^2 = 2x_0 h + h\,\epsilon(h)$$

où $\epsilon : h \in \mathbb{R} \mapsto h$ admet pour limite 0 en 0. On en déduit que l'application f admet pour différentielle en $x_0 \in \mathbb{R}$ l'application

$$\mathrm{d}f_{x_0} : h \in \mathbb{R} \longmapsto 2x_0 h$$

Le lien entre la dérivée de f en x_0 et la différentielle de f en x_0 est donné par la proposition suivante.

PROPOSITION 16.6 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un élément de I et f une fonction application de I dans $\mathbb{R}$. f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0. De plus, la différentielle de f en x_0 est*

$$\mathrm{d}f_{x_0} : h \in \mathbb{R} \longmapsto f'(x_0)\, h.$$

Démonstration $\trianglerighteq$ Supposons que f soit différentiable en x_0. Il existe dans ce cas une application ϵ définie dans un voisinage V de 0 et un réel α tels que

$$\forall h \in V \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = \alpha\, h + h\,\epsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0.$$

On en déduit que pour tout $h \in V \setminus \{0\}$ on a

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \alpha + \epsilon(h)$$

et par conséquent que $\lim_{h \to 0} \Delta_{x_0}(h) = \alpha$. D'après la définition 16.1 cela implique que f est dérivable en x_0, de dérivée en x_0 le réel α.

$\trianglerighteq$ Supposons que f soit dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0)$. On a alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

autrement dit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - h\, f'(x_0)}{h} = 0.$$

Considérons la fonction ϵ définie par $\epsilon(0) = 0$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $h + x_0 \in I$ par

$$\epsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - h\, f'(x_0)}{h}.$$

Pour tout réel h dans un voisinage de 0, on a donc

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\,\epsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0.$$

D'après la définition 16.3, cela signifie que f est différentiable en x_0 de différentielle en x_0 l'application $\mathrm{d}f_{x_0} : h \in \mathbb{R} \mapsto f'(x_0)\, h$. □

DÉFINITION 16.4 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$ admettant une différentielle $\mathrm{d}f_{x_0}$ en tout $x_0 \in I$. On appelle différentielle de f, et on note $\mathrm{d}f$, l'application de I dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par*

$$\mathrm{d}f : x_0 \in I \longmapsto \mathrm{d}f_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Exemples

1. Considérons l'application identité $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a $f'(x_0) = 1$ et la différentielle de f est donc

$$\mathrm{d}f : x_0 \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{d}f_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{où} \quad \mathrm{d}f_{x_0} : h \in \mathbb{R} \longmapsto h \in \mathbb{R}.$$

On a coutume de noter $\mathrm{d}x$ l'application $\mathrm{d}x : h \in \mathbb{R} \mapsto h \in \mathbb{R}$.

2. Considérons l'application $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$. La différentielle de g est

$$\mathrm{d}g : x_0 \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{d}g_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{où} \quad \mathrm{d}g_{x_0} : h \in \mathbb{R} \longmapsto 2x_0h \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, on a

$$\mathrm{d}g_{x_0}(h) = 2x_0h = 2x_0\mathrm{d}x(h),$$

ce que l'on écrit $\mathrm{d}g_{x_0} = 2x_0\mathrm{d}x$. Il arrive fréquemment que l'on note[7] $\mathrm{d}g = 2x\ \mathrm{d}x$ la différentielle de g.

16.1.5 Dérivées successives

LEIBNIZ, Gottfried (1646, Leipzig - 1716, Hanovre).

Leibniz fut non seulement philosophe et mathématicien, mais aussi linguiste, juriste, historien, géographe, diplomate et théologien. Il fut l'inventeur en 1686, en même temps que Newton, du calcul différentiel et intégral. Leibniz a précisé le concept de fonction (le terme est de lui : en latin functio = accomplissement, exécution) et de fonction dérivée, à travers celui de différentielle, que Newton appela fluxion. Les dernières années de la vie de Leibniz furent marquées par la retentissante controverse avec Newton sur l'antériorité de l'invention du calcul différentiel.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I et dérivable sur I. Si la dérivée de f est à son tour dérivable, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f' qui est appelée *dérivée seconde* de f. On peut ainsi de proche en proche définir pour $n \in \mathbb{N}^*$ la *dérivée n-ième* (ou d'ordre n) de f que l'on note $f^{(n)}$. Par convention $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$. On dit que f est *indéfiniment dérivable* sur $J \subset I$ si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la dérivée n-ième de f est définie sur J.

---

[7] Cette écriture est justifiée par le fait que symboliquement on obtient $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = 2x = g'(x)$. Mais gare aux confusions : $\mathrm{d}g_x$ est une application linéaire alors que $g'(x)$ est un réel.

Remarques

1. Il se peut que les ensembles de définition de f, f', $f^{(2)}$, etc soient distincts. C'est le cas par exemple pour $x \mapsto x^{3/2}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ mais dont la dérivée $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. L'existence de $f^{(n)}(x_0)$ suppose que $f^{(n-1)}$ soit définie sur un voisinage de x_0 et pas uniquement en x_0.

Exemples

1. On vérifie par un raisonnement par récurrence que la dérivée n-ième de la fonction cosinus est l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x + n\frac{\pi}{2})$. De même, on vérifie que la dérivée n-ième de la fonction sinus est $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

2. On vérifie par un raisonnement par récurrence que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ la dérivée n-ième de l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^p$ est

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto (x^p)^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < n \\ n! & \text{si } p = n \\ p \cdots (p-n+1)\ x^{p-n} = \dfrac{p!}{(n-p)!}\ x^{p-n} & \text{si } p > n \end{cases}$$

Proposition 16.7 *Soient f et g deux applications définies sur un intervalle ouvert I, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si f et g admettent des dérivées jusqu'à l'ordre n en x_0 (resp. sur I) alors*

✗ *$f + g$ est dérivable jusqu'à l'ordre n en x_0 (resp. sur I) et*

$$(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0);$$

✗ *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f$ est dérivable jusqu'à l'ordre n en x_0 (resp. sur I) et*

$$(\lambda \cdot f)^{(n)}(x_0) = \lambda\ f^{(n)}(x_0);$$

✗ *$f \times g$ est dérivable jusqu'à l'ordre n en x_0 (resp. sur I) et $\forall k \in \{1, \dots, n\}$,*

$$(f \times g)^{(k)}(x_0) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\ f^{(i)}(x_0)\ g^{(k-i)}(x_0) \qquad \textit{(formule de Leibniz)}\ ;$$

✗ *si de plus $g(x_0) \neq 0$ (resp. g ne s'annule pas sur I), f/g est dérivable[8] jusqu'à l'ordre n en x_0 (resp. sur I).*

Démonstration Ces propriétés se démontrent par récurrence à partir des relations pour la dérivée première données à la proposition 16.3. Démontrons

[8] La formule donnant l'expression de la dérivée n-ième du quotient f/g en fonction des dérivées de f et de g est quelque peu compliquée.

la formule de Leibniz. Soient f et g deux applications admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n sur I et soit $x_0 \in I$. Pour $n = 1$, la formule de Leibniz s'écrit

$$(f \times g)'(x_0) = \binom{1}{0} f(x_0)\, g'(x_0) + \binom{1}{1} f'(x_0)\, g(x_0) = f(x_0)\, g'(x_0) + f'(x_0)\, g'(x_0).$$

Elle a été établie à la proposition 16.3. Supposons la formule de Leibniz vraie pour un entier k donné où $k \in \{1, \dots, n-1\}$, *i.e.* supposons que

$$(f \times g)^{(k)}(x_0) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\, f^{(i)}(x_0)\; g^{(k-i)}(x_0)$$

et montrons que la formule de Leibniz est vraie pour l'entier $k+1$, *i.e.* montrons que

$$(f \times g)^{(k+1)}(x_0) = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i}\, f^{(i)}(x_0)\; g^{(k+1-i)}(x_0).$$

La dérivée $(k+1)^{\text{e}}$ de $f \times g$ étant la dérivée de la dérivée k^{e} de $f \times g$, on a

$$(f \times g)^{(k+1)}(x_0) = \left((f \times g)^{(k)}\right)'(x_0) = \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\, f^{(i)}(x_0)\; g^{(k-i)}(x_0)\right)'.$$

La dérivée d'une somme de deux fonctions étant égale à la somme des dérivées de ces deux fonctions, voir la proposition 16.3, on en déduit que

$$(f \times g)^{(k+1)}(x_0) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(f^{(i)}(x_0)\; g^{(k-i)}(x_0)\right)'.$$

En utilisant la relation exprimant la dérivée du produit de deux fonctions (c'est-à-dire la formule de Leibniz pour $k = 1$, voir la proposition 16.3), on obtient

$$\left(f^{(i)}(x_0)\; g^{(k-i)}(x_0)\right)' = f^{(i+1)}(x_0)\; g^{(k-i)}(x_0) + f^{(i)}(x_0)\; g^{(k+1-i)}(x_0).$$

On en déduit que

$$(f \times g)^{(k+1)}(x_0) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i+1)}(x_0)\, g^{(k-i)}(x_0) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(x_0)\, g^{(k+1-i)}(x_0).$$

Or,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i+1)}(x_0)\, g^{(k-i)}(x_0) = \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} f^{(j)}(x_0)\, g^{(k+1-j)}(x_0),$$

d'où

$$\begin{aligned}(f \times g)^{(k+1)}(x_0) &= \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}\right) f^{(i)}(x_0)\, g^{(k+1-i)}(x_0) \\ &\quad + \binom{k}{0} f^{(0)}(x_0)\, g^{(k+1)}(x_0) + \binom{k}{k} f^{(k+1)}(x_0)\, g^{(0)}(x_0)\end{aligned}$$

On a

$$\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \frac{k!}{(i-1)!(k+1-i)!} + \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{k!\,i + k!\,(k+1-i)}{i!(k+1-i)!}$$
$$= \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!} = \binom{k+1}{i}$$

et $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}$, $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1$. On en déduit donc que

$$(f \times g)^{(k+1)}(x_0) = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} f^{(i)}(x_0)\, g^{(k+1-i)}(x_0).$$

La formule de Leibniz est donc vraie pour l'entier $k+1$ ce qui prouve l'hérédité de la relation et achève la raisonnement par récurrence. □

Remarque Le produit de fonctions étant commutatif, il peut être selon les cas plus judicieux de considérer le produit $g \times f$ plutôt que le produit $f \times g$ pour utiliser la formule de Leibniz.

Exemple Calculons la dérivée n-ième de l'application $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3\,\mathrm{e}^{3x}$ en ayant recours à la formule de Leibniz. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{3x}$$

de sorte que $\phi = f \times g$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f^{(3)}(x) = 6 \quad \text{et} \quad f^{(i)}(x) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, i \geqslant 4.$$

Un raisonnement par récurrence permet d'établir que pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$g^{(i)}(x) = 3^i \mathrm{e}^{3x}.$$

Par ailleurs, on vérifie aisément que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\phi'(x) = (3x^3 + 3x^2)\,\mathrm{e}^{3x}, \quad \phi''(x) = (9x^3 + 18x^2 + 6x)\,\mathrm{e}^{3x}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$, la formule de Leibniz indique que

$$\phi^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x) = \sum_{i=0}^{3} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x)$$

car $f^{(i)}(x) = 0$ pour $i \geqslant 4$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\phi^{(n)}(x) =& f(x)g^{(n)}(x) + nf'(x)g^{(n-1)}(x) + \tfrac{1}{2}n(n-1)\ f''(x)g^{(n-2)}(x) \\ &+ \tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)\ f^{(3)}(x)g^{(n-3)}(x) \\ =& \mathrm{e}^{3x}\Big(x^3 3^n + 3^n n x^2 + 3^{n-1} n(n-1)x + n(n-1)(n-2)3^{n-3}\Big).\end{aligned}$$

EXERCICE 6 En utilisant la formule de Leibniz, montrer que la dérivée n-ième de l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n(1+2x)^n$ est

$$f^{(n)} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{k=0}^{n} 2^k n! \binom{n}{k}^2 x^k(1+2x)^{n-k}.$$

Remarque La formule donnant l'expression de la dérivée k^e du quotient f/g à l'aide des dérivées successives de f et de g ne s'exprime pas simplement. On pourra toutefois remarquer que la formule de Leibniz indique que

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{(k)}(x_0) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)}(x_0) \left(\frac{1}{g}\right)^{(i)}(x_0).$$

Bien entendu, il n'y a pas égalité entre $\left(\frac{1}{g}\right)^{(i)}$ et $\frac{1}{g^{(i)}}$. Par exemple,

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{(2)} = \frac{2(g')^2 - g\,g^{(2)}}{g^3} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{g}\right)^{(3)} = \frac{-6(g')^3 + 6g\,g'\,g^{(2)} - g^{(3)}g^2}{g^4}.$$

On sera attentif aux différents exposants dans ces formules et on ne confondra pas puissance et ordre de dérivation.

DÉFINITION 16.5 *Soit f une application définie sur un intervalle ouvert I.*

✗ *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est dérivable jusqu'à l'ordre n sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*

✗ *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle I si f est indéfiniment dérivable sur I. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*

Exemples

1. Les fonctions sinus, cosinus, sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, exponentielle sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction logarithme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit des deux applications $x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^3$ et $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(1/x)$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Elle admet pour dérivée en $x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = 3x^2\sin(1/x) - x\cos(1/x)$. D'autre part[9]

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^2\sin(1/x) = 0,$$

[9] On utilise la relation $0 \leqslant |x^2\sin(1/x)| \leqslant x^2$ et le théorème d'encadrement.

ce qui indique que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. On a donc

$$f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

L'application f' est continue sur $\mathbb{R}^*$; de plus, comme $0 \leqslant |f'(x)| \leqslant 3x^2 + |x|$, le théorème d'encadrement indique que $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ et par conséquent que f' est continue en 0. L'application f' est donc continue sur $\mathbb{R}$ ce qui se traduit en disant que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. L'application f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f''(x) = (6x - 1/x)\sin(1/x) - 4\cos(1/x).$$

On établit sans difficulté que f'' est continue sur $\mathbb{R}^*$. Par contre le taux d'accroissement entre 0 et h pour f' qui vaut

$$\frac{f'(h) - f'(0)}{h} = 3h\sin(1/h) - \cos(1/h)$$

n'a pas de limite quand h tend vers 0. L'application f n'est donc pas deux fois dérivable en 0 et par conséquent f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Toutefois, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Remarques

1. On désigne par $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ continues sur I. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m < n$ et I un intervalle ouvert. Il résulte de la définition 16.5 que $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^m(I) \subset \mathcal{C}^0(I)$.

2. Une application peut être dérivable jusqu'à l'ordre n sur un intervalle donné sans être de classe $\mathcal{C}^n$ sur cet intervalle. C'est le cas de l'application

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée l'application

$$f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

L'application f' n'est pas continue en 0 ce qui implique que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La proposition suivante découle de la proposition 16.7 et de la proposition 13.18, page 622.

PROPOSITION 16.8 *Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^n$ (où $n \in \mathbb{N}$) sur un intervalle ouvert I.*

- ✗ *$f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*
- ✗ *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*
- ✗ *$f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*
- ✗ *Si g ne s'annule pas sur I alors f/g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*

16.2 Le théorème des accroissements finis

Dans cette section, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

16.2.1 Le théorème de Rolle

THÉORÈME 16.1 (Théorème de Rolle[10])
Soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Si

1. *f est continue sur $[a,b]$[11] ;*
2. *f est dérivable sur $]a,b[$;*
3. *$f(a) = f(b)$;*

alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration $\trianglerighteq$ L'application f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$. D'après le théorème 13.4 page 626, elle est donc bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$, *i.e.*

$$\exists c_1, c_2 \in [a,b] \quad \text{tel que} \quad f(c_1) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(c_2) = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Soient $M = f(c_1)$ et $m = f(c_2)$. Si $M = m$ alors f est constante et l'assertion est évidente. On suppose donc que $M > m$. Trois cas sont possibles :

1 - le maximum de f sur $[a,b]$ est atteint en a (et b) et le minimum est atteint dans $]a,b[$ (on a $c_2 \in]a,b[$ et $c_1 = a$ ou $c_1 = b$) ;

2 - le minimum de f sur $[a,b]$ est atteint en a (et b) et le maximum est atteint dans $]a,b[$ (on a $c_1 \in]a,b[$ et $c_2 = a$ ou $c_2 = b$) ;

3 - le minimum et le maximum de f sur $[a,b]$ sont tous les deux atteints dans $]a,b[$ (on a $c_1 \in]a,b[$ et $c_2 \in]a,b[$).

On a donc dans tous les cas $c_1 \in]a,b[$ ou $c_2 \in]a,b[$.

$\trianglerighteq$ Supposons dans un premier temps que l'on ait $c_1 \in]a,b[$.

Pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $c_1 + h \in [a,b]$ on a : $f(c_1 + h) \leqslant M = f(c_1)$. Par conséquent,

$$\forall h \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{f(c_1+h) - f(c_1)}{h} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f_d'(c_1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c_1+h) - f(c_1)}{h} \leqslant 0.$$

---

(10) ROLLE, Michel (1652, Ambert - 1719, Paris). A publié un *Traité d'algèbre* en 1690, dans lequel il introduit la notation $\sqrt[n]{a}$ pour la racine n-ième de a. Il a également énoncé sans démonstration en 1691 le théorème suivant connu maintenant sous le nom de *théorème de Rolle*.

(11) i.e. continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a, à gauche en b.

Pour tout $h \in \mathbb{R}_-^*$ vérifiant $c_1 + h \in [a,b]$ on a $f(c_1+h) \leqslant M = f(c_1)$. Par conséquent,

$$\forall h \in \mathbb{R}_-^* \quad \frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f_g'(c_1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h} \geqslant 0.$$

Comme f est dérivable en $c_1 \in]a,b[$ on a[12] $f'(c_1) = f_g'(c_1) = f_d'(c_1)$. Compte tenu des signes de $f_g'(c_1)$ et $f_d'(c_1)$, cela implique que $f'(c_1) = 0$.

⊵ Si $c_1 \notin]a,b[$ alors on a nécessairement $c_2 \in]a,b[$. On peut alors reprendre un raisonnement analogue à celui effectué dans le cas où $c_1 \in]a,b[$. On établit par ce moyen que

$$f_d'(c_2) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c_2+h)-f(c_2)}{h} \geqslant 0$$

et que

$$f_g'(c_2) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c_2+h)-f(c_2)}{h} \leqslant 0.$$

Là encore, puisque f est dérivable en $c_2 \in]a,b[$ on a $f'(c_2) = f_g'(c_2) = f_d'(c_2)$, ce qui, compte tenu des signes de $f_g'(c_2)$ et de $f_d'(c_2)$, implique que $f'(c_2) = 0$.

Dans tous les cas on a donc existence d'un réel dans l'intervalle $]a,b[$ pour lequel f' s'annule. □

Interprétation graphique du théorème de Rolle. Au point de coordonnées $(c, f(c))$ la représentation graphique de f admet une tangente horizontale, voir la figure 3.

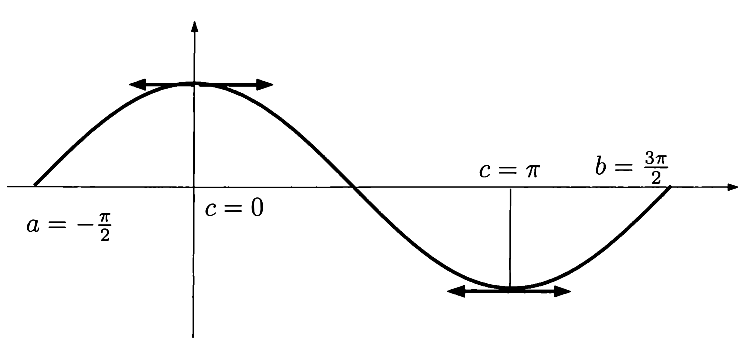


Fig. 3 Illustration du théorème de Rolle et de la non unicité du réel c.

[12] Voir la proposition 16.1 p. 750.

Remarques

1. En général, il n'y a pas unicité du réel c annulant la dérivée. Par exemple la fonction cosinus est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et $\cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$, donc elle satisfait les hypothèses du théorème de Rolle. La dérivée s'annule en 0 et en π, voir la figure 3.

2. Chacune des hypothèses du théorème de Rolle est importante. La figure 4 donne la représentation graphique de $f : x \mapsto \left|\arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)\right|$ prolongée par continuité en posant $f(2) = \frac{\pi}{2}$. Cette application est continue sur $[1,3]$ et on a $f(1) = f(3) = \frac{\pi}{4}$ mais il n'existe pas de réel c vérifiant $f'(c) = 0$. L'hypothèse de dérivabilité de f sur $]1,3[$ n'est pas satisfaite car f n'est pas dérivable en 2. Le théorème de Rolle ne s'applique pas. Si l'on considère la même fonction sur

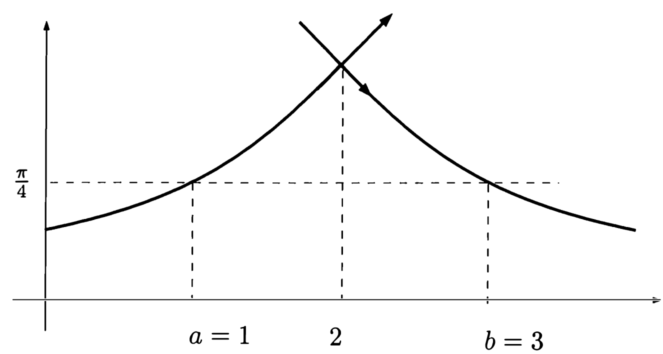


Fig. 4 Représentation graphique de $f : x \mapsto \left|\arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)\right|$.

l'intervalle $]2,3]$ et si l'on pose $f(2) = \frac{\pi}{4}$ alors on a une fonction dérivable sur $]2,3[$ pour laquelle $f(2) = f(3)$ mais il n'existe pas de réel c vérifiant $f'(c) = 0$. L'hypothèse de continuité de f sur $[2,3]$ n'est pas satisfaite car f n'est pas continue en 2. Le théorème de Rolle ne s'applique pas.

3. Les hypothèses du théorème de Rolle sont des conditions suffisantes pour conclure à l'existence d'un réel c annulant la dérivée. Ces conditions ne sont pas des conditions nécessaires.

EXERCICE 7 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré N ayant n racines réelles distinctes (avec $2 \leqslant n \leqslant N$). Montrer que le polynôme P' admet au moins $n-1$ racines réelles distinctes et qu'entre deux racines de P' il y a une racine de P (on dit que les racines de P séparent les racines de P').

16.2.2 Le théorème des accroissements finis

Théorème 16.2 (Théorème des accroissements finis)
Soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Si

1. *f est continue sur*[13] *$[a,b]$;*
2. *f est dérivable sur $]a,b[$;*

alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)\ (b-a)$.

Démonstration On considère l'application Φ définie sur $[a,b]$ par

$$\Phi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, x.$$

L'application Φ est la somme de l'application f et d'une fonction polynomiale. Elle est continue sur $[a,b]$ car f est continue sur $[a,b]$. Elle est dérivable sur $]a,b[$ car f est dérivable sur $]a,b[$ et on a pour tout $x \in]a,b[$,

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Par ailleurs, on a les égalités

$$\Phi(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, a = \frac{b\,f(a) - a\,f(b)}{b-a} = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, b = \Phi(b).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe donc un réel $c \in]a,b[$ tel que $\Phi'(c) = 0$. Puisque

$$\Phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

on en déduit qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ c'est-à-dire tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$. Le théorème est démontré. □

Interprétation graphique du théorème des accroissements finis. Désignons par $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \delta\ (x-a) + f(a)$ où $\delta = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est l'accroissement de f entre a et b. Cette droite passe par les points A et B de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et a pour vecteur directeur $(1, \delta)$. Le théorème des accroissements finis indique qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que la tangente à la représentation graphique de f au point C de coordonnées $(c, f(c))$ (qui a pour vecteur directeur $(1, f'(c))$) est parallèle à la droite $\mathcal{D}$, voir la figure 5.

Avant de détailler dans la section suivante les nombreuses applications du théorème des accroissements finis en analyse, intéressons-nous à une première utilisation de ce théorème à la caractérisation des applications dérivables.

[13] i.e. continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a, à gauche en b.

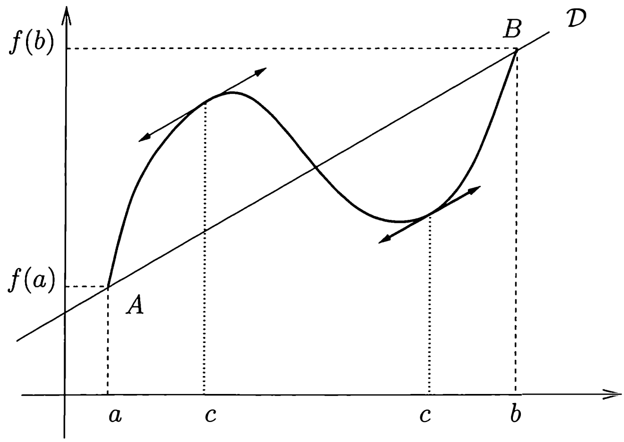


Fig. 5 Interprétation graphique du théorème des accroissements finis.

> **PROPOSITION 16.9** *Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et si f' admet pour limite en x_0 le réel ℓ alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.*

Démonstration Puisque f' admet pour limite en x_0 le réel ℓ, d'après la définition 13.2, page 597, pour tout réel strictement positif ε fixé

$$\exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\} \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f'(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big). \tag{1}$$

Soit x un élément de $I \setminus \{x_0\}$ vérifiant $|x - x_0| \leqslant \eta_\varepsilon$. Désignons par J l'intervalle fermé d'extrémités x et x_0 et par $\mathring{J}$ l'intervalle ouvert d'extrémités x et x_0. La restriction de f à l'intervalle J est une application continue sur J et dérivable sur $\mathring{J}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in \mathring{J}$ tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c).$$

Le réel c vérifie $|c - x_0| \leqslant |x - x_0| \leqslant \eta_\varepsilon$, donc d'après (1) on en déduit que $|f'(c) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Le taux d'accroissement $\Delta_{x_0}(x)$ de f entre x et x_0 vérifie donc

$$|\Delta_{x_0}(x) - \ell| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell \right| = |f'(c) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, on a prouvé que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow |\Delta_{x_0}(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big),$$

autrement dit, d'après la définition 13.2, page 597, que $\lim_{x \to x_0} \Delta_{x_0}(x) = \ell$. D'après la définition 16.1, cela permet de conclure que f est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0) = \ell$. □

Remarques

1. Dans l'énoncé de la proposition 16.9 , on peut remplacer « f est continue sur I » par « f est continue en x_0 » car f étant supposée dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$, elle est automatiquement continue sur $I \setminus \{x_0\}$.

2. Sous les hypothèses de la proposition 16.9, on a $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell = f'(x_0)$; on peut donc aussi en conclure que la fonction f' est continue en x_0.

16.3 Applications du théorème des accroissements finis

16.3.1 Étude de la monotonie d'une fonction dérivable

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On rappelle, c'est la définition donnée page 591, qu'une application f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est croissante sur $[a, b]$ si

$$\forall (x_1, x_2) \in [a, b]^2 \qquad \big(x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\big)$$

et qu'elle est décroissante sur $[a, b]$ si

$$\forall (x_1, x_2) \in [a, b]^2 \qquad \big(x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)\big).$$

On rappelle aussi que f est constante sur $[a, b]$ si

$$\forall (x_1, x_2) \in [a, b]^2 \qquad f(x_1) = f(x_2).$$

Dans le cas où l'application est dérivable, on peut caractériser sa monotonie à l'aide du signe de sa dérivée.

PROPOSITION 16.10 *Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si f' est nulle sur $]a, b[$ alors f est constante sur $[a, b]$. Autrement dit,*

$$\big(\forall x \in]a, b[\quad f'(x) = 0\big) \quad \Longrightarrow \quad \big(\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a, b] \quad f(x) = K\big).$$

Démonstration Soient x_1 et x_2 deux éléments de $[a, b]$ tels que $x_1 < x_2$. D'après les hypothèses de la proposition, l'application f est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$. Le théorème des accroissements finis indique par conséquent qu'il existe un réel $c \in]x_1, x_2[$ tel que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1).$$

Puisque par hypothèse f' est nulle sur $]a, b[$, on a $f'(c) = 0$ et par conséquent $f(x_2) = f(x_1)$. Cette égalité ayant lieu pour tous réels x_1, x_2 pris dans l'intervalle $]a, b[$, cela signifie que f est constante sur $]a, b[$. Désignons par K cette constante. Comme f est continue à droite en a, on a

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} K = K$$

et comme f est continue à gauche en b, on a

$$f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} K = K.$$

On en conclut que l'application f est constante sur $[a, b]$. □

PROPOSITION 16.11 *Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

✗ *L'application f est croissante sur $[a,b]$ si et seulement si*

$$\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geqslant 0.$$

✗ *L'application f est décroissante sur $[a,b]$ si et seulement si*

$$\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leqslant 0.$$

Démonstration Nous nous contenterons de démontrer la première assertion ; la deuxième assertion s'en déduira en considérant[14] la fonction $-f$.

⊵ Supposons f croissante sur $[a,b]$ et considérons $x \in]a, b[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in [a, b]$.

1. Si $h > 0$ alors $x + h > x$ et $f(x + h) \geqslant f(x)$.
2. Si $h < 0$ alors $x + h < x$ et $f(x + h) \leqslant f(x)$.

Dans les deux cas (i.e. pour tout $h \in \mathbb{R}^*$) le taux d'accroissement $\Delta_x(h) = \frac{1}{h}(f(x + h) - f(x))$ de f entre x et $x + h$ est positif. Puisque f est dérivable en x, le taux d'accroissement $\Delta_x(h)$ admet une limite quand h tend vers 0 qui est $f'(x)$. D'après le théorème 13.1 page 605, on a

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \Delta_x(h) \geqslant 0.$$

⊵ Réciproquement, supposons que f' soit positive sur $]a, b[$. Considérons deux réels x_1 et x_2 dans $[a, b]$ avec $x_1 < x_2$. Par hypothèse f est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c dans l'intervalle $]x_1, x_2[$ tel que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1).$$

Or, par hypothèse, $f'(c) \geqslant 0$ et $x_2 - x_1 > 0$. On en déduit que $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ et cela quels que soient x_1 et x_2 appartenant à $[a, b]$ et vérifiant $x_1 < x_2$. On en conclut que f est croissante sur $[a, b]$. □

[14] On rappelle que si f est croissante sur $[a, b]$ alors $-f$ est décroissante sur $[a, b]$ et que si $f' \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors $(-f)' \leqslant 0$ sur $[a, b]$.

Remarque La deuxième partie de la démonstration permet de conclure que si f' est strictement positive sur l'intervalle $]a,b[$ alors f est strictement croissante sur $[a,b]$. Par contre la réciproque est fausse : une application dérivable sur un intervalle peut être strictement croissante sur cet intervalle sans pour autant que sa dérivée soit strictement positive. C'est le cas par exemple de l'application $x \in [-1,1] \mapsto x^3$ qui est strictement croissante mais dont la dérivée s'annule à l'origine. La raison pour laquelle la réciproque est fausse est que si pour tout h au voisinage de 0 on a $\Delta_x(h) > 0$ alors on peut seulement conclure que $\lim_{h\to 0} \Delta_x(h) \geqslant 0$ (voir la mise en garde et le contre-exemple donnés à la page 607).

Signalons que les résultats donnés ici s'étendent aux applications définies sur $\mathbb{R}$ (et pas seulement sur un intervalle compact $[a,b]$).

16.3.2 Application à la recherche d'extremum

DÉFINITION 16.6 *Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$.*

✗ *On dit que f admet un maximum local (resp. un minimum local) en $x_0 \in D$ s'il existe un voisinage*[15] *V de x_0 inclus dans D tel que*

$$\forall x \in V \quad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\textit{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Un maximum ou un minimum local est appelé un extremum local.

✗ *On dit que f admet un maximum global (resp. un minimum global) en $x_0 \in D$ si*

$$\forall x \in D \quad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\textit{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Remarque Si f admet $f(x_0)$ pour maximum local en $x_0 \in D$ alors $-f$ admet $-f(x_0)$ pour minimum local en x_0.

PROPOSITION 16.12 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une application dérivable sur un voisinage de x_0.*

✗ *Si $f(x_0)$ est un extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$.*

✗ *Si $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0 (f' est positive à gauche de x_0 et négative à droite de x_0 ou inversement) alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.*

Démonstration ⊵ On utilise une idée analogue à celle mise en œuvre dans la démonstration du théorème de Rolle, voir page 766. Supposons que f admette un maximum local en x_0 (le cas où f admet un minimum local en x_0 s'en

(15) En d'autres termes un intervalle ouvert I de centre x_0, voir la définition 3.10 p. 116.

déduira d'après la remarque précédente). D'après la définition 16.6, il existe un intervalle I de centre x_0 tel que $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in I$. Désignons par $\Delta_{x_0}(h)$ le taux d'accroissement de f entre x et x_0, *i.e.*

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

On déduit de ce qui précède que

$$\begin{array}{rl} & \forall x \in I \quad \big(x > x_0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta_{x_0}(h) \leqslant 0\big) \\ \text{et} & \forall x \in I \quad \big(x < x_0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta_{x_0}(h) \geqslant 0\big). \end{array}$$

Puisque f est dérivable en x_0, d'après le théorème 13.1 page 605, cela implique que les dérivées de f à gauche et à droite en 0 vérifient

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \Delta_{x_0}(h) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \Delta_{x_0}(h) \geqslant 0.$$

Mais puisque f est dérivable en x_0, on a

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0).$$

Comme $f'_g(x_0) \leqslant 0$ et $f'_d(x_0) \geqslant 0$ on a nécessairement $f'(x_0) = 0$.

$\trianglerighteq$ Supposons que $f'(x_0) = 0$ et que f' change de signe en x_0 (pour fixer les idées, supposons que f' est négative sur un voisinage à gauche de x_0 et positive sur un voisinage à droite de x_0). Cela implique, d'après la proposition 16.11, qu'il existe un réel $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit décroissante sur $[x_0 - \eta, x_0]$ et croissante sur $[x_0, x_0 + \eta]$. On a donc

$$\big(\forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\quad f(x) \geqslant f(x_0)\big) \quad \text{et} \quad \big(\forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\quad f(x) \geqslant f(x_0)\big),$$

autrement dit $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. D'après la définition 16.6, on en conclut que l'application f admet un minimum local en x_0.

Si on suppose que f' est positive à gauche de x_0 et négative à droite de x_0, alors on vérifie, en utilisant un raisonnement similaire, que f admet un maximum local en x_0. □

La condition $f'(x_0) = 0$ seule n'implique pas l'existence d'un extremum local. Il est impératif qu'en plus f' change de signe en x_0. Par exemple la fonction $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$. Pourtant on a $f'(0) = 0$.

Remarque Sous l'hypothèse que f est deux fois dérivable au voisinage de x_0, la seconde propriété énoncée à la proposition 16.12 peut s'exprimer de la manière suivante : si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$ alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.

EXERCICE 8 Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ. Le tracteur va deux fois plus vite sur la route que dans le champ. On suppose que le tracteur se déplace sur la route et dans le champ à vitesse constante. La distance AC est désignée par L et la distance CB par d. Déterminer le point D où le tracteur doit quitter la route pour que le temps de parcours de A à B soit minimal. On discutera la solution suivant les valeurs de L et d.

16.3.3 Étude de la convexité

DÉFINITION 16.7

✗ *Une application f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite convexe sur $[a,b]$ si :*
$\forall (x_1, x_2) \in [a,b]^2 \ \forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda\ f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2).$$

✗ *Une application f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite concave sur $[a,b]$ si $-f$ est convexe sur $[a,b]$, c'est-à-dire, si :*
$\forall (x_1, x_2) \in [a,b]^2 \ \forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda\ f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2).$$

Exemple L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &- (\lambda\ f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2)) \\ &= (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 - (\lambda\ x_1^2 + (1-\lambda)\ x_2^2) \\ &= \lambda(\lambda-1)\ (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \\ &= \lambda(\lambda-1)\ (x_1 - x_2)^2. \end{aligned}$$

Cette quantité est négative pour $\lambda \in [0,1]$, donc, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda\ f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2).$$

Interprétation graphique de la convexité. Soient $(x_1, x_2) \in [a,b]^2$, $\lambda \in [0,1]$ et $x^\star = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Si f est convexe sur $[a,b]$ l'inégalité de convexité indique que le point M de coordonnées $(x^\star, f(x^\star))$ est au-dessous du point P de coordonnées $\big(x^\star, \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\big)$, voir la figure 6. Si on désigne par M_1 et M_2 les points de la représentation graphique Γ de f de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, la convexité de f sur $[a,b]$ signifie que l'arc d'extrémités M_1, M_2 de Γ est situé sous le segment $[M_1, M_2]$ qui le sous-tend.

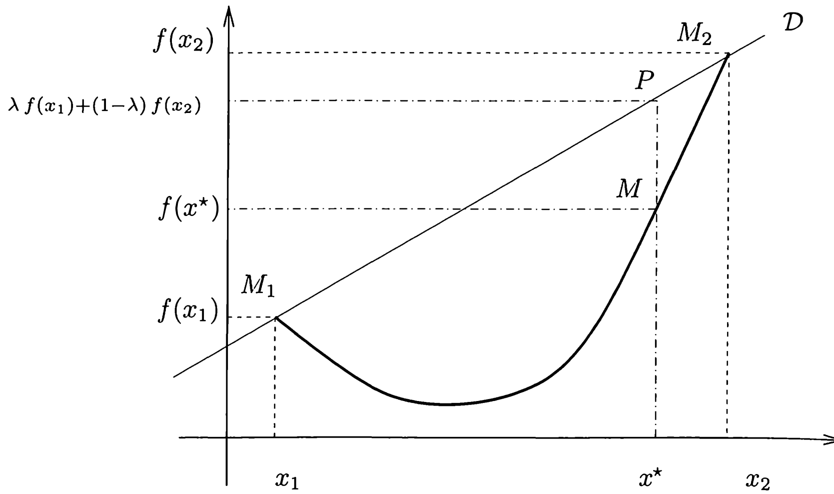


Fig. 6 Interprétation graphique de la convexité.

PROPOSITION 16.13 *Soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit convexe sur $[a,b]$ est que f' soit croissante sur $]a,b[$.*

Démonstration $\trianglerighteq$ Montrons que la condition est suffisante. Supposons que f' est croissante sur $[a,b]$ et considérons deux réels x_1, x_2 dans $[a,b]$ avec $x_1 < x_2$, $\lambda \in]0,1[$ et $x^\star = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

D'après les hypothèses, l'application f est continue sur $[x_1, x^\star]$ et dérivable sur $]x_1, x^\star[$. D'après le théorème des accroissements finis, n en déduit l'existence d'un réel $c_1 \in]x_1, x^\star[$ tel que

$$f(x^\star) - f(x_1) = (x^\star - x_1)\ f'(c_1).$$

Comme $x^\star - x_1 = (1-\lambda)\ (x_2 - x_1)$, le réel c_1 vérifie

$$f'(c_1) = \frac{f(x^\star) - f(x_1)}{(1-\lambda)\ (x_2 - x_1)}.$$

De même, d'après les hypothèses, l'application f est continue sur $[x^\star, x_2]$ et dérivable sur $]x^\star, x_2[$. On en déduit, d'après le théorème des accroissements finis, l'existence d'un réel $c_2 \in]x^\star, x_2[$ tel que

$$f(x_2) - f(x^\star) = (x_2 - x^\star)\ f'(c_2).$$

Comme $x_2 - x^\star = \lambda\ (x_2 - x_1)$, le réel c_2 vérifie

$$f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(x^\star)}{\lambda\ (x_2 - x_1)}.$$

Puisque f' est croissante sur $[a,b]$ et que $c_2 > c_1$, on a $f'(c_2) \geqslant f'(c_1)$, *i.e.*

$$\frac{f(x_2) - f(x^\star)}{\lambda\,(x_2 - x_1)} \geqslant \frac{f(x^\star) - f(x_1)}{(1-\lambda)\,(x_2 - x_1)}.$$

On en déduit que pour tout $(x_1, x_2) \in [a,b]^2$ avec $x_1 < x_2$, et pour tout $\lambda \in]0,1[$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2).$$

Remarquons enfin que si $x_1 = x_2$ ou si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, l'inégalité de convexité est trivialement vérifiée car on a dans ce cas

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2).$$

On en conclut que pour tout $(x_1, x_2) \in [a,b]^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$

c'est-à-dire, d'après la définition 16.7, que f est convexe sur $[a,b]$.

$\trianglerighteq$ Nous admettons que la condition est nécessaire. □

COROLLAIRE 16.1 *Soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ admettant une dérivée seconde sur $]a,b[$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit convexe sur $[a,b]$ est que f'' soit positive sur $]a,b[$.*

Exemple La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}$. La fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée seconde $x \mapsto -1/x^2$ est négative sur $\mathbb{R}_+^*$, voir la figure 7. L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)' = \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}\right)' = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} < 0.$$

Remarque On montre qu'une fonction convexe sur l'intervalle $[a,b]$ est nécessairement continue sur l'intervalle $]a,b[$ et qu'elle admet en tout point de $]a,b[$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite.

Application à la construction de la représentation graphique d'une application

Soient f une fonction deux fois dérivable sur $]a,b[$ et $x_0 \in]a,b[$. On dit que le point M de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ est un *point d'inflexion* du graphe de f si l'on a $f''(x_0) = 0$ et si f'' change de signe au voisinage de x_0. Dans ce cas, d'une application convexe à gauche de x_0, l'application f devient une application concave à droite de x_0 ou inversement[16]. Graphiquement, on dit que la représentation graphique Γ change de concavité en M. Le sens de la concavité donne une information utile pour le tracé de la représentation graphique d'une fonction.

[16] Pour différencier visuellement une fonction convexe d'une fonction concave, on pourra observer la forme de la représentation graphique de la fonction : si elle dessine les parois d'une grotte (« *cave* » en anglais) c'est que la fonction est con-cave. Dessiner la représentation graphique de $x \mapsto x^2$ qui est convexe et de $x \mapsto -x^2$ qui est concave à titre d'illustration.

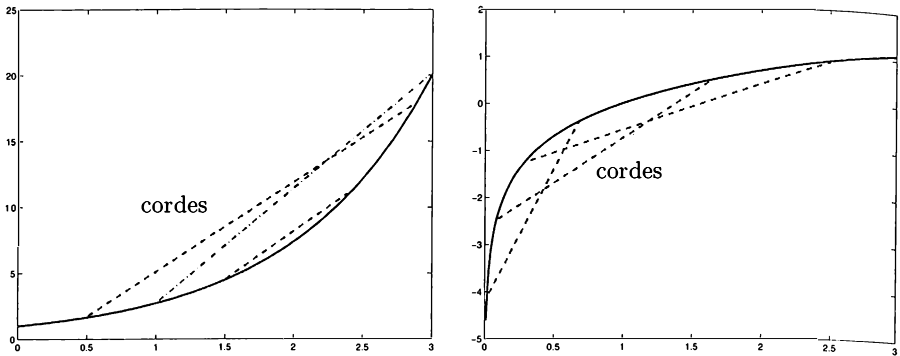


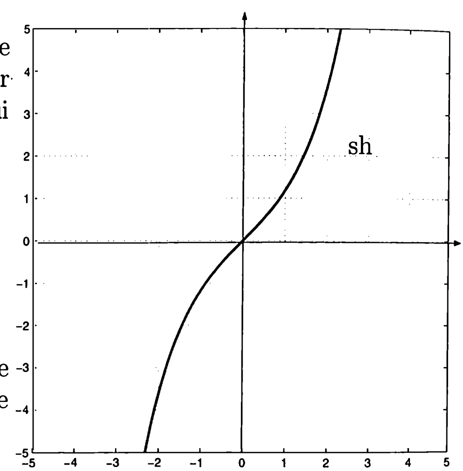
Fig. 7 Illustration de la convexité de la fonction exponentielle (à gauche) et de la concavité de la fonction logarithme (à droite).

Exemple La fonction sinus hyperbolique admet un point d'inflexion à l'origine.

En effet, la fonction sinus hyperbolique est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $f''(x) = \mathrm{sh}(x)$ ce qui implique que

$$\begin{cases} f''(x) < 0 & \text{si } x < 0, \\ f''(0) = 0, & \\ f''(x) > 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ainsi, la fonction sinus hyperbolique est concave sur $\mathbb{R}^-$ et elle est convexe sur $\mathbb{R}^+$.



La condition $f''(x_0) = 0$ seule ne suffit pas pour conclure que le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion du graphe de f. Il faut en plus s'assurer que la dérivée seconde de f change de signe en x_0. Ainsi l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^4$ a une dérivée seconde qui est nulle pour $x_0 = 0$. Toutefois cette application est convexe sur $\mathbb{R}$ et son graphe n'admet donc pas de point d'inflexion.

Exercice 9 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ a deux points d'inflexion qui sont 1 et -1.

16.3.4 La règle de L'Hôpital

Le théorème des accroissements finis (théorème 16.2) admet la généralisation suivante[17] dit « des accroissements finis généralisés ».

Théorème 16.3 (Théorème des accroissements finis généralisés)
Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$(g(b) - g(a))\ f'(c) = (f(b) - f(a))\ g'(c).$$

Démonstration On considère la disjonction de cas suivante : ou bien $g(a) = g(b)$, ou bien $g(a) \neq g(b)$.

⊵ Supposons que $g(a) = g(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a

$$\underbrace{(g(b) - g(a))}_{=0}\ f'(c) = 0 \qquad \text{et} \qquad (f(b) - f(a))\ \underbrace{g'(c)}_{=0} = 0,$$

donc $(g(b) - g(a))\ f'(c) = (f(b) - f(a))\ g'(c)$. Le Théorème est démontré dans le cas où $g(a) = g(b)$.

⊵ Supposons maintenant que $g(a) \neq g(b)$ et considérons l'application ϕ définie sur $[a,b]$ par

$$\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\ g(x). \tag{2}$$

Par hypothèse f et g sont continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$; l'application ϕ est donc continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Elle vérifie par ailleurs

$$\phi(a) = \phi(b) = \frac{f(a)g(b) - g(a)f(b)}{g(b) - g(a)}.$$

D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $\phi'(c) = 0$. Or, d'après (2),

$$\phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\ g'(c)$$

donc il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$(g(b) - g(a))\ f'(c) = (f(b) - f(a))\ g'(c).$$

Le théorème est démontré dans le cas où $g(a) \neq g(b)$. □

[17] On retrouve le théorème des accroissements finis en prenant $g : x \mapsto x$ dans l'énoncé du théorème 16.3.

PROPOSITION 16.14 (Règle de L'Hôpital[18])
Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions réelles continues sur *un voisinage de x_0 et dérivables*[19] au *voisinage de x_0. On suppose que g' ne s'annule pas au voisinage de x_0. On a*

$$\left(\exists \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell\right) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \ell.$$

Démonstration Les deux fonctions f et g sont continues sur un intervalle ouvert $\mathcal{V}$ contenant x_0 et dérivables en tout point de cet intervalle sauf éventuellement en x_0. Supposons que $\lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x) = \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Pour $x \in \mathcal{V} \setminus \{x_0\}$, la formule des accroissements finis généralisés appliquée à f et à g sur l'intervalle d'extrémités[20] x_0 et x assure l'existence d'un réel c_{x,x_0} dans l'intervalle d'extrémités x_0 et x tel que

$$(f(x) - f(x_0))\ g'(c_{x,x_0}) = (g(x) - g(x_0))\ f'(c_{x,x_0}).$$

Puisque g' ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$, on en déduit[21] que $g(x) - g(x_0) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{x_0\}$ et par conséquent que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_{x,x_0})}{g'(c_{x,x_0})}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to x_0} c_{x,x_0} = x_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ donc[22] $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(c_{x,x_0})}{g'(c_{x,x_0})} = \ell$. On en conclut que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell,$$

ce qui établit la règle de L'Hôpital. □

Exemples

1. Utilisons la règle de L'Hôpital pour calculer la limite en 0 de la fonction $\phi : x \mapsto \frac{\sin(x) - x}{x^2}$. Posons $f : x \mapsto \sin(x) - x$ et $g : x \mapsto x^2$. On a $f(0) = g(0) = 0$. Les applications f et g sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$f' : x \longmapsto \cos(x) - 1, \qquad g' : x \longmapsto 2x.$$

---

[18] L'HÔPITAL, Guillaume, marquis de Sainte-Mesme (1661, Paris - 1704, Paris). L'Hôpital est un élève de Jean Bernoulli. Par suite d'un arrangement financier avec J. Bernoulli, G. de L'Hôpital publie sous son propre nom des résultats démontrés par son maître. La *Règle de L'Hôpital* est due à J. Bernoulli (1694) et est attribuée à tort à G. de L'Hôpital qui la publie en 1696.

[19] Les applications f et g sont donc définies sur un intervalle ouvert $\mathcal{V}$ contenant x_0. Elles sont continues sur $\mathcal{V}$ et dérivables en tout point de l'intervalle $\mathcal{V}$ sauf éventuellement en x_0. De plus g' ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$.

[20] L'intervalle est $]x_0, x[$ ou $]x, x_0[$ selon que $x > x_0$ ou que $x < x_0$.

[21] D'après le théorème de Rolle : si pour un réel $x \in \mathcal{V} \setminus \{x_0\}$ on avait $g(x) - g(x_0) = 0$ cela impliquerait que g' s'annule en un réel c appartenant à l'intervalle d'extrémités x et x_0.

[22] Voir la proposition 13.14 p. 612.

Puisque $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$, on a $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \underset{0}{\sim} -\dfrac{x}{4}$ et $\lim_{x\to 0} f'(x)/g'(x) = 0$. La Règle de L'Hôpital permet de conclure que $\lim_{x\to 0} \phi(x) = 0$.

2. Calculons la limite suivante :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{argsh}(x) - \ln(1+\sqrt{2})}{x^2 - 1}.$$

Soient f et g les applications définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \operatorname{argsh}(x)$ et $g(x) = x^2$. On a

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2x\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{et} \qquad f(1) = \ln(1+\sqrt{2}), \qquad g(1) = 1.$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{argsh}(x) - \ln(1+\sqrt{2})}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 10 En utilisant la Règle de L'Hôpital, calculer $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$.

L'implication réciproque dans la règle de L'Hôpital est fausse. Considérons les applications f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sin(x).$$

On a $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$ mais

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \left(2x \sin(1/x) - \cos(1/x)\right)$$

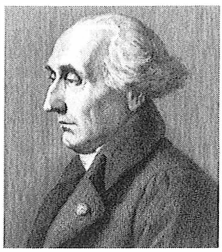
n'a pas[23] de limite en 0.

16.3.5 Interpolation de Lagrange

Les fonctions polynomiales étant les fonctions les plus faciles à évaluer numériquement, on a souvent recours à l'approximation d'une fonction quelconque sur un intervalle donné par une fonction polynomiale. C'est par exemple cette approche qui est utilisée dans la construction de certaines méthodes d'intégration numérique, voir la section 18.4.3. Parmi les différentes méthodes d'approximation d'une fonction par une fonction polynomiale, la méthode de référence est la méthode d'interpolation de Lagrange que nous présentons dans cette section.

[23] Cela est dû à la présence du terme $\cos(1/x)$ qui n'a pas de limite quand x tend vers 0.

LAGRANGE, Joseph (1736, Turin - 1813, Paris).



Lagrange est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du 18[e] siècle. En 1766, il est nommé Président de l'Académie de Berlin par Frédéric II pour succéder à Euler. En 1787, Lagrange arrive à Paris à l'invitation de Louis XVI. Il échappe de justesse à la mort durant la révolution française. Il contribua à la création du système métrique, à la fondation du Bureau des Longitudes et de l'École Polytechnique. Il fut membre de l'Institut, sénateur, Comte d'Empire et Grand Officier de la Légion d'Honneur.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Soient $(n+1)$ réels distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b.$$

On s'intéresse au problème suivant : trouver un polynôme P_n de degré au plus n qui prenne les mêmes valeurs que f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, voir la figure 8. Les réels $(x_i)_{i \in \{0,\ldots,n\}}$ sont appelés les nœuds d'interpolation. Le problème peut également se formuler de la manière suivante : étant donnés $(n+1)$ réels $y_0, \ldots, y_n$, trouver un polynôme P_n de degré au plus n tel que $P_n(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$.

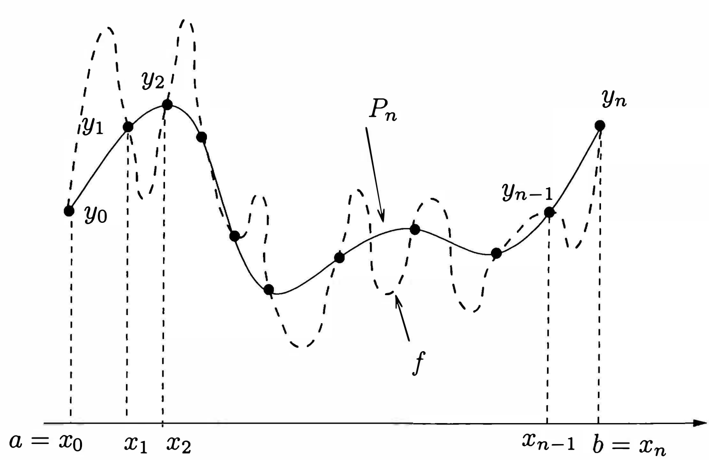


Fig. 8 Illustration de l'interpolation polynomiale.

La proposition suivante nous assure que ce problème est « bien posé » au sens où il admet une unique solution. Le résultat a été démontré au cours de l'exercice 10 page 258. On pourra consulter également l'exercice 7, page 359.

PROPOSITION 16.15 *Il existe un unique polynôme P_n de degré au plus n tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Ce polynôme est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux nœuds $x_0, x_1, \dots, x_n$.*

Comment se calcule le polynôme d'interpolation de Lagrange ?

Désignons par $a_k, k \in \{0, \dots, n\}$ les coefficients du polynôme d'interpolation de Lagrange de f ; on a $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Trouver le polynôme P_n c'est déterminer les valeurs des coefficients $a_k, k \in \{0, \dots, n\}$. Le polynôme P_n est défini par les relations $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Les coefficients $a_k, k \in \{0, \dots, n\}$ sont donc solutions du système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n &= f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n &= f(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n &= f(x_n) \end{cases}$$

qui admet l'écriture matricielle $\mathrm{M\,U} = \mathrm{F}$ où

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{pmatrix}.$$

La matrice M est appelée matrice de Vandermonde[24]. La proposition 16.15 nous assure que la matrice de Vandermonde est inversible et que le système linéaire (S) admet une unique solution. Une autre méthode pour démontrer que le système linéaire (S) admet une unique solution consisterait à établir que le déterminant de la matrice de Vandermonde est non nul.

À titre d'illustration, considérons la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et déterminons son polynôme d'interpolation de Lagrange aux nœuds $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π en ayant recours à MAPLE. Le programme MAPLE suivant calcule le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux noeuds spécifiés dans le tableau x. Il dessine la représentation graphique de f ainsi que celle de son polynôme d'interpolation de Lagrange. On pourra très facilement explorer le comportement de l'interpolation de Lagrange en modifiant dans le programme l'expression de f et celle des noeuds d'interpolation.

```
> restart: with(linalg):
> f:=x->sin(x): # Les données du problème
  n:=4:
  x:=[-Pi,-Pi/2,0,Pi/2,Pi]:
> F:=[seq(f(x[i]),i=1..n+1)]; # Le second membre du système linéaire
```

$$F := [0, -1, 0, 1, 0]$$

(24) Alexandre VANDERMONDE (Paris, 1735 - Paris, 1796).

```
> M:=matrix(n+1,n+1,[seq(seq(x[i]^j,j=0..n),i=1..n+1)]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & -\pi & \pi^2 & -\pi^3 & \pi^4 \\ 1 & -\frac{1}{2}\pi & \frac{1}{4}\pi^2 & -\frac{1}{8}\pi^3 & \frac{1}{16}\pi^4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}\pi & \frac{1}{4}\pi^2 & \frac{1}{8}\pi^3 & \frac{1}{16}\pi^4 \\ 1 & \pi & \pi^2 & \pi^3 & \pi^4 \end{bmatrix}$$

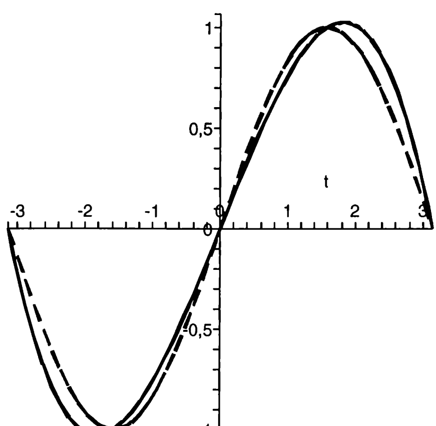
```
> U:=evalm(inverse(M)&*F);
```

$$U := [0, \frac{8}{3\pi}, 0, -\frac{8}{3\pi^3}, 0]$$

```
> P:=x-> sum(U[k+1]*x^(k),k=0..n):
> P(X);
```

$$\frac{8}{3\pi}X - \frac{8}{3\pi^3}X^3$$

```
> plot([f(t),P(t)],t=x[1]..x[n+1],linestyle=[DASH,SOLID]);
```



Signalons que nous aurions pu construire la matrice M sous MAPLE en ayant recours à la commande `vandermonde`. Par ailleurs, pour résoudre le système linéaire, plutôt que de calculer l'inverse de la matrice M, on pourra préférer résoudre le système linaire en ayant recours à la commande `linsolve` :

```
> U:=linsolve(M,F);
```

Cette façon de procéder est même indispensable si l'on souhaite considérer de grande valeurs de n en raison du temps de calcul prohibitif de l'inverse d'une matrice[25].

La fonction polynomiale P_n prend les mêmes valeurs que la fonction f aux nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et « approche » f entre ces points. Pour estimer l'erreur

[25] Voir p. 451 la remarque à ce sujet.

d'interpolation, c'est-à-dire l'écart entre $f(x)$ et $P_n(x)$ pour $x \in [a,b]$, nous avons besoin du lemme 16.1 qui constitue une généralisation du théorème de Rolle.

Lemme 16.1 *Soit g une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) sur $[a,b]$, admettant une dérivée p-ième sur $]a,b[$ et soient $c_0, c_1, \ldots, c_p$ ($p+1$) réels distincts de l'intervalle $[a,b]$ tels que $g(c_i) = g(c_0)$ pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$. Il existe un réel $\zeta \in]a,b[$ tel que $g^{(p)}(\zeta) = 0$.*

Démonstration En utilisant le théorème de Rolle et un raisonnement par récurrence sur l'entier p démontrons la propriété :

« si g est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $[a,b]$ admettant une dérivée p-ième sur $]a,b[$ et vérifiant $g(c_i) = g(c_0)$ pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$ alors il existe un réel $\zeta \in]a,b[$ tel que $g^{(p)}(\zeta) = 0$ ».

$\trianglerighteq$ La propriété est vraie pour $p = 1$: c'est le théorème de Rolle.

$\trianglerighteq$ Supposons la propriété vraie pour un entier p donné et montrons qu'elle est vraie pour l'entier suivant, c'est-à-dire montrons que

« si $\widetilde{g}$ est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$ admettant une dérivée $(p+1)$-ième sur $]a,b[$ et vérifiant $\widetilde{g}(\widetilde{c}_i) = \widetilde{g}(\widetilde{c}_0)$ pour tout $i \in \{1,\ldots,p+1\}$ alors il existe un réel $\widetilde{\zeta} \in]a,b[$ tel que $\widetilde{g}^{(p+1)}(\widetilde{\zeta}) = 0$ ».

Puisque $\widetilde{g}(\widetilde{c}_i) = \widetilde{g}(\widetilde{c}_0)$ pour tout $i \in \{1,\ldots,p+1\}$ on a :

- $\widetilde{g}(\widetilde{c}_0) = \widetilde{g}(\widetilde{c}_1)$ et d'après le théorème de Rolle, il existe $c_0 \in]\widetilde{c}_0, \widetilde{c}_1[$ tel que $\widetilde{g}'(c_0) = 0$;
- $\widetilde{g}(\widetilde{c}_1) = \widetilde{g}(\widetilde{c}_2)$ et d'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2[$ tel que $\widetilde{g}'(c_1) = 0$;

$\vdots$

- $\widetilde{g}(\widetilde{c}_p) = \widetilde{g}(\widetilde{c}_{p+1})$ et d'après le théorème de Rolle, il existe $c_p \in]\widetilde{c}_p, \widetilde{c}_{p+1}[$ tel que $\widetilde{g}'(c_p) = 0$.

La fonction $\widetilde{g}'$ satisfait aux conditions de l'hypothèse de récurrence, donc il existe un réel $\zeta \in]c_0, c_p[$ tel que $\left(\widetilde{g}'\right)^{(p)}(\zeta) = 0$. Or, $\left(\widetilde{g}'\right)^{(p)}(\zeta) = \widetilde{g}^{(p+1)}(\zeta)$ et $]c_0, c_p[\subset]a,b[$. La propriété est donc vraie pour l'entier $(p+1)$ et la récurrence est achevée. □

Proposition 16.16 *Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ admettant une dérivée $(n+1)$-ième sur $]a,b[$ et soit P_n son polynôme d'interpolation de Lagrange aux nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[a,b]$. Pour tout $t \in [a,b]$, il existe un réel $\zeta_t \in]a,b[$ tel que*

$$f(t) - P_n(t) = \frac{\Pi_{n+1}(t)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\zeta_t)$$

où Π_{n+1} désigne le polynôme défini par

$$\Pi_{n+1} = (X - x_0) \times (X - x_1) \times \ldots \times (X - x_n).$$

Démonstration Pour $t \in [a, b]$ fixé, $t \notin \{x_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$, on note $c^\star$ le réel défini par la relation $f(t) - P_n(t) = c^\star\,\Pi_{n+1}(t)$ et on considère l'application

$$g : x \in [a, b] \longmapsto f(x) - P_n(x) - c^\star\,\Pi_{n+1}(x).$$

Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a

$$g(x_i) = \underbrace{f(x_i) - P_n(x_i)}_{=0} - c^\star\,\underbrace{\Pi_{n+1}(x_i)}_{=0} = 0.$$

De plus, $g(t) = f(t) - P_n(t) - c^\star\,\Pi_{n+1}(t) = 0$. D'après le lemme 16.1, il existe donc un réel $\zeta_t \in]a, b[$ tel que $g^{(n+1)}(\zeta_t) = 0$. Par ailleurs, on a d'après la relation définissant g,

$$g^{(n+1)}(\zeta_t) = f^{(n+1)}(\zeta_t) - P_n^{(n+1)}(\zeta_t) - c^\star\,\Pi_{n+1}^{(n+1)}(\zeta_t).$$

Le polynôme P_n étant de degré n, $P_n^{(n+1)}$ est le polynôme nul. Le polynôme Π_{n+1} est un polynôme normalisé[26] de degré $(n+1)$ donc $\Pi_{n+1}^{(n+1)}(\zeta_t) = (n+1)!$. On a ainsi

$$g^{(n+1)}(\zeta_t) = f^{(n+1)}(\zeta_t) - c^\star\,(n+1)!$$

et par conséquent $c^\star = \dfrac{f^{(n+1)}(\zeta_t)}{(n+1)!}$. On en déduit que

$$f(t) - P_n(t) = c^\star\,\Pi_{n+1}(t) = \frac{\Pi_{n+1}(t)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\zeta_t)$$

pour tout réel $t \in [a, b]$ avec $t \notin \{x_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$.
La relation est également vraie pour $t \in \{x_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$ car pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ on a

$$f(x_i) - P_n(x_i) = 0 = \Pi_{n+1}(x_i),$$

donc pour tout $\zeta_t \in]a, b[$,

$$f(x_i) - P_n(x_i) = \frac{\Pi_{n+1}(c_i)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\zeta_t).$$

On a ainsi établi que pour tout $t \in [a, b]$, il existe un réel $\zeta_t \in]a, b[$ tel que

$$f(t) - P_n(t) = \frac{\Pi_{n+1}(t)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\zeta_t).$$

La proposition est démontrée. □

Rappelons (voir p. 596) que si ϕ désigne une application bornée sur un intervalle $[a, b]$, on note $\|\phi\|_\infty$ la borne supérieure de $|\phi|$ sur $[a, b]$:

$$\|\phi\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |\phi(x)|.$$

---

[26] Voir la définition 6.3 p. 222.

COROLLAIRE 16.2 *Soit f une fonction réelle de classe C^n sur $[a,b]$ admettant une dérivée $(n+1)$-ième sur $]a,b[$ et soit P_n son polynôme d'interpolation de Lagrange aux nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[a,b]$. On a*

$$\|f - P_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty \; \|\Pi_{n+1}\|_\infty.$$

Démonstration D'après la proposition 16.16, pour tout réel $t \in [a,b]$ on a

$$|f(t) - P_n(t)| = \frac{|\Pi_{n+1}(t)|}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\zeta_t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty \; \|\Pi_{n+1}\|_\infty. \quad (3)$$

Comme la relation (3) est vraie pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - P_n(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty \; \|\Pi_{n+1}\|_\infty.$$

Le résultat est démontré. □

On remarque que l'erreur d'interpolation dépend à la fois de $f^{(n+1)}$ et de Π_{n+1}, c'est-à-dire de la façon dont sont choisis les nœuds d'interpolation.

Exemple Considérons à nouveau la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Son polynôme d'interpolation de Lagrange aux nœuds $-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ est $P_4 = \frac{8}{3\pi}X - \frac{8}{3\pi^3}X^3$. On a de manière évidente $\|\sin^{(n+1)}\|_\infty = 1$. Le polynôme Π_5 a pour expression

$$\Pi_5 = (X+\pi)(X+\tfrac{\pi}{2})X(X-\pi)(X-\tfrac{\pi}{2}).$$

Sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ la fonction polynomiale Π_5 admet des extrema locaux en les réels α tels que $\Pi_5'(\alpha) = 0$. Le polynôme Π_5' a pour expression

$$\Pi_5' = 5X^4 - \frac{15\pi^2}{4}X^2 + \frac{\pi^4}{4}.$$

Le changement d'indéterminée $Y = X^2$ permet d'exprimer Π_5' comme un polynôme de degré 2 en Y et ainsi de calculer ses racines. Il admet 4 racines réelles dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$ qui sont

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{145}}{10}}, \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{145}}{10}},$$
$$\alpha_3 = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{145}}{10}}, \qquad \alpha_4 = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{145}}{10}}.$$

On a

$$\|\Pi_5\|_\infty = \max\Big\{|\Pi_5(\alpha_1)|, |\Pi_5(\alpha_2)|, |\Pi_5(\alpha_3)|, |\Pi_5(\alpha_4)|\Big\} = |\Pi_5(\alpha_1)|.$$

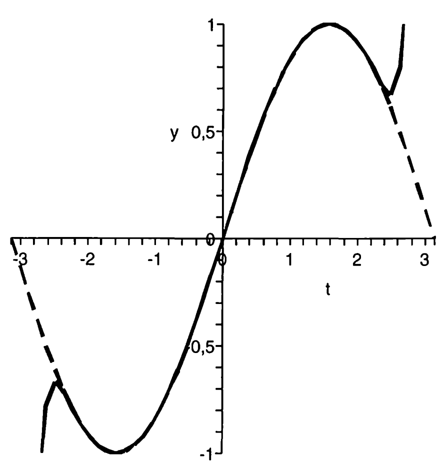
On en conclut que

$$\|f - P_4\|_\infty \leqslant \frac{|\Pi_5(\alpha_1)|}{5!} \approx 0.289.$$

Autrement dit, en tout point de l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on a un écart entre P_4 et la fonction sinus inférieur à 0.289.

Le corollaire 16.2 indique que l'écart entre une fonction f donnée et son polynôme d'interpolation de Lagrange P_n dépend des valeurs prises par la dérivées $(n+1)^{\text{e}}$ de f et de celles du polynôme Π_{n+1}, c'est-à-dire du choix des noeuds d'interpolation. Compte tenu du terme $\frac{1}{(n+1)!}$ qui est en facteur, on pourrait s'attendre à ce que l'écart entre f et P_n décroisse très vite lorsque l'on augmente le nombre de noeuds d'interpolation. C'est effectivement ce qui ce passe dans la plupart des cas. Toutefois, on a mis en évidence le fait que lorsque les noeuds d'interpolation sont régulièrement espacés (la distance entre deux noeuds étant toujours la même) l'erreur croit de manière très importante à proximité des extrémités a et b de l'intervalle sur lequel la fonction est interpolée. Ce phénomène est connu sous le nom de *phénomène de Runge*[27]. Le programme MAPLE suivant permet d'illustrer le phénomène de Runge apparaissant lors de l'interpolation de Lagrange de la fonction sinus sur $[-\pi, \pi]$ en prenant 42 noeuds d'interpolation équidistants.

```
> f:=x->sin(x):
> n:=41: a:=-Pi: b:=Pi: h:=(b-a)/n:
> x:=[seq(a+i*h, i=0..n)]:
> F:=[seq(f(x[i]),i=1..n+1)]:
> M:=matrix(n+1,n+1,[seq(seq(x[i]^j,j=0..n),i=1..n+1)]):
> U:=linsolve(M,F):
> P:=x-> sum(U[k+1]*x^(k),k=0..n):
> plot([f(t),P(t)],t=x[1]..x[n+1],y=-1..1,linestyle=[DASH,SOLID]]);
```



[27] RUNGE, Carl (1856, Brême - 1927, Göttingen). Mathématicien et physicien allemand qui a notamment développé avec M. Kutta une des méthodes de résolution numérique pour les équations différentielles les plus utilisées, la méthode de Runge-Kutta.

On voit très nettement l'écart important entre la fonction sinus et son polynôme d'interpolation de Lagrange aux extrémités de l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

16.4 La formule de Taylor-Lagrange

TAYLOR, Brook (1685, Edmonton - 1731, Londres).

Taylor a publié la méthode, connue maintenant sous le nom de formule de Taylor, permettant de d'approcher une fonction par une fonction polynomiale dans *Methodus incrementorum directa et inversa* en 1715. Il utilise cette formule en 1717 pour la recherche de solutions approchées de l'équation $f(x) = 0$. L'importance de ce résultat n'est reconnue qu'en 1772, date à laquelle Lagrange le qualifie de « principe de base du calcul différentiel ».

Nous avons déjà rencontré lors de l'étude des polynômes une relation appelée « formule de Taylor » (voir le théorème 6.3 page 240) qui indique que si P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n et a, b deux réels alors

$$P(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k.$$

Cette formule admet une généralisation dans le cas des fonctions non nécessairement polynomiales.

THÉORÈME 16.4 (Formule de Taylor-Lagrange)
Soient f une fonction réelle de classe C^n sur un intervalle I et a, b deux réels distincts appartenant à I. On suppose que f admet une dérivée $(n+1)^e$ sur I. Sous ces hypothèses, il existe un réel c dans l'intervalle ouvert[28] *d'extrémités a et b tel que*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Démonstration Nous allons supposer que $a < b$, le cas où $b < a$ nécessite seulement d'adapter les notations. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, considérons les applications u et v_λ définies sur $[a, b]$ par

$$u(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k \qquad \text{et} \qquad v_\lambda(x) = u(x) - \lambda \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

[28] Il s'agit de l'intervalle $]a, b[$ ou de l'intervalle $]b, a[$ selon que l'on a $a < b$ ou $a > b$.

$\trianglerighteq$ Comme f admet une dérivée $(n+1)^{\text{e}}$ sur $]a,b[$, l'application u est dérivable sur $]a,b[$. Pour tout $x \in]a,b[$, on a

$$u(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} u'(x) &= -f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k \right) \\ &= -f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k \\ &= -f'(x) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{f^{(\ell+1)}(x)}{\ell!} (b-x)^{\ell} - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n. \end{aligned}$$

$\trianglerighteq$ Puisque u est dérivable sur $]a,b[$, l'application v_λ est dérivable sur $]a,b[$ et a pour dérivée

$$\begin{aligned} v'_\lambda(x) &= u'(x) + \lambda \frac{(b-x)^n}{n!} = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + \lambda \frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= \left(\lambda - f^{(n+1)}(x)\right) \frac{(b-x)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$v_\lambda(b) = 0 \qquad \text{et} \qquad v_\lambda(a) = u(a) - \lambda \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Le paramètre λ étant quelconque, choisissons de lui assigner la valeur λ^* pour laquelle $v_{\lambda^*}(a) = 0$, c'est-à-dire

$$\lambda^* = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} u(a) = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right).$$

L'application v_{λ^*} est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie (par le choix qui vient d'être fait pour la valeur du paramètre λ) la condition $v_{\lambda^*}(a) = v_{\lambda^*}(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $v'_{\lambda^*}(c) = 0$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} v'_{\lambda^*}(c) = 0 &\iff \left(\lambda^* - f^{(n+1)}(c)\right) \frac{(b-c)^n}{n!} = 0 \\ &\iff \lambda^* = f^{(n+1)}(c) \\ &\iff \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right) = f^{(n+1)}(c) \\ &\iff f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \end{aligned}$$

Le théorème est démontré : il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}.$$

□

Remarques

1. Le terme $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}$ est appelé *reste de Taylor-Lagrange d'ordre* n de f en a.

2. On retrouve pour la formule de Taylor-Lagrange d'ordre 0, la formule des accroissements finis.

Exemple La formule de Taylor-Lagrange peut être utilisée pour établir certaines inégalités. Montrons par exemple que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$x - \tfrac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3.$$

On considère l'application $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \ln(x+1)$. Cette application est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ car la fonction logarithme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en prenant $b = x$ et $a = 0$: il existe un réel $c \in]0, x[$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \tfrac{1}{2}x^2 f''(0) + \tfrac{1}{6}x^3\, f^{(3)}(c) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3(1+c)^3}\, x^3.$$

Puisque $x \in \mathbb{R}^+$ et que $c \in]0, x[$, la quantité $\frac{1}{3(1+c)^3}\, x^3$ est positive. On en déduit que

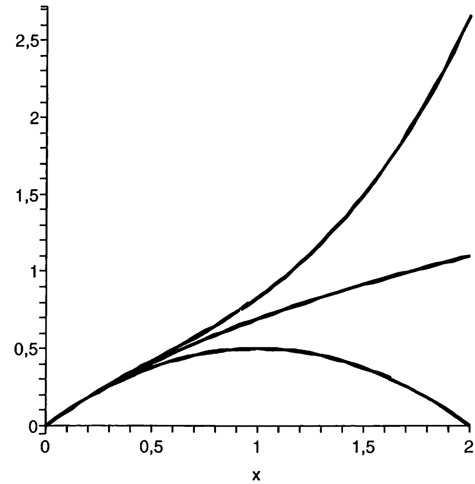
$$\ln(1+x) \geqslant x - \tfrac{1}{2}x^2.$$

Par ailleurs $1 + c \geqslant 1$ donc $\frac{1}{3(1+c)^3}\, x^3 \leqslant \frac{1}{3}x^3$. On en déduit que

$$\ln(1+x) \leqslant x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3.$$

On notera l'intérêt de disposer de la formule de Taylor-Lagrange pour établir ces deux inégalités. L'alternative consistant à étudier les deux fonctions $x \mapsto \ln(1+x) - (x - \frac{1}{2}x^2)$ et $x \mapsto \ln(1+x) - (x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3)$ nécessite beaucoup plus de calculs. Notons par ailleurs que la différence entre les deux fonctions polynomiales $P : x \mapsto x - \frac{1}{2}x^2$ et $Q : x \mapsto x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ en $x \in \mathbb{R}^+$ valant $\frac{1}{3}x^3$, l'encadrement est surtout pertinent pour $x \in [0, 1]$ comme l'illustre le programme MAPLE suivant.

```
> P:=x-> x-x^2/2:
> Q:=x-> x-x^2/2+x^3/3:
> f:=x-> log(1+x):
> plot([f(x),P(x),Q(x)],x=0..2);
```



Exercice 11 Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a

$$x - \frac{1}{6}\,x^3 \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5.$$

Formule de Taylor-Maclaurin

Soient a un réel, h un réel strictement positif et f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, a+h]$ admettant une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a, a+h[$. La formule de Taylor-Lagrange indique qu'il existe un réel $c \in]a, a+h[$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,h^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,h^{n+1}.$$

Le réel c de l'intervalle $]a, a+h[$ s'écrit de manière unique sous la forme $c = a+\theta h$ où $\theta \in]0,1[$. Ainsi, il existe un réel $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,h^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}\,h^{n+1}.$$

Cette relation porte traditionnellement le nom de formule de Taylor-Maclaurin (avec reste de Lagrange). On a une relation analogue dans le cas où $h \in \mathbb{R}_-^*$.

Exemple Soient a un réel, h un réel strictement positif et p un entier naturel. En appliquant la formule de Taylor-Maclaurin à l'ordre p à la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^p$, on obtient

$$f(a+h) = (a+h)^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

On remarquera que la dérivée $(p+1)$-ième de f est l'application nulle et que pour tout entier k compris entre 0 et p on a

$$f^{(k)}(a) = p(p-1)\cdots(p-(k-1))a^{p-k}.$$

On en déduit que

$$(a+h)^p = \sum_{k=0}^{p} \left(p(p-1)\cdots(p-(k-1))a^{p-k}\frac{h^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k}h^k.$$

On retrouve la formule du binôme de Newton.

16.5 Applications de la formule de Taylor-Lagrange

16.5.1 Approximation polynomiale

Soient I un intervalle et f une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I qui admet une dérivée $(n+1)^{\text{e}}$ sur I. Pour $a \in I$, considérons la fonction polynomiale p définie sur $\mathbb{R}$ par

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

On vérifie sans peine que pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$ on a $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$. On peut donc s'attendre à ce que pour n assez grand, la fonction polynomiale p constitue une bonne approximation de la fonction f dans un voisinage de a. La précision de cette approximation est donnée par la formule de Taylor-Lagrange qui nous indique qu'il existe un réel c compris entre a et x tel que

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Supposons que la dérivée $(n+1)$-ième de f sur l'intervalle I soit bornée par le réel positif M, *i.e.* supposons que

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in I \qquad |f^{n+1}(x)| \leqslant M.$$

Dans ce cas, l'erreur dans l'approximation de f par p en $x \in I$ est majorée par

$$\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Cette quantité est appelée la *borne d'erreur absolue*. Cette erreur est petite si M n'est pas trop grand et si *a contrario* n est choisi suffisamment grand. À titre d'exemple, considérons la fonction sinus sur l'intervalle $[0,1]$. On vérifie par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\tfrac{\pi}{2}).$$

Prenons $n = 4$. La fonction sinus est approchée par la fonction polynomiale

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

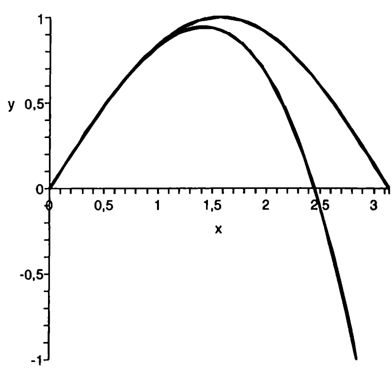
avec une erreur qui est en tout point x plus petite que $x^5/5!$. Il s'agit là d'une majoration de l'erreur ; l'erreur en un point donné peut être beaucoup plus petite que l'estimation donnée par la borne d'erreur absolue.

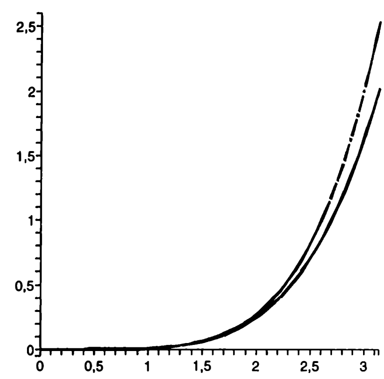
```
> n:=4:
> f:=x-> sin(x):
> p:= x-> convert(taylor(f(x),x=0,n),polynom):
> p(X);
```

$$X - \frac{1}{6}\,X^3$$

```
> berr:= x-> x^(n+1)/(n+1)!:
> plot([f(x),p(x)],x=0..Pi,y=-1..1);

> plot([berr(x),abs(f(x)-p(x))],x=0..Pi);
```





La figure de gauche représente la fonction sinus et le polynôme de Taylor sur l'intervalle $[0, \pi]$. La figure de droite représente la borne absolue d'erreur $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,M$ (tracé supérieur) et l'erreur effective (tracé inférieur).

On remarquera que pour une valeur de n fixée, l'approximation devient moins bonne lorsque la distance entre les réels x et a croit car le terme $(x-a)^{n+1}$ devient prédominant. C'est ce que l'on observe avec l'approximation de la fonction sinus sur l'intervalle $[0, \pi]$.

16.5.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point

Soient I un intervalle ouvert, f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et $x_0 \in I$. On note A le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. Au point A, la représentation graphique Γ de f admet pour tangente la droite $\mathcal{D}$ d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

On cherche à préciser la position de la représentation graphique de f par rapport à la droite $\mathcal{D}$ au voisinage de ce point. Pour cela il faut connaître le signe de
$$u(x) = f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)\big)$$
lorsque x est proche de x_0.

Soit $\nu = \min\{k \geqslant 2 \mid f^{(k)}(x_0) \neq 0\}$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $\nu - 1$ en x_0 indique qu'il existe un réel c_x dans l'intervalle ouvert d'extrémités x_0 et x tel que
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(\nu)}(c_x)}{\nu!}\ (x - x_0)^{\nu}.$$
On a donc
$$u(x) = \frac{f^{(\nu)}(c_x)}{\nu!}\ (x - x_0)^{\nu}.$$
On détermine aisément le signe de $(x - x_0)^{\nu}$ en fonction de la parité de ν. Par ailleurs
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(\nu)}(c_x)}{\nu!} = \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}$$
et $f^{(\nu)}(x_0)/\nu! \neq 0$ donc on peut trouver un voisinage de x_0 sur lequel la quantité $f^{(\nu)}(c_x)$ ne s'annule pas[29]. Cela implique que pour x assez proche de x_0, $f^{(\nu)}(c_x)$ est du même signe que $f^{(\nu)}(x_0)$.

Cela nous donne 4 possibilités pour le signe de u en fonction de la parité de ν et du signe de $f^{(\nu)}(x_0)$.

▷ Supposons que ν est pair. On a alors $(x - x_0)^{\nu} \geqslant 0$.

1. Si $f^{(\nu)}(x_0) > 0$, alors $u \geqslant 0$ et la représentation graphique Γ reste, au voisinage de A, au-dessus de sa tangente en A, voir la figure 9.
2. Si $f^{(\nu)}(x_0) < 0$, alors $u \leqslant 0$ et la représentation graphique Γ reste, au voisinage de A, au-dessous de sa tangente en A, voir la figure 10.

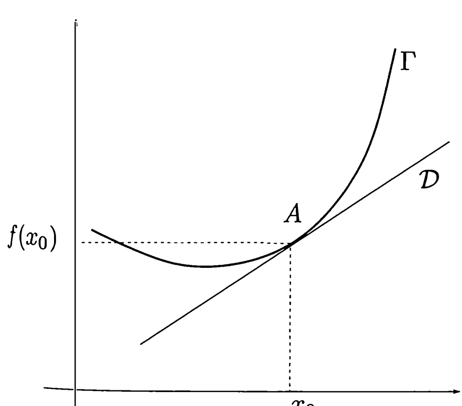


Fig. 9 Cas ν pair et $f^{(\nu)}(x_0) > 0$.

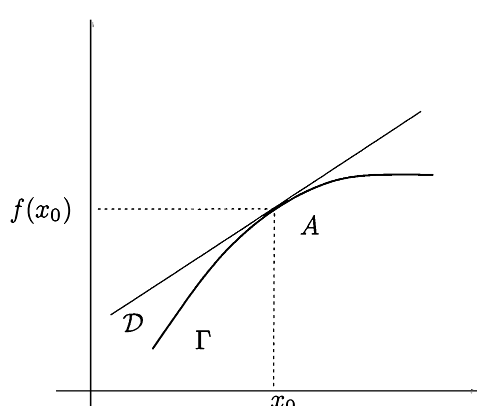


Fig. 10 Cas ν pair et $f^{(\nu)}(x_0) < 0$.

(29) Voir la proposition 13.16 p. 620.

▷ Supposons que ν est impair. Dans ce cas $(x - x_0)^\nu$ change de signe en x_0.

1. Si $f^{(\nu)}(x_0) > 0$, alors $u > 0$ si $x > x_0$ et $u < 0$ si $x < x_0$. La représentation graphique Γ est au-dessous de sa tangente en A pour $x < x_0$ et au-dessus de sa tangente en A pour $x > x_0$, voir la figure 11.
2. Si $f^{(\nu)}(x_0) < 0$, alors $u < 0$ si $x > x_0$ et $u > 0$ si $x < x_0$. La représentation graphique Γ est au-dessus de sa tangente en A pour $x < x_0$ et au-dessous de sa tangente en A pour $x > x_0$, voir la figure 12.

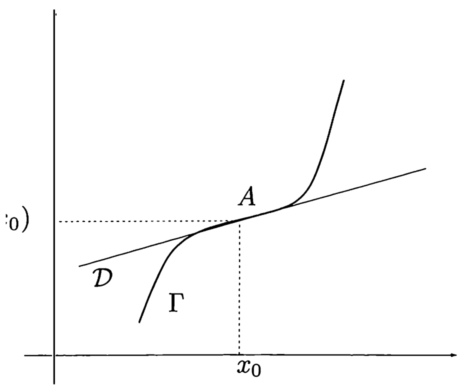


Fig. 11 Cas ν impair et $f^{(\nu)}(x_0) > 0$.

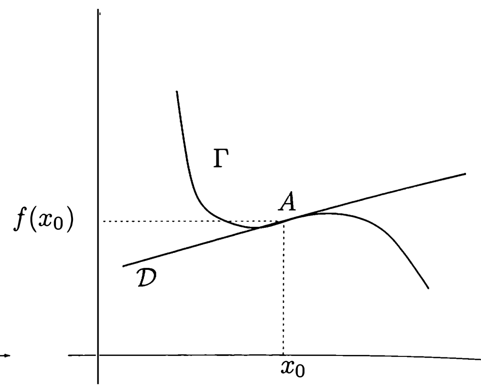


Fig. 12 Cas ν impair et $f^{(\nu)}(x_0) < 0$.

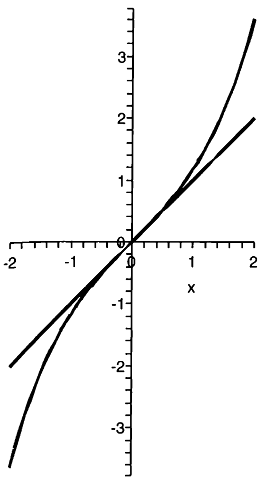
Exemples

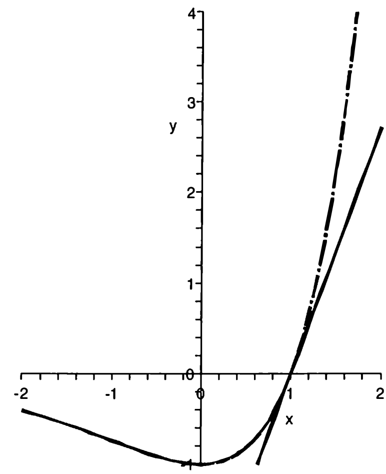
1. Considérons la fonction sinus hyperbolique et $x_0 = 0$. On a $\nu = 3$ car la fonction sinus hyperbolique admet en 0 pour dérivée $\text{ch}(0) = 1$, pour dérivée seconde $\text{sh}(0) = 0$ et pour dérivée troisième $\text{ch}(0) = 1$. La tangente en 0 a pour équation $y = x$. On est donc dans la situation correspondant au troisième cas : la représentation graphique de la fonction sinus hyperbolique est au-dessous de sa tangente à l'origine pour les valeurs négatives de x et au-dessus de sa tangente à l'origine pour les valeurs positives de x.

2. Considérons la fonction $f : x \mapsto (x-1)\,\mathrm{e}^x$ et $x_0 = 1$. On a $f(1) = 0$, $f'(1) = \mathrm{e}$ et $f''(1) = 2\mathrm{e}$. La tangente à la représentation graphique de f au point $(1,0)$ a donc pour équation $y = \mathrm{e}x - \mathrm{e}$ et on est dans la situation correspondant au premier cas $(\nu = 2)$. La représentation graphique de f reste au voisinage de $A = (0,1)$ au-dessus de sa tangente.

Le programme MAPLE suivant illustre la situation correspondant aux deux exemples traités. En modifiant l'expression de la fonction ou la valeur de x0, on pourra aisément explorer d'autres exemples.

```
> plot([sinh(x),x],x=-2..2);   # Premier exemple
# Le second exemple traité automatiquement
> f:=x->(x-1)*exp(x):          # la fonction
> f1:=unapply(diff(f(x),x),x); # sa dérivée
> x0:=1:                       # le point x0
> t:=x->f(x0)+(x-x0)*f1(x0):   # la tangente en x0
> plot([f(x),t(x)],x=-2..2);
```





16.6 Exercices de synthèse

Exercice 12 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application f_n définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier selon la valeur de $n \in \{0,1,2,3\}$ la continuité et la dérivabilité des applications f_n sur $\mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de n l'application f_n est-elle de classe C^1.

Exercice 13 *Soit f une application dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et admettant une dérivée à droite nulle en 0 et une dérivée à gauche nulle en 1. On souhaite montrer que cette application admet un point fixe dans l'intervalle $]0,1[$ c'est-à-dire montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.*

1 - Donner un exemple de fonction vérifiant les hypothèses de cet exercice.

2 - Soit g l'application définie sur $]0,1[$ par

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}.$$

Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} g(x)$; en déduire que g est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

3 - Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}.$$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha$.

4 - Montrer qu'il n'y a pas nécessairement unicité du point fixe en donnant un exemple de fonction vérifiant les hypothèses de cet exercice et possédant deux points fixes (on pourra s'intéresser aux fonctions polynomiales).

EXERCICE 14 ***Méthode de la fausse position.***

On s'intéresse à la fonction ψ définie par $\psi(x) = (1+x) + \arctan(x)$.

1 - a) Donner le tableau de variation de la fonction ψ (en indiquant toutes les limites utiles).

b) En déduire qu'il existe un unique réel $\zeta \in]-1, 0[$ tel que $\psi(\zeta) = 0$.

2 - Déterminer les asymptotes de ϕ et tracer la représentation graphique de la fonction ψ.

Dans la suite du problème, on étudie une méthode permettant de calculer une valeur approchée du réel ζ.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ vérifiant les conditions suivantes : $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et pour tout réel $x \in [a, b]$ $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$.

3 - Montrer qu'il existe un unique réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Soit p_0 la fonction polynomiale de degré 1 définie par $p_0(a) = f(a)$ et $p_0(b) = f(b)$. On désigne par c_1 l'unique réel vérifiant $p_0(c_1) = 0$ et on considère l'application $g = f - p_0$.

4 - a) Montrer que $g''(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$. En déduire que g ne s'annule pas sur $]a, b[$ (on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde et le théorème de Rolle).

b) Montrer qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $g'(x_0) = 0$. En déduire que g est négative sur $[a, b]$ (on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange).

c) Montrer que $p_0(c) > 0$ et conclure que le réel c_1 vérifie : $a < c_1 < c$.

On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie à partir de c_1 par récurrence de la manière suivante. On note p_n l'unique fonction polynomiale de degré 1 telle que

$$p_n(c_n) = f(c_n), \quad p_n(b) = f(b).$$

On définit c_{n+1} par $p_n(c_{n+1}) = 0$. On admet que l'on a : $a < c_{n+1} < c$.

5 - a) Donner l'expression de p_n en fonction de $c_n, b, f(c_n), f(b)$.

b) En déduire que c_{n+1} est lié à c_n par une relation de la forme $c_{n+1} = \phi(c_n)$ où ϕ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on explicitera.

6 - Démontrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

7 - Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers c.

8 - Dans le cas particulier où la fonction f est la fonction ψ étudiée à la question 1 (et $c = \zeta$), tracer sur un même dessin la représentation graphique de la fonction ψ sur l'intervalle $[-1, 0]$ ainsi que les représentations graphiques des polynômes p_0, p_1 qui lui sont associés et placer les points c_1, c_2.

La méthode de calcul d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ étudiée ici est connue sous le nom de «méthode de la fausse position». Pour simplifier l'étude on a supposé que la fonction f était convexe mais la méthode peut s'utiliser avec des fonctions n'ayant pas cette propriété.

16.7 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned}\Delta_{x_0}(h) &= \frac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h} = \frac{\cos(x_0)\cos(h)-\sin(x_0)\sin(h)-\cos(x_0)}{h}\\ &= -\sin(x_0)\,\frac{\sin(h)}{h} + \cos(x_0)\,\frac{\cos(h)-1}{h}.\end{aligned}$$

Or $\sin(h) \underset{0}{\sim} h$ et $\cos(h)-1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}h^2$, d'où

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} h\frac{\cos(h)-1}{h^2} = 0.$$

On a donc

$$\lim_{h\to 0}\Delta_{x_0}(h) = -\sin(x_0).$$

Solution de l'exercice 2

1 - Il ne faut pas répondre $f'(x_0)$ car

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Cela ressemble à la limite proposée (on va d'ailleurs utiliser ce résultat), mais ce n'est pas la limite de la même quantité ! Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_0+h \in I$ et $x_0+h^2 \in I$ on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h^2)-f(x_0+h)}{h} &= \frac{\big(f(x_0+h^2)-f(x_0)\big)-\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)}{h}\\ &= h\,\frac{f(x_0+h^2)-f(x_0)}{h^2} - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\end{aligned}$$

Le second terme du membre de droite tend vers $f'(x_0)$. Par ailleurs, en effectuant le changement de variable[30] $\delta = h^2$, on obtient

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h^2)-f(x_0)}{h^2} = \lim_{\delta\to 0}\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta} = f'(x_0)$$

et par conséquent

$$\lim_{h\to 0} h\,\frac{f(x_0+h^2)-f(x_0)}{h^2} = 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h^2)-f(x_0+h)}{h} = -f'(x_0).$$

---

[30] Voir la proposition 13.14 p. 612 et la remarque p. 613.

2 - Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_0 + h \in I$ on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} &= \frac{\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)-\big(f(x_0-h)-f(x_0)\big)}{2h}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{1}{2}\,\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $\delta = -h$, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{\delta\to 0}\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{-\delta}\\ &= -\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta} = -f'(x_0).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \frac{1}{2}\,f'(x_0) + \frac{1}{2}\,f'(x_0) = f'(x_0).$$

Lorsque la quantité

$$\Lambda(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

admet une limite ℓ quand h tend vers 0 on dit que f admet pour *dérivée symétrique* en x_0 le réel ℓ. On vient de montrer que si une application f est dérivable en x_0 elle admet une dérivée symétrique en x_0 qui vaut $f'(x_0)$. La réciproque est fausse : une application peut admettre une dérivée symétrique en x_0 sans être dérivable en x_0. C'est le cas de la fonction g définie par $g(x) = x\sin\frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $g(0) = 0$ qui n'est pas dérivable en 0 mais qui admet une dérivée symétrique en 0 qui vaut 0.

Solution de l'exercice 3

1 - D'après la définition 14.2 p. 663, la fonction logarithme est dérivable en 1, de dérivée égale à 1. On déduit de la définition 16.1 que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(h+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(h+1)-\ln(1)}{h-0} = 1.$$

2 - D'après la proposition 14.5 p. 668, la fonction exponentielle est dérivable en 0, de dérivée égale à 1. On déduit de la définition 16.1 que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-\mathrm{e}^0}{h-0} = 1.$$

Solution de l'exercice 4

1 - La fonction f_1 est définie sur $]-1,+\infty[$. Elle est obtenue par la composition d'applications suivante :

$$x \in]-1,+\infty[\quad\longmapsto\quad y = \sqrt{x+1} \in]0,+\infty[\quad\longmapsto\quad \ln(y) = \ln(\sqrt{x+1}).$$

Ces applications étant dérivables sur les ensembles indiqués, l'application f_1 est donc dérivable sur $]-1,+\infty[$. En utilisant la formule de dérivation composée, on obtient pour tout $x \in]-1,+\infty[$

$$f_1'(x) = (\sqrt{x+1})' \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2(x+1)}.$$

2 - La fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est obtenue par la composition d'applications suivante :

$$x \in \mathbb{R} \quad \longmapsto \quad y = \sqrt{x^2+1} \in]1,+\infty[\quad \longmapsto \quad \exp(y) = \exp(\sqrt{x^2+1}).$$

Ces applications étant dérivables sur les ensembles indiqués, l'application f_2 est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de dérivation composée, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= (\sqrt{x^2+1})' \exp(\sqrt{x^2+1}) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \exp(\sqrt{x^2+1}) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \exp(\sqrt{x^2+1}). \end{aligned}$$

3 - La fonction f_3 est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est obtenue par produit de l'application identité avec la composée d'applications suivante :

$$x \in \mathbb{R} \quad \longmapsto \quad y = x\ln(2) \in \mathbb{R} \quad \longmapsto \quad \exp(y) = \exp(x\ln(2)) = 2^x.$$

Ces applications étant dérivables sur les ensembles indiqués, la composée est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'application f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit d'applications dérivables sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de dérivation d'un produit, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_3'(x) = 2^x + x\ln(2)\exp(x\ln(2)) = (1 + x\ln(2))\ 2^x.$$

4 - La fonction arc-tangente est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f_4 est donc définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $1-x^2$, c'est-à-dire sur $[-1,0[\cup]0,1]$. La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui implique que $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1,1[$. Comme la fonction arc-tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$, l'application f_4 est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$. L'application $\psi : x \in]-1,0[\cup]0,1[\mapsto \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; est dérivable et pour $x \in]-1,0[\cup]0,1[$, on a

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{1}{x^2}\left(x\left(\sqrt{1-x^2}\right)' - \sqrt{1-x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\right) = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Puisque $f_4 = \arctan \circ \psi$, d'après la proposition 16.4, pour $x \in]-1,0[\cup]0,1[$ on a

$$f_4'(x) = \psi'(x)\ \arctan'(\psi(x)) = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+\psi^2(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

L'application f_4 n'est pas prolongeable par continuité en 0 car

$$\lim_{x\to 0+} f_4(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0-} f_4(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

En vertu de la proposition 16.2 p. 751, ou plus exactement de sa contraposée, l'application f_4 ne peut pas être dérivable en 0.

5 - Le réel $f_5(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ \ln(\cos(x))\right)$ est défini pour $x \neq 0$ tel que $\cos(x) > 0$, c'est-à-dire pour x appartenant à l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left]-\tfrac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\cup \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^*} \left]-\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\Big).$$

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $]0,1]$ et la fonction logarithme est dérivable sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^-$. La fonction $x \mapsto \ln(\cos(x))$ est donc dérivable sur $\mathcal{D}$. De plus, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\ \ln(\cos(x))$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$. Enfin, comme la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut en conclure que la fonction f_5 est dérivable sur $\mathcal{D}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= \left(\tfrac{1}{x}\ \ln(\cos(x))\right)' \exp\left(\tfrac{1}{x}\ \ln(\cos(x))\right) \\ &= -\left(\tfrac{1}{x^2}\ \ln(\cos(x)) + \tfrac{1}{x}\tan(x)\right) f_5(x). \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5

Soit f une application dérivable sur $\mathbb{R}$ et périodique ; il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+T) = f(x).$$

Considérons l'application $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x+T)$. Puisque l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x + T$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer d'après la proposition 16.4 que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = (x+T)'f'(x+T) = f'(x+T).$$

Puisque f est périodique, on a $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, autrement dit, les deux applications f et g sont égales. Ceci implique que leurs dérivées sont elles aussi égales ; on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = f'(x+T).$$

On en conclut que f' est une application périodique.

Solution de l'exercice 6

Soient $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ et $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto (1+2x)^n$. Pour tout entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n$, les applications f_1 et f_2 admettent pour dérivées k-ième en $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_1^{(k)}(x) &= n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}, \\ f_2^{(k)}(x) &= 2^k n(n-1)\dots(n-k+1)(1+2x)^{n-k} = 2^k\frac{n!}{(n-k)!}(1+2x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Puisque $f = f_1 \times f_2$, on en déduit d'après la formule de Leibniz que

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_1^{(n-k)}(x)\, f_2^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!}\, x^k\, 2^k \frac{n!}{(n-k)!}(1+2x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^n n! \binom{n}{k}^2 x^k (1+2x)^{n-k}. \end{aligned}$$

La relation est établie.

Solution de l'exercice 7

Désignons par a_i, $i = 1, \dots, n$ les n racines distinctes de P que l'on ordonne de la manière suivante :

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n.$$

Considérons la fonction polynomiale $\widetilde{P}$ associée à P. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n-1$, l'application $\widetilde{P}$ est continue sur l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ et dérivable sur l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. De plus $\widetilde{P}(a_i) = \widetilde{P}(a_{i+1}) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $\alpha_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $\widetilde{P}'(\alpha_i) = 0$. Le réel α_i est par conséquent une racine de P'. On en déduit que le polynôme P possède au moins $n-1$ racines réelles et que ces racines sont séparées par les racines de P :

$$a_1 < \alpha_1 < a_2 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-2} < a_{n-1} < \alpha_{n-1} < a_n.$$

On peut illustrer cette propriété en considérant les polynômes de Legendre qui sont définis par récurrence

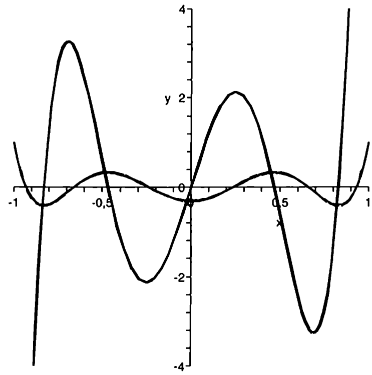
$$P_0 = 1, \quad P_1 = X \quad \text{et pour } k \in \mathbb{N}^* \quad P_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1} X\, P_k - \frac{k}{k+1} P_{k-1}.$$

Le programme MAPLE suivant calcule le $(N+1)^{\text{e}}$ polynôme de Legendre et en donne sa représentation graphique ainsi que celle de son polynôme dérivé.

```
> P[0]:=1: P[1]:=x:
> N:=5:
> for k from 1 to N do
    P[k+1]:= (2*k+1)/(k+1)*x*P[k] - k/(k+1)*P[k-1]:
  od:
> simplify(P[N+1]);
```

$$\frac{231}{16} x^6 - \frac{315}{16} x^4 + \frac{105}{16} x^2 - \frac{5}{16}$$

```
> plot([P[N+1],diff(P[N+1],x)],x=-1..1,y=-4..4);
```



On observe bien sur la figure l'alternance des racines du polynôme de Legendre et de celles de son polynôme dérivé.

Solution de l'exercice 8

On note x la distance AD, voir la figure 13, et v la vitesse du tracteur sur la route[31]. Le temps de parcours sur la route est x/v. La distance parcourue dans le champ est

$$BD = \sqrt{d^2 + (L-x)^2}$$

et le temps de parcours dans le champ est $BD/(v/2)$. Le temps de parcours total pour aller de A à B en fonction de la distance x parcourue sur la route est donc

$$T(x) = \frac{x}{v} + \frac{2\sqrt{d^2 + (L-x)^2}}{v} = \frac{1}{v}\left(x + 2\sqrt{d^2 + (L-x)^2}\right).$$

On est donc conduit à déterminer le minimum de la fonction T sur $[0, L]$. Commençons par déterminer les valeurs possibles pour les extremums de T. On vérifie que pour tout $x \in [0, L]$,

$$T'(x) = \frac{1}{v}\left(1 - \frac{2(L-x)}{\sqrt{d^2 + (L-x)^2}}\right).$$

On a alors

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 \quad &\iff \quad \sqrt{d^2 + (L-x)^2} = 2(L-x) \iff d^2 + (L-x)^2 = 4(L-x)^2 \\ &\iff \quad 3(L-x)^2 = d^2 \iff L - x = \frac{d}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Le minimum de la fonction T sur $[0, L]$ est à rechercher parmi les valeurs $0, L$ et $x_0 = L - \frac{d}{\sqrt{3}}$ dans la mesure où $x_0 \in]0, L[$. Il est aisé de vérifier que $x_0 \in]0, L[$ si et seulement si $L > d/\sqrt{3}$. On a donc deux cas à envisager.

[31] Des renseignements pris auprès d'un agriculteur breton nous permettent d'estimer cette vitesse sur route à 40 km/h.

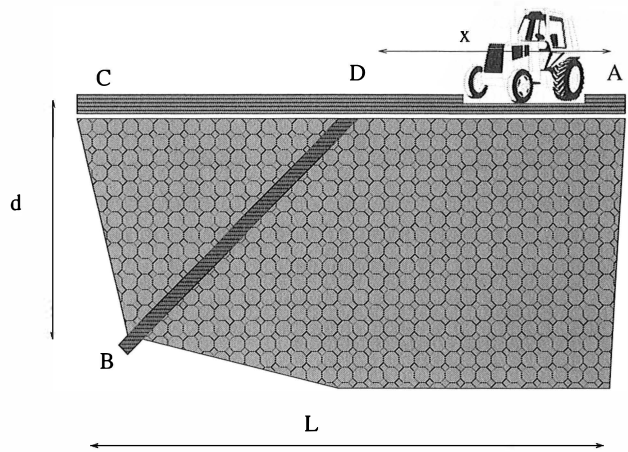


Fig. 13 Situation considérée.

1. Si $L \leqslant d/\sqrt{3}$ alors T' ne s'annule pas sur $]0, L]$. Le signe de T' sur $[0, L]$ est celui de $T'(L) = 1/v$; il est positif. La fonction T est alors strictement croissante sur $[0, L]$ et son minimum est atteint en 0 et vaut

$$T(0) = \frac{2}{v}\sqrt{L^2 + d^2}.$$

Pour minimiser le temps de parcours, le tracteur doit entrer dans le champ en A.

2. Si $L > d/\sqrt{3}$ alors T' s'annule en $x_0 \in]0, L[$. On a $T'(L) = 1/v > 0$ et

$$T'(0) = \frac{1}{v\sqrt{d^2 + L^2}}\left(\sqrt{d^2 + L^2} - 2L\right) = \frac{1}{v\sqrt{d^2 + L^2}} \frac{d^2 - 3L^2}{\sqrt{d^2 + L^2} + 2L} < 0,$$

car $d^2 - 3L^2 < 0$ sous l'hypothèse $L > d/\sqrt{3}$. T est donc décroissante[32] sur $[0, x_0]$ et croissante sur $[x_0, L]$. On en déduit que T admet un minimum en x_0. Pour minimiser le temps de parcours, le tracteur doit quitter la route à une distance

$$x_0 = L - \frac{d}{\sqrt{3}}$$

du point A. Le temps de parcours est alors

$$T(x_0) = \frac{L + d\sqrt{3}}{v}.$$

[32] On rappelle qu'une fonction peut s'annuler en un point sans changer de signe. C'est le cas de la fonction carrée en 0. On ne peut donc pas conclure que $T'(0) < 0$ à partir de la seule information $T'(L) > 0$.

Solution de l'exercice 9

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (en tant que composée d'une fonction polynomiale par la fonction exponentielle). Pour tout réel x on a

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Ainsi, $f''(x) = 0$ si et seulement si $x^2 - 1 = 0$. Il y a deux points d'inflexion potentiels qui sont 1 et -1. Il reste à vérifier que f'' change bien de signe en ces deux points. Le signe de f'' est celui de $x^2 - 1 = 0$. On a donc $f'' > 0$ sur $]-\infty, -1[$, $f'' > 0$ sur $]-1, 1[$ et $f'' > 0$ sur $]1, +\infty[$. On en conclut que la fonction f admet 1 et -1 pour points d'inflexion.

Solution de l'exercice 10

Considérons les applications suivantes

$$f : x \in]0,2[\longmapsto \mathrm{e}^{x^2+x} - \mathrm{e}^{2x} \quad \text{et} \quad g : x]0,2[\longmapsto \cos(\tfrac{\pi}{2}x).$$

Ces applications sont continues et dérivables sur $\mathcal{V} =]0,2[$ qui est un voisinage de 1, et g' ne s'annule pas sur $]0,2[$. On a

$$f' : x \in]0,2[\longmapsto (2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x} - 2\mathrm{e}^{2x} \quad \text{et} \quad g' : x \in]0,2[\longmapsto -\tfrac{\pi}{2}\sin(\tfrac{\pi}{2}x).$$

La limite en 1 du quotient de f' et g' s'obtient sans difficulté ; on a

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \mathrm{e}^2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} g'(x) = -\tfrac{\pi}{2},$$

d'où

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{2\mathrm{e}^2}{\pi}.$$

La règle de L'Hôpital indique que

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{g(x)-g(1)} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{2\mathrm{e}^2}{\pi}.$$

Solution de l'exercice 11

L'application sinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 en prenant $b = x$ et $a = 0$: il existe un réel $c \in]0, x[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!}f^{(5)}(c) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\cos(c). \end{aligned}$$

Puisque $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et que $c \in]0, x[$ le réel $\cos(c)$ est positif. On en déduit que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}.$$

Par ailleurs, puisque $\cos(c) \leqslant 1$, on a

$$\sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Solution de l'exercice 12

Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ puisque f_n est le produit d'une fonction polynomiale (qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) et de la composée de la fonction sinus avec la fonction $x \mapsto 1/x$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. On s'intéressera donc uniquement au comportement des applications f_n en 0.

1 - Pour $n = 0$, l'application f_0 n'est pas continue en 0 puisque $\sin(1/x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0. Elle ne peut donc pas être dérivable en 0.

2 - Pour $n = 1$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad |f_1(x)| = |x \ \sin(1/x)| \leqslant |x|.$$

On en déduit par le théorème d'encadrement que $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0$. L'application f_1 est donc continue en 0. Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x} = \sin(1/x)\ .$$

Puisque la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0, on en déduit que f_1 n'est pas dérivable en 0.

3 - Pour $n = 2$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad |f_2(x)| = |x^2 \ \sin(1/x)| \leqslant x^2.$$

On en déduit par le théorème d'encadrement que $\lim_{x\to 0} f_2(x) = 0$. L'application f_2 est donc continue en 0. D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\left|\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x}\right| = |x \sin(1/x)| \leqslant |x|.$$

On en déduit par le théorème d'encadrement que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x} = 0$$

c'est-à-dire que f_2 est dérivable en 0 de dérivée $f_2'(0) = 0$.

Par ailleurs pour $x \in \mathbb{R}^*$, l'application f_2 admet pour dérivée en x

$$f_2'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Puisque $\cos(1/x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0, on en déduit que f_2' n'est pas continue en 0 et par conséquent que f_2 n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4 - On peut remarquer que pour tout réel x on a $f_3(x) = xf_2(x)$. Puisque l'application f_2 est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que l'application f_3 est également continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux applications continues sur $\mathbb{R}$. On en déduit également que f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux applications dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_3'(x) = f_2(x) + xf_2'(x)$. En particulier $f_3'(0) = f_2(0) = 0$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_3'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x).$$

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$|f_3'(x)| \leqslant 3x^2\,|\sin(1/x)| + |x|\,|\cos(1/x)| \leqslant 3x^2 + |x|.$$

Le théorème d'encadrement indique que $\lim_{x\to 0} f_3'(x) = 0$. On en conclut que l'application f_3 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car $\lim_{x\to 0} f_3'(x) = f_3'(0)$.

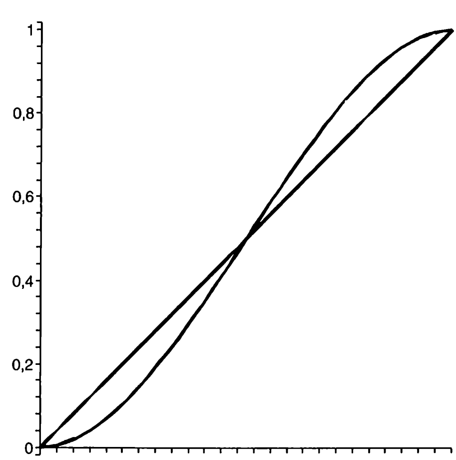
Solution de l'exercice 13

1 - On cherche une application f définie sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(0) = f'(1) = 0$. On peut assez naturellement essayer de chercher une fonction polynomiale satisfaisant ces conditions. Compte tenu du fait que l'on dispose de 4 conditions, on peut chercher une fonction polynomiale de degré 3. On cherche donc les 4 réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Les 4 conditions se traduisent par

$$d = 0, \quad a + b + c = 1, \quad c = 0, \quad 3a + 2b + c = 0.$$

En résolvant le système linéaire formé par ces 4 équations, on établit que les seuls réels convenant sont $a = -2$, $b = 3$, $c = 0$ et $d = 0$. Ainsi, l'application $f : x \mapsto -2x^3 + 3x^2$ vérifie les hypothèses de l'exercice. On peut la représenter graphique avec MAPLE.

```
> plot([-2*x^3+3*x^2,x],x=0..1);
```



2 - L'application f est dérivable sur $]0,1[$ donc[33] est continue sur $]0,1[$. On en déduit que l'application g est continue sur $]0,1[$. On a

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x-1} = f'(0) + (f(0)-1) = -1$$

et

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f(1) - f'(1) = 1.$$

Ainsi, l'application g est continue sur $[0,1]$.

3 - L'application g est continue sur $[0,1]$ et $g(0)g(1) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Or,

$$g(\alpha) = 0 \iff \frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} = 0 \iff f(\alpha) = \alpha.$$

4 - On cherche une application f définie sur $[0,1]$ telle que

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f'(1) = 0$$

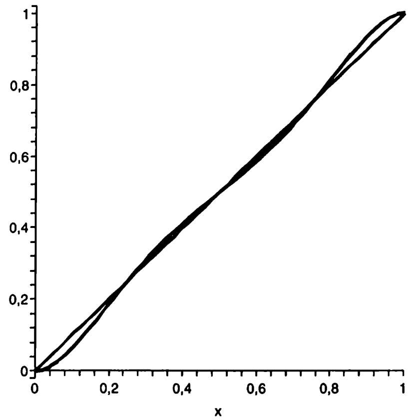
(les hypothèses de l'exercice) et par exemple $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$ (ce qui assure l'existence d'au moins 2 points fixes). On peut assez naturellement essayer de chercher une fonction polynomiale satisfaisant ces conditions. Compte tenu du fait que l'on dispose de 6 conditions, on va chercher une fonction polynomiale de degré 5. On cherche donc les 6 réels $a_0, \ldots, a_5$ tels que $f(x) = \sum_{k=0}^{5} a_k\, x^k$ vérifie les 6 conditions données précédemment. On est conduit à résoudre un système linéaire de 6 équations à 6 inconnues (en fait, un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues car les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ imposent que $a_0 = 0$ et que $a_1 = 0$). On peut utiliser MAPLE pour automatiser les calculs.

```
> n:=5:
> f:=x->a[0]+sum(a[k]*x^k,k=1..n):  # la fonction polynomiale
> f1:=unapply(diff(f(x),x),x):      # sa dérivée
> eqns:= f(0)=0, f1(0)=0, f(1)=1, f1(1)=0,
         f(1/4)=1/4, f(3/4)=3/4:
> sols:=solve({eqns},{seq(a[k],k=0..n)});
```

$$\left\{a_5 = -\frac{32}{3}, a_4 = \frac{80}{3}, a_3 = -\frac{70}{3}, a_2 = \frac{25}{3}, a_0 = 0, a_1 = 0\right\}$$

```
> assign(sols);
> plot([f(x),x],x=0..1,thickness=2,color=[black,blue]);
```

[33] Voir la proposition 16.2 p. 751.



On peut demander à MAPLE de déterminer les points fixes de f.

```
> solve(f(x)=x,x);
```

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$$

Solution de l'exercice 14

1 - a) La fonction ψ est définie sur $\mathbb{R}$ et est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction arc-tangente en de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a

$$\psi' : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1 + \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad \psi'' : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\psi'(x) > 0$, l'application ψ est strictement croissante. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}^- \quad \psi''(x) < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \psi''(x) > 0.$$

L'application ψ est donc[34] convexe sur $\mathbb{R}^-$ et concave sur $\mathbb{R}^+$ (0 est le seul point d'inflexion de ψ). La courbe passe par le point $(0, 1)$ et admet en ce point une tangente de pente 2. On a le tableau de variation suivant pour ψ.

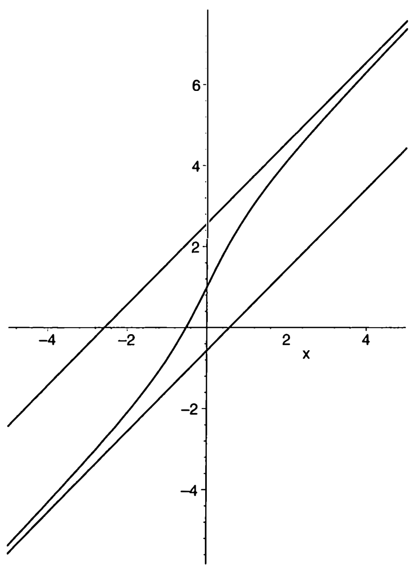
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

---

[34] Voir le corollaire 16.1 p. 777.

b) L'application ψ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\psi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Par conséquent, 0 admet un unique antécédent par ψ, autrement dit, il existe un unique réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(c) = 0$. De plus, puisque $\psi(-1) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, que $\psi(0) = 1$ et que ψ est continue sur $[-1, 0]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires $c \in]-1, 0[$. (Remarquer que le théorème des valeurs intermédiaires seul assure l'existence d'une racine $c \in]-1, 0[$ mais pas l'unicité de cette racine.)

2 - On a $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ donc la droite $y = x + 1 + \frac{\pi}{2}$ est asymptote en $+\infty$ et la courbe est au-dessous de l'asymptote car arctan est croissante. On a $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ donc la droite $y = x + 1 - \frac{\pi}{2}$ est asymptote en $-\infty$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote. La représentation graphique de ψ est la suivante.



3 - D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a)f(b) < 0$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$. De plus f est continue et strictement croissante sur $[a, b]$ donc elle est injective de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Le réel c est par conséquent unique.

4 - a) Pour $x \in [a, b]$, on a $g''(x) = f''(x)$ car p_0 est une fonction polynomiale de degré 1. D'après les hypothèses on a donc $g'' > 0$ sur $[a, b]$.
Supposons que g s'annule en $x^* \in]a, b[$. Comme $g(a) = 0$ et que g est continue sur $[a, x^*] \subset [a, b]$ et dérivable sur $]a, x^*[\subset]a, b[$, le théorème de Rolle assure l'existence d'un réel $\zeta_1 \in]a, x^*[$ tel que $g'(\zeta_1) = 0$. D'autre part comme $g(b) = 0$ et que g est continue sur $[x^*, b] \subset [a, b]$ et dérivable sur $]x^*, b[\subset]a, b[$, on déduit du théorème de Rolle qu'il existe un réel $\zeta_2 \in]a, x^*[$ tel que $g'(\zeta_2) = 0$. En utilisant à nouveau le théorème de Rolle pour g' sur l'intervalle $[\zeta_1, \zeta_2]$ on en déduit qu'il existe $\zeta \in]\zeta_1, \zeta_2[$ tel que $g''(\zeta) = 0$. Cela contredit la propriété $g'' > 0$ sur $[a, b]$. On en conclut que g ne peut pas s'annuler sur $]a, b[$.

b) On a $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$ et g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $x_0 \in]a, b[$ tel que $g'(x_0) = 0$. Puisque g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, appliquons la formule de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[x_0, b]$: il existe $\gamma \in]x_0, b[$ tel que[35]

$$g(b) = g(x_0) + (b - x_0)\, g'(x_0) + \frac{(b - x_0)^2}{2} g''(\gamma),$$

c'est-à-dire tel que

$$0 = g(x_0) + \frac{(b - x_0)^2}{2} g''(\gamma).$$

Puisque $g'' > 0$ on a $g(x_0)$ qui est strictement négatif. Comme g garde un signe constant sur $]a, b[$ on en déduit que g est strictement négative sur $]a, b[$.

c) Puisque $g(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$ on a $g(c) = f(c) - p(c) = -p(c) < 0$, donc $p(c) > 0$. Par ailleurs $p(a) = f(a) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'unique racine c_1 de la fonction polynomiale p_0 de degré 1 est comprise entre a et c.

5 - a) p_n est une fonction polynomiale de degré 1 de la forme $p_n(x) = \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Les conditions $p_n(c_n) = f(c_n)$ et $p_n(b) = f(b)$ imposent que α et β satisfont au système linéaire

$$\begin{cases} \alpha\, c_n + \beta & = & f(c_n) \\ \alpha\, b + \beta & = & f(b) \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire fournit l'expression suivante pour p_n :

$$p_n(x) = \frac{f(b) - f(c_n)}{b - c_n}(x - c_n) + f(c_n).$$

b) Le terme c_{n+1} est défini par la relation $p_n(c_{n+1}) = 0$ qui s'écrit encore

$$\frac{f(b) - f(c_n)}{b - c_n}(c_{n+1} - c_n) + f(c_n) = 0.$$

Ainsi c_{n+1} et c_n sont liés par la relation

$$c_{n+1} = c_n - f(c_n)\frac{b - c_n}{f(b) - f(c_n)}.$$

On a donc $c_{n+1} = \phi(c_n)$ avec $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto x - f(x)\frac{b-x}{f(b)-f(x)}$.

6 - Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$c_{k+1} - c_k = -f(c_k)\frac{b - c_k}{f(b) - f(c_k)}.$$

Puisque $f' > 0$, f est croissante sur $[a, b]$ donc $f(b) - f(c_k) > 0$. D'autre part, par hypothèse $c_k \leqslant c$ et $f(c) = 0$ donc $f(c_k) < 0$. On en déduit que $c_{k+1} - c_k > 0$ et que la suite $(c_k)_k$ est croissante.

---

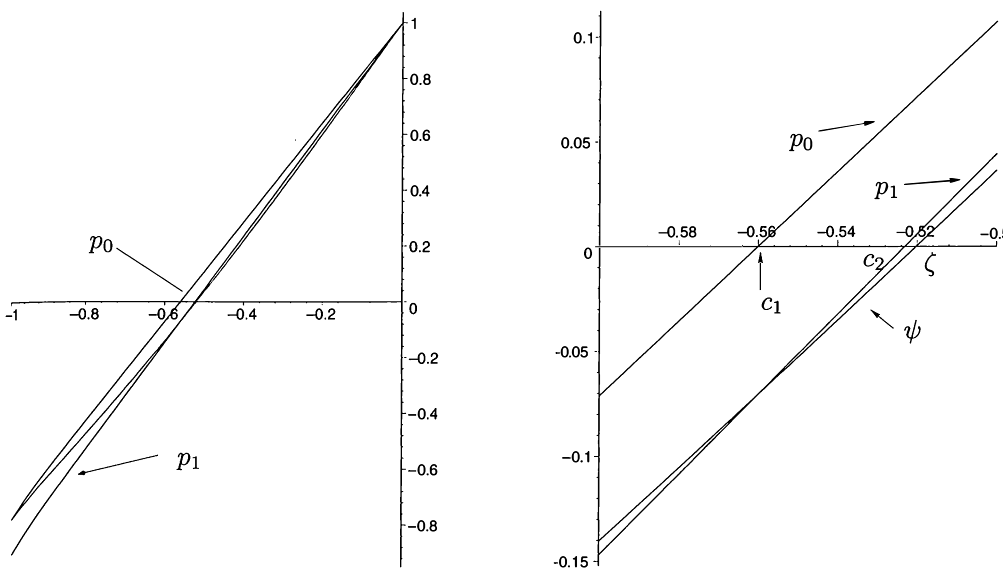
[35] On peut bien entendu également considérer la formule de Taylor entre a et x_0.

7 - La suite $(c_k)_k$ est croissante et majorée par b donc elle converge. Cette suite étant définie par la relation de récurrence $c_{k+1} = \phi(c_k)$, elle converge nécessairement vers l'une des solutions de l'équation $x = \phi(x)$. Or

$$\begin{aligned} x = \phi(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad x = x - f(x)\frac{b-x}{f(b)-f(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)\frac{b-x}{f(b)-f(x)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad f(x) = 0 \end{aligned}$$

(la dernière équivalence résultant du fait que f est strictement croissante sur $[a,b]$). L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $[a,b]$ qui est c. La suite $(c_k)_k$ converge donc vers c.

8 - Les représentations graphiques de la fonction ψ et des polynômes p_0, p_1 sur l'intervalle $[-1, 0]$ sont les suivantes.



Utilisons MAPLE pour mettre en oeuvre la méthode que nous venons d'étudier et calculer une approximation de la solution de l'équation $(1+x) + \arctan(x) = 0$.

```
> f:= x-> (1+x)+arctan(x):
> a:=-1: b:=0:
> solve(f(x)=0,x);
                    RootOf(_Z - 1 + tan(_Z)) - 1
```

On peut remarquer que MAPLE ne parvient pas à déterminer la solution « exacte » de notre équation.

```
> phi:=x-> x- f(x)*(b-x)/(f(b)-f(x)): # la fonction de récurrence
> N:=9:                                # nombre de termes calculés
> c[1]:= a- f(a)*(b-a)/(f(b)-f(a)):   # initialisation
> for n from 1 to N-1 do
    c[n+1] := evalf(phi(c[n]));
  od;
                         c[2] := -0.5231330281
                         c[3] := -0.5204706485
                         c[4] := -0.5202831687
                         c[5] := -0.5202699892
                         c[6] := -0.5202690628
                         c[7] := -0.5202689977
                         c[8] := -0.5202689931
                         c[9] := -0.5202689927
```

On peut calculer $f(c_9)$ pour avoir une information sur la précision de l'approximation.

```
> f(c[9]);
                                   0.
```

On peut aussi comparer le résultat obtenu par notre méthode à celui retourné par la commande `fsolve` de MAPLE.

```
> fsolve(f(x)=0,x);
                              -0.5202689927
```

CHAPITRE 17

Développements limités

17.1 Définition et généralités

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On rappelle que l'on dit que f *est définie au voisinage de* x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 telle que $V \setminus \{x_0\}$ soit inclus dans l'ensemble de définition de f. Si f est définie *sur* un voisinage de x_0 alors elle est définie *au* voisinage de x_0. Une fonction définie *au* voisinage de x_0 est définie *sur* un voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0. Dans ce chapitre, on confondra au niveau des notations un polynôme et la fonction polynomiale qui lui est associée, le contexte permettant toujours de lever l'ambiguïté.

DÉFINITION 17.1 *Soient n un entier naturel et f une application définie au voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 (on note de façon abrégée $DL_n(0)$) s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n, un voisinage V de 0 et une application ϵ définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que*

$$\forall x \in V \setminus \{0\} \qquad f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

La fonction polynomiale P est appelée partie régulière *du développement limité d'ordre n en 0.*

Remarques

1. La fonction $R : x \mapsto x^n \epsilon(x)$ est appelée *reste* du développement limité d'ordre n en 0. On a $R(x) = f(x) - P(x) = o_0(x^n)$.

2. Il est clair d'après la définition, que toute fonction polynomiale f admet un développement limité à tout ordre en 0. Si $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ et $n \geqslant m$ alors la partie régulière du développement limité d'ordre n en 0 est la fonction elle-même et le reste est la fonction nulle. Si $n < m$ alors la partie régulière est $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et le reste est

$$R(x) = \sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k = x^n \sum_{k=1}^{m-n} a_{k+n} x^k = x^n \epsilon(x) \quad \text{où} \quad \epsilon(x) = \sum_{k=1}^{m-n} a_{k+n} x^k.$$

Ainsi la fonction polynomiale $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x^3 + x + 4$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 dont la partie régulière est $x + 4$ et elle admet un développement limité à l'ordre 3 dont la partie régulière est $2x^3 + x + 4$.

3. Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P alors pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant \ell \leqslant n$, f admet un développement limité d'ordre ℓ en 0 dont la partie régulière est obtenue en ne considérant que les monômes de degré au plus égal à ℓ de P.

4. S'il existe un polynôme P de degré au plus égal à n tel qu'au voisinage de 0 on ait[1]

$$f(x) = P(x) + \mathcal{O}_0(x^{n+1}) \tag{1}$$

alors on a *a fortiori*

$$f(x) = P(x) + o_0(x^n) \tag{2}$$

et P est la partie régulière du développement limité d'ordre n en 0 de f. Les notations (1) et (2) sont toutes deux utilisées pour écrire un développement limité. La première notation en dit plus sur le comportement de f au voisinage de 0. On dit qu'elle correspond à un développement limité d'ordre n en 0 au sens fort de f. C'est l'écriture qui est utilisée par le logiciel de calcul formel MAPLE pour exprimer les développements limités avec la commande `taylor`.

```
> f:=x-> 2*x^3+x+4:
> taylor(f(x),x=0,3);
```

$$4 + x + \mathcal{O}_0(x^3)$$

```
> taylor(f(x),x=0,4);
```

$$4 + x + 2x^3$$

PROPOSITION 17.1 (Unicité du développement limité)
Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0, celui-ci est unique.

Démonstration On utilise un raisonnement par l'absurde.

⊵ Supposons que f admette en 0 deux développements limités d'ordre n distincts. Il existe alors un polynôme $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n, un voisinage V_1 de 0 et une application ϵ_1 définie sur $V_1 \setminus \{0\}$ tels que

$$\forall x \in V_1 \setminus \{0\} \qquad f(x) = P_1(x) + x^n \epsilon_1(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \epsilon_1(x) = 0$$

et il existe un polynôme $P_2 \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n, un voisinage V_2 de 0 et une application ϵ_2 définie sur $V_2 \setminus \{0\}$ tels que

$$\forall x \in V_2 \setminus \{0\} \qquad f(x) = P_2(x) + x^n \epsilon_2(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \epsilon_2(x) = 0.$$

[1] Voir le chap. 15 pour des précisions sur les relations de comparaison $\mathcal{O}_0$ et o_0.

L'hypothèse que les deux développements limités sont distincts se traduit par : ou bien $P_1 \neq P_2$ ou bien $P_1 = P_2$ et $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$. Notons $U = V_1 \cap V_2$, $P_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $P_2 = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.

⊵ Envisageons tout d'abord le cas où $P_1 = P_2$ sur $U \setminus \{0\}$. Par différence des deux développements limités, on obtient

$$0 = x^n \left(\epsilon_2(x) - \epsilon_1(x)\right) \qquad \forall x \in U \setminus \{0\}.$$

Cela implique que $\epsilon_1 = \epsilon_2$ sur $U \setminus \{0\}$. Les deux développements limités sont donc égaux.

⊵ Supposons maintenant que $P_1 \neq P_2$ et désignons par Q le polynôme (non nul) $P_1 - P_2$. La valuation ν de Q vérifie $0 \leqslant \nu \leqslant n$ et on a

$$Q(x) \underset{0}{\sim} (a_\nu - b_\nu)x^\nu.$$

D'autre part pour tout $x \in U \setminus \{0\}$, on a

$$\begin{aligned} Q(x) = P_1(x) - P_2(x) &= \big(f(x) - x^n\epsilon_1(x)\big) - \big(f(x) - x^n\epsilon_2(x)\big) \\ &= x^n \left(\epsilon_2(x) - \epsilon_1(x)\right). \end{aligned}$$

On aboutit à la contradiction suivante : $Q(x) \underset{0}{\sim} (a_\nu - b_\nu)x^\nu$ et $Q(x) = o_0(x^n)$ avec $n \geqslant \nu$. Si la fonction polynomiale Q est équivalente au voisinage de 0 à $(a_\nu - b_\nu)x^\nu$ alors on a $x^k = o_0(Q(x))$ pour $k \geqslant \nu$. Puisque $n \geqslant \nu$, on ne peut donc pas avoir $Q(x) = o_0(x^n)$. On a donc nécessairement $P_1 = P_2$. D'après la première partie de la démonstration, on en déduit que cela implique que $\epsilon_1 = \epsilon_2$. Les deux développements limités sont donc égaux.

On a ainsi démontré que, si une fonction admettait un développement limité d'ordre n en 0, celui-ci était nécessairement unique. □

Proposition 17.2 (Développement limité et parité)
Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P.

✗ *Si f est paire alors la fonction polynomiale P est paire. Autrement dit, les coefficients des monômes de degré impair de P sont nuls.*

✗ *Si f est impaire alors la fonction polynomiale P est impaire. Autrement dit, les coefficients des monômes de degré pair de P sont nuls.*

Démonstration Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P alors il existe un voisinage V de 0 et une application ϵ définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V \setminus \{0\}$

$$f(x) = P(x) + x^n\epsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Puisque V est un voisinage de 0, il existe[2] un réel η strictement positif tel que l'intervalle ouvert $I =]-\eta, \eta[$ soit inclus dans V. Pour $x \in I \setminus \{0\}$ on a

$$f(-x) = P(-x) + (-1)^n\ x^n \epsilon(-x) = P(-x) + x^n \epsilon_2(x),$$

où la fonction ϵ_2 est définie sur I par $\epsilon_2(x) = (-1)^n\ \epsilon(-x)$ et vérifie donc $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$.

$\trianglerighteq$ Si f est paire alors pour tout $x \in I$ on a $f(-x) = f(x)$. Par unicité du développement limité d'ordre n en 0, on en déduit que $P(-x) = P(x)$ pour tout $x \in I$ (et par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$). Autrement dit la fonction polynomiale P est paire.

$\trianglerighteq$ Si f est impaire alors pour tout $x \in I$ on a $f(-x) = -f(x)$. Par unicité du développement limité d'ordre n en 0, on en déduit que $P(-x) = -P(x)$ pour tout $x \in I$ (et par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$). Autrement dit, la fonction polynomiale P est impaire. $\square$

Proposition 17.3 ✗ *Pour qu'une fonction f admette un développement limité d'ordre* 0 *en* 0*, il faut et il suffit que f soit continue en* 0 *(ou prolongeable par continuité en* 0*). Dans ce cas, on a*

$$f(x) = f(0) + o_0(1).$$

✗ *Pour qu'une fonction f admette un développement limité d'ordre* 1 *en* 0*, il faut et il suffit que f soit dérivable en* 0*. Dans ce cas, on a*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o_0(x).$$

Démonstration $\trianglerighteq$ On a les équivalences suivantes[3] :

$$\begin{aligned} f \text{ est continue en } 0 \quad &\iff \quad \lim_{x\to 0} \big(f(x) - f(0)\big) = 0 \\ &\iff \quad f(x) - f(0) = o_0(1) \quad \text{au voisinage de } 0. \end{aligned}$$

On en déduit que si f est continue en 0 alors elle admet un développement limité d'ordre 0 en 0 de partie régulière $f(0)$. Réciproquement, supposons que f admette un développement limité d'ordre 0 en 0. Il existe dans ce cas un voisinage V de 0, un polynôme P de degré au plus 0 et une application ϵ définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V \setminus \{0\}$

$$f(x) = P(x) + \epsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

On en déduit que l'application f admet pour limite en 0 le réel $P(0)$. Elle est donc[3] continue en 0 (ou prolongeable par continuité en 0).

---

(2) Voir la définition 3.10 p. 116.

(3) Voir la définition 13.4 p. 616.

⊵ On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } 0 \quad & \iff \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \\ & \iff \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) = o_0(1) \text{ au voisinage de } 0 \\ & \iff \quad f(x) = f(0) + x\, f'(0) + o_0(x) \text{ au voisinage de } 0. \end{aligned}$$

On en déduit que si f est dérivable en 0 alors elle admet un développement limité d'ordre 1 en 0 de partie régulière $f(0) + xf'(0)$. Réciproquement, supposons que f admette un développement limité d'ordre 1 en 0. Elle admet aussi[4] un développement limité d'ordre 0 en 0 et, d'après la première partie de la démonstration, f est continue en 0. Par ailleurs, d'après la définition 17.1, il existe un voisinage V de 0, un polynôme P de degré au plus 1 et une application ϵ définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V \setminus \{0\}$

$$f(x) = P(x) + x\,\epsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Le polynôme P est de la forme $P = f(0) + \alpha X$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \alpha + \epsilon(x)$$

et par conséquent que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \alpha.$$

Cela permet de conclure que f est dérivable en 0, de nombre dérivé α en 0. □

Remarques

1. La proposition 17.3 contient un abus de langage fréquent : la fonction f peut admettre un développement limité d'ordre n en 0 sans être définie en 0. On ne peut pas alors vraiment parler de la continuité de f en 0. Dans ce cas il faut lire : pour que f admette un développement limité d'ordre 0 en 0, il faut et il suffit que f soit prolongeable par continuité en 0. Pour ne pas alourdir inutilement les énoncés nous ferons systématiquement cet abus de langage, en précisant les choses si nécessaire.

2. On déduit de la proposition 17.3 qu'une fonction qui n'est pas continue en 0 n'admet de développement limité à aucun ordre en 0 (c'est le cas par exemple de la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$).

Exemples

1. Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + x^3 \sin(1/x^2)$. Cette application admet un développement limité d'ordre 1 en 0 de partie régulière x. En effet, l'encadrement

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad 0 \leqslant \left| x^2 \sin\left(1/x^2\right) \right| \leqslant x^2$$

[4] Voir la remarque 3. de la page 816.

permet d'établir que $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x^2) = 0$ puis que

$$x^3 \sin\left(1/x^2\right) = o_0(x).$$

On a donc $f(x) = x + o_0(x)$. D'après la proposition 17.3, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ et que ce prolongement est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 1$.

2. Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \ln(|x|)$. Cette application est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Elle est dérivable en 0 de dérivée 0 puisque

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \ln(|x|) = 0.$$

Elle admet donc un développement limité d'ordre 1 en 0 de partie régulière nulle. Par contre, f n'admet pas de développement limité d'ordre 2 en 0 ; en effet, si f admettait un développement limité d'ordre 2 en 0, celui-ci serait de la forme $ax^2 + x^2\epsilon(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$. Or

$$\epsilon(x) = \frac{f(x) - ax^2}{x^2} = \ln(|x|) - a$$

et quelle que soit la valeur de a, cette quantité ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0.

Pour $\mathbf{n} \geqslant \mathbf{2}$ une application peut admettre un développement limité d'ordre n en 0 sans être n fois dérivable en 0 comme le montre l'exemple suivant. L'application

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x + x^3 \sin(1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée l'application (à vérifier à titre d'exercice),

$$f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 + 3x^2 \sin(1/x^2) - 2\cos(1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

L'application f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 de partie régulière x (voir l'exemple précédent). Cependant f n'est pas deux fois dérivable en 0 car f' n'est pas continue[(5)] à l'origine (cela est dû au terme $2\cos(1/x^2)$ qui n'a pas de limite quand x tend vers 0).

On peut se demander à quelle condition une fonction admet un développement limité d'ordre n en 0 pour $n \geqslant 2$. La réponse est donnée par le théorème de Taylor-Young. Ce théorème est également l'outil de base pour calculer un développement limité.

---

(5) On rappelle, voir la proposition 16.2 p. 751, qu'une application dérivable en un point est continue en ce point. Par contraposition, une application qui n'est pas continue en un point ne peut pas être dérivable en ce point.

17.2 Le théorème de Taylor-Young

THÉORÈME 17.1 (Formule de Taylor-Young[6])
Soient f une application définie sur un intervalle ouvert I, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in I$. On suppose que f est $(n-1)$ fois dérivable sur I et admet une dérivée n-ième en x_0. Pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Cette relation est appelée formule de Taylor-Young à l'ordre n.

Démonstration Nous allons montrer le résultat en utilisant un raisonnement par récurrence.

⊵ Pour $n = 1$, considérons une application f définie sur un intervalle ouvert I possédant une dérivée en $x_0 \in I$. La quantité

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$$

admet pour limite 0 lorsque x tend vers x_0 car $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Cela se traduit par[7] $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o_{x_0}(x - x_0)$. On a donc

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$$

et la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 est vraie.

⊵ Supposons que la formule de Taylor-Young à l'ordre $(n - 1)$ soit vraie et montrons qu'elle est également vraie à l'ordre n. Nous supposons donc que pour toute application g qui est $(n - 2)$ fois dérivable sur I et qui admet une dérivée $(n - 1)$-ième en x_0 on ait

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^{n-1})$$

et nous allons montrer que pour toute application f qui est $(n-1)$ fois dérivable sur I et qui admet une dérivée n-ième en x_0 on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

---

[6] YOUNG, William Henry (1863, Londres - 1942, Lausanne). Young travailla principalement sur le développement en série des fonctions (séries de Fourier en particulier). Il donna une expression du reste dans la formule de Taylor. Ne pas le confondre avec le célèbre physicien anglais Thomas Young (1773-1829) qui découvrit les interférences lumineuses.

[7] Voir la définition 15.1, p. 717.

Considérons la fonction ϕ définie sur I par

$$\phi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k. \tag{3}$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre n sera démontrée si l'on établit que $\phi(x) = o_{x_0}((x - x_0)^n)$, autrement dit, si l'on établit que $\lim_{x\to x_0} \frac{\phi(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Pour montrer ce résultat nous allons avoir recours à la règle de L'Hôpital[8]. Puisque par hypothèse f est $(n-1)$ fois dérivable sur I, d'après la relation (3) l'application ϕ est également $(n-1)$ fois dérivable sur I et pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a

$$\forall x \in I \qquad \phi^{(i)}(x) = f^{(i)}(x) - \sum_{k=i}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-i)!}\,(x - x_0)^{k-i}. \tag{4}$$

On en déduit que[9] $\phi^{(i)}(x_0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Par ailleurs, d'après la relation (4) pour tout $x \in I$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\phi^{(n-1)}(x) - \phi^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\\ &= \underbrace{\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}}_{=\Delta_{x_0}(x)} - f^{(n)}(x_0).\end{aligned}$$

Puisque f admet une dérivée n-ième en x_0, la quantité $\Delta_{x_0}(x)$ tend vers $f^{(n)}(x_0)$ lorsque x tend vers x_0. On en déduit que ϕ admet une dérivée n-ième en x_0 qui prend la valeur 0. On a donc établi que la fonction ϕ est $(n-1)$ fois dérivable sur I et qu'elle admet une dérivée n-ième en x_0. Cela implique que la fonction ϕ' est $(n-2)$ fois dérivable sur I et qu'elle admet une dérivée $(n-1)$-ième en x_0. La fonction ϕ' satisfait donc aux conditions de l'hypothèse de récurrence et on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre $(n-1)$. On obtient

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\phi')^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^{n-1})\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\,\underbrace{\phi^{(k+1)}(x_0)}_{=0}\,(x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^{n-1})\\ &= o_{x_0}((x - x_0)^{n-1}).\end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\phi'(x)}{\big((x - x_0)^n\big)'} = \frac{1}{n} \lim_{x\to x_0} \frac{\phi'(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0.$$

---

[8] Voir la proposition 16.14, p. 780.

[9] Remarquer que le premier terme de la somme vaut $f^{(i)}(x_0)$ et que les termes correspondant à $k \geqslant i + 1$ sont nuls.

Les fonctions ϕ et $r : x \mapsto (x - x_0)^n$ étant continues et dérivables sur un voisinage de x_0 et $\phi(x_0) = r(x_0) = 0$, la règle de L'Hôpital indique que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{r(x) - r(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\phi'(x)}{r'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\phi'(x)}{\big((x - x_0)^n\big)'} = 0.$$

On en conclut que $\phi(x) = o_{x_0}((x - x_0)^n)$. La formule de Taylor-Young à l'ordre n est démontrée et le raisonnement par récurrence achevé. □

Remarque Les hypothèses du théorème de Taylor-Young sont plus faibles que celles du théorème de Taylor-Lagrange (on ne suppose pas que $f^{(n+1)}$ existe sur I), mais on n'a pas d'expression précise pour le reste (on sait seulement qu'il est négligeable devant $(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0).

La commande MAPLE `taylor` permet d'obtenir le développement de Taylor-Young à l'ordre n en $x_0 \in \mathbb{R}$ d'une fonction f donnée. MAPLE note le reste de Taylor-Young à l'ordre n par $\mathcal{O}((x - x_0)^{n+1})$ au lieu de $o((x - x_0)^n)$ comme cela est fait dans ce cours.

```
> taylor(sin(x),x=0,5);
```

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}\left(x^5\right)$$

```
> taylor(sin(x),x=Pi/2,5);
```

$$1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

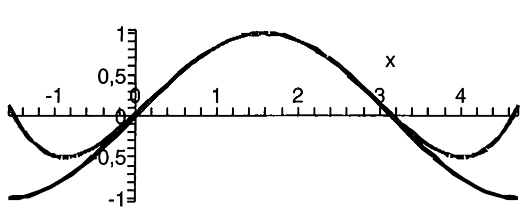
La commande `convert` de MAPLE permet d'isoler la partie polynomiale du développement de Taylor.

```
> p:=unapply(convert(taylor(sin(x),x=Pi/2,5),polynom),x);
```

$$p := x \longrightarrow 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$$

Cela permet d'observer graphiquement comment la fonction polynomiale p correspondant à la partie polynomiale du développement de Taylor approche la fonction f considérée au voisinage du point x_0.

```
> plot([sin(x),p(x)], x=-Pi/2..3*Pi/2, linestyle=[1,2]);
```



On observera sur la figure une caractéristique importante de l'approximation polynomiale par la formule de Taylor : la fonction polynomiale p approche assez bien la fonction f au voisinage de x_0 (on a même $p(x_0) = f(x_0)$) mais la qualité de l'approximation se dégrade lorsque l'on s'éloigne de la valeur x_0.

COROLLAIRE 17.1 *Une fonction f qui est n fois dérivable en 0 admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + o_0(x^n).$$

Remarques

1. On déduit du théorème 17.1 qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 admet des développements limités à tout ordre en 0.

2. Rappelons (voir le contre-exemple donné dans la section précédente) que la réciproque est fausse : une fonction peut admettre un développement limité d'ordre n en 0 sans être n fois dérivable en 0.

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir le développement limité d'ordre n en 0 de plusieurs fonctions usuelles.

❑ Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^x$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(0) = 1$. On en déduit que le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction exponentielle est :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n).$$

❑ Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$. Pour tout entier ℓ pair ($\ell = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$) on a $f^{(\ell)}(0) = 0$ et pour tout entier ℓ impair ($\ell = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$) on a $f^{(\ell)}(0) = (-1)^k$. On en déduit que le développement limité d'ordre $2p+2$ en 0 de la fonction sinus est :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o_0(x^{2p+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2p+2}). \end{aligned}$$

On remarquera que le développement limité d'ordre $2p+1$ en 0 de la fonction sinus admet la même partie régulière que le développement limité d'ordre $2p+2$ en 0, cela en raison de la parité de la fonction sinus.

❑ Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$. Pour tout entier ℓ pair ($\ell = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$) on a $f^{(\ell)}(0) = (-1)^k$ et pour tout entier ℓ impair ($\ell = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$) on a $f^{(\ell)}(0) = 0$. On en déduit que le développement limité d'ordre $2p+1$ en 0 de la fonction cosinus est :

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o_0(x^{2p+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2p+1}).\end{aligned}$$

On remarquera que le développement limité d'ordre $2p$ en 0 de la fonction cosinus admet la même partie régulière que le développement limité d'ordre $2p+1$ en 0, cela en raison de la parité de la fonction cosinus.

❑ Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{sh}(x)$. Pour tout entier ℓ pair ($\ell = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$) on a $f^{(\ell)}(0) = 0$ et pour tout entier ℓ impair ($\ell = 2k+1, k \in \mathbb{N}$) on a $f^{(\ell)}(0) = 1$. On en déduit que le développement limité d'ordre $n = 2p+2, p \in \mathbb{N}$, en 0 de la fonction sinus hyperbolique est :

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o_0(x^{2p+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2p+2}).\end{aligned}$$

On remarquera que le développement limité d'ordre $n = 2p+1, p \in \mathbb{N}$, en 0 de la fonction sinus hyperbolique admet la même partie régulière que le développement limité d'ordre $n = 2p+2, p \in \mathbb{N}$, en 0, cela en raison de la parité de la fonction sinus hyperbolique.

❑ Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{ch}(x)$. Pour tout entier ℓ pair ($\ell = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$) on a $f^{(\ell)}(0) = 1$ et pour tout entier ℓ impair ($\ell = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$) on a $f^{(\ell)}(0) = 0$. On en déduit que le développement limité d'ordre $2p+1$ en 0 de la fonction cosinus hyperbolique est :

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o_0(x^{2p+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2p+1}).\end{aligned}$$

On remarquera que le développement limité d'ordre $2p$ en 0 de la fonction cosinus admet la même partie régulière que le développement limité d'ordre $2p+1$ en 0, cela en raison de la parité de la fonction cosinus.

❑ Considérons l'application $f : x \in]-1,1[\mapsto 1/(1-x)$. Par récurrence, on vérifie que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $f^{(k)} : x \in]-1,1[\mapsto k!/(1-x)^{k+1}$. On en déduit le développement limité suivant :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o_0(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o_0(x^n).$$

❑ Considérons l'application $f : x \in]-1,1[\mapsto 1/(1+x)$. On vérifie que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $f^{(k)} : x \in]-1,1[\mapsto (-1)^k k!/(1-x)^{k+1}$. On en déduit le développement limité suivant :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o_0(x^n)\\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o_0(x^n).\end{aligned}$$

❑ De manière plus générale, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ considérons l'application $f : x \in]-1,1[\mapsto (1+x)^\alpha$ qui est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. On vérifie par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)} : x \in]-1,1[\longmapsto \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}.$$

On en déduit le développement limité suivant :

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots\\ &\qquad \ldots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,\frac{x^n}{n!} + o_0(x^n).\end{aligned}$$

17.3 Opérations sur les développements limités

Lorsque l'application f a une expression un peu plus compliquée que celles envisagées jusqu'ici, la formule de Taylor-Young conduit rapidement à des calculs longs et compliqués. Le calcul des dérivées successives devient pénible lorsque l'ordre de dérivation s'élève. Aussi, en pratique, on utilise rarement la formule de Taylor-Young et on préfère déduire le développement limité de la fonction considérée de ceux de fonctions plus simples par diverses « opérations ».

17.3.1 Opérations algébriques

Proposition 17.4 *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités de même ordre n en 0, de parties régulières respectives P et Q.*

✗ *Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\alpha f + \beta g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière $\alpha P + \beta Q$.*

✗ *La fonction $f \times g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est obtenue en conservant les monômes de degré au plus égal à n du polynôme $P \times Q$.*

✗ *Si $g(0) \neq 0$ alors la fonction f/g admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est le quotient de la division selon les puissances croissantes à l'ordre n de P par Q.*

Démonstration ⊵ Les deux premières assertions se démontrent aisément en utilisant la définition 17.1 et l'unicité du développement limité.

⊵ Démontrons la troisième assertion. Par hypothèse, f admettant un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P, il existe un voisinage V_1 de 0 et une application ϵ_1 définie sur $V_1 \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V_1 \setminus \{0\}$

$$f(x) = P(x) + x^n \epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \epsilon_1(x) = 0.$$

Puisque g admet un développement limité en 0, d'après la proposition 17.3, g est continue en 0. De plus, comme $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$, on peut trouver, d'après la proposition 13.16, page 620, un voisinage V_2 de 0 sur lequel g ne s'annule pas. D'autre part, il existe un voisinage V_3 de 0 et une application ϵ_2 définie sur $V_3 \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V_3 \setminus \{0\}$

$$g(x) = Q(x) + x^n \epsilon_2(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \epsilon_2(x) = 0.$$

On a $Q(0) = g(0) \neq 0$; on peut donc effectuer la division selon les puissances croissantes[10] à l'ordre n de P par Q : il existe $(U, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$P = Q \times U + X^{n+1} \times R \qquad \text{avec } \deg(U) \leqslant n.$$

Pour $x \in V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{P(x) + x^n\epsilon_1(x)}{Q(x) + x^n\epsilon_2(x)} = \frac{Q(x)U(x) + x^{n+1}R(x) + x^n\epsilon_1(x)}{Q(x) + x^n\epsilon_2(x)} \\
&= \frac{Q(x)U(x) + x^nU(x)\epsilon_2(x)}{Q(x) + x^n\epsilon_2(x)} + \frac{-x^nU(x)\epsilon_2(x) + x^{n+1}R(x) + x^n\epsilon_1(x)}{Q(x) + x^n\epsilon_2(x)} \\
&= U(x) + x^n \frac{-U(x)\epsilon_2(x) + xR(x) + \epsilon_1(x)}{Q(x) + x^n\epsilon_2(x)}.
\end{aligned}$$

(10) Voir le théorème 6.2 p. 233.

Comme $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$ et $Q(0) \neq 0$, le terme

$$\epsilon_3(x) = \frac{-U(x)\epsilon_2(x) + xR(x) + \epsilon_1(x)}{Q(x) + x^n\epsilon_2(x)}$$

a pour limite 0 lorsque x tend vers 0. On a donc établi que pour tout $x \in V$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = U(x) + x^n\epsilon_3(x) \qquad \text{avec} \quad \deg(U) \leqslant n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \epsilon_3(x) = 0.$$

Cela constitue un développement limité d'ordre n en 0 de f/g et puisque le développement limité d'une fonction en un point et à un ordre donnés est unique, cela constitue le développement limité d'ordre n en 0 de f/g. □

Exemple Les fonctions sinus et cosinus admettent pour développements limités en 0 à l'ordre 3,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_0(x^3) \qquad \text{et} \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o_0(x^3).$$

D'après la proposition 17.4, les développements limités à l'ordre 3 en 0 pour les fonctions $\sin + \cos$ et $\sin \times \cos$ s'obtiennent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \cos(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + o_0(x^3) \\
&= 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o_0(x^3); \\
\sin(x) \times \cos(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + o_0(x^3) \\
&= x - \frac{x^3}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \underbrace{\frac{x^5}{12}}_{=o_0(x^3)} + o_0(x^3) = x - \frac{2x^3}{3} + o_0(x^3).
\end{aligned}$$

EXERCICE 1 Montrer que le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)\sin(x)$ a pour partie régulière $x + \frac{1}{3}x^3$.

Exemple Déterminons le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction tangente. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ et les fonctions sinus et cosinus admettent en 0 pour développements limités d'ordre 3 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_0(x^3) \qquad \text{et} \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o_0(x^3).$$

Puisque $\cos(0) = 1 \neq 0$, on peut effectuer la division selon les puissances croissantes à l'ordre 3 de $x - \frac{1}{6}x^3$ par $1 - \frac{1}{2}x^2$.

$$
\begin{array}{r||l}
X - \frac{1}{6}X^3 & \quad 1 - \frac{1}{2}X^2 \\
\cline{2-2}
-(X - \frac{1}{2}X^3) & \quad X + \frac{1}{3}X^3 \\
\cline{1-1}
\frac{1}{3}X^3 & \\
-(\frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{6}X^5) & \\
\cline{1-1}
\frac{1}{6}X^5 &
\end{array}
$$

Le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction tangente est donc

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3).$$

On remarquera par ailleurs que, puisque la fonction tangente est impaire, la partie régulière du développement limité d'ordre 4 en 0 de la fonction tangente est également $x + \frac{1}{3}x^3$.

> Si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ alors la fonction f/g peut admettre un développement limité d'ordre n en 0 mais celui-ci ne peut pas être calculé par division selon les puissances croissantes car la valuation de Q est alors non nulle (on a $Q(0) = 0$) et la division selon les puissances croissantes n'est pas définie dans ce cas.

Ainsi le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ ne peut être calculé par division suivant les puissances croissantes. Par contre ce développement limité existe. En effet, il existe une application ϵ définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\epsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + x^3\epsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

La fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ admet donc un développement limité d'ordre 3 en 0 de partie régulière $1 - \frac{1}{6}\,x^2$. On remarquera que l'on a dû utiliser le développement limité d'ordre 4 en 0 de la fonction sinus pour obtenir ce développement limité d'ordre 3 en 0.

Exercice 2 Montrer que le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente est

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5)$$

et que le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente hyperbolique est

$$\operatorname{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5).$$

En déduire le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\tan(x)}{\operatorname{th}(x)}$.

Proposition 17.5 *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités de même ordre n en 0, de parties régulières respectives P et Q. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ alors la fonction $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est obtenue en conservant les monômes de degré au plus égal à n de la fonction polynomiale $x \mapsto Q(P(x))$.*

Démonstration Ce résultat est admis. On pourra rédiger la démonstration en s'inspirant de la démonstration de la proposition 17.4. □

Exemples

1. La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ admet pour développement limité d'ordre 4 en 0 $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o_0(x^4)$ et la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^2$, qui vaut 0 en 0, est égale à la partie régulière de son développement limité d'ordre 4 en 0. On en déduit que

$$g(f(x)) = \frac{1}{1-x^2} = 1 - x^2 + (x^2)^2 + o_0(x^4) = 1 - x^2 + x^4 + o_0(x^4).$$

2. Les fonctions sinus et exponentielle admettent en 0 pour développements limités :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_0(x^4) \qquad \text{et} \qquad e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + o_0(u^4).$$

On a $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$. On obtient donc le développement limité d'ordre 4 en 0 suivant pour la fonction $h : x \mapsto \exp(\sin(x))$,

$$\begin{aligned}
h(x) &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^4 + o_0(x^4) \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{3!}\left(x^3\right) + \frac{1}{4!}\left(x^4\right) + o_0(x^4) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o_0(x^4).
\end{aligned}$$

Bien entendu, il est inutile de développer complètement chacun des termes $\left(x - \frac{1}{3!}x^3\right)^k$ selon la formule du binôme de Newton. On se contente d'écrire les monômes de degré strictement inférieur à 5. Les autres termes, négligeables au voisinage de 0 devant x^4, sont pris en compte dans le reste $o_0(x^4)$.

Une source fréquente d'erreur est due à l'utilisation de la proposition 17.5 alors que $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$.

Pour calculer le développement limité d'ordre 4 en 0 de $h : x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$ on ne peut pas procéder de la même manière que pour celui de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$ puisque $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$. Pour mener à bien ce calcul, on remarque que

$$\exp(\cos(x)) = \mathrm{e}\ \exp(\cos(x) - 1),$$

que la fonction $f : x \mapsto \cos(x) - 1$ a pour limite 0 en 0 et a pour développement limité d'ordre 4 en 0 : $\cos(x) - 1 = -x^2/2! + x^4/4! + o_0(x^4)$. En utilisant la proposition 17.5, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\cos(x)-1} &= 1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^3 \\
&\quad + \frac{1}{4!}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^4 + o_0(x^4) \\
&= 1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^4}{4}\right) + o_0(x^4) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o_0(x^4).
\end{aligned}$$

On en déduit que le développement limité d'ordre 4 en 0 de $h : x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$ est

$$\mathrm{e}^{\cos(x)} = \mathrm{e}\ \mathrm{e}^{\cos(x)-1} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}\, x^2}{2} + \frac{\mathrm{e}\, x^4}{6} + o_0(x^4).$$

Comme la fonction h est paire, la partie régulière de son développement limité en 0 ne contient que des monômes de degré pair. On a donc sans calcul supplémentaire le développement limité d'ordre 5 en 0 de h :

$$\mathrm{e}^{\cos(x)} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}\, x^2}{2} + \frac{\mathrm{e}\, x^4}{6} + o_0(x^5).$$

Même en développant tous les termes $(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})^k$ par la formule du binôme de Newton, on ne peut obtenir mieux que le développement limité d'ordre 5 en 0 de h. En effet, la présence d'un terme $-\frac{1}{48}x^6$ n'indique pas que le développement limité a été effectué à l'ordre 6 car tous les monômes de degré 6 dans le calcul du développement limité à l'ordre 6 ne sont pas pris en compte.

Conformément à ce qui est précisé dans la proposition 17.5, pour obtenir le développement limité d'ordre 6 en 0 de la fonction h, il faut partir des développement limité d'ordre 6 en 0 suivants :

$$e^u = \sum_{k=0}^{6} \frac{u^k}{k!} + o_0(u^6) \quad \text{et} \quad \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o_0(x^6).$$

La proposition 17.5 indique que

$$\begin{aligned} e^{\cos(x)-1} &= \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!}\Big(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\Big)^k + o_0(x^6) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31x^6}{720} + o_0(x^6). \end{aligned}$$

Le calcul d'un développement limité nécessite donc de la rigueur.

Exercice 3 Déterminer l'expression du développement limité d'ordre 4 en 0 de l'application $h : x \in]-1,1[\mapsto -1/(1+x)^2$ en utilisant la décomposition $h = g \circ f$ où

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + 2x \quad \text{et} \quad g : y \in]-1,1[\longmapsto -\frac{1}{1+y}.$$

17.3.2 Dérivation et primitivation d'un développement limité

Proposition 17.6 (Primitivation d'un développement limité)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0.

Si f' admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P alors f admet un développement limité d'ordre $(n+1)$ en 0 dont la partie régulière est la primitive de P qui vaut $f(0)$ en 0. Autrement dit, f admet un développement limité d'ordre $(n+1)$ en 0 de la forme

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P(t)\ \mathrm{d}t + o_0(x^{n+1}).$$

Démonstration D'après la définition 17.1, puisque f' admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P, il existe un voisinage V de 0 et une application ϵ définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que

$$\forall x \in V \setminus \{0\} \qquad f'(x) = P(x) + x^n \epsilon(x) \tag{5}$$

avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$. Le polynôme P est de degré au plus n. D'après la proposition 17.3, f' est continue sur V. D'autre part, pour $x \in V$ on a[11]

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t = f(0) + \int_0^x P(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^x t^n \epsilon(t)\ \mathrm{d}t.$$

[11] Voir le corollaire 18.3 p. 909.

Soit Q la fonction polynomiale de degré au plus $(n+1)$ définie par la relation $Q(x) = f(0) + \int_0^x P(t)\, dt$. Pour démontrer la proposition 17.6, nous devons montrer que la quantité $\int_0^x t^n \epsilon(t)\, dt$ est négligeable devant x^{n+1} au voisinage de 0. Pour $x \in V$, on a

$$\int_0^x t^n \epsilon(t)\, dt = f(x) - Q(x)$$

et la fonction $\phi = f - Q$ est continue et dérivable sur V. Montrer que $\phi(x) = o_0(x^{n+1})$ revient à montrer que $\lim_{x \to 0} \phi(x)/x^{n+1} = 0$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c_x dans l'intervalle ouvert d'extrémités 0 et x tel que,

$$\phi(x) = \underbrace{\phi(0)}_{=0} + x\, \phi'(c_x) = x\, \big(f'(c_x) - \underbrace{Q'(c_x)}_{=P(c_x)}\big) = x\, \big(f'(c_x) - P(c_x)\big).$$

En utilisant la relation (5), on en déduit que pour $x \in V \setminus \{0\}$,

$$\frac{\phi(x)}{x^{n+1}} = \frac{f'(c_x) - P(c_x)}{x^n} = \frac{c_x^n \epsilon(c_x)}{x^n} = \left(\frac{c_x}{x}\right)^n \epsilon(c_x).$$

Le réel c_x appartenant à l'intervalle ouvert d'extrémités 0 et x, on a

$$0 \leqslant \left(\frac{c_x}{x}\right)^n \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} c_x = 0.$$

Puisque $\lim_{t \to 0} \epsilon(t) = 0$, on en déduit que $\lim_{x \to 0} (c_x/x)^n \epsilon(c_x) = 0$ et par conséquent que $\lim_{x \to 0} \phi(x)/x^{n+1} = 0$. La proposition est démontrée. □

La proposition 17.6 permet d'obtenir les développements limités d'ordre n en 0 de plusieurs fonctions usuelles.

❑ La dérivée de l'application $f : x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ admet pour développement limité d'ordre $n-1$ en 0,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o_0(x^{n-1}).$$

Puisque $f(0) = 0$, on obtient le développement limité suivant.

$$\boxed{\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o_0(x^n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o_0(x^n). \end{aligned}}$$

❑ La dérivée de l'application $f : x \in]-\infty, 1[\mapsto \ln(1-x)$ admet pour développement limité d'ordre $n-1$ en 0,

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{k=0}^{n-1} x^k + o_0(x^{n-1}).$$

Puisque $f(0) = 0$, on obtient le développement limité suivant.

$$\boxed{\ln(1-x) \;=\; -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o_0(x^n) \;=\; -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o_0(x^n).}$$

❑ Soient p un entier et $n = 2p+1$. La dérivée de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan(x)$ admet pour développement limité d'ordre $n-1$ en 0,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k x^{2k} + o_0(x^{2p}).$$

Puisque $f(0) = 0$, on obtient le développement limité suivant.

$$\boxed{\begin{aligned} \arctan(x) \;&=\; x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^p\,\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o_0(x^{2p+1}) \\ &=\; \sum_{k=0}^{p} (-1)^k\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o_0(x^{2p+1}). \end{aligned}}$$

Remarquons que puisque la fonction arc-tangente est impaire, les développements limités à l'ordre $2p+1$ et à l'ordre $2p+2$ ont même partie régulière.

❑ Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n = 2p+1$. La dérivée de $f : x \in]-1, 1[\mapsto \arcsin(x)$ qui est l'application $f' : x \in]-1, 1[\mapsto \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ admet[12] pour développement limité d'ordre $n-1$ en 0,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}x^4 + \ldots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2p}x^{2p} + o_0(x^{2p}).$$

Puisque $f(0) = 0$, on obtient le développement limité suivant.

$$\boxed{\begin{aligned} \arcsin(x) \;&=\; x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}\frac{x^5}{5} + \ldots \\ &\qquad \ldots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2p}\,\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o_0(x^{2p+1}). \end{aligned}}$$

[12] On utilise le développement limité de $(1+u)^\alpha$ en 0, voir p. 826, avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = -x^2$.

Remarquons que puisque la fonction arc-sinus est impaire, les développements limités à l'ordre $2p+1$ et à l'ordre $2p+2$ ont même partie régulière.

Nous avons établi à la proposition 14.18, page 686, que pour tout $x \in [-1,1]$ on a

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que la fonction arc-cosinus admet le développement limité suivant en 0,

$$\boxed{\begin{aligned}\arccos(x) &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5} - \dots \\ &\qquad \dots - \frac{1\times 3\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2p}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o_0(x^{2p+1}).\end{aligned}}$$

Exercice 4
1 - Calculer le développement limité d'ordre $2p$ en 0 de l'application $f : x \in]-1,1[\mapsto -1/\sqrt{1-x^2}$.
2 - En utilisant la proposition 17.6, retrouver l'expression du développement limité d'ordre $2p+1$ en 0 de la fonction arc-cosinus.

Corollaire 17.2 (Dérivation d'un développement limité)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0. Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière Q et si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en 0 de partie régulière P alors $Q' = P$.

Démonstration Supposons que f' admet un développement limité d'ordre $(n-1)$ en 0 de partie régulière P. D'après la proposition 17.6, f admet un développement limité d'ordre n en 0 qui s'exprime sous la forme

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P(t)\ \mathrm{d}t + o_0(x^n).$$

Puisque par hypothèse f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière Q, par unicité du développement limité on a

$$Q(x) = f(0) + \int_0^x P(t)\ \mathrm{d}t$$

ce qui signifie que Q est la primitive de P qui vaut $f(0)$ en 0, voir la proposition 18.10, page 908. On a par conséquent $Q' = P$. □

Exemple L'application $f : x \in]-1,1[\mapsto 1/(1+x)$ admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière $1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n$. Elle a pour dérivée l'application $f' : x \in]-1,1[\mapsto -1/(1+x)^2$ qui est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et qui par conséquent admet des développements limités à tout ordre en 0. D'après la proposition 17.6, l'application f' admet un développement limité à l'ordre $(n-1)$ de partie régulière

$$-1 + 2x - 3x^2 + \ldots + (-1)^n n x^{n-1}.$$

On peut également obtenir ce développement limité par d'autres méthodes. Par exemple en effectuant une division selon les puissances croissantes de -1 par $1 + 2X + X^2$, ou en effectuant le produit du développement limité de $1/(1+x)$ par lui même, ou encore en utilisant la composition de développements limités comme cela est proposé dans l'exercice 3.

> Le corollaire 17.2 ne dit pas que si f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière Q alors on peut en déduire que f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en 0 dont la partie régulière est $P = Q'$. Il est nécessaire de s'assurer au préalable que f' admet bien un développement limité : f peut admettre un développement limité sans que f' n'admette de développement limité.

À titre de contre-exemple, considérons l'application

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 + x^3 \sin(1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Cette application est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée l'application

$$f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2x + 3x^2 \sin(1/x^2) - 2\cos(1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Nous avons démontré précédemment que la fonction f admettait un développement limité d'ordre 2 en 0 de partie régulière x^2 mais d'après la proposition 17.3, la fonction f' qui n'est pas continue en 0 ne peut pas posséder de développement limité en 0. Il serait donc inexact d'affirmer que le développement limité d'ordre 1 en 0 de f' a pour partie régulière $2x$.

> **Exercice 5** Calculer le développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :
>
> 1 - $x \mapsto \sin(x)\cos 2x$ à l'ordre 6
>
> 2 - $x \mapsto \cos(x)\ \ln(1+x)$ à l'ordre 4
>
> 3 - $x \mapsto (x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3
>
> 4 - $x \mapsto \dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ à l'ordre 2
>
> 5 - $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 3
>
> 6 - $x \mapsto \exp(\arcsin(x))$ à l'ordre 3
>
> 7 - $x \mapsto x\ (\mathrm{ch}(x))^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4
>
> 8 - $x \mapsto \mathrm{argth}(x)$ à l'ordre 3
>
> 9 - $x \mapsto (1+\arctan(x))^{x/\sin^2(x)}$ à l'ordre 2

17.4 Extensions de la notion de développement limité

Nous avons vu qu'une condition nécessaire pour que f admette un développement limité en 0 est que f soit continue sur un voisinage de 0 (et qu'une condition suffisante pour que f admette un développement limité à l'ordre n est que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de 0). Dans cette partie nous allons généraliser la notion de développement limité en considérant des fonctions non nécessairement continues et des points autres que 0.

17.4.1 Développements limités à gauche ou à droite

La notion de développement limité possède pour généralisation naturelle les notions de développements limités à gauche ou à droite. Par exemple, l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (1 + |x|)^{-1}$ n'est pas dérivable en 0 donc n'admet pas en 0 de développement limité d'ordre supérieur à 1. On peut toutefois remarquer que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

et que les applications $f_1 : x \in]-1, 1[\mapsto (1+x)^{-1}$ et $f_2 : x \in]-1, 1[\mapsto (1-x)^{-1}$ admettent pour développement limité d'ordre n en 0 respectivement

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o_0(x^n) \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o_0(x^n).$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o_0(x^n)$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^-$ on a $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o_0(x^n)$. Ces considérations motivent la définition suivante.

Définition 17.2 ✗ *On dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre n à gauche de 0 s'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n, un réel η strictement négatif et une application ϵ définie sur $]\eta, 0[$ tels que pour tout $x \in]\eta, 0[$,*

$$f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x) \qquad \textit{avec} \lim_{x \to 0^-} \epsilon(x) = 0.$$

On note $f(x) = P(x) + o_{0^-}(x^n)$.

✗ *On dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre n à droite de 0 s'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n, un réel η strictement positif et une application ϵ définie sur $]0, \eta[$ tels que pour tout $x \in]0, \eta[$,*

$$f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x) \qquad \textit{avec} \lim_{x \to 0^+} \epsilon(x) = 0.$$

On note $f(x) = P(x) + o_{0^+}(x^n)$.

Exemple Considérons l'application $f : x \in]0,\pi] \mapsto \sqrt{\sin(x)/|x|}$; pour $x \in]0,\pi]$, on a

$$\frac{\sin(x)}{|x|} = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + o_0(x^3).$$

De plus,

$$\sqrt{1+u} = (1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o_0(u^3).$$

On en déduit que pour $x \in]0,\pi]$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{\sin(x)}{x}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\sin(x)}{x} - 1\right)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{6}x^2\right) - \frac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{6}x^2\right)^2 + \frac{1}{16}\left(-\tfrac{1}{6}x^2\right)^3 + o_0(x^3) \\ &= 1 - \frac{x^2}{12} + o_0(x^3). \end{aligned}$$

On en conclut que f admet un développement limité d'ordre 3 à droite de 0 qui est

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{12} + o_{0^+}(x^3).$$

17.4.2 Développement limité au voisinage d'un réel non nul

DÉFINITION 17.3 *Soit x_0 un réel non nul. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0 si la fonction $f_0 : t \mapsto f(x_0 + t)$ admet un développement limité d'ordre n en 0.*

Le développement limité d'ordre n en x_0 de f est donné par

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

où

- *le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n est la partie régulière du développement limité d'ordre n en 0 de la fonction f_0 ;*
- *l'application ϵ définie au voisinage de x_0 vérifie $\lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$.*

Remarques

1. Le développement limité d'ordre n en x_0 de f peut s'écrire

$$f(x) = P(x - x_0) + o_{x_0}\left((x - x_0)^n\right).$$

2. La formule de Taylor-Young à l'ordre n en x_0 permet d'obtenir l'expression du développement limité d'ordre n en x_0 pour tout réel x_0. Toutefois, cette formule impose souvent des calculs longs et pénibles.

3. Les propriétés qui ont été données pour les développements limités en 0 se généralisent aux développements limités en x_0.

Exemples

1. Calculons le développement limité à l'ordre 5 en π de la fonction $f : x \mapsto \sin(x)/(\pi - x)$. Pour cela considérons la fonction f_0 définie par $f_0(t) = f(\pi + t)$. On a

$$f_0(t) = \frac{\sin(\pi + t)}{-t} = \frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + o_0(t^5).$$

On en déduit que le développement limité d'ordre 5 en π de f est

$$f(x) = 1 - \frac{(x-\pi)^2}{6} + \frac{(x-\pi)^4}{120} + o_\pi((x-\pi)^5).$$

2. Calculons le développement limité à l'ordre 3 en 1 de la fonction sinus hyperbolique. Pour cela considérons la fonction f_0 définie par $f_0(t) = \mathrm{sh}(1+t)$; pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f_0(t) = \mathrm{ch}(1)\,\mathrm{sh}(t) + \mathrm{sh}(1)\,\mathrm{ch}(t).$$

On a les développements limités suivant en 0,

$$\mathrm{sh}(t) = t + \frac{t^3}{3!} + o_0(t^3) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(t) = 1 + \frac{t^2}{2!} + o_0(t^3).$$

On en déduit que le développement limité d'ordre 3 en 0 de f_0 est

$$f_0(t) = \mathrm{sh}(1) + \mathrm{ch}(1)\,t + \frac{\mathrm{sh}(1)}{2!}\,t^2 + \frac{\mathrm{ch}(1)}{3!}\,t^3 + o_0(t^3).$$

On en conclut que le développement limité d'ordre 3 en 1 de la fonction sinus hyperbolique est

$$\mathrm{sh}(t) = \mathrm{sh}(1) + \mathrm{ch}(1)\,(x-1) + \frac{\mathrm{sh}(1)}{2!}\,(x-1)^2 + \frac{\mathrm{ch}(1)}{3!}\,(x-1)^3 + o_1((x-1)^3).$$

Exercice 6

1 - Calculer le développement limité à l'ordre 4 en $\pi/6$ de $x \mapsto \cos^2(2x)$.

2 - Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $x \mapsto \ln(x)/(x^2-1)$.

On veillera à toujours exprimer la partie régulière du développement limité d'ordre n en x_0 suivant les puissances croissantes de $x - x_0$ et non pas suivant celles de x.

Cette mise en garde est destinée à prévenir des calculs erronés comme nous allons l'illustrer avec l'exemple suivant.

Exemple Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(x)/(x^2-1)$ dont le développement limité d'ordre 2 en 1 est

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{5}{12}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2).$$

La partie régulière de ce développement s'écrit encore $\frac{17}{2} - \frac{4}{3}x + \frac{5}{12}x^2$. Il est alors tentant d'en déduire que la partie régulière développement limité en 1 de la fonction $g : x \mapsto x^2 \ln(x)/(x^2-1)$ est $\frac{17}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{12}x^4$; ce qui est inexact. Pour calculer le développement limité d'ordre 2 en 1 de g, on peut procéder comme indiqué dans la définition 17.3, ou plus simplement remarquer que $g(x) = x^2 f(x)$ et que

$$x^2 = \big((x-1)+1\big)^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$$

ce qui constitue le développement limité d'ordre 2 en 1 de la fonction polynomiale $x \mapsto x^2$. En utilisant la règle de calcul du développement limité d'un produit, on obtient le développement limité d'ordre 2 en 1 de g :

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{5}{12}(x-1)^2\right) \times \left(1 + 2(x-1) + (x-1)^2\right) + o_1((x-1)^2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2). \end{aligned}$$

17.4.3 Développement limité au voisinage de l'infini

Définition 17.4 *On dit qu'une fonction f admet un développement limité généralisé d'ordre n au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si la fonction $f_0 : t \mapsto f(1/t)$ admet un développement limité d'ordre n à droite (resp. à gauche) en 0. Ce développement limité généralisé est donné par*

$$f(x) = P(1/x) + \epsilon(x)/x^n$$

où

- *le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n est la partie régulière du développement limité d'ordre n à droite (resp. à gauche) en 0 de f_0 ;*
- *l'application ϵ définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) vérifie*

$$\lim_{x \to +\infty} \epsilon(x) = 0 \qquad \textit{(resp. } \lim_{x \to -\infty} \epsilon(x) = 0 \textit{)}.$$

Remarque Le développement limité généralisé d'ordre n au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) peut s'écrire

$$f(x) = P(1/x) + o_{\pm\infty}(1/x^n).$$

On dit également que f admet un développement asymptotique dans l'échelle $\{1/x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemples

1. Calculons le développement limité généralisé d'ordre n au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto x/(x-1)$. Pour cela, considérons la fonction f_0 définie par $f_0(t) = f(1/t)$. On a

$$f_0(t) = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t} - 1} = \frac{1}{1-t}$$

et le développement limité d'ordre n en 0 de f_0 est $f_0(t) = \sum_{k=0}^{n} t^n + o_0(t^n)$. On en déduit que f admet pour développement limité généralisé à l'ordre n au voisinage de $+\infty$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^k} + o_{+\infty}(1/x^n).$$

2. Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x}$ et cherchons son développement limité généralisé d'ordre 1 au voisinage de $+\infty$. Pour cela, considérons la fonction f_0 définie par $f_0(t) = f(1/t)$; pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f_0(t) = \left(\frac{1}{t^3}+1\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{t}\left((1+t^3)^{\frac{1}{3}} - (1+t)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Or, $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + o_0(u)$ d'où $(1+t^3)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}t^3 + o_0(t^3) = 1 + o_0(t^2)$ et $(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o_0(t^2)$. On en déduit que

$$(1+t^3)^{\frac{1}{3}} - (1+t)^{\frac{1}{2}} = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o_0(t^2)$$

puis $f_0(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}t + o_0(t)$. Finalement, on obtient le développement limité généralisé d'ordre 1 au voisinage de $+\infty$ suivant

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8x} + o_0(1/x).$$

3. Calculons le développement limité généralisé d'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto x \arctan(1/(1+x))$. Considérons la fonction f_0 définie par $f_0(t) = f(1/t)$. On a

$$f_0(t) = \frac{1}{t}\ \arctan\left(\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{t}\ \arctan\left(\frac{t}{1+t}\right).$$

Pour obtenir le développement limité de f_0 à l'ordre 2 en 0, en raison de la présence du terme $1/t$, nous devons considérer les développements limités à l'ordre 3 suivants au voisinage de 0,

$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} = t - t^2 + t^3 + o_0(t^3) \quad \text{et} \quad \arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + o_0(u^3).$$

Comme $\lim_{t\to 0} \frac{t}{(1+t)} = 0$, la proposition 17.5 indique que

$$\arctan\left(\frac{t}{1+t}\right) = \left(t - t^2 + t^3\right) - \frac{1}{3}\left(t - t^2 + t^3\right)^3 + o_0(t^3) = t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 + o_0(t^3).$$

On en déduit que le développement limité d'ordre 2 en 0 de f_0 est

$$f_0(t) = 1 - t + \frac{2t^2}{3} + o_0(t^2).$$

On en conclut que f admet pour développement limité généralisé en $+\infty$ à l'ordre 2

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3x^2} + o_{+\infty}(1/x^2).$$

Les développements limités généralisées au voisinage de $+\infty$ s'obtiennent avec MAPLE en utilisant la commande `taylor` de la manière suivante :

```
> taylor(x*arctan(1/(1+x)),x=+infinity,3);
```

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

EXERCICE 7 Nous avons vu page 733 que $\operatorname{argsh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \operatorname{argch}(x)$. Montrer que

$$\operatorname{argsh}(x) - \operatorname{argch}(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{5}{48x^6} + o_{+\infty}(1/x^6).$$

(On pourra utiliser les relations établies à la proposition 14.22, page 691, et à la proposition 14.24, page 693.)

17.4.4 Développement limité d'une fonction non bornée

DÉFINITION 17.5 *Soit f une application définie au voisinage de 0 et non nécessairement bornée en 0. On dit que f admet un développement asymptotique en 0 à la précision $x^{\nu+n}$ dans l'échelle $\{1/x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ s'il existe un entier $\nu \in \mathbb{Z}$ et un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n tels qu'au voisinage de 0 on ait*

$$f(x) = x^\nu\big(P(x) + o_0(x^n)\big).$$

Remarque Cette définition s'étend au cas d'un réel x_0 non nul.

Exemples

1. Calculons le développement asymptotique en 0 à la précision x^2 dans l'échelle $\{1/x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ de la fonction $x \mapsto 1/\sin(x)$. On a le développement limité suivant en 0

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_0(x^4).$$

On en déduit que

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x - \frac{1}{3!}x^3 + o_0(x^4)} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^2 + o_0(x^3)}.$$

Comme $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o_0(u^3)$, on en déduit que

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^2 + o_0(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^3)$$

puis que

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + o_0(x^2).$$

2. Calculons le développement asymptotique en 0 à la précision x^3 dans l'échelle $\{1/x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ de la fonction co-tangente. Remarquons que la fonction co-tangente n'est pas bornée en 0 ; elle tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Pour x au voisinage de 0 on a (voir l'exercice 2)

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5) = x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o_0(x^4)\right).$$

En effectuant la division selon les puissances croissantes de 1 par $1 + \frac{X^2}{3} + \frac{2X^4}{15}$ à l'ordre 4, on obtient

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o_0(x^4)\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o_0(x^3),$$

ce qui constitue le développement asymptotique dans l'échelle $\{1/x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ en 0 à la précision x^3 de la fonction co-tangente.

Les développements asymptotiques s'obtiennent avec MAPLE grâce à la commande `series`.

```
> taylor(1/sin(x),x=0,5);
Error, does not have a taylor expansion, try series()
> series(1/sin(x),x=0,5);
```

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + O\left(x^3\right)$$

EXERCICE 8 Calculer le développement asymptotique dans l'échelle $\{1/x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ en 0 à la précision x^3 de la fonction co-tangente hyperbolique.

Malgré la généralisation de la notion de développement limité apportée par la définition 17.5, il existe des fonctions qui n'admettent pas de développement asymptotique dans l'échelle $\left\{1/x^k \mid k \in \mathbb{N}\right\}$. C'est le cas par exemple de la fonction logarithme. Si la fonction logarithme admettait un tel développement asymptotique, elle serait équivalente en 0 à une certaine puissance de $1/x$, ce qui est impossible puisque d'après la proposition 14.10, page 674,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \to 0^+} x^n \ \ln(x) = 0.$$

17.5 Utilisations des développements limités

17.5.1 Utilisation pour la recherche d'équivalents

Les développements limités constituent un outil efficace pour la recherche de l'équivalent d'une fonction donnée au voisinage d'un point. La proposition suivante nous indique qu'une fonction est équivalente au voisinage d'un point au monôme de plus bas degré de la partie régulière de son développement limité en ce point.

Proposition 17.7 *Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en x_0 de partie régulière $\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ non nulle. On a*

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_\nu (x-x_0)^\nu$$

où ν désigne la valuation du polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Démonstration Les hypothèses indiquent que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 dont la partie régulière est $P(x-x_0)$ où $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. D'après la définition 17.3, il existe un voisinage V de x_0 et une application ϵ définie sur $V \setminus \{x_0\}$ tels que pour tout $x \in V \setminus \{x_0\}$

$$f(x) = P(x-x_0) + (x-x_0)^n \epsilon(x-x_0) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to x_0} \epsilon(x-x_0) = 0.$$

Pour $x \in V \setminus \{x_0\}$, on a

$$\frac{f(x)}{a_\nu (x-x_0)^\nu} = 1 + \sum_{k=\nu+1}^{n} \frac{a_k}{a_\nu} (x-x_0)^{k-\nu} + \frac{1}{a_\nu} (x-x_0)^{n-\nu} \epsilon(x-x_0).$$

Comme $\nu \leqslant n$, on a $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^{n-\nu} \epsilon(x-x_0) = 0$. D'autre part, si $\nu < n$ alors pour tout entier k avec $\nu + 1 \leqslant k \leqslant n$ on a $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^{k-\nu} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{a_\nu (x-x_0)^\nu} = 1,$$

autrement dit[13] que $f(x) \underset{x_0}{\sim} a_\nu (x-x_0)^\nu$. □

Exemples

1. On a vu page 842 que

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + o_0(x^2).$$

[13] Voir la proposition 15.4 p. 723.

On en déduit que
$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{6}.$$

2. La difficulté lorsqu'on utilise les développements limités pour déterminer l'équivalent d'une fonction donnée est de prévoir (ou deviner) à quel ordre il faut calculer le développement limité. Si le développement limité n'est pas effectué à un ordre suffisamment élevé, on n'obtiendra pas l'équivalent cherché. S'il est effectué à un ordre très élevé, on aura l'équivalent recherché mais au prix de calculs inutiles. Par exemple, il est difficile de prévoir que pour trouver l'équivalent en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(\sin(x)) - \sin(\mathrm{sh}(x))$, il faut effectuer les développements limités à l'ordre 7. Effectuons ce calcul ; on a
$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o_0(x^7) \quad \text{et} \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o_0(x^7).$$
On en déduit que
$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(\sin(x)) =& \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)^3 \\ &+ \frac{1}{5!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)^5 + \frac{1}{7!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)^7 + o_0(x^7), \\ \sin(\mathrm{sh}(x)) =& \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}\right) - \frac{1}{3!}\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}\right)^3 \\ &+ \frac{1}{5!}\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}\right)^7 + o_0(x^7).\end{aligned}$$
En développant chacune des parenthèses selon la formule du binôme de Newton en ne conservant que les monômes de degré inférieur à 7, on trouve
$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(\sin(x)) =& x - \frac{x^5}{15} + \frac{x^7}{90} + o_0(x^7), \\ \sin(\mathrm{sh}(x)) =& x - \frac{x^5}{15} - \frac{x^7}{90} + o_0(x^7).\end{aligned}$$
On en déduit que $\mathrm{sh}(\sin(x)) - \sin(\mathrm{sh}(x)) \underset{0}{\sim} \frac{1}{45}x^7$.

Remarque Pour déterminer un équivalent au voisinage de $\pm\infty$ d'une fonction f donnée, on peut utiliser son développement limité généralisé au voisinage de $\pm\infty$. Si f admet pour développement limité généralisé d'ordre n au voisinage de $\pm\infty$
$$f(x) = P(1/x) + o_{\pm\infty}(1/x^n)$$
et si le polynôme P est non nul alors $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{a_\nu}{x^\nu}$ où ν désigne la valuation de P.

Par exemple la fonction $f : x \mapsto 1 - x \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$ admet pour développement limité généralisé à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$
$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{3x^2} + o_{+\infty}\left(1/x^2\right)$$
donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 1/x$.

17.5.2 Utilisation pour le calcul de limites

Les développements limités constituent un outil puissant pour le calcul de limites. En effet, si la fonction f admet un développement limité d'ordre n en x_0 de partie régulière non nulle $P(x-x_0)$ où $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors au voisinage de x_0 on a $f(x) \sim a_\nu(x-x_0)^\nu$ où ν désigne la valuation de P. Par conséquent,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} a_\nu(x-x_0)^\nu = \begin{cases} a_0 & \text{si } \nu = 0 \\ 0 & \text{si } \nu > 0 \end{cases}.$$

La notion de développement limité généralisé permet de la même manière de procéder au calcul de limites en $\pm\infty$.

Exemples

1. Calculons la limite en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$. On a vu page 842 que

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + o_0(x^2).$$

On en déduit que

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{6} + o_0(x^2)\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + o_0(x).$$

On notera en développant de carré que le reste d'ordre le plus bas correspond au produit $\frac{1}{x} \times o_0(x^2) = o_0(x)$. C'est le terme « limitant » et tous les monômes de degré supérieur ou égal à 2 doivent être incorporés dans ce reste. On a donc

$$\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} + o_0(x)$$

et on en conclut que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}.$$

2. Le développement limité généralisé à l'ordre 1 au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x}$ est $-\frac{1}{2} + \frac{1}{8x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$, voir page 841. On en conclut que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

Remarque Il est souvent inutile de procéder au calcul complet du développement limité d'une fonction pour obtenir sa limite. Par exemple le calcul de la limite en 0 de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} - \cos(x)$$

peut être obtenu de la manière suivante. Au voisinage de 0 on a

$$\ln(1+x) = x + o_0(x) \qquad \text{et} \qquad \ln(1-x) = -x + o_0(x).$$

On a donc

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + o_0(x).$$

On en déduit que

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{0}{\sim} 2x \qquad \text{puis que} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = 1.$$

Finalement, on obtient $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ sans qu'il ait été nécessaire de calculer un développement limité de f.

17.5.3 Étude des branches infinies

On dit que la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f possède une branche infinie si l'une des deux situations suivantes a lieu :

1. il existe un réel x_0 tel que $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et on dit dans ce cas que f a une branche infinie à droite en x_0 ;
2. il existe un réel x_0 tel que $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et on dit dans ce cas que f a une branche infinie à gauche en x_0 ;
3. f admet pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$ ou lorsque x tend vers $-\infty$; on dit dans ce cas que f a une branche infinie en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

DÉFINITION 17.6 *Une droite $\mathcal{D}$ est dite asymptote à la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f admettant une branche infinie en $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si la distance*[14] *du point de coordonnées $(x, f(x))$ de $\mathcal{C}$ à la droite $\mathcal{D}$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0.*

Intéressons-nous dans un premier temps au cas où la représentation graphique de f possède une branche infinie en un réel x_0. Si $\mathcal{D}$ désigne la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $(x_0, 0)$ alors la distance d du point de coordonnées $(x, f(x))$ de $\mathcal{C}$ à la droite $\mathcal{D}$ vaut $|x - x_0|$. Cette distance tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. La droite $\mathcal{D}$ est donc asymptote à la représentation graphique de f en x_0. Par exemple la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ admet une branche infinie à droite et à gauche en $x_0 = 1$ puisque

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 1$ est donc asymptote à la représentation graphique de f en $x_0 = 1$ à gauche et à droite de x_0, voir la figure 1.

[14] On rappelle que dans le plan euclidien, la distance d'un point P à une droite $\mathcal{D}$ est définie comme la distance du point P considéré à son projeté orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$.

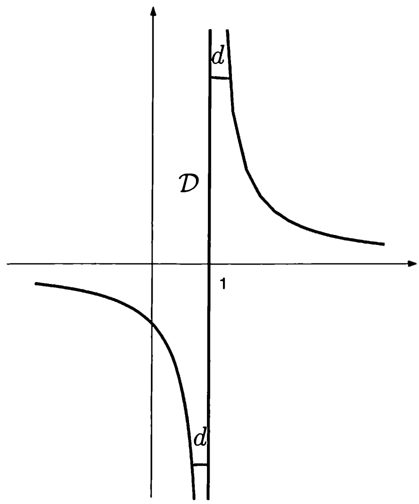


Fig. 1 La droite $x = 1$ est asymptote à la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-1)}$ en 1.

Dans le cas où la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f possède une branche infinie en $+\infty$ aucune droite d'équation $x = b$, avec $b \in \mathbb{R}$, ne peut être asymptote en $+\infty$. Si une asymptote existe, il s'agit nécessairement d'une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$. On peut montrer que la distance d du point de coordonnées $(x, f(x))$ de $\mathcal{C}$ à la droite $\mathcal{D}$ vaut, voir la figure 2,

$$d = \frac{|f(x) - (ax + b)|}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Cette quantité tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, c'est-à-dire si au voisinage de $+\infty$ il existe une fonction ϵ telle que

$$f(x) = ax + b + \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to +\infty} \epsilon(x) = 0.$$

Cette condition peut encore s'exprimer sous la forme $f(x) = ax + b + o_{+\infty}(1)$ qui s'interprète comme un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$. La condition $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ s'exprime encore sous la forme $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$. De plus, elle implique que $\lim_{x \to +\infty} f(x)/x = a$. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ s'il existe deux réels a et b avec $a \neq 0$ tels que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = b.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une asymptote en $+\infty$ qui viennent d'être établies sont reprises dans la proposition suivante (on a un résultat analogue en $-\infty$).

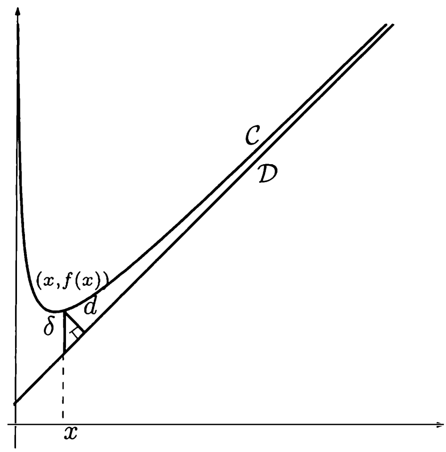


Fig. 2 La droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

PROPOSITION 17.8 *Soient f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f admet au voisinage de $+\infty$ la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote ;*
2. $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\lim_{x \to +\infty} f(x)/x = a$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$;
3. $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $f(x) = ax + b + o_{+\infty}(1)$ *au voisinage de* $+\infty$.

Remarques

1. La 3$^{\text{e}}$ assertion s'écrit encore :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + o_{+\infty}(1/x).$$

Cette expression constitue le développement limité généralisé à l'ordre 1 de la fonction $x \mapsto f(x)/x$ au voisinage de $+\infty$.

2. On peut préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote en étudiant le signe de la quantité $\delta = f(x) - (ax + b)$, voir la figure 2. Si au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) la quantité δ est négative alors la courbe se situe au dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). Au contraire, si au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) la quantité δ est positive alors la courbe se situe au dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). Si l'on dispose d'un développement limité généralisé de la fonction $x \mapsto f(x)/x$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) de la forme

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^i} + o_{\pm\infty}(1/x^i)$$

avec $i \in \mathbb{N}, i > 1$ et $c \in \mathbb{R}^*$, alors la position de la courbe par rapport à son asymptote est donnée directement par le signe de c. On a

$$f(x) - (ax + b) = \frac{c}{x^{i-1}} + o_{\pm\infty}(1/x^{i-1}).$$

Si c est positif (resp. négatif), la courbe se situe, au voisinage de $+\infty$, au-dessus (resp. au-dessous) de l'asymptote. Si c est positif et i est impair ou si c est négatif et i est pair la courbe se situe, au voisinage de $-\infty$, au-dessus de l'asymptote. Si c est positif et i est pair ou si c est négatif et i est impair la courbe se situe, au voisinage de $-\infty$, au-dessous de l'asymptote.

3. Pour affiner le tracé de la représentation graphique de f, il peut être utile de déterminer si l'asymptote $\mathcal{D}$ coupe ou non la courbe $\mathcal{C}$. L'abscisse des éventuels points d'intersection est obtenu en résolvant l'équation $f(x) - (ax + b) = 0$.

Exemples

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. Son ensemble de définition est $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, la représentation graphique de la fonction f présente une branche infinie en $+\infty$. Pour déterminer s'il existe une asymptote en $+\infty$, intéressons-nous à un développement limité généralisé au voisinage de $+\infty$ pour la fonction $g : x \mapsto f(x)/x$. Pour cela calculons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $g_0 : t \mapsto g(1/t)$. Pour $t \in]0, 1[$, on a[15]

$$g_0(t) = g(1/t) = tf(1/t) = t\sqrt{\frac{1}{t^2 - t^3}} = \sqrt{\frac{1}{1-t}} = (1-t)^{-\frac{1}{2}}.$$

En utilisant le développement limité d'ordre 2 en 0

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \alpha(\alpha - 1)\frac{u^2}{2} + o_0(u^2),$$

on obtient le développement limité d'ordre 2 en 0 suivant pour g_0

$$g_0(t) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + o_0(t^2).$$

On en déduit le développement limité généralisé à l'ordre 2 en $+\infty$ suivant pour g

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o_{+\infty}\left(1/x^2\right).$$

On en conclut que la représentation graphique de f admet une asymptote d'équation $y = x + 1/2$ en $+\infty$ et qu'au voisinage de $+\infty$, elle se situe au-dessus de son asymptote (la quantité $3/8x^2$ est positive lorsque x est au voisinage de $+\infty$). Par ailleurs, comme $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, la représentation graphique de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$. On peut avoir recours à MAPLE pour illustrer graphiquement la situation.

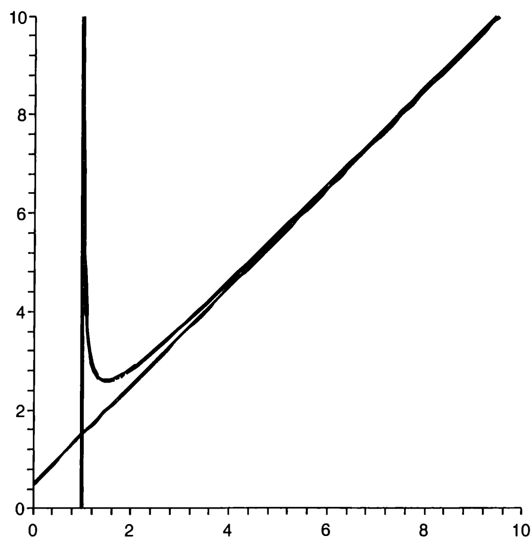
[15] On remarquera que comme t est positif, on a $\sqrt{\frac{1}{t^2-t^3}} = \frac{1}{|t|}\sqrt{\frac{1}{1-t}} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{1-t}}$.

```
> f:=x->sqrt(x^3/(x-1)):
> p:=unapply(convert(taylor(f(x),x=+infinity,1),polynom),x);
```

$$p := x \to x + \frac{1}{2}$$

La fonction p est la fonction affine dont la représentation graphique est l'asymptote étudiée.

```
> fig1:=plot([f(x),p(x)],x=0..10,y=0..10,color=[black,red]):
> fig2:=plot([1,t,t=0..10],color=red):
> with(plots):display([fig1,fig2],thickness=2);
```



2. Considérons la fonction $f : x \mapsto 3 - \dfrac{x\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)-1}$. On a[16] $\mathrm{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x$ et $\mathrm{ch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x$, ce qui implique que

$$f(x) - 3 = -\frac{x\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)-1} \underset{+\infty}{\sim} -x.$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et la représentation graphique de la fonction f présente une branche infinie en $+\infty$. Intéressons-nous à l'existence d'une éventuelle asymptote. On a $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = -1$ et

$$\begin{aligned} f(x) + x &= 3 - \frac{x\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)-1} + x = 3 + \frac{2x(\mathrm{e}^{-x}-1)}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2} = 3 + \frac{2x(1-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x} + 1 - 2\mathrm{e}^x} \\ &= 3 - \frac{2x}{\mathrm{e}^x - 1}. \end{aligned}$$

---

(16) Voir p. 733.

Comme

$$\frac{2x}{e^x - 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{e^x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0,$$

on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) + x = 3$. La droite d'équation $y = -x + 3$ est donc asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$. De plus, la quantité

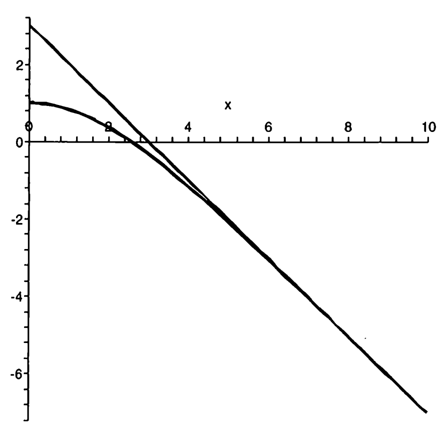
$$f(x) - (-x+3) = -\frac{2x}{e^x - 1}$$

étant négative au voisinage de $+\infty$, la représentation graphique de f est sous son asymptote au voisinage de $+\infty$. On peut avoir recours à MAPLE pour illustrer graphiquement la situation.

```
> f:=x->3-x*sinh(x)/(cosh(x)-1):
> taylor(f(x),x=+infinity,3);
Error, (in asympt) unable to compute series
> series(f(x),x=+infinity,3);
Error, (in asympt) unable to compute series
```

Il n'est pas possible de calculer l'équation de l'asymptote en ayant recours aux développements limités.

```
> p:=x->3-x:
> plot([f(x),p(x)],x=0..10);
```



EXERCICE 9 Déterminer les asymptotes à la représentation graphique de $f : x \mapsto (x+1)^2 \operatorname{argsh}(1/x)$.

Remarques

1. Une fonction admettant une droite asymptote en $+\infty$ ou en $-\infty$ n'admet pas nécessairement de développement limité généralisé en $+\infty$ ou en $-\infty$. Selon les situations, on est donc amené à utiliser l'une ou l'autre des deux méthodes de

calcul d'une asymptote données à la proposition 17.8. C'est le cas par exemple de l'application

$$f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

qui admet la droite d'équation $y = -x$ pour asymptote en $-\infty$ mais qui n'admet pas de développement limité généralisé en $-\infty$. On vérifie facilement que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$$

et que

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = 0$$

ce qui d'après la proposition 17.8 indique que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote en $-\infty$ à la représentation graphique de f. Il est toutefois impossible de trouver un développement limité généralisé en $+\infty$ à la fonction

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e^x - 1}$$

car on ne dispose pas de développement limité en 0 pour $e^{\frac{1}{t}}$.

2. La représentation graphique d'une fonction peut avoir une branche infinie au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$) sans pour autant posséder d'asymptote. C'est le cas si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

ou si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty.$$

Définition 17.7 *Soient a un réel et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ dont la représentation graphique C possède au voisinage de $+\infty$ une branche infinie.*

✗ *On dit que C admet au voisinage de $+\infty$ une* branche parabolique de direction $y = ax$ *ou une* direction asymptotique de pente a *si*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty.$$

✗ *On dit que C admet au voisinage de $+\infty$ une* branche parabolique verticale *si*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty.$$

Exemples

1. La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ admet une branche infinie de direction asymptotique de pente 0 au voisinage de $+\infty$ car

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ car

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

17.5.4 Étude des propriétés locales de la représentation graphique d'une application

Nous avons vu à la proposition 17.3 qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f soit dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ est qu'elle admette un développement limité d'ordre 1 en x_0. Ce développement limité est

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o_{x_0}(x - x_0).$$

Les développements limités constituent donc un moyen de déterminer si une fonction est prolongeable par continuité en un point x_0 et si la fonction définie par ce prolongement est dérivable en x_0.

Considérons à titre d'exemple, l'application $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x/(\mathrm{e}^x - 1)$. Au voisinage de 0 on a

$$\mathrm{e}^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o_0(x^3).$$

On en déduit que f admet pour développement limité d'ordre 2 en 0

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o_0(x^2).$$

Cela nous permet d'affirmer que l'application f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. De plus, ce prolongement est dérivable en 0, de nombre dérivée $-\frac{1}{2}$.

> Il ne faut surtout pas déduire du développement limité d'ordre 2 en 0 de f que f admet une dérivée seconde en 0 valant $\frac{1}{12}$. Nous avons vu à la proposition 17.3 que l'existence d'un développement limité d'ordre n en 0 n'était équivalent à l'existence d'une dérivée n-ième en 0 que pour $n \in \{0, 1\}$.

Si l'on souhaite étudier l'existence d'une dérivée seconde en 0, on le fera en revenant à la définition et en considérant la limite en 0 du taux d'accroissement

$$\Delta_0(h) = \frac{f'(h) - f'(0)}{h}.$$

Par contre le théorème de Taylor-Young[17] indique que si f admet une dérivée seconde en 0 alors celle-ci est égale à la moitié de la valeur du coefficient du monôme x^2 dans l'expression du développement limité de f en 0.

Du développement limité d'ordre 2 en 0 de f, on peut déduire que la tangente à la représentation graphique de f au point $(0,1)$ est la droite d'équation $y = 1-\frac{1}{2}x$. De plus, comme le terme $\frac{1}{12}x^2$ est positif au voisinage de 0, on en déduit que la représentation graphique est au-dessus de sa tangente au point $(0,1)$ (dans un voisinage de ce point). Une étude complète portant sur la position de la représentation graphique d'une application par rapport à sa tangente en un point a été effectuée à la section 16.5.2 du chapitre 16.

17.6 Quelques notions sur les développements asymptotiques

Nous avons vu que pour qu'une application admette un développement limité d'ordre n en $x_0 \in \mathbb{R}$, il suffit qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^n$ dans un voisinage de x_0. Nous avons également vu qu'au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$) ou encore dans le cas d'une fonction non bornée en x_0 la notion de développement limité n'existe pas à proprement parler mais qu'il est possible d'écrire un « développement » analogue en faisant intervenir des fonctions puissances d'exposant un entier relatif. Enfin nous avons pu constater qu'il existe des fonctions usuelles qui n'admette aucun développement faisant intervenir des fonctions puissances. C'est le cas par exemple de la fonction exponentielle au voisinage de $+\infty$ ou de la fonction logarithme au voisinage de 0.

L'objet de cette partie est de montrer que la notion de développement limité entre dans un cadre beaucoup plus général de développements où interviennent d'autres fonctions de comparaison que les fonctions puissances. On parle alors de développement asymptotique.

17.6.1 Échelle de comparaison

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et supposées non identiquement nulles sur ce voisinage. On considère sur $\mathcal{E}$ la relation $\preceq$ définie par :

$$f \preceq g \iff \big(f = o_{x_0}(g) \quad \text{ou} \quad f = g \text{ au voisinage de } x_0\big). \tag{6}$$

Il s'agit d'une relation d'ordre[18] sur $\mathcal{E}$ puisque cette relation est :

1. réflexive : $\forall f \in \mathcal{E} \quad f \preceq f$;
2. antisymétrique : $\forall (f,g) \in \mathcal{E}^2 \quad \big(f \preceq g \quad \text{et} \quad g \preceq f\big) \implies f = g$;
3. transitive : $\forall (f,g,h) \in \mathcal{E}^3 \quad \big(f \preceq g \quad \text{et} \quad g \preceq h\big) \implies f \preceq h$.

[17] Voir le théorème 17.1 p. 821.
[18] Voir la définition 3.1 p. 94.

DÉFINITION 17.8 *On dit que l'ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et supposées non identiquement nulles sur ce voisinage constitue une échelle de comparaison au voisinage de x_0, si la relation d'ordre $\preceq$ est une relation d'ordre total*(19) *sur $\mathcal{E}$, c'est-à-dire si :*

$$\forall (f,g) \in \mathcal{E}^2 \qquad (f \preceq g \quad \text{ou} \quad g \preceq f).$$

Remarque D'après la définition de la relation d'ordre $\preceq$ donnée par l'assertion (6), la relation d'ordre $\preceq$ est une relation d'ordre total si

$$\forall (f,g) \in \mathcal{E}^2 \quad \Big(f \neq g \quad \Longrightarrow \quad \big(f = o_{x_0}(g) \quad \text{ou} \quad g = o_{x_0}(f)\big)\Big).$$

On obtient ainsi une autre caractérisation d'une échelle de comparaison.

Exemples

1. $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}} = \{x \mapsto x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ constitue une échelle de comparaison au voisinage de $+\infty$, de $-\infty$, et de 0.

2. $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto |x|^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ constitue une échelle de comparaison au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

3. $\mathcal{L}_1 = \{x \mapsto |x|^\alpha \, |\ln|x||^\beta \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$ constitue une échelle de comparaison au voisinage de $+\infty$, de $-\infty$, et de 0.

4. $\mathcal{F}_1 = \{x \mapsto |x|^\alpha \, \mathrm{e}^{\beta x} \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$ constitue une échelle de comparaison au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

17.6.2 Développement asymptotique

DÉFINITION 17.9 *Soient f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{E}$ une échelle de comparaison au voisinage de x_0 et ϕ un élément de $\mathcal{E}$.*

On dit que f admet un développement asymptotique au voisinage de x_0 dans l'échelle $\mathcal{E}$ à la précision ϕ s'il existe un ensemble $\{\lambda_\psi\}_{\psi \in \mathcal{F}}$ de nombres réels presque tous nuls (c'est-à-dire nuls sauf un nombre fini) vérifiant au voisinage de x_0,

$$f(x) = \sum_{\psi \in \mathcal{F}} \lambda_\psi \; \psi(x) \quad + \quad o_{x_0}(\phi(x)),$$

où $\mathcal{F} = \{\varphi \in \mathcal{E} \mid \phi \preceq \varphi\} \subset \mathcal{E}$.

(19) Voir la définition 3.2 p. 95.

Exemples

1. Un développement limité d'ordre n en 0 est un développement asymptotique au voisinage de 0 dans l'échelle $\mathcal{P}_{\mathbb{N}} = \{x \mapsto x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ à la précision $\phi : x \mapsto x^n$.

2. Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(\mathrm{sh}(x))$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$f(x) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o_0(x^5).$$

On en déduit que

$$f(x) = \ln(x) + \frac{x^2}{6} - \frac{7x^4}{60} + o_0(x^5).$$

Cette expression constitue le développement asymptotique de f dans l'échelle $\mathcal{L}_1 = \{x \mapsto |x|^\alpha \,|\ln|x||^\beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ à la précision $\phi : x \mapsto x^5$.

17.7 Plan d'étude d'une fonction

Avec ce chapitre sur les développements limités, nous disposons de tous les outils nécessaires pour mener à bien de manière complète l'étude d'une fonction réelle de la variable réelle. Nous allons en rappeler les différentes étapes et donner une illustration par un exemple.

Les principales étapes dans l'étude d'une fonction sont les suivantes.

1. On recherche l'ensemble de définition de la fonction.
2. On essaie d'obtenir un domaine d'étude plus réduit que l'ensemble de définition en mettant en évidence d'éventuelles propriétés de périodicité, de parité ou de symétrie de la fonction.
3. On détermine l'ensemble de continuité de la fonction. On étudie la nature des points de discontinuité et, si cela est possible, on prolonge par continuité la fonction.
4. On détermine l'ensemble de dérivabilité de la fonction (celui-ci peut-être différent de l'ensemble de continuité). On calcule la dérivée de la fonction en tout point où elle est dérivable. On examine, s'il y a lieu, la dérivabilité à gauche ou à droite.
5. On étudie le signe de la dérivée afin d'établir les variations de la fonction. On calcule les limites de la fonction et de sa dérivée aux bornes de l'intervalle d'étude. On présente ces résultats dans un tableau de variation.
6. On précise la nature des branches infinies et on recherche l'équation d'éventuelles asymptotes.
7. On étudie, s'il y a lieu, le signe de la dérivée seconde de la fonction afin de déterminer les points d'inflexion éventuels.
8. On calcule les coordonnées des points remarquables : intersection de la représentation graphique de la fonction avec les axes de coordonnées, avec les asymptotes, etc.

9. On trace la représentation graphique de la fonction en mettant en évidence tous les éléments utiles au tracé : tangentes aux points remarquables (points anguleux, points d'inflexion, etc), asymptotes, etc.

Exemple Étudions la fonction $f : x \mapsto x \exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$.

1. La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, f est définie pour tout réel x tel que $1 - x^2 \neq 0$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

2. La fonction f est impaire. On l'étudiera donc sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$.

3. La fonction f est continue sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ car la fonction rationnelle

$$g : x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[\longmapsto \frac{1}{1-x^2} \in \mathbb{R}$$

est continue sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = +\infty.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty.$$

La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en 1. Elle est toutefois prolongeable par continuité à droite en 1 en posant $f(1) = 0$.

4. La fonction rationnelle g est dérivable sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc dérivable sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ et pour tout $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$ on a

$$f'(x) = \frac{x^4 + 1}{(1-x^2)^2}\, \mathrm{e}^{1/(1-x^2)}.$$

5. Puisque la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, on en déduit que f' est strictement positive sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ et par conséquent que f est croissante sur chacun des intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Par ailleurs, on a $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On a aussi

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = \mathrm{e}.$$

Lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $1 - x^2$ tend vers 0 par valeurs supérieures et par conséquent $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(1-x^2)^2}\, \mathrm{e}^{1/(1-x^2)} = \lim_{u \to +\infty} u^2 \mathrm{e}^u = +\infty.$$

On a donc $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = +\infty$. Lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures, $1-x^2$ tend vers 0 par valeurs inférieures et par conséquent $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(1-x^2)^2}\, \mathrm{e}^{1/(1-x^2)} = \lim_{u \to -\infty} u^2 \mathrm{e}^u = 0$$

et $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 0$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1	1		$+\infty$
$f'(x)$	e	$+$	$+\infty$	0	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La représentation graphique de f au point d'abscisse 1 possède une demie tangente à droite horizontale.

6. La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la représentation graphique de f. Recherchons une éventuelle asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$ en cherchant un développement asymptotique pour f au voisinage de $+\infty$. Pour t au voisinage de 0^+, considérons la fonction f_0 définie par

$$f_0(t) = f(1/t) = \frac{1}{t} \exp\left(\frac{t^2}{t^2 - 1}\right).$$

On a les développements limités suivants au voisinage de 0 :

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o_0(u^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1 - t^2} = 1 + t^2 + o_0(t^2)$$

d'où on déduit que $\frac{t^2}{t^2-1} = -t^2 + o_0(t^3)$ puis que

$$\exp\left(\frac{t^2}{t^2 - 1}\right) = 1 + (-t^2) + \frac{1}{2}\left(-t^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-t^2\right)^3 + o_0(t^3) = 1 - t^2 + o_0(t^3).$$

On obtient le développement limité généralisé suivant pour f_0

$$f_0(t) = \frac{1}{t} - t + o_0(t^2)$$

ce qui indique que la fonction f admet pour développement asymptotique au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = x - \frac{1}{x} + o_{+\infty}(1/x^2).$$

Ainsi la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la représentation graphique de f au voisinage de $+\infty$. La quantité $-1/x$ étant négative au voisinage de $+\infty$, la courbe se situe au-dessous de l'asymptote.

7. Intéressons-nous aux points d'inflexion de f. Pour $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$, on a

$$f''(x) = -\frac{2x(x^4 - 3)}{(1 - x^2)^4} \mathrm{e}^{1/(1-x^2)}.$$

Le signe de f'' dépend de celui de la fonction polynomiale $p : x \mapsto x(x^4 - 3)$. Cette fonction polynomiale est impaire. Il est évident que ses racines réelles positives sont 0 et $\sqrt[4]{3}$. Par ailleurs, la fonction polynomiale $p' : x \mapsto 5x^4 - 3$

admet pour unique racine réelle positive $\sqrt[4]{\frac{3}{5}}$. Remarquons que $\frac{3}{5} < 1 < 3$ et que la fonction racine quatrième est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $\sqrt[4]{\frac{3}{5}} < 1 < \sqrt[4]{3}$. Le tableau de variation de p sur $[0, +\infty[$ est le suivant :

x	0		$\sqrt[4]{3/5}$		$\sqrt[4]{3}$	$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$		
$p(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{12}{5}\sqrt[4]{\frac{3}{5}}$	$\nearrow$		$+\infty$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		1		$\sqrt[4]{3}$		$+\infty$
$p(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

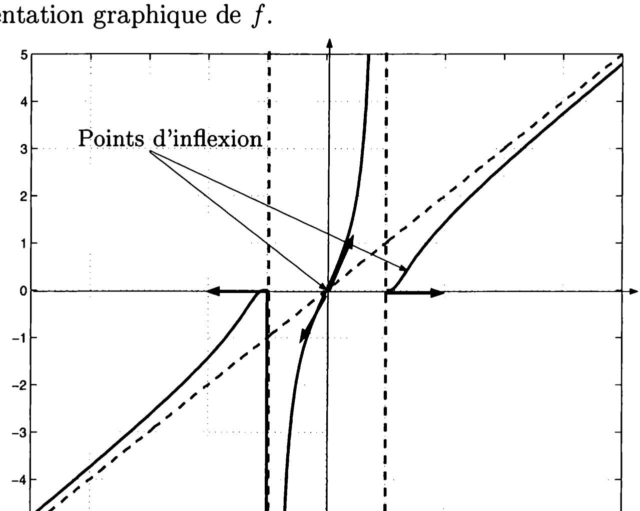
Ainsi, sur le domaine d'étude, la fonction f'' s'annule en 0 et $\sqrt[4]{3}$ en changeant de signe. Ces valeurs correspondent donc à des points d'inflexion de f. La fonction f est par conséquent convexe sur $[0, 1[$ et sur $]1, \sqrt[4]{3}[$ et concave sur $]\sqrt[4]{3}, +\infty[$.

8. Déterminons les points d'intersection entre la représentation graphique de f et l'asymptote en $+\infty$ en résolvant l'équation $f(x) = x$. On a

$$f(x) = x \iff x\left(\mathrm{e}^{1/(1-x^2)} - 1\right) = 0 \iff \left(x = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{1/(1-x^2)} = 1\right).$$

Il n'y a donc qu'un seul point intersection entre la représentation graphique de f et la droite asymptote en $+\infty$ qui est le point $(0, 0)$ car l'équation $1/(1-x^2) = 0$ n'a pas de solution.

9. Représentation graphique de f.



17.8 Exercices de synthèse

Exercice 10 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n \ln(x)}{x^2 - 1} & si\ x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & si\ x = 1 \end{cases}$$

1 - Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f_0 au voisinage de 1. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de f_n au voisinage de 1 pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application f_n est dérivable en 1 et calculer $f_n'(1)$.

3 - Donner l'équation de la tangente à la représentation graphique $\mathcal{C}_n$ de f_n dans un repère orthonormé au point d'abscisse 1. Préciser la position de la courbe $\mathcal{C}_n$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1 dans un voisinage de ce point.

Exercice 11 *Étudier la fonction f définie par $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ en précisant quelles sont les branches infinies de f.*

Exercice 12 *Soit $f : x \longmapsto \big(\cos(x)\big)^{1/x}$.*

1 - Sur quel ensemble $\mathcal{D}_f$ la fonction f est-elle définie ? Vérifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée f'.

2 - Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.

3 - Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On note $\widetilde{f}$ le prolongement de f à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4 - Montrer que $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3 - x\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x) - 1}$.

1 - En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\operatorname{sh}(x) > x$.

2 - Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de f. Que peut-on en déduire en 0 pour f ?

3 - Donner le tableau de variation de f.

4 - Montrer que la droite d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$. Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

5 - Montrer que $f(2)f(3) < 0$. En déduire qu'il existe un réel $c \in]2, 3[$ tel que $f(c) = 0$ et que ce réel est le seul zéro de f sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire le seul réel positif à vérifier $f(c) = 0$.

6 - Tracer la représentation graphique de f.

17.9 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

Les développements limités d'ordre 3 en 0 des fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique sont

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o_0(x^3) \quad \text{et} \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_0(x^3).$$

La partie régulière du développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)\sin(x)$ est obtenue en conservant les monômes de degré inférieur ou égal à 3 dans l'expression du produit des parties régulières de ces deux développements limités. On a

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!}\right) \times \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{12}.$$

La partie régulière du développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \mathrm{ch}(x)\sin(x)$ est donc $x + \frac{1}{3}x^3$.

> Comme cela est indiqué dans la mise en garde de la page 831, même si le monôme x^5 est présent lorsque le produit est explicité, on ne dispose pas pour autant du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction car d'autres termes faisant intervenir le monôme x^5 n'ont pas été pris en compte dès le départ dans les développements limités des fonctions sinus et cosinus hyperbolique.

Solution de l'exercice 2

Le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente s'obtient en effectuant la division selon les puissances croissantes à l'ordre 5 de la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction sinus par la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction cosinus, autrement dit en effectuant la division de P_1 par Q_1 où

$$P_1 = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} \quad \text{et} \quad Q_1 = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!}.$$

On obtient

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5).$$

Le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente hyperbolique s'obtient en effectuant la division selon les puissances croissantes à l'ordre 5 de la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction sinus hyperbolique par la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction cosinus hyperbolique, autrement dit en effectuant la division de P_2 par Q_2 où

$$P_2 = x + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} \quad \text{et} \quad Q_2 = 1 + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!}.$$

On obtient
$$\operatorname{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5).$$
Le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \mapsto \tan(x)/\operatorname{th}(x)$ ne peut pas s'obtenir en effectuant la division selon les puissances croissantes à l'ordre 5 du polynôme de la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente par le polynôme de la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente hyperbolique car celui-ci est de valuation non nulle. On commence par écrire
$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{X + \frac{1}{3}X^3 + \frac{2}{15}X^5}{X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{2}{15}X^5} = \frac{1 + \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{15}X^4}{1 - \frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{15}X^4}$$
puis on effectue la division selon les puissances croissantes à l'ordre 4 (et non pas à l'ordre 5) de P_4 par Q_4 où
$$P_4 = 1 + \frac{X^2}{3} + \frac{2X^4}{15} \quad \text{et} \quad Q_4 = 1 - \frac{X^2}{3} + \frac{2X^4}{15}.$$
On obtient
$$\frac{\tan(x)}{\operatorname{th}(x)} = 1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^4}{9} + o_0(x^4).$$
On remarquera que la fonction $x \mapsto \tan(x)/\operatorname{th}(x)$ étant paire, la partie régulière de son développement limité ne possède que des monômes de degré pair. On peut ainsi écrire
$$\frac{\tan(x)}{\operatorname{th}(x)} = 1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^4}{9} + o_0(x^5)$$
ce qui constitue le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction étudiée.

Solution de l'exercice 3

Remarquons que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et que f est un polynôme de degré 2 donc qu'il constitue son propre développement limité d'ordre n en 0 pour tout entier n supérieur à 2. Par ailleurs, le développement limité d'ordre 4 en 0 de g en 0 est
$$g(y) = -1 + y - y^2 + y^3 - y^4 + o_0(y^4).$$
D'après la proposition 17.5, la partie régulière du développement limité d'ordre 4 en 0 de $g \circ f$ est obtenue en conservant les monômes de degré inférieur ou égal à 4 de la fonction polynomiale $Q \circ P$ où
$$P = 2X + X^2 \quad \text{et} \quad Q = -1 + X - X^2 + X^3 - X^4.$$
On a
$$\begin{aligned} Q \circ P &= -1 + (2X + X^2) - (2X + X^2)^2 + (2X + X^2)^3 - (2X + X^2)^4 \\ &= -1 + 2X + X^2 - 4X^2 - 4X^3 - X^4 + 8X^3 + 12X^4 + 6X^5 + X^6 \\ &\qquad - 16X^4 - 32X^5 - 24X^6 - 8X^7 - X^8 \\ &= -1 + 2X - 3X^2 + 4X^3 - 5X^4 - 26X^5 - 23X^6 - 8X^7 - X^8. \end{aligned}$$

On notera qu'il n'est pas utile d'écrire les monômes de degré supérieur strictement à 4 lorsque l'on effectue les différents calculs avec la formule du binôme de Newton. On déduit du calcul précédent que le développement limité d'ordre 4 en 0 de $g \circ f$ a pour partie régulière

$$-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4.$$

> Il ne faut surtout pas penser que le développement limité d'ordre 5 en 0 de $g \circ f$ a pour partie régulière
>
> $$-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 - 26x^5.$$
>
> Le coefficient du monôme X^5 est erroné puisqu'il manque la contribution $(2X)^5$ issue du terme $(2X + X^2)^5$ que l'on devrait rajouter à notre calcul pour obtenir un développement limité d'ordre 5 en 0 .

Solution de l'exercice 4

1 - Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or[20] pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \alpha(\alpha-1)\frac{u^2}{2!} + \ldots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{u^n}{n!} + o_0(u^n).$$

Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2!}u^2 + \ldots + (-1)^n\tfrac{1}{2}\tfrac{3}{2}\cdots\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{n!}u^n + o_0(u^n).$$

Comme $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, on en déduit que

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2!}x^4 + \ldots + \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{2}\cdots\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{n!}x^{2n} + o_0(x^{2n}).$$

On a donc

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2!}x^4 - \ldots - \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{2}\cdots\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{n!}x^{2n} + o_0(x^{2n}).$$

2 - La fonction arc-cosinus est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$ on a

$$\arccos(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

---

[20] Le développement limité de $(1+u)^\alpha$ en 0 est donné p. 826.

Comme $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, la proposition 17.6 indique que

$$\begin{aligned}\arccos(x) =&\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\frac{1}{2!}\,\frac{1}{5}\,x^5 - \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\frac{1}{3!}\,\frac{1}{7}\,x^7 - \dots\\ &\dots - \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\cdots\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n!}\frac{1}{2n+1}\,x^{2n+1} + o_0(x^{2n+1}).\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\cdots\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k!} = \frac{1\,3\,5\cdots(2k-1)}{2^k\,k!}$$

et

$$2^k\,k! = 2^k\,(\underbrace{1\,2\,3\cdots k}_{k \text{ termes}}) = 2\,2\,2\,2\,3\cdots 2\,k = 2\,4\,6\cdots 2\,k.$$

On a donc

$$\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\cdots\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k!} = \frac{1\,3\,5\cdots(2k-1)}{2\,4\,6\cdots 2\,k}.$$

On en conclut que

$$\begin{aligned}\arccos(x) =&\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{1}{3}x^3 - \frac{1\,3}{2\,4}\,\frac{1}{5}\,x^5 - \frac{1\,3\,5}{2\,4\,6}\,\frac{1}{7}\,x^7 - \dots\\ &\dots - \frac{1\,3\,5\cdots(2n-1)}{2\,4\,6\cdots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1}).\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5

1 - On a les développements limités suivants en 0

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o_0(x^6) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o_0(x^6).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + o_0(x^6)\\ &= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 - \frac{4}{45}\,x^6 + o_0(x^6).\end{aligned}$$

D'après la proposition 17.4, le développement limité d'ordre 6 en 0 de l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)\,\cos(2x)$ est donné par

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) \times \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 - \frac{4}{45}\,x^6\right) + o_0(x^6).$$

En développant le produit et en ne retenant que les monômes de degré inférieur à 6, on obtient

$$f(x) = x - \frac{13\,x^3}{6} + \frac{121\,x^5}{120} + o(x^6).$$

2 - On a les développements limités suivants en 0

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_0(x^4) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_0(x^4).$$

D'après la proposition 17.4, le développement limité d'ordre 4 en 0 de l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)\ln(1+x)$ est donné par

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + o_0(x^4).$$

En développant le produit et en ne retenant que les monômes de degré inférieur à 4, on obtient

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

3 - On a le développement limité suivant en 0

$$\begin{aligned}\sqrt{1+u} = (1+u)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{u^2}{2!} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{u^3}{3!} + o_0(u^3)\\ &= 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o_0(u^3).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o_0(x^3).$$

La fonction polynomiale $x \mapsto x^3+1$ de degré 3 est[21] son propre développement limité d'ordre 3 en 0. D'après la proposition 17.4, le développement limité d'ordre 3 en 0 de l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x^3+1)\sqrt{1-x}$ est donné par

$$f(x) = \left(x^3+1\right) \times \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}\right) + o_0(x^3).$$

En développant le produit et en ne retenant que les monômes de degré inférieur à 3, on obtient

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15x^3}{16} + o_0(x^3).$$

4 - On a les développements limités suivants en 0

$$\sin(x) = x + o_0(x^2) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o_0(x^2)$$

d'où

$$\sin(x) - 1 = -1 + x + o_0(x^2) \quad \text{et} \quad \cos(x) + 1 = 2 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2).$$

[21] Voir la remarque de la p. 815.

Comme $\lim_{x\to 0}\cos(x)+1 = 2 \neq 0$, on obtient le développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ en effectuant la division selon les puissances croissantes de $-1+X$ par $2-\frac{1}{2}X^2$ à l'ordre 2.

$$
\begin{array}{l||l}
\begin{array}{l}
-1+X\\
-(-1 \qquad +\frac{1}{4}X^2)\\
\hline
X-\frac{1}{4}X^2\\
-(X \qquad -\frac{1}{4}X^3)\\
\hline
-\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{4}X^3\\
-(-\frac{1}{4}X^2 \qquad +\frac{1}{16}X^4)\\
\hline
\frac{1}{4}X^3-\frac{1}{16}X^4
\end{array}
&
\begin{array}{l}
2-\frac{1}{2}X^2\\
\hline\hline
-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2
\end{array}
\end{array}
$$

On en conclut que le développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ est

$$\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2).$$

5 - On a les développements limités suivants en 0

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{3!}+o_0(x^3) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o_0(x^3)$$

Comme $\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0$, il n'est pas possible d'obtenir le développement limité de $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ en effectuant une division selon les puissances croissantes. Considérons les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions au numérateur et dénominateur de la fonction définissant f.

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{3!}+o_0(x^4) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o_0(x^4).$$

On en déduit que

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o_0(x^4)}{x-\frac{x^3}{3!}+o_0(x^4)} = \frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o_0(x^3)}{1-\frac{x^2}{6}+o_0(x^3)}.$$

On obtient le développement limité d'ordre 3 en 0 de f en effectuant la division selon les puissances croissantes de $1-\frac{1}{2}X+\frac{1}{3}X^2-\frac{1}{4}X^3$ par $1-\frac{1}{6}X^2$ à l'ordre 3.

$$
\begin{array}{cccccc||c}
1 & -\frac{1}{2}X & +\frac{1}{3}X^2 & -\frac{1}{4}X^3 & & & 1-\frac{1}{6}X^2 \\
-(1 & & -\frac{1}{6}X^2) & & & & \\
\cline{1-6}\cline{7-7}
 & -\frac{1}{2}X & +\frac{1}{2}X^2 & -\frac{1}{4}X^3 & & & 1-\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{3}X^3 \\
-(& X & & -\frac{1}{12}X^3) & & & \\
\cline{1-6}
 & & -\frac{1}{2}X^2 & -\frac{1}{3}X^3 & & & \\
-(& & -\frac{1}{4}X^2 & & -\frac{1}{12}X^4) & & \\
\cline{1-6}
 & & & -\frac{1}{3}X^3 & +\frac{1}{12}X^4 & & \\
-(& & & & & -\frac{1}{18}X^5) & \\
\cline{1-6}
 & & & & \frac{1}{12}X^4 & +\frac{1}{18}X^5 &
\end{array}
$$

On en conclut que le développement limité d'ordre 3 en 0 de f est

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

6 - Commençons par déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction arc-sinus. Pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

De plus, du développement limité suivant au voisinage de 0

$$(1+u)^{\alpha} = 1 + \alpha u + o_0(u),$$

on déduit que

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{u}{2} + o_0(u)$$

puis que

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$$

Comme $\arcsin(0) = 0$, on obtient en utilisant la proposition 17.6,

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3).$$

Par ailleurs, on a le développement limité suivant au voisinage de 0

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o_0(u^3).$$

Comme $\lim_{x\to 0} \arcsin(x) = 0$, la proposition 17.5 indique que

$$\begin{aligned}\exp(\arcsin(x)) &= 1 + \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^3 + o_0(x^3)\\ &= 1 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3).\end{aligned}$$

7 - Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(x) = x\ \mathrm{ch}(x)^{\frac{1}{x}} = x \exp\left(\tfrac{1}{x}\ln(\mathrm{ch}(x))\right).$$

> On peut remarquer le terme x intervenant en produit dans l'expression de f. Pour obtenir le développement limité d'ordre 4 en 0 de f, on peut donc se contenter de calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\mathrm{ch}(x))\right)$. Pour se faire, on a besoin du développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$ et non du développement limité d'ordre 3 en 0 en raison du terme $\frac{1}{x}$.

On a les développements limités suivants au voisinage de 0

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_0(x^4)$$

$$\text{et} \qquad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o_0(u^4).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\ln(\mathrm{ch}(x)) = \ln(1 + (\mathrm{ch}(x) - 1)) &= \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2\\ &\quad + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^4 + o_0(x^4)\\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o_0(x^4).\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{x}\ \ln(\mathrm{ch}(x)) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o_0(x^3)$$

On a le développement limité suivant au voisinage de 0

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o_0(u^3)$$

d'où

$$\begin{aligned}\exp\left(\tfrac{1}{x}\ \ln(\mathrm{ch}(x))\right) &= 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)^3 + o_0(x^3)\\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o_0(x^3).\end{aligned}$$

Finalement, le développement limité d'ordre 4 en 0 de f est

$$f(x) = x \ \exp\left(\tfrac{1}{x} \ \ln(\text{ch}(x))\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + o_0(x^4).$$

8 - La dérivée de la fonction argument tangente hyperbolique est $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$. On a le développement limité d'ordre 2 en 0 suivant :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o_0(u^2)$$

d'où on déduit que

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + o_0(x^2).$$

Comme la fonction argument tangente hyperbolique prend la valeur 0 en 0, la proposition 17.6 indique que

$$\text{argth}(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3).$$

9 - On a

$$f(x) = (1 + \arctan(x))^{x/\sin^2(x)} = \exp\left(\frac{x \ln(1 + \arctan(x))}{\sin^2(x)}\right).$$

Commençons par déterminer un développement limité au voisinage de 0 pour la fonction arc-tangente. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

On a

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + o_0(u) \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o_0(x^2).$$

Comme $\arctan(0) = 0$, on obtient en utilisant la proposition 17.6,

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3).$$

On a le développement limité suivant au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o_0(u^3)$$

Comme $\lim_{x\to 0} \arctan(x) = 0$, la proposition 17.5 indique que

$$\begin{aligned}\ln(1 + \arctan(x)) &= \left(x - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 + o_0(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3) = x - \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^3).\end{aligned}$$

On a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_0(x^4) \quad \text{d'où} \quad \sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o_0(x^4).$$

On en déduit que

$$\frac{x\ \ln(1+\arctan(x))}{\sin^2(x)} = \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o_0(x^4)}{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_0(x^4)} = \frac{1 - \frac{1}{2}x + o_0(x^2)}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o_0(x^2)}.$$

De plus,

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o_0(u^2) \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o_0(x^2)} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o_0(x^2)$$

et

$$\frac{x\ \ln(1+\arctan(x))}{\sin^2(x)} = \left(1 - \tfrac{1}{2}x + o_0(x^2)\right)\left(1 + \tfrac{1}{3}x^2 + o_0(x^2)\right) = 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2 + o_0(x^2).$$

Enfin, on a le développement limité suivant au voisinage de 0

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + o_0(u^2),$$

mais, comme $\lim_{x\to 0} x\ \ln(1+\arctan(x))/\sin^2(x) = 1$, pour utiliser la proposition 17.5 une étape préliminaire est indispensable :

$$f(x) = \exp\left(\frac{x\ \ln(1+\arctan(x))}{\sin^2(x)}\right) = \mathrm{e}\ \exp\left(\frac{x\ \ln(1+\arctan(x))}{\sin^2(x)} - 1\right).$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}\ \exp(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2 + o_0(x^2)) \\ &= \mathrm{e}\ \left(1 + \left(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2\right)^2 + o_0(x^2)\right) \\ &= \mathrm{e}\ \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11\,x^2}{24}\right) + o_0(x^2) = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}\,x}{2} + \frac{11\,\mathrm{e}\,x^2}{24} + o_0(x^2). \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6

1 - Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos^2(2x)$. Considérons au voisinage de 0 la fonction f_0 définie par $f_0(t) = f(t + \frac{\pi}{6})$. On a

$$f_0(t) = \left(\cos(2t + \tfrac{\pi}{3})\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\cos(2t) - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(2t)\right)^2.$$

Les développements limités en 0 à l'ordre 4 de sinus et cosinus sont

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{3!} + o_0(u^4) \quad \text{et} \quad \cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + o_0(u^4).$$

On en déduit, en effectuant la substitution $u = 2t$ et en sommant les deux développements limités, que

$$\tfrac{1}{2}\cos(2t) - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(2t) = \tfrac{1}{2} - \sqrt{3}t - t^2 + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}t^3 + \tfrac{1}{3}t^4 + o_0(t^4).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \left(\tfrac{1}{2} - \sqrt{3}t - t^2 + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}t^3 + \tfrac{1}{3}t^4\right)^2 + o_0(t^4) \\ &= \tfrac{1}{4} - \sqrt{3}t + 2t^2 + \tfrac{8}{\sqrt{3}}t^3 - \tfrac{8}{3}t^4 + o_0(t^4). \end{aligned}$$

On en déduit que le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{6}$ de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos^2(2x)$ est

$$f(x) = \tfrac{1}{4} - \sqrt{3}\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right) + 2\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right)^2 + \tfrac{8}{\sqrt{3}}\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right)^3 - \tfrac{8}{3}\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right)^4 + o_0\left(\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right)^4\right).$$

2 - Soient $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{(x^2-1)}$ et f_0 la fonction définie pour t au voisinage de 0 par $f_0(t) = f(1+t)$. On a

$$f_0(t) = \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2 - 1} = \frac{\ln(1+t)}{t(t+2)}.$$

Compte tenu du fait que nous allons être amené à diviser par t, considérons le développement limité à l'ordre 3 suivant en 0

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o_0(t^3).$$

On a donc

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o_0(t^2).$$

Par ailleurs, pour tout $t \in]-2, +\infty[$ on a

$$\frac{1}{2+t} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{t}{2}}.$$

En utilisant le développement limité à l'ordre 2 en 0

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o_0(u^2)$$

on obtient

$$\frac{1}{2+t} = \frac{1}{2} - \frac{t}{4} + \frac{t^2}{8} + o_0(t^2).$$

Le développement limité à l'ordre 2 de f_0 en 0 est donc

$$f_0(t) = \left(1 - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{3}t^3\right) \times \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}t + \tfrac{1}{8}t^2\right) + o_0(t^2) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{5}{12}t^2 + o_0(t^2).$$

Finalement, le développement limité à l'ordre 2 de f en 1 est

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{5}{12}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2).$$

Solution de l'exercice 7

Soit $f : x \mapsto \operatorname{argsh}(x) - \operatorname{argch}(x)$. Pour obtenir le développement limité généralisé à l'ordre 6 de f au voisinage de $+\infty$, nous allons calculer le développement limité à l'ordre 6 dans un voisinage à droite de 0 de la fonction $f_0 : t \mapsto f(1/t)$. La fonction argument sinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction argument cosinus hyperbolique est définie sur $[1, +\infty[$. La fonction f est donc définie sur $[1, +\infty[$. Par conséquent, la fonction f_0 est définie sur $]0, 1]$. D'après les propositions 14.22 p. 691 et 14.24 p. 693, nous avons pour $t \in]0, 1]$

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \operatorname{argsh}(\tfrac{1}{t}) - \operatorname{argch}(\tfrac{1}{t}) = \ln\left(\tfrac{1}{t} + \sqrt{\tfrac{1}{t^2} + 1}\right) - \ln\left(\tfrac{1}{t} + \sqrt{\tfrac{1}{t^2} - 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}}{\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}}\right) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{1 + \sqrt{1 - t^2}}\right). \end{aligned}$$

On a le développement limité suivant à l'ordre 3 en 0 :

$$\sqrt{1 + u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o_0(u^3).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + t^2} &= 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{16} + o_0(t^6) \\ \text{et} \qquad \sqrt{1 - t^2} &= 1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} - \frac{t^6}{16} + o_0(t^6). \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{1 + \sqrt{1 - t^2}} = \frac{2 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{16} + o_0(t^6)}{2 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} - \frac{t^6}{16} + o_0(t^6)}.$$

La division selon les puissances croissantes à l'ordre 6 de $2 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{8}X^4 + \frac{1}{16}X^6$ par $2 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{8}X^4 - \frac{1}{16}X^6$ permet d'établir que

$$\frac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{1 + \sqrt{1 - t^2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{16} + o_0(t^6).$$

Comme $\lim_{t \to 0} \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{8} t^4 + \frac{1}{16} t^6 + o_0(t^6) = 0$, en utilisant le développement limité suivant à l'ordre 3 en 0 :

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o_0(u^3),$$

on obtient

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{16}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{16}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{16}\right)^3 + o_{0^+}(t^6) \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{5t^6}{48} + o_{0^+}(t^6). \end{aligned}$$

On notera qu'il a été suffisant de considérer le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+u)$, les termes d'ordre supérieur de ce développement limité fournissent lors de la composition avec $\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}+\frac{t^6}{16}$ des monômes de degré supérieur ou égal à 8. Finalement, on en conclut que f admet pour développement limité généralisé à l'ordre 6 au voisinage de $+\infty$

$$f(x)=\frac{1}{2x^2}+\frac{5}{48x^6}+o_{+\infty}(1/x^6).$$

Solution de l'exercice 8

La fonction co-tangente hyperbolique n'est pas bornée en 0 ; elle tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Pour x au voisinage de 0 on a, voir l'exercice 2,

$$\operatorname{th}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o_0(x^5)=x\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{15}+o_0(x^4)\right).$$

En effectuant la division selon les puissances croissantes de 1 par $1-\frac{X^2}{3}+\frac{2X^4}{15}$ à l'ordre 4 on obtient

$$\coth(x)=\frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{45}+o_0(x^4)\right)=\frac{1}{x}+\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+o_0(x^3),$$

ce qui constitue le développement asymptotique dans l'échelle $\{1/x^k \mid k\in\mathbb{N}\}$ en 0 à la précision x^3 de la fonction co-tangente.

Solution de l'exercice 9

La fonction $f: x\mapsto (x+1)^2\operatorname{argsh}(1/x)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est indéfiniment dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Elle n'est ni paire, ni impaire. Comme la fonction argument sinus hyperbolique tend vers $+\infty$ en $+\infty$, f a pour limite $+\infty$ à droite en 0. De même, puisque la fonction argument sinus hyperbolique tend vers $-\infty$ en $-\infty$, f a pour limite $-\infty$ à gauche en 0. La représentation graphique de f admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote en 0. Par ailleurs, $\operatorname{argsh}(u)\underset{0}{\sim}u$ donc $\operatorname{argsh}(\frac{1}{x})\underset{\pm\infty}{\sim}\frac{1}{x}$. Comme de plus $(x+1)^2\underset{\pm\infty}{\sim}x^2$, on en déduit que $f(x)\underset{\pm\infty}{\sim}x$. La représentation graphique de f admet donc une branche infinie en $+\infty$ et une branche infinie en $-\infty$. Intéressons-nous à l'existence d'asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$. Pour cela déterminons un développement limité généralisé en $+\infty$ et en $-\infty$ à l'application $g: x\in\mathbb{R}^*\mapsto f(x)/x$. Pour $x\in\mathbb{R}^*$, on a

$$g(x)=\frac{(x+1)^2}{x}\operatorname{argsh}(1/x).$$

Déterminons le développement limité d'ordre 2 en 0 de $g_0: t\in\mathbb{R}^*\mapsto g(1/t)$. Pour $t\in\mathbb{R}^*$, on a

$$g_0(t)=t\left(\tfrac{1}{t}+1\right)^2\operatorname{argsh}(t)=\left(\tfrac{1}{t}+2+t\right)\operatorname{argsh}(t).$$

Pour obtenir le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction argument sinus hyperbolique, déterminons le développement limité d'ordre 2 en 0 de sa dérivée $t \in \mathbb{R} \mapsto (1+t^2)^{-\frac{1}{2}}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} o_0(t^2)$ d'où

$$(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2).$$

Comme $\mathrm{argsh}(0) = 0$, la proposition 17.6 indique que

$$\mathrm{argsh}(t) = t - \frac{t^3}{6} + o_0(t^3).$$

On a donc

$$g_0(t) = \left(\frac{1}{t} + 2 + t\right)\left(t - \frac{t^3}{6} + o_0(t^3)\right).$$

En développant le produit et en ne retenant que les monômes de degré inférieur à 2, on obtient

$$g_0(t) = 1 + 2t + \frac{5t^2}{6} + o_0(t^2).$$

On en déduit que

$$f(x) = x\,g(x) = x\,g_0(\tfrac{1}{x}) = x + 2 + \frac{5}{6x} + o_{\pm\infty}(1/x).$$

On peut conclure de cette expression que :

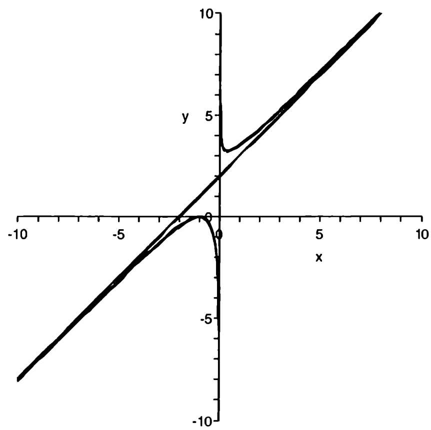
- la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$ et la représentation graphique de f est située au dessus de l'asymptote car $f(x) - (x+2) = \frac{5}{6x} + o_{+\infty}(1/x)$ est positif au voisinage de $+\infty$;
- la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la représentation graphique de f en $-\infty$ et la représentation graphique de f est située au dessous de l'asymptote car $f(x) - (x+2) = \frac{5}{6x} + o_{-\infty}(1/x)$ est négatif au voisinage de $-\infty$.

On peut illustrer graphiquement la situation avec MAPLE.

```
> f:=x->(x+1)^2*arcsinh(1/x):
> taylor(f(x),x=+infinity,2);
```

$$x + 2 + \frac{5}{6x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

```
> fig1:=plot([f(x),x+2],x=-10..10,y=-10..10,discont=true):
> fig2:=plot([0,t,t=-10..10]):
> display[plots]([fig1,fig2],thickness=2);
```



Solution de l'exercice 10

1 - Pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a

$$f_0(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}.$$

On considère le changement de variable $t = x - 1$ et la fonction g_0 définie par $g_0(t) = f_0(t+1)$. Pour x au voisinage de 1, la variable t est au voisinage de 0. On s'intéresse donc au développement limité au voisinage de 0 de

$$g_0(t) = \frac{\ln(t+1)}{t^2+2t} = \frac{1}{2t}\ \ln(t+1)\ \frac{1}{1+\frac{t}{2}}.$$

On a

$$\ln(t+1) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o_0(t^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+\frac{t}{2}} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + o_0(t^2)$$

d'où

$$\frac{1}{2t}\ \ln(t+1) = \frac{1}{2t}\Big(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o_0(t^3)\Big) = \frac{1}{2} - \frac{t}{4} + \frac{t^2}{6} + o_0(t^2)$$

et

$$g_0(t) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{t}{4} + \frac{t^2}{6}\Big)\Big(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4}\Big) + o_0(t^2) = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{5t^2}{12} + o_0(t^2).$$

Ainsi f_0 admet pour développement limité d'ordre 2 au voisinage de 1

$$f_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{5}{12}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2).$$

La relation $f_n(x) = x^n f_0(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ va nous permettre d'obtenir le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de f_n à partir de celui calculé pour f_0. Il faut pour cela déterminer le développement limité d'ordre 2 en 1 de la fonction $x \mapsto x^n$. Une manière d'obtenir ce développement limité est d'avoir recours à la formule de Newton ; on a

$$\begin{aligned} x^n &= ((x-1)+1)^n = 1 + C_n^1(x-1) + C_n^2(x-1)^2 + o_1((x-1)^2) \\ &= 1 + n(x-1) + \frac{n(n-1)}{2}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2). \end{aligned}$$

On en déduit que le développement limité d'ordre 2 en 1 de f_n est

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(x-1) + \tfrac{5}{12}(x-1)^2\right) \times \big(1 + n(x-1) \\ &\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}n(n-1)(x-1)^2\big) + o_1((x-1)^2) \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(n-1)\,(x-1) + \left(\tfrac{5}{12} - \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{4}n(n-1)\right)(x-1)^2 + o_1((x-1)^2). \end{aligned}$$

2 - Une condition nécessaire et suffisante pour que f_n admette un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 1 est que f_n soit dérivable en ce point[22]. Puisque f_n admet un développement limité à l'ordre 2, f_n est continue en 1 et elle est dérivable en 1. L'expression du développement limité d'ordre 2 en 1 de f_n indique que $f_n'(1) = \frac{1}{2}(n-1)$.

3 - L'équation de la tangente à la représentation graphique $\mathcal{C}_n$ de f_n en 1 est

$$y = f_n(1) + f_n'(1)\,(x-1) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(n-1)(x-1).$$

La position de la courbe $\mathcal{C}_n$ par rapport à la tangente est donnée par le signe de $f(x) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1)(x-1))$. D'après l'expression du développement limité à l'ordre 2 de f_n en 1, on a

$$f(x) - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(n-1)(x-1)\right) = \left(\tfrac{5}{12} - \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{4}n(n-1)\right)(x-1)^2 + o_1((x-1)^2).$$

Pour x assez proche de 1, le signe de cette quantité est celui de

$$S_n = \left(\tfrac{5}{12} - \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{4}n(n-1)\right)(x-1)^2$$

c'est-à-dire, comme $(x-1)^2 \geqslant 0$, celui de

$$T_n = \tfrac{5}{12} - \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{4}n(n-1) = \tfrac{5}{12} - \tfrac{3}{4}n + \tfrac{1}{4}n^2.$$

Le polynôme $P = \frac{5}{12} - \frac{3}{4}X + \frac{1}{4}X^2$ admet deux racines réelles qui sont

$$x_1 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{21}}{6} \approx 0.7362373842, \qquad x_2 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{21}}{6} \approx 2.263762616.$$

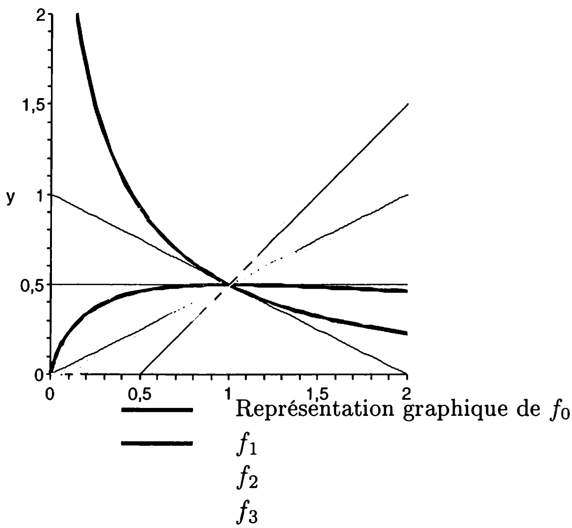
La fonction polynomiale P prend des valeurs négatives entre les deux racines car le monôme dominant qui est $\frac{1}{4}X^2$ est positif. On en déduit que $T_0 = P(0) > 0$, que $T_1 = P(1) < 0$, que $T_2 = P(2) < 0$ et que pour $n \geqslant 3$ on a $T_n = P(n) > 0$. Les courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_n$ pour $n \geqslant 3$ sont donc au dessus de leur asymptote en 1 alors que les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont au dessous de leur asymptote.

On peut avoir recours à MAPLE pour illustrer la situation.

---

[22] Voir la proposition 17.3 qui bien qu'énoncée pour un développement limité en 0 reste vraie pour un développement limité en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

```
> f:=(n,x)-> piecewise(x=1,1/2, x^n*log(x)/(x^2-1)):
> T:=(n,x)-> 1/2+(1/2)*(n-1)*(x-1):
> plot([seq(op([f(n,x),T(n,x)]),n=0..3)],x=0..2,y=0..2,
  color=[navy,red,blue,red,cyan,red,aquamarine,red],thickness=[2,1]);
```



Les droites concourantes au point $(1, \frac{1}{2})$ sur la figure correspondent aux tangentes aux courbes représentations graphiques de f_0, f_1, f_2 et f_3.

Solution de l'exercice 11

La fonction $f : x \mapsto x^2 \arctan(1/(1+x))$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, elle est continue et dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Pour $x \in \mathcal{D}_f$ on a

$$f'(x) = x\left(2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{1+(1+x)^2}\right).$$

Le signe de f' dépend du signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$g(x) = 2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{1+(1+x)^2}.$$

Cette fonction est dérivable sur $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a

$$g'(x) = -\frac{(2+x)^2+2}{(1+(1+x)^2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variation suivant pour g

x	$-\infty$		-1	-1		$+\infty$
g'		$-$			$-$	
g	0	$\searrow$	$1-\pi$	$1+\pi$	$\searrow$	0

ce qui permet d'obtenir le tableau de variation de la fonction f,

x	$-\infty$		-1	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\pi/2-1$	$-\pi/2-1$	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$-\pi/2$	$\pi/2$				$+\infty$
		$\nearrow$			$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$					0		

Afin d'étudier les branches infinies de f, calculons le développement limité généralisé de $g(x) = f(x)/x$ au voisinage de $+\infty$. On considère au voisinage de 0 la fonction g_0 définie par

$$g_0(t) = \frac{f(1/t)}{1/t} = \frac{1}{t}\ \mathrm{arctan}\left(\frac{1}{1+1/t}\right) = \frac{1}{t}\ \mathrm{arctan}\left(\frac{t}{1+t}\right).$$

On a $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t} = t - t^2 + t^3 + o_0(t^3)$ et $\mathrm{arctan}(u) = u - \dfrac{u^3}{3} + o_0(u^3)$. On en déduit que

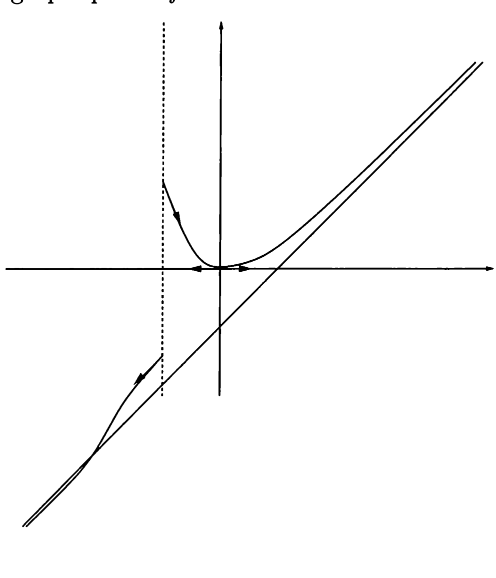
$$g_0(t) = \frac{1}{t}\left(\left(t-t^2+t^3\right) - \tfrac{1}{3}\left(t-t^2+t^3\right)^3 + o_0(t^3)\right) = 1 - t + \frac{2t^2}{3} + o_0(t^2)$$

puis que $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3x^2} + o_{+\infty}(1/x^2)$. On a donc

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + o_{+\infty}(1/x).$$

La droite $y = x - 1$ est asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$. Le même calcul indique que $f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + o_{-\infty}(1/x)$. La droite $y = x - 1$ est donc asymptote à la représentation graphique de f en $-\infty$ et la courbe est au-dessous de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

La représentation graphique de f donnée ci-dessous.



Solution de l'exercice 12

1 - Le réel $f(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ \ln(\cos(x))\right)$ est défini pour $x \neq 0$ tel que $\cos(x) > 0$, c'est-à-dire pour x appartenant à l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \left]-\tfrac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^*} \left]-\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\right).$$

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ à valeurs dans $]0,1]$ et la fonction logarithme est dérivable sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^-$. La fonction $x \mapsto \ln(\cos(x))$ est donc dérivable sur $\mathcal{D}_f$. De plus, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\ \ln(\cos(x))$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$. Enfin, comme la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut en conclure que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$f'(x) = \left(\tfrac{1}{x}\ \ln(\cos(x))\right)'\ \exp\left(\tfrac{1}{x}\ \ln(\cos(x))\right) = -\left(\tfrac{1}{x^2}\ \ln(\cos(x)) + \tfrac{1}{x}\tan(x)\right) f(x).$$

2 - Le développement limité de f s'obtient en composant les développements limités de la manière suivante :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^3) \quad \text{et} \quad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$$

d'où

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + o_0(x^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{x}\ln(\cos(x)) = -\frac{x}{2} + o_0(x^2).$$

Or

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o_0(u^2) \quad \text{donc} \quad f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o_0(x^2).$$

3 - Le développement limité obtenu à la question précédente indique que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. D'autre part comme $\lim_{u\to 0^+} \ln(u) = -\infty$, on a $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{x}\ \ln(\cos(x)) = -\infty$ et par conséquent $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0$. Ainsi, l'application

$$\widetilde{f} : x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue. On pourra remarquer que $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\ln(\cos(x))}{x} = +\infty$ ce qui implique que $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$. L'application f n'est donc pas prolongeable par continuité à droite en $-\frac{\pi}{2}$.

4 - Nous avons établi à la première question que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. Par ailleurs, nous avons déterminé le développement limité d'ordre 2 en 0 de f à la question 2. Puisque f admet un développement limité d'ordre 2 en 0, elle admet aussi un développement limité d'ordre 1 en 0. D'après la proposition 17.3, cela implique que f (ou plus exactement $\widetilde{f}$ son prolongement par continuité en 0) est dérivable en 0. L'expression du développement limité d'ordre 2 en 0 de f indique que $f'(0) = -\frac{1}{2}$. L'application f est donc dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et

$$\widetilde{f}' : x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\longmapsto \begin{cases} -\left(\frac{1}{x^2}\ \ln(\cos(x)) + \frac{\tan(x)}{x}\right) f(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ revient à montrer que $\widetilde{f}'$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Notons $\mathcal{D} =]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$. La fonction cosinus est continue sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $]0,1[$ et la fonction logarithme est continue sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$. La fonction $x \mapsto \ln(\cos(x))$ est donc continue sur $\mathcal{D}$. De plus, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathcal{D}$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}\ \ln(\cos(x))$ est continue sur $\mathcal{D}$ en tant que produit de deux fonctions continues sur $\mathcal{D}$. Par ailleurs, la fonction tangente est continue sur $\mathcal{D}$ et la fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathcal{D}$ et ne s'annule pas sur cet ensemble. On en déduit que la fonction $x \mapsto \tan(x)/x$ est continue sur $\mathcal{D}$. Finalement comme f est elle même continue sur $\mathcal{D}$, on en conclut que $\widetilde{f}'$ est continue sur $\mathcal{D}$. Intéressons nous à présent à la continuité de $\widetilde{f}'$ en 0. On a d'une part, voir la question 2,

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + o_0(x^2) \quad \text{d'où} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

et d'autre part,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \widetilde{f}'(x) = \lim_{x\to 0} -\left(\frac{1}{x^2}\ \ln(\cos(x)) + \frac{\tan(x)}{x}\right) f(x) = -\frac{1}{2} = \widetilde{f}'(0).$$

On en conclut que $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Solution de l'exercice 13

1 - La fonction sinus hyperbolique est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème des accroissements finis[23],

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists c \in]0, x[\quad \mathrm{sh}(x) = x\,\mathrm{ch}(c).$$

Comme la fonction cosinus hyperbolique est minorée strictement par 1 sur $\mathbb{R}^*$, on en conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\mathrm{sh}(x) > x$.

[23] Voir le théorème 16.2 p. 769.

2 - On dispose des développements limités suivants

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o_0(x^4) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_0(x^5)$$

qui indiquent que

$$\frac{x\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)-1} = \frac{x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^5)}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)} = \frac{1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2 + o(x^3)}.$$

En effectuant la division selon les puissances croissantes à l'ordre 3 de $1+\frac{1}{6}X^2$ par $\frac{1}{2}+\frac{1}{24}X^2$, on obtient le développement limité d'ordre 3 en 0 suivant pour f :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3).$$

Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique sont définies sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{ch}(x) = 1$ si et seulement si $x = 0$. On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs, Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x) - 1$ ne s'annule qu'en 0, donc f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En particulier f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Comme f admet un développement limité d'ordre 3 en 0, elle admet aussi un développement limité d'ordre 1 en 0 et d'après la proposition 17.3, d'une part que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ et d'autre part que ce prolongement est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

3 - On pourra noter que f est paire car la fonction sinus hyperbolique est impaire et la fonction cosinus hyperbolique est paire. On peut donc se contenter d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = -\frac{\operatorname{sh}(x) - x}{\operatorname{ch}(x) - 1}.$$

La fonction f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$ car d'une part, d'après la question 1, on a $\operatorname{sh}(x) < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et d'autre part la fonction cosinus hyperbolique est minorée strictement par 1 sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs, on a[24]

$$\operatorname{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^x \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^x$$

d'où on déduit que

$$x\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)-1} \underset{+\infty}{\sim} x \quad \text{et que} \quad \frac{\operatorname{sh}(x)-x}{\operatorname{ch}(x)-1} \underset{+\infty}{\sim} 1.$$

Cela permet d'affirmer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -1$.

[24] Voir p. 733.

On a donc le tableau de variation suivant pour l'application f sur $\mathbb{R}^+$:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	-1
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$

4 - Pour montrer que la droite d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$, montrons que $h(x) = f(x) - (-x+3)$ admet pour limite 0 en $+\infty$. On a

$$h(x) = f(x) - (-x+3) = x\left(1 - \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x) - 1}\right) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}(2\mathrm{e}^{-x} - 1)}{1 + \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-x} - 1)}.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Pour préciser la position de la représentation graphique de f par rapport à son asymptote en $+\infty$, étudions au voisinage de $+\infty$ le signe de

$$h(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}(2\mathrm{e}^{-x} - 1)}{1 + \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-x} - 1)}.$$

Au voisinage de $+\infty$, le numérateur est négatif, le dénominateur est positif, donc h est négatif. On en déduit que la représentation graphique de f est au voisinage de $+\infty$ sous l'asymptote.

5 - On a

$$\begin{aligned} f(2)f(3) &= \left(3 - \frac{2\operatorname{sh}(2)}{\operatorname{ch}(2) - 1}\right) \times \left(3 - \frac{3\operatorname{sh}(3)}{\operatorname{ch}(3) - 1}\right) \\ &= \frac{3\big(3\operatorname{ch}(2) - 3 - 2\operatorname{sh}(2)\big) \times \big(\operatorname{ch}(3) - \operatorname{sh}(3) - 1\big)}{\big(\operatorname{ch}(2) - 1\big) \times \big(\operatorname{ch}(3) - 1\big)}. \end{aligned}$$

Puisque la fonction cosinus hyperbolique est minorée par 1, le dénominateur est toujours positif. Par ailleurs, on a d'une part

$$\operatorname{ch}(3) - \operatorname{sh}(3) - 1 = \mathrm{e}^{-3} - 1 = \mathrm{e}^{-3} - \mathrm{e}^0 < 0$$

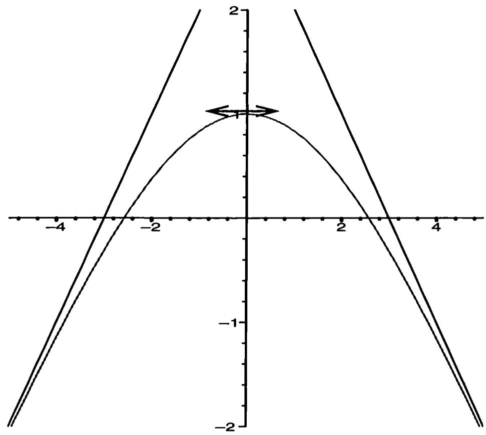
car la fonction exponentielle est strictement croissante et $-3 < 0$, et d'autre part

$$3\operatorname{ch}(2) - 3 - 2\operatorname{sh}(2) = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^2 + 5\mathrm{e}^{-2} - 6\big) > 0$$

car $\mathrm{e} > \frac{5}{2}$ d'où $\mathrm{e}^2 > \frac{25}{4} > \frac{24}{4} = 6$. On a donc bien $f(2)f(3) < 0$.

L'application f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$. Son image est $f(\mathbb{R}^+) =]-\infty, 1[$. D'après la proposition 14.1, page 657, f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $]-\infty, 1[$. On en conclut que 0 admet un unique antécédent par f, autrement dit, qu'il existe un unique réel $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(c) = 0$. Par ailleurs puisque $f(2)f(3) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $c \in]2, 3[$.

6 - La représentation graphique de f est donnée ci-dessous.



Sixième partie

Calcul intégral

CHAPITRE 18

L'intégrale de Riemann

La théorie de l'intégration est issue de la nécessité pratique de calculer des aires et des volumes ; elle est liée à la notion très générale de *mesure* et part du principe que l'intégrale d'une fonction constante sur un ensemble est égale au produit de cette constante par la *mesure* de l'ensemble. Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'intégrale de fonctions définies sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. L'intégrale d'une telle fonction est dite simple par opposition à l'intégrale de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ qualifiée d'intégrale multiple[1]. Il existe plusieurs théories de l'intégration. Nous nous limiterons à la théorie de l'intégrale de Riemann qui est largement suffisante pour les utilisations courantes.

18.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Sauf indication contraire, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

18.1.1 Fonction en escalier

DÉFINITION 18.1 *On appelle subdivision de l'intervalle* $[a, b]$ *toute famille finie* $(x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ *de réels vérifiant les conditions suivantes :*

1. *pour tout* $i \in \{0, \ldots, n\}$ $\quad x_i \in [a, b]$ *;*
2. $x_0 = a$ *et* $x_n = b$ *;*
3. *pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\quad x_{i-1} < x_i$.

Remarques

1. Une subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ comprend $n+1$ points (appelés nœuds de la subdivision) et détermine n intervalles non vides $[x_{i-1}, x_i]$. Le réel $h = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}}(x_i - x_{i-1})$ est appelé le *pas de la subdivision*, voir la figure 1.

2. On dit que la subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ est plus fine que la subdivision $\sigma' = (x'_i)_{i\in\{0,\ldots,m\}}$ si

$$\{x'_i \mid i = 0, \ldots, m\} \subset \{x_i \mid i = 0, \ldots, n\}.$$

---

[1] Voir le chapitre 12 du *Cours de deuxième année*.

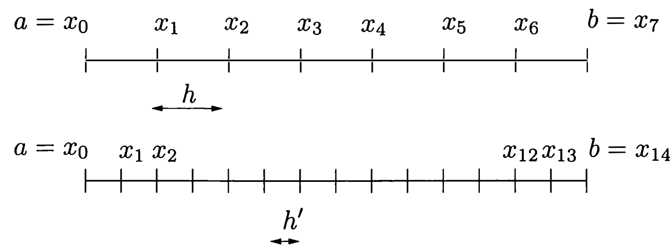


Fig. 1 Exemple d'une subdivision uniforme $(x_i)_{i\in\{0,\ldots,7\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ et d'une subdivision $(x'_i)_{i\in\{0,\ldots,14\}}$ plus fine.

Exemple La famille $(x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ où $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ définit une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas $h = \frac{1}{n}(b-a)$ appelée *subdivision uniforme* de l'intervalle $[a, b]$. La famille $(x'_i)_{i\in\{0,\ldots,2n\}}$ où $x'_i = a + \frac{i}{2n}(b-a)$ définit une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, de pas $h' = \frac{1}{2}h$, plus fine que la subdivision $(x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$, voir la figure 1.

DÉFINITION 18.2 *Soit f une application définie sur l'intervalle $[a, b]$.*

✗ *L'application f est qualifiée de fonction en escalier sur l'intervalle $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

✗ *Une subdivision $\sigma' = (x'_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ est dite adaptée à la fonction en escalier f si f est constante sur chaque intervalle $]x'_{i-1}, x'_i[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Remarques

1. L'image d'une fonction en escalier sur $[a, b]$ est un ensemble fini (une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs). Une fonction en escalier est donc bornée et ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité.

2. L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions en escalier sur l'intervalle $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{A}([a, b], \mathbb{R})$ des applications définies sur l'intervalle $[a, b]$.

Exemple La fonction partie entière E est une fonction en escalier, voir la figure 2. Sur l'intervalle $[-2, 2]$, la subdivision $\sigma_1 = (-2, -1, 0, 1, 2)$ est une subdivision uniforme adaptée à la fonction partie entière. La subdivision $\sigma_2 = (-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{4}, 0, 1, \frac{7}{4}, 2)$ est également une subdivision adaptée. La subdivision σ_2 est plus fine que la subdivision σ_1. Par contre, la subdivision $\sigma_3 = (-2, -\frac{3}{2}, -1, 1, 2)$ n'est pas une subdivision adaptée à la fonction partie entière.

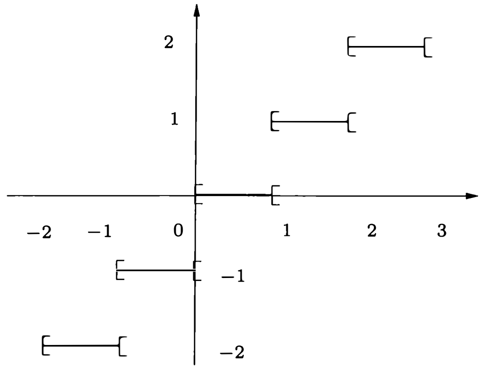


Fig. 2 Représentation graphique de la fonction partie entière.

18.1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

DÉFINITION 18.3 (Intégrale d'une fonction en escalier)
Soient f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ adaptée à f. Pour $i \in \{1,\dots,n\}$, on désigne par λ_i la valeur prise par f sur l'intervalle $]x_{i-1},x_i[$. On appelle intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$ le réel

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\ \lambda_i.$$

On note aussi ce réel $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

Remarques

1. On peut montrer que la valeur de $\int_a^b f$ est indépendante du choix de la subdivision σ, ce qui justifie que l'on ne fasse pas référence à σ dans la notation.

2. Les valeurs de f aux nœuds $x_i, i \in \{1,\dots,n-1\}$ de la subdivision σ n'interviennent pas dans la définition de l'intégrale, seules interviennent les valeurs λ_i prises par f sur les intervalles $]x_{i-1},x_i[$.

Exemple Considérons la fonction partie entière E sur l'intervalle $[-2,2]$ et la subdivision adaptée $\sigma_1 = (-2,-1,0,1,2)$ qui est une subdivision uniforme de pas $h = 1$, voir la figure 2. Sur l'intervalle $]-2,-1[$ la fonction prend la valeur $\lambda_1 = -2$, sur l'intervalle $]-1,0[$ elle prend la valeur $\lambda_2 = -1$, sur l'intervalle $]0,1[$ elle prend la valeur $\lambda_3 = 0$ et enfin sur l'intervalle $]1,2[$ elle prend la valeur $\lambda_4 = 1$. L'intégrale de la fonction partie entière sur l'intervalle $[-2,2]$ vaut donc

$$\int_{-2}^{2} E = \sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i-1})\,\lambda_i = h\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = -2 + (-1) + 0 + 1 = -2.$$

Si on considère la subdivision $\sigma_2 = (-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{4}, 0, 1, \frac{7}{4}, 2)$, on obtient

$$\int_{-2}^{2} E = \sum_{i=1}^{7}(x_i - x_{i-1})\,\lambda_i = \tfrac{1}{2} \times (-2) + \tfrac{1}{2} \times (-2) + \tfrac{3}{4} \times (-1) + \tfrac{1}{4} \times (-1)$$
$$+ 1 \times 0 + \tfrac{3}{4} \times 1 + \tfrac{1}{4} \times 1 = -2.$$

Interprétation graphique Le réel $\int_a^b f$ représente *l'aire algébrique*[2] entre la représentation graphique de la fonction en escalier f sur l'intervalle $[a, b]$ et l'axe des abscisses. La quantité $(x_i - x_{i-1})\,\lambda_i$ est en effet l'aire d'un rectangle de longueur $x_i - x_{i-1}$ et de hauteur λ_i.

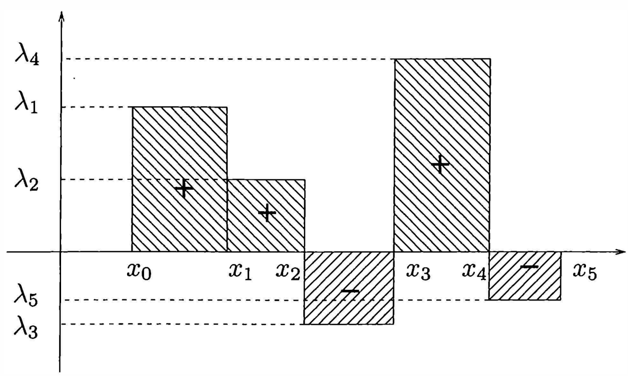
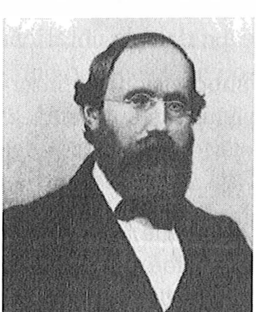


Fig. 3 Le réel $\int_a^b f$ représente la somme des aires algébriques des rectangles hachurés.

RIEMANN, Bernhard (1826, Hanovre - 1866, Selasca en Italie).



Bernhard Riemann fut un étudiant de Gauss à Göttingen. Sa thèse de doctorat défendue en 1851 est un travail important sur les fonctions de la variable complexe. L'œuvre de Riemann couvre de nombreux domaines des mathématiques : étude des surfaces, définition de l'intégrale, équations différentielles, théorie des nombres, séries, etc. Riemann était également profondément attaché aux relations entre les mathématiques et la physique. On lui doit des travaux sur les théories de la chaleur, de la lumière, de l'acoustique, etc. Riemann est mort précocement de tuberculose.

---

(2) On considère que l'aire située au-dessus de l'axe des abscisses est positive et que l'aire située sous l'axe des abscisses est négative.

Proposition 18.1 *Étant données deux fonctions f et g en escalier sur $[a,b]$, on a les propriétés suivantes :*

1. $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
2. *Si f est positive alors* $\int_a^b f \geqslant 0$.
3. *Si $f \leqslant g$ alors* $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.
4. *Pour tout $c \in]a,b[$ la fonction f est une fonction en escalier sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$; de plus*
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \qquad \textit{(relation de Chasles)} .$$
5. *Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et*
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Démonstration ⊵ Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ adaptée à f. Pour $i \in \{1,\ldots,n\}$, soit λ_i la valeur prise par f sur l'intervalle $]x_{i-1},x_i[$. En utilisant la première inégalité triangulaire, on obtient
$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\lambda_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})|\lambda_i| = \int_a^b |f|.$$
La première propriété est démontrée.

⊵ La deuxième propriété résulte de la première propriété car $|f| = f$ si f est positive.

⊵ La quatrième propriété est évidente si on choisit une subdivision associée à f contenant c, ce qui est toujours possible.

⊵ Pour vérifier la cinquième propriété, il suffit de considérer pour la fonction $\alpha f + \beta g$, la subdivision obtenue par réunion de deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées aux fonctions f et g.

⊵ On obtient alors la troisième propriété en appliquant la deuxième propriété à la fonction $g - f$. □

18.2 Intégrale de Riemann

Nous allons étendre la notion d'intégrale à une classe de fonctions beaucoup plus générale que celle des fonctions en escalier. Cette extension sera guidée par le souci de conserver avec ces nouvelles fonctions les propriétés de l'intégrale pour les fonctions en escalier énoncées à la proposition 18.1.

18.2.1 Définition

DÉFINITION 18.4 *Une application f définie sur $[a,b]$ est dite intégrable au sens de Riemann (ou encore Riemann-intégrable ou plus simplement intégrable) si pour tout réel ε strictement positif, il existe deux fonctions ϕ_ε et ψ_ε en escalier sur $[a,b]$ telles que*

1. $\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon$;
2. $\int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) < \varepsilon$.

On note $\mathcal{RI}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Remarques

1. Puisque les fonctions en escalier sont bornées, il résulte de la définition 18.4, qu'une application intégrable sur $[a,b]$ est nécessairement bornée sur $[a,b]$.

2. L'ensemble $\mathcal{RI}([a,b],\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{A}([a,b],\mathbb{R})$ des applications définies sur $[a,b]$.

Interprétation On se fixe une valeur strictement positive pour ε. On peut trouver deux fonctions $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ en escalier sur $[a,b]$ qui encadrent f sur $[a,b]$ et telles que la différence de leurs intégrales sur $[a,b]$ (l'aire de la surface grisée sur la figure 4) soit plus petite que ε.

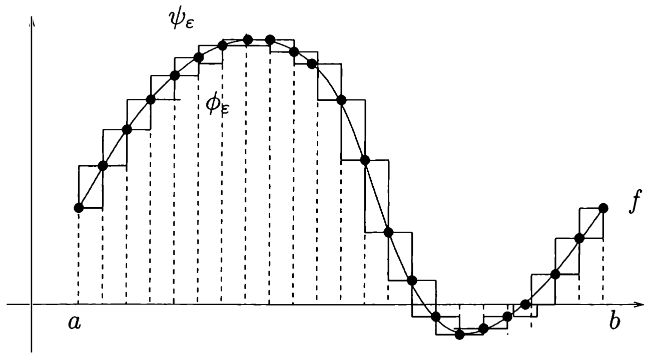


Fig. 4 Exemple de deux fonctions en escaliers telles que $\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon$.

Intuitivement, pour définir l'intégrale sur $[a,b]$ d'une fonction Riemann-intégrable, on a envie de considérer, pour ε très petit, les fonctions en escalier ϕ_ε et ψ_ε (elles encadrent f de très près si ε est choisi très petit) et de dire que l'intégrale sur $[a,b]$ de f est

$$\frac{1}{2}\left(\int_a^b \psi_\varepsilon + \int_a^b \phi_\varepsilon\right).$$

Comme nous allons le voir, il est possible de construire de manière rigoureuse l'intégrale sur $[a,b]$ de f à partir de cette idée.

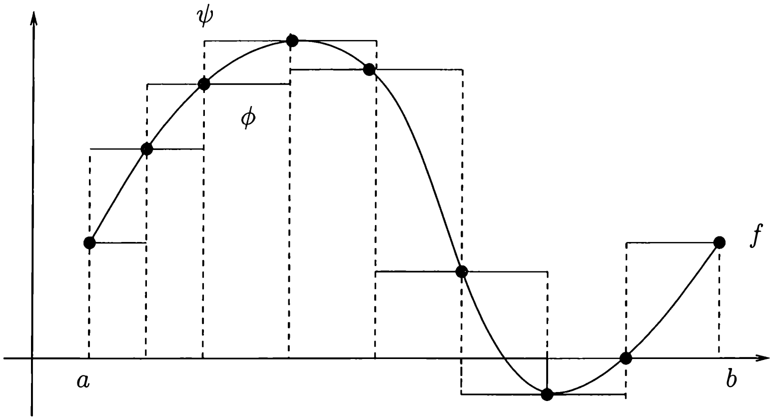


Fig. 5 Illustration du principe de la construction de l'intégrale de Riemann.

Construction de l'intégrale de Riemann

$\trianglerighteq$ Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$. On considère l'ensemble $E_-(f)$ des fonctions en escalier qui minorent f sur $[a, b]$ et l'ensemble $E_+(f)$ des fonctions en escalier qui majorent f sur $[a, b]$, voir la figure 5, *i.e.*

$$E_-(f) = \{\phi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \mid \phi \leqslant f\} \quad \text{et} \quad E_+(f) = \{\psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \mid f \leqslant \psi\}.$$

On définit aussi les ensembles,

$$A_-(f) = \left\{\int_a^b \phi \;\middle|\; \phi \in E_-(f)\right\} \quad \text{et} \quad A_+(f) = \left\{\int_a^b \psi \;\middle|\; \psi \in E_+(f)\right\}.$$

Puisque f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe deux fonctions $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Première conséquence : les ensembles $A_-(f)$ et $A_+(f)$ sont non vides (par exemple en prenant $\varepsilon = 1$, on établit que $\phi_1 \in E_-(f)$ et que $\psi_1 \in E_+(f)$).

Deuxième conséquence : soit u un élément de $A_-(f)$ et v un élément de $A_+(f)$;

- il existe $\phi \in E_-(f)$ tel que $u = \int_a^b \phi$;
- et il existe $\psi \in E_+(f)$ tel que $v = \int_a^b \psi$.

Puisque $\phi \leqslant f \leqslant \psi$, la troisième assertion de la proposition 18.1 indique que $u \leqslant v$. Cela signifie que l'ensemble $A_-(f)$ est majoré par tout élément de $A_+(f)$ et l'ensemble $A_+(f)$ est minoré par tout élément de $A_-(f)$. D'après la proposition 3.2, page 101, l'ensemble $A_-(f)$ admet une borne supérieure $I_-(f)$ et l'ensemble $A_+(f)$ admet une borne inférieure $I_+(f)$. De plus,

$$I_-(f) \leqslant I_+(f).$$

Troisième conséquence : pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, définissons $u_\varepsilon = \int_a^b \phi_\varepsilon$ et $v_\varepsilon = \int_a^b \psi_\varepsilon$. On a $u_\varepsilon \in A_-(f)$, $v_\varepsilon \in A_+(f)$ et

$$v_\varepsilon - u_\varepsilon = \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Par définition de la borne inférieure et de la borne supérieure[3], on a

$$u_\varepsilon \leqslant I_-(f) \leqslant I_+(f) \leqslant v_\varepsilon.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$0 \leqslant I_+(f) - I_-(f) \leqslant v_\varepsilon - u_\varepsilon \leqslant \varepsilon$$

ce qui implique, voir la proposition 3.12, page 113, que $I_+(f) = I_-(f)$.

Conclusion : nous avons démontré que si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ alors l'ensemble $A_-(f)$ admet une borne supérieure $I_-(f)$ qui est égale à la borne inférieure $I_+(f)$ de l'ensemble $A_+(f)$.

⊵ Réciproquement, considérons maintenant une fonction f bornée telle que $I_+(f) = I_-(f)$ et montrons que cette fonction est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Pour cela, fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et montrons qu'il existe deux fonctions ϕ_ε et ψ_ε en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) < \varepsilon.$$

En utilisant la définition de la borne supérieure et de la borne inférieure[3], on établit que pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+^*$,

- il existe $u_\delta \in A_-$ tel que $u_\delta > I_-(f) - \delta$;
- et il existe $v_\delta \in A_+$ tel que $v_\delta < I_+(f) + \delta$.

Les fonctions u_δ et v_δ vérifient

$$v_\delta - u_\delta < I_+(f) + \delta - (I_-(f) - \delta) = 2\delta.$$

Puisque cette relation est vraie pour tout réel δ strictement positif, si l'on prend $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, on établit l'existence de $u_\varepsilon \in A_-$ (i.e. de $\phi_\varepsilon \in E_-$) et de $v_\varepsilon \in A_+$ (i.e. de $\psi_\varepsilon \in E_+$) tels que

$$v_\varepsilon - u_\varepsilon = \int_a^b \psi_\varepsilon - \int_a^b \phi_\varepsilon = \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) < \varepsilon.$$

---

[3] Voir la définition 3.5 p. 96.

Cela permet de conclure d'après la définition 18.4, que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Remarque Dans le cas particulier où f est une application en escalier sur $[a, b]$, on a $f \in E_-(f)$ et $f \in E_+(f)$. Par conséquent, l'ensemble $A_-(f)$ admet pour borne supérieure $\int_a^b f$ (qui est élément maximal) et l'ensemble $A_+(f)$ admet pour borne inférieure $\int_a^b f$ (qui est élément minimal). Ainsi, si $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ alors f est Riemann-intégrable et l'intégrale de cette fonction en escalier satisfait

$$\int_a^b f = I_+(f) = I_-(f).$$

Notre construction de l'intégrale de Riemann est donc d'une part cohérente avec la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier que nous avons donnée dans la section précédente et d'autre part elle prolonge cette définition.

En résumé, à chaque fonction $f \in \mathcal{A}([a, b], \mathbb{R})$ intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, on peut associer le réel $I(f)$ défini par

$$I(f) = I_-(f) = I_+(f).$$

La fonction $I : f \in \mathcal{A}([a, b], \mathbb{R}) \mapsto I(f)$ constitue un prolongement de la fonction

$$f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \longmapsto \int_a^b f.$$

Cela nous permet d'énoncer la définition suivante.

Définition 18.5 *Soit f une application intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le réel $I(f)$ défini comme la borne supérieure de l'ensemble*

$$A_-(f) = \left\{ \int_a^b \phi \;\middle|\; \phi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \ , \ \phi \leqslant f \right\}$$

ou, de manière équivalente, comme la borne inférieure de l'ensemble

$$A_+(f) = \left\{ \int_a^b \psi \;\middle|\; \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \ , \ \psi \geqslant f \right\}.$$

On note ce réel $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Remarque Dans la notation $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$, la variable t est une « variable muette » et on peut noter également $\int_a^b f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta$ l'intégrale de f sur $[a, b]$. Cette notation exprime de manière claire par rapport à quelle variable, dont dépend la fonction f, on intègre. C'est très utile dans le cas où f dépend de plusieurs paramètres.

Interprétation graphique Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, le réel $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ représente l'aire algébrique[4] de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la représentation graphique de f (voir la fig. 6).

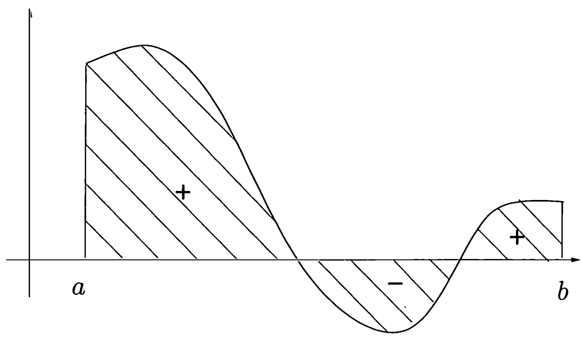


Fig. 6 L'aire algébrique hachurée représente $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 1 Soient $f : x \in [0,1] \mapsto x^2$ et $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ une subdivision uniforme de l'intervalle $[0,1]$. On considère les fonctions en escalier ϕ_n et ψ_n définies sur $[0,1]$ par

$$\forall i \in \{0,\ldots,n-1\} \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}[\quad \phi_n(x) = f(x_i);$$
$$\forall i \in \{0,\ldots,n-1\} \quad \forall x \in]x_i, x_{i+1}] \quad \psi_n(x) = f(x_{i+1}).$$

1 - Représenter graphiquement les fonctions f, ϕ_n et ψ_n pour $n = 10$.
2 - Calculer, en utilisant la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier,

$$I_n = \int_0^1 \phi_n(x)\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \psi_n(x)\ \mathrm{d}x.$$

3 - En déduire que f est Riemann-intégrable sur $[0,1]$ et donner la valeur de l'intégrale de Riemann $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Remarques

1. Par convention, si $b < a$ et si f est Riemann-intégrable sur $[b, a]$ alors on pose $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t$.

2. On convient également que si $a = b$ alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

[4] C'est-à-dire que l'on considère que l'aire située au-dessus de l'axe des abscisses est un réel positif et que l'aire située au-dessous de l'axe des abscisses est un réel négatif.

18.2.2 Principaux exemples de fonctions Riemann-intégrables

Un point important dans l'étude de l'intégrale de Riemann consiste à déterminer des critères, simples à vérifier, permettant d'établir qu'une fonction est Riemann-intégrable. Il est en effet malaisé d'utiliser la définition 18.4 pour s'assurer qu'une fonction donnée est Riemann-intégrable. Un certain nombre de critères sont donnés dans ce paragraphe, dont le plus important est le suivant.

PROPOSITION 18.2 *Toute application continue sur* $[a, b]$ *est intégrable au sens de Riemann sur* $[a, b]$.

Démonstration Considérons une application f continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$. D'après le théorème de Heine[5], l'application f est uniformément continue sur $[a, b]$, autrement dit

$$\forall \mu \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall (x, x') \in [a, b]^2 \ \big(|x - x'| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x')| \leqslant \mu\big). \quad (1)$$

D'après la définition 18.4, pour montrer que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, nous devons montrer que pour tout réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe deux fonctions ϕ_ε et ψ_ε en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \quad < \varepsilon.$$

Considérons un réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et un réel μ_ε vérifiant $0 < \mu_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Soit $\sigma = (x_i)_{i \in \{0,\ldots,n\}}$ une subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ de pas h tel que $h \leqslant \eta$ où le réel η est défini par la relation (1) et la donnée de μ_ε. Soient ϕ_ε et ψ_ε les fonctions en escalier sur $[a, b]$ définies par

1. $\phi_\varepsilon(x) = f(x_i) - \mu_\varepsilon$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$;
2. $\psi_\varepsilon(x) = f(x_i) + \mu_\varepsilon$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$;
3. $\phi_\varepsilon(b) = \psi_\varepsilon(b) = f(b)$.

Puisque pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$ on a $0 \leqslant |x - x_i| \leqslant h \leqslant \eta$, on déduit de (1) que $|f(x) - f(x_i)| \leqslant \mu_\varepsilon$, autrement dit que

$$\underbrace{f(x_i) - \mu_\varepsilon}_{= \phi_\varepsilon(x)} \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{f(x_i) + \mu_\varepsilon}_{= \psi_\varepsilon(x)}.$$

On a ainsi $\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon$ sur $[x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ autrement dit sur $[a, b]$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} 2\mu_\varepsilon \\ &= 2\mu_\varepsilon n h = 2\mu_\varepsilon (b - a) < \varepsilon. \end{aligned}$$

On en conclut que l'application f est Riemann-intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. □

[5] Voir le théorème 13.5 p. 628.

Définition 18.6 *On dit qu'une application f définie sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i \in \{0,\ldots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ l'application f est continue sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ et admet*[6] *une limite à droite en x_i et une limite à gauche en x_{i+1}.*

On admet le résultat suivant qui en un certain sens est un peu plus général que celui énoncé à la proposition 18.2 et qui pourrait être démontré selon le même principe en considérant les différents intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ de la subdivision sur lesquels f est continue.

Proposition 18.3 *Toute application continue par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.*

Exercice 2 Montrer que toute application monotone sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ (on s'inspirera de la démonstration de la proposition 18.2).

Remarque Même si l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables semble vaste et inclut les fonctions habituellement manipulées, il ne faut pas pour autant croire que toute fonction est intégrable au sens de Riemann. Ainsi l'application f définie sur $[a, b]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 1 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable. Pour l'établir raisonnons par l'absurde. Supposons que f est intégrable au sens de Riemann ; dans ce cas, d'après la définition 18.4, pour tout réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe deux fonctions ϕ_ε et ψ_ε en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\forall x \in [a, b] \quad \phi_\varepsilon(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{2}$$

Prenons $\varepsilon = b - a$ et considérons une subdivision $\sigma = (x_i)_{i \in \{0,\ldots,n\}}$ adaptée aux fonctions en escalier ϕ_ε et ψ_ε. Comme $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont des ensembles denses[7] dans $\mathbb{R}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ on peut trouver un nombre rationnel t_1 dans l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ et un nombre irrationnel t_2 dans l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Compte tenu des conditions données en (2) et du fait que ϕ_ε

(6) Les réels x_i correspondent donc soit à des points où f est continue, soit à des points de discontinuité de première espèce.

(7) Voir la proposition 3.13 p. 114.

et ψ_ε sont constantes sur chaque sous-intervalle de la subdivision σ, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a

$$\begin{array}{lll} & \forall x \in]x_i, x_{i+1}[& \phi_\varepsilon(x) = \phi_\varepsilon(t_1) \leqslant f(t_1) = 0 \\ \text{et} & \forall x \in]x_i, x_{i+1}[& 1 = f(t_2) \leqslant \psi_\varepsilon(t_2) = \psi_\varepsilon(x). \end{array}$$

on a donc $\phi_\varepsilon(x) \leqslant 0$ et $\psi_\varepsilon(x) \geqslant 1$ et par conséquent $\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon \geqslant 1$ pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$. Cela implique que

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} 1 = b - a = \varepsilon.$$

Cette propriété est en contradiction avec l'hypothèse que l'application f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et la relation (2). L'application f n'est donc pas intégrable au sens de Riemann.

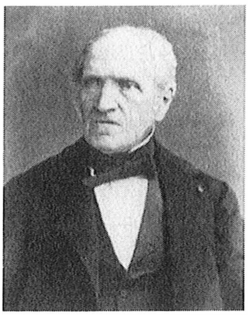
18.2.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Les propriétés énoncées dans la proposition suivante sont admises. Elles s'obtiennent à partir des propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier données à la proposition 18.1 et de la définition de la Riemann-intégrabilité.

PROPOSITION 18.4 *Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur l'intervalle $[a, b]$.*

1. $\left| \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t.$
2. *Si f est positive alors* $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0.$
3. *Si $f \leqslant g$ alors*
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$$
4. *Pour tout réel $c \in]a, b[$ la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$; de plus,*
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t \qquad \textit{(relation de Chasles)}\ .$$
5. *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et*
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\ \mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$$

CHASLES, Michel (1793, Epernon - 1880, Paris).



Après des études secondaires brillantes, Chasles, baptisé Floréal par ses parents, entra à l'École polytechnique en 1812. Ses travaux mathématiques ont porté sur la géométrie projective et dès 1827 il acquit une réputation de grand mathématicien et de grand historien des mathématiques. Le principal de son œuvre a été publié dans son *Traité de géométrie supérieure*[8]. Nommé professeur à l'École polytechnique en 1841, il fut en 1873 le premier président de la Société Mathématique de France[9]. Chasles est également resté célèbre pour avoir été la victime d'un faussaire qui lui a vendu très cher des correspondances prétendument originales de savants célèbres.

PROPOSITION 18.5 *Soit f une application continue sur $[a, b]$ et à valeurs positives. On a*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0.$$

Démonstration $\trianglerighteq$ Montrons que si f est l'application nulle alors son intégrale sur $[a, b]$ vaut 0. La fonction nulle est une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma = \{a, b\}$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée. D'après la définition 18.3, on a $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = (b - a) \times 0 = 0$.

$\trianglerighteq$ Pour montrer que la réciproque est vraie, utilisons un raisonnement par contraposée. Supposons que f n'est pas l'application nulle, c'est-à-dire[10] qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et montrons que dans ce cas $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \neq 0$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, d'après la proposition 13.16, page 620, il existe un voisinage de x_0 sur lequel f ne s'annule pas. Autrement dit, on peut trouver deux réels α et β dans $]a, b[$ avec $\alpha < x_0 < \beta$ tels que

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad f(x) \neq 0.$$

Puisque par hypothèse f est positive, elle est strictement positive sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$; cela implique que

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \quad f(x) \geqslant \eta.$$

[8] Que l'on peut consulter sur Galica `gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k996370`

[9] Site web : `smf.emath.fr`

[10] L'application f est l'application nulle sur $[a, b]$ si : $\forall x \in [a, b]\ f(x) = 0$ donc l'hypothèse « f est n'est pas l'application nulle » se traduit par : $\exists x_0 \in [a, b]\ f(x_0) \neq 0$.

En utilisant la proposition 18.4, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \underbrace{\int_a^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} + \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_\beta^b f(t)\,\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_\alpha^\beta \eta\,\mathrm{d}t = \eta(\beta-\alpha) > 0.\end{aligned}$$

On a donc bien $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$ ce qui achève la preuve. □

Remarques

1. L'hypothèse « f est positive sur $[a,b]$ » est indispensable. Par exemple, toute application impaire a une intégrale qui est nulle sur un intervalle de centre 0. De même, l'hypothèse « f est continue sur $[a,b]$ » est indispensable. Par exemple, l'application f définie sur $[-1,1]$ par $f(0)=1$ et $f(x)=0$ pour tout $x\neq 0$ est une application positive sur $[-1,1]$, non nulle qui a une intégrale $\int_{-1}^1 f$ qui est nulle.

2. On a un résultat analogue à celui énoncé à la proposition 18.5 dans le cas où f est une application à valeurs négatives.

3. Si f et g sont Riemann-intégrables sur $[a,b]$ et si leurs valeurs ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, leurs intégrales sont égales. En effet la différence $f-g$ est une fonction en escalier, nulle sauf en un nombre fini de points. Par conséquent son intégrale est nulle. Par contre

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{n'implique pas} \quad f=g.$$

Par exemple $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ bien que les fonctions sinus et cosinus ne soient pas égales sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

On montre que si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur un intervalle $[a,b]$ alors leur produit $f\times g$ est également Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Bien entendu, comme on s'en convaincra aisément par un contre-exemple, l'intégrale sur $[a,b]$ du produit $f\times g$ n'est pas égale[11] au produit des intégrales sur $[a,b]$ de f et de g. On a toutefois l'inégalité suivante.

Proposition 18.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$. Le produit $f\times g$ est une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et

$$\left(\int_a^b f(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t\right)\times\left(\int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t\right).$$

[11] On a préféré cette phrase un peu longue à une formule pour éviter toute mémorisation visuelle imparfaite d'une formule erronée. Un contre-exemple évident est $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ alors que $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Démonstration Considérons l'application T définie sur $\mathbb{R}$ par[12]

$$T(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2 \, \mathrm{d}t.$$

D'après la seconde assertion de la proposition 18.4, l'application T est positive sur $\mathbb{R}$. D'autre part pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(\lambda) = \lambda^2 \underbrace{\int_a^b (f(t))^2 \, \mathrm{d}t}_{A} + 2\lambda \underbrace{\int_a^b f(t)\, g(t) \, \mathrm{d}t}_{B} + \underbrace{\int_a^b (g(t))^2 \, \mathrm{d}t}_{C}.$$

Si $A \neq 0$ alors l'application T est donc une fonction polynomiale du second degré. Puisqu'elle est positive sur $\mathbb{R}$, elle ne peut avoir qu'une racine double ou deux racines complexes. Son discriminant $\Delta = 4B^2 - 4AC$ est donc négatif ou nul. Cela implique que

$$B^2 - AC = \left(\int_a^b f(t) \times g(t) \, \mathrm{d}t\right)^2 - \left(\int_a^b (f(t))^2 \, \mathrm{d}t\right) \times \left(\int_a^b (g(t))^2 \, \mathrm{d}t\right) \leqslant 0.$$

Si $A = 0$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $T(\lambda) = 2\lambda B + C \geqslant 0$. Cette relation ne peut être satisfaite que si $B = 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz se réduit dans ce cas à $0 = 0$. □

18.3 Intégrales indéfinies et primitives

18.3.1 Intégrales indéfinies

Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$, la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, x]$ et l'application

$$F : x \in [a, b] \longmapsto \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

est appelée *intégrale indéfinie* de f sur $[a, b]$. D'après la relation de Chasles, pour tout $(x_1, x_2) \in [a, b]^2$, on a

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_a^{x_2} f(t) \, \mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_a^{x_1} f(t) \, \mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} f(t) \, \mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} f(t) \, \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3}$$

PROPOSITION 18.7 *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$. L'intégrale indéfinie sur $[a, b]$ de f est une application continue sur $[a, b]$.*

---

[12] On mettra cette démonstration en parallèle avec celle de la proposition 3.6 p. 106.

Démonstration La fonction f étant Riemann-intégrable sur $[a,b]$, elle est bornée[13] sur $[a,b]$; notons $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Pour montrer que F est continue sur $]a,b[$, montrons que pour tout $x_0 \in]a,b[$ on a $\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$. Soit $x_0 \in]a,b[$; pour tout $x \in]a,b[$ avec $x < x_0$, en utilisant la proposition 18.4 on obtient

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_x^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^{x_0} |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant (x_0 - x)\, M. \tag{4}$$

Le théorème d'encadrement[14] permet d'en déduire que

$$\lim_{x\to x_0^-} |F(x_0) - F(x)| = 0.$$

Pour $x \in]a,b[$ avec $x > x_0$, un calcul analogue où les bornes d'intégration sont inversées, permet d'établir que $\lim_{x\to x_0^+} |F(x_0) - F(x)| = 0$. On en conclut que[15] $\lim_{x\to x_0} |F(x_0) - F(x)| = 0$, ce qui implique que[16]

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0).$$

Par ailleurs, la relation (4) qui reste valable pour $x_0 = b$ permet d'établir que $\lim_{x\to b^-} F(x) = F(b)$ et donc que F est continue à gauche en b. De même, on établit que $\lim_{x\to a^+} F(x) = F(a)$ et donc que F est continue à droite en a. On en conclut que F est continue sur $[a,b]$. □

PROPOSITION 18.8 (Dérivabilité de l'intégrale indéfinie)
Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Si f est continue en $x_0 \in]a,b[$ alors son intégrale indéfinie F sur $[a,b]$ est dérivable en x_0 et admet pour dérivée $F'(x_0) = f(x_0)$.

Démonstration Pour montrer que F est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$, montrons que[17] le taux d'accroissement $\Delta_{x_0}(h) = \frac{1}{h}\left(F(x_0+h) - F(x_0)\right)$ a pour limite $f(x_0)$ lorsque h tend vers 0. Il s'agit pour cela de montrer que[18]

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall h \in \mathbb{R}^* \quad \big(|h| \leqslant \eta \implies \left|\Delta_{x_0}(h) - f(x_0)\right| \leqslant \varepsilon\big).$$

Soit h un réel strictement positif tel que $[x_0, x_0+h] \subset [a,b]$; en utilisant la relation (3) p. 902, on obtient

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

---

(13) Voir la remarque de la page 892.
(14) Voir le théorème 13.1 p. 605.
(15) Voir p. 613 ; la fonction $x \mapsto |F(x_0) - F(x)|$ admettant une limite à gauche et une limite à droite égales en x_0, elle a une limite en x_0.
(16) Voir le résultat de l'exercice 3 p. 599.
(17) Voir la définition 16.1 p. 747.
(18) Voir la définition 13.2 p. 597.

Par ailleurs, l'intégrale d'une fonction constante sur un intervalle donné étant égale[19] au produit de la valeur de la constante par la longueur de cet intervalle, on a

$$f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\ \mathrm{d}t.$$

Les propriétés de l'intégrale énoncées à la proposition 18.4, permettent en utilisant les deux relations précédentes, d'écrire

$$|\Delta_{x_0}(h) - f(x_0)| = \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\ \mathrm{d}t.$$

Un calcul analogue peut être mené dans le cas où h est un réel strictement négatif. Il conduit à l'inégalité

$$|\Delta_{x_0}(h) - f(x_0)| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\ \mathrm{d}t = \frac{1}{|h|}\int_{x_0-|h|}^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\ \mathrm{d}t$$

Soit ε un réel strictement positif fixé; d'après la définition 13.4, page 616, puisque f est continue en $x_0 \in [a,b]$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in [a,b] \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Supposons que le réel h soit tel que $|h| \leqslant \eta$. Pour tout t dans l'intervalle d'extrémité x_0 et x_0+h, on a $|t-x_0| \leqslant |h| \leqslant \eta$ et par conséquent $|f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. On en déduit que

$$|\Delta_{x_0}(h) - f(x_0)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\ \mathrm{d}t = \varepsilon & \text{si } h > 0 \\ \dfrac{1}{|h|}\displaystyle\int_{x_0-|h|}^{x_0} \varepsilon\ \mathrm{d}t = \varepsilon & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

On en conclut que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall h \in \mathbb{R}^* \quad \big(|h| \leqslant \eta \implies \big|\Delta_{x_0}(h) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon\big)$$

ce qui achève la preuve. □

Remarques

1. L'application f étant par hypothèse continue à droite en a (resp. à gauche en b), la démonstration de la proposition 18.8 indique aussi que l'intégrale indéfinie F est dérivable à droite[20] en a (resp. à gauche en b).

2. On peut montrer que si $x_0 \in]a,b[$ est un point de discontinuité de première espèce[21] de f alors l'intégrale indéfinie F de f sur $[a,b]$ admet une dérivée à

---

[19] Voir la définition 18.3 p. 889.

[20] Voir la définition 16.2 p. 748.

[21] Voir la définition 618 ; supposer que $x_0 \in]a,b[$ est un point de discontinuité de première espèce de f revient à supposer que f a une limite à gauche et à droite en x_0 (c'est limite étant distinctes sans quoi f serait continue en x_0).

gauche $F'_g(x_0)$ et une dérivée à droite $F'_d(x_0)$ en x_0 avec $F'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ et $F'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

On déduit de la proposition 18.8 le corollaire suivant[22].

Corollaire 18.1 *Si f est une application continue sur $[a, b]$ alors son intégrale indéfinie F sur $[a, b]$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $F' = f$.*

Remarque Étant donnés une application f continue sur $[a, b]$ et un réel x_0 appartenant à $[a, b]$, il résulte du corollaire 18.1 que l'application G définie pour $x \in [a, b]$ par

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = F(x) - F(x_0)$$

où F désigne l'intégrale indéfinie de f sur $[a, b]$, est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ dont la dérivée est f.

Dans la pratique, il arrive que l'on soit amené à considérer des fonctions d'une variable x définies par des intégrales dont les bornes varient en fonction de x. La proposition suivante précise les propriétés de telles fonctions.

Proposition 18.9 (Intégrale fonction des bornes)
Soient f une application continue sur un intervalle J et u et v deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I tel que $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$. L'application

$$\Phi : x \in I \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $x \in I$, on a

$$\Phi'(x) = f(v(x)) \times v'(x) - f(u(x)) \times u'(x).$$

Démonstration Puisque f est continue sur J et que $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$, pour tout $x \in I$, l'application f est continue sur l'intervalle fermé et borné d'extrémités $u(x)$ et $v(x)$. D'après la proposition 18.2, l'application f est Riemann-intégrable sur cet intervalle. On en conclut que le réel $\Phi(x)$ est bien défini pour tout $x \in I$.

Soit $a \in J$; pour tout $x \in I$ on a

$$\Phi(x) = \int_{a}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{a}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t = G(v(x)) - G(u(x)) \tag{5}$$

[22] On rappelle, voir la définition 16.5 p. 764, qu'une application est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$ donné si elle est dérivable sur $[a,b]$ et si sa dérivée est continue sur $[a,b]$.

où G est l'application $y \in J \mapsto \int_a^y f(t)\ \mathrm{d}t$. On remarquera que comme l'intervalle J n'est supposé ni fermé, ni borné, il n'est pas possible d'avoir recours à la proposition 18.8 pour établir que G est dérivable.

Considérons l'application $\phi_1 : x \in I \mapsto G(v(x))$ et montrons que ϕ_1 est dérivable sur I, c'est-à-dire que ϕ_1 est dérivable en $x_0 \in I$ pour tout $x_0 \in I$. Comme l'intervalle I est ouvert, étant donné $x_0 \in I$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset I$. Comme v est continue, l'image de l'intervalle fermé borné $U = [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ par v est un intervalle V fermé et borné qui contient $y_0 = f(x_0)$. Pour tout $x \in U$, on a

$$\phi_1(x) = G(v(x)) = \int_a^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^{y_0} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{y_0}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t = G(y_0) + F(v(x))$$

où $F : y \in V \mapsto \int_{y_0}^y f(t)\ \mathrm{d}t$. Comme f est continue sur J et que $V = v(U) \subset v(I) \subset J$, l'application f est continue sur l'intervalle fermé et borné V. D'après la proposition 18.8, F est dérivable sur V et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in U$. On a donc

$$\forall x \in U \qquad \phi_1'(x) = \big(G(y_0) + F(v(x))\big)' = v'(x)\, F'(v(x)) = v'(x)\, f(v(x)).$$

En particulier, puisque x_0 appartient à U, l'application ϕ_1 est dérivable en x_0 avec $\phi_1'(x_0) = v'(x_0)\, f(v(x_0))$. Un raisonnement en tout point analogue permet d'établir que pour tout $x_0 \in I$, l'application $\phi_2 : x \in I \mapsto G(u(x))$ est dérivable en x_0 avec $\phi_2'(x_0) = u'(x_0)\, f(u(x_0))$. Ainsi, les applications ϕ_1 et ϕ_2 sont dérivables sur I avec pour tout $x \in I$,

$$\phi_1'(x) = v'(x)\, f(v(x)) \quad \text{et} \quad \phi_2'(x) = u'(x)\, f(u(x)).$$

Revenant à la relation (5), on en déduit que $\Phi = \phi_1 - \phi_2$ est dérivable sur I avec pour tout $x \in I$

$$\Phi'(x) = \phi_1'(x) - \phi_2'(x) = v'(x)\, f(v(x)) - u'(x)\, f(u(x)).$$

Enfin, comme u et v sont des application de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J et que f est une application continue sur J, cette relation permet d'affirmer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. □

Exemple Considérons l'application

$$\Phi : x \in]-\tfrac{1}{2}, +\infty[\longmapsto \int_x^{2x} \sqrt{1+t^3}\ \mathrm{d}t.$$

L'application $f : x \in]-1, +\infty[\mapsto \sqrt{1+t^3}$ est continue et les deux applications $u : x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[\mapsto x \in]-1, +\infty[$ et $v : x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[\mapsto 2x \in]-1, +\infty[$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la proposition 18.9, l'application est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in]-\tfrac{1}{2}, +\infty[\qquad \Phi'(x) = 2\sqrt{1+8x^3} - \sqrt{1+x^3}.$$

18.3.2 Primitives

DÉFINITION 18.7 *Soient I un intervalle et f une application définie sur I. On appelle primitive de f sur I toute application G définie sur I qui vérifie*[23]

$$\forall x \in I \qquad G'(x) = f(x).$$

Les primitives de f sont notées $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int f$.

Exemples

1. La fonction $x \mapsto \ln(x-1)$ est une primitive sur $]1,+\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ car

$$\forall x \in]1,+\infty[\qquad (\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1}.$$

La fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est une primitive sur $]-\infty,1[$ de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ car

$$\forall x \in]-\infty,1[\qquad (\ln(1-x))' = \frac{1}{x-1}.$$

On pourra regrouper les deux situations en disant que la fonction $x \mapsto \ln(|x-1|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur chacun des 2 intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$. De même, on vérifie que fonction $x \mapsto \ln(|x+1|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ sur chacun des 2 intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$.

2. Sur l'intervalle $]-1,1[$, la fonction argument tangente hyperbolique est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ puisque $\operatorname{argth}(x)' = f(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$. On note

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argth}(x) \qquad \text{sur }]-1,1[.$$

La fonction $x \mapsto \pi+\operatorname{argth}(x)$ est aussi une primitive de f sur l'intervalle $]-1,1[$. On sera vigilant au fait que bien que f soit définie sur $]1,+\infty[$ et sur $]-\infty,-1[$, sa primitive sur chacun de ces deux intervalles n'est pas la fonction argument tangente hyperbolique puisque celle-ci n'est pas définie sur ces intervalles. La décomposition en éléments simples[24]

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{X-1}$$

permet d'établir que sur chacun des 2 intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$, une primitive de f est $G : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\ln(|x-1|)$ et on a aussi[25]

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

---

[23] Dans le cas où l'intervalle I n'est pas ouvert, on considère aux bornes de l'intervalle I les notions de dérivée à gauche et/ou à droite.

[24] Voir le chap. 7.

[25] Pour $x \in]1,+\infty[$ ou pour $x \in]-\infty,-1[$, on a $\frac{x+1}{x-1} > 0$.

PROPOSITION 18.10 *Soit f une application continue sur $[a,b]$. L'intégrale indéfinie de f sur $[a,b]$*

$$F : x \in [a,b] \longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur $[a,b]$. De plus, pour toute primitive G de f sur $[a,b]$ il existe un réel c tel que $G = F + c$.

Démonstration D'après le corollaire 18.1, puisque f est une application continue sur $[a,b]$, l'application F qui est son intégrale indéfinie sur $[a,b]$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ dont la dérivée est $F' = f$. D'après la définition 18.7, l'application F est une primitive de f sur $[a,b]$.

Soit G une primitive de f sur $[a,b]$; on a $G' = f$. Puisque f est continue sur $[a,b]$, l'application G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. De plus,

$$\forall x \in]a,b[\qquad (G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

La fonction $G - F$ est donc une application continue sur $[a,b]$, de dérivée nulle sur $]a,b[$. D'après la proposition 16.10, page 771, il s'agit d'une application constante sur $[a,b]$. On en conclut qu'il existe un réel c tel que $G = F + c$. □

Remarques

1. On déduit de la proposition 18.10 que si f est une application continue sur $[a,b]$, il existe une unique primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a ; il s'agit de l'intégrale indéfinie de f sur $[a,b]$. Plus généralement, étant donné un réel $x_0 \in [a,b]$, il existe une unique primitive G de f sur $[a,b]$ qui s'annule en x_0 ; cette primitive a pour expression

$$G : x \in [a,b] \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

et correspond à la valeur $c = -\int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t$ dans la proposition 18.10.

2. On peut également établir le résultat suivant qui peut être vu comme une conséquence de la proposition 18.9. Si f est une application continue sur un intervalle I quelconque (non nécessairement un intervalle fermé et borné $[a,b]$) et x_0 un élément de I alors l'application $G : x \in I \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.

> La proposition 18.10 indique qu'une fonction continue possède une infinité de primitives, qui se déduisent les unes des autres par l'ajout d'une constante. Nous ne ferons mention dans le reste de ce chapitre que d'une primitive pour une fonction donnée, omettant systématiquement lorsque cela ne sera pas utile de faire référence à l'ensemble des primitives de la fonction considérée via l'ajout d'une constante.

La proposition 18.10 admet le corollaire suivant qui assure l'existence de primitives à toute fonction continue. Il n'indique toutefois pas qu'elle est la forme explicite de ces primitives. On notera à ce sujet que, par exemple, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ qui est continue admet des primitives mais il est connu que ces primitives ne peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

COROLLAIRE 18.2 *Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.*

On sera attentif au fait suivant. Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$, alors d'après la proposition 18.2 elle est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et d'après le corollaire 18.2, elle admet une primitive sur $[a, b]$. Toutefois, il existe des fonctions Riemann-intégrables qui n'admettent pas de primitive. Et inversement, si une application admet une primitive sur un intervalle, elle n'est pas nécessairement intégrable sur cet intervalle. L'intégration ne peut être considérée comme « l'opération inverse » de la dérivation que si on se restreint à l'ensemble des fonctions continues.

COROLLAIRE 18.3 *Si f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ alors pour tout $x \in [a, b]$ on a*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration Comme f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, l'application f' est continue sur $[a, b]$. D'après la proposition 18.10, l'application $x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t$ est une primitive de f' sur $[a, b]$. Or, d'après la définition 18.7, f est également une primitive de f' sur $[a, b]$. D'après la proposition 18.10, il existe donc un réel c tel que

$$\forall x \in [a, b] \qquad f(x) = c + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Pour $x = a$ cette relation s'écrit $f(a) = c + 0$; on a donc $c = f(a)$ ce qui établit la formule énoncée dans le corollaire. □

PROPOSITION 18.11 (Lien entre primitive et intégrale)
Soit f une application Riemann-intégrable sur $[a, b]$ admettant une primitive G sur $[a, b]$. On a

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = G(b) - G(a).$$

Le réel $G(b) - G(a)$ est souvent noté $\Big[G(t)\Big]_a^b$.

Démonstration Nous admettons ce résultat nous contentant de remarquer que dans le cas où f est supposée non seulement Riemann-intégrable sur $[a, b]$ mais aussi continue sur $[a, b]$, le résultat découle de la proposition 18.10 :

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a, b] \quad G(x) = F(x) + c$$

où F est l'intégrale indéfinie de f. On a donc

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

$\square$

La proposition 18.11 est extrêmement importante puisqu'elle fournit un moyen élémentaire de calculer une intégrale dès que l'on connaît une primitive de la fonction à intégrer. Ainsi, la fonction sinus étant continue sur $[0, \pi]$ et admettant pour primitive sur l'intervalle $[0, \pi]$ la fonction $G : x \mapsto -\cos(x)$, on a

$$\int_0^\pi \sin(t)\ \mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_0^\pi = \cos(0) - \cos(\pi) = 2.$$

EXERCICE 3
Soit ϕ la fonction définie par $\phi(x) = \int_1^{1+x^2} \ln(t)\ \mathrm{d}t$.
1 - Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer ϕ' sans expliciter ϕ.
2 - Montrer qu'une primitive de la fonction logarithme sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto x\ln(x) - x$. En déduire l'expression de ϕ puis retrouver l'expression de ϕ' obtenue à la question précédente.

18.3.3 Liste des primitives usuelles

Des ouvrages entiers ont pour seul but de fournir des tables de primitives. On pourra consulter par exemple le fameux ouvrage de I.S. Gradshteyn et I.M. Ryzhik intitulé *Table of Integrals, Series and Products*[26].

Le logiciel de calcul formel MAPLE permet également d'obtenir les primitives d'un grand nombre de fonctions grâce à la commande `int`.

```
> int(sqrt(1-x^2),x);
```

$$\frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\arcsin(x)$$

Ce calcul est effectué page 914. On interprétera toutefois avec prudence les résultats retournés par MAPLE :

```
> int(x^2*exp(x^2),x);
```

$$\frac{1}{2}\,xe^{x^2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{i}\sqrt{\pi}\mathrm{erf}\,(\mathrm{i}x)$$

Nous présentons dans ce qui suit une liste des primitives les plus courantes. On vérifiera aisément les résultats énoncés en dérivant la fonction primitive proposée. Signalons que l'on se contente d'indiquer une primitive, *i.e.* la constante est omise. La première liste que nous donnons contient les *primitives usuelles* qu'il est indispensable de connaître. La seconde liste, intitulée *primitives utiles* regroupe les primitives de quelques fonctions fréquemment rencontrées dans les calculs.

[26] La septième édition éditée par A. Jeffrey and D. Zwillinger est parue en 2007 (Academic Press, New York).

Liste des primitives usuelles :

fonction	primitive	domaine de validité
$e^{\alpha x} \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$]0, +\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[, n \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}(x)$	$\ln(\mathrm{ch}(x))$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x^n \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{n+1}\, x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$-\dfrac{1}{n-1}\, \dfrac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\dfrac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$ ou $-\arccos(x)$	$]-1, 1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{argsh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{argch}(x)$	$]1, +\infty[$
	$-\mathrm{argch}(\lvert x\rvert)$	$]-\infty, -1[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2} \ln\left(\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert\right)$	$]-\infty, -1[$ ou $]-1, 1[$ ou $]1, +\infty[$

Liste de primitives utiles :

fonction	primitive	domaine de validité
$\dfrac{1}{\cos(x)}$	$\ln\left(\left\lvert\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert\right)$	$]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[, n\in\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left(\left\lvert\tan(\frac{1}{2}x)\right\rvert\right)$	$]n\pi, (n+1)\pi[, n\in\mathbb{Z}$
$\mathrm{cotan}(x)$	$\ln\left(\lvert\sin(x)\rvert\right)$	$]n\pi, (n+1)\pi[, n\in\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$	$2\arctan(\mathrm{e}^x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$	$\ln\left(\left\lvert\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}x\right)\right\rvert\right)$	$\mathbb{R}^*$
$\coth(x)$	$\ln\left(\lvert\mathrm{sh}(x)\rvert\right)$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[, n\in\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\mathrm{cotan}(x)$	$]n\pi, (n+1)\pi[, n\in\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$	$-\coth(x)$	$\mathbb{R}^*$

Remarque On est fréquemment amené à chercher les primitives d'une fonction f donnée. Il s'agit de déterminer des intervalles aussi grands que possible sur chacun desquels f admet une primitive et, pour chacun de ces intervalles, de trouver une expression aussi simple que possible de ces primitives. On prendra garde que l'on peut avoir

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + c \qquad \text{avec } c\in\mathbb{R}$$

sur plusieurs intervalles sans pour autant que la relation soit vraie sur la réunion de ces intervalles. Des précautions sont à prendre car la constante c est liée à l'intervalle sur lequel G est dérivable. Ainsi l'écriture $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|) + c$ signifie que :

- sur $\mathbb{R}_+^*$ les primitives de $x \mapsto 1/x$ sont les fonctions $x \mapsto \ln(x) + c_1$ où c_1 est une constante ;
- sur $\mathbb{R}_-^*$ les primitives de $x \mapsto 1/x$ sont les fonctions $x \mapsto \ln(-x) + c_2$ où c_2 est une constante ;

mais il n'y a pas de lien entre les 2 familles de primitives. On évitera d'écrire que[27] sur $\mathbb{R}^*$ les primitives de $x \mapsto 1/x$ sont les fonctions $x \mapsto \ln(|x|) + c$ et on se gardera d'en conclure que

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = (\ln(|1|) + c) - (\ln(|-1|) + c) = 0$$

puisque la fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas Riemann-intégrable sur $[-1, 1]$.

18.3.4 Formule de primitivation par parties

Proposition 18.12 (Primitivation par parties)
Étant données deux applications u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, on a la relation suivante sur I

$$\int u'(x) \times v(x)\ \mathrm{d}x = u(x) \times v(x) - \int u(x) \times v'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Démonstration Puisque u et v sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, l'application $f : x \in I \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x).$$

On en déduit qu'une primitive sur I de la fonction $x \mapsto u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$ est $f = u \times v$. En d'autres termes,

$$\begin{aligned} u(x) \times v(x) &= \int \Big(u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)\Big)\ \mathrm{d}x \\ &= \int u'(x) \times v(x)\ \mathrm{d}x + \int u(x) \times v'(x)\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

La relation énoncée s'en déduit de manière immédiate. □

Remarque On sera vigilant à la signification de la formule énoncée dans la proposition 18.12. En effet, $\int u'(x) \times v(x)\ \mathrm{d}x$ désigne une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x) \times v(x)$. La formule indique donc qu'une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x) \times v(x)$ est la somme de la fonction $x \mapsto u(x) \times v(x)$ et d'une primitive de la fonction $x \mapsto -u(x) \times v'(x)$.

Exemples

1. Calculons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-2x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = u'(x)\,v(x)$ où $u'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ et $v(x) = x$. On considère donc les applications $u : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ et $v : x \in \mathbb{R} \mapsto x$. La formule de primitivation par parties indique que

$$\int x\,\mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{-2x} + \int \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{-2x} - \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} = -\tfrac{1}{4}(1+2x)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

[27] Par commodité, on pourra parfois écrire que les primitives de $x \mapsto 1/x$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \ln(|x|) + c$. Cela constitue toujours un abus d'écriture mais qui est peut-être moins source d'erreurs.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-2x}$ est donc $x \mapsto -\frac{1}{4}(1+2x)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

2. Calculons une primitive de la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$ en utilisant la formule de primitivation par parties. On peut considérer la décomposition $\ln(x) = u'(x) \times v(x)$ où $u : x \in]0,+\infty[\mapsto x$ et $v : x \in]0,+\infty[\mapsto \ln(x)$. On a $u'(x)\,v(x) = \ln(x)$ et $u(x)\,v'(x) = 1$ et par conséquent

$$\int \ln(x)\ \mathrm{d}x = x\ \ln(x) - \int 1\ \mathrm{d}x = x\ \ln(x) - x.$$

Une primitive de la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$ est donc $x \mapsto x\ \ln(x) - x$.

3. Calculons une primitive F de $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $]-1,1[$. On peut considérer la décomposition $f(x) = u'(x) \times v(x)$ où $u : x \in]-1,1[\mapsto x$ et $v : x \in]-1,1[\mapsto \sqrt{1-x^2}$. On a $v'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et la formule de primitivation par parties indique que

$$F(x) = \int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x.$$

On a

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x - \int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x \\ &= \arcsin(x) - F(x).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$F(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) - F(x)$$

ce qui indique que $F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x)$. Finalement, on a établi qu'une primitive de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $]-1,1[$ est la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x)$.

18.3.5 Formules de changement de variable pour une primitive

Proposition 18.13 (Première formule du changement de variable) *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, ϕ une application de I dans J dérivable et f une application de J dans $\mathbb{R}$ continue. Si F est une primitive de f sur J alors $F \circ \phi$ est une primitive de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur I. On note*

$$\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\ \mathrm{d}x = \left[\int f(t)\ \mathrm{d}t\right]_{t=\phi(x)}$$

et on dit que l'on a effectué le changement de variable $t = \phi(x)$.

Démonstration L'application F, qui est une primitive de f sur J, est d'après la définition 18.7 une application dérivable sur J de dérivée l'application f.

Puisque ϕ est dérivable sur I, l'application $F \circ \phi$ est dérivable sur I et[28]

$$\forall x \in I \qquad \big(F(\phi(x))\big)' = \phi'(x)\, F'(\phi(x)) = \phi'(x)\, f(\phi(x)).$$

D'après la définition 18.7, cette relation indique que $F \circ \phi$ est une primitive de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur I. □

Exemples

1. Calculons une primitive de $g : x \mapsto x/\sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. On remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)'}{\sqrt{1+x^2}},$$

ce qui nous suggère d'avoir recours au changement de variable $\phi : x \mapsto 1+x^2$ en considérant l'application $f : t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}}$. L'application ϕ est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ à valeurs dans $J = [1, +\infty[$ et l'application f est continue sur J. D'après la proposition 18.13, une primitive de $g = (f \circ \phi) \times \phi'$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)'}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi(x)}\\ &= \left[\int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right]_{t=1+x^2} = \left[\sqrt{t}\right]_{t=1+x^2} = \sqrt{1+x^2}.\end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est donc $G : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ et toutes les primitives de g s'en déduisent en ajoutant une constante à l'expression de G.

De manière formelle, on peut aussi présenter le calcul ainsi : posons $t = 1+x^2$; on a $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ et

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{t}\right]_{t=1+x^2} = \sqrt{1+x^2}.$$

2. Calculons une primitive de $g : x \mapsto 1/\operatorname{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$. On a[29]

$$\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \frac{2}{(\mathrm{e}^x)^2+1}\,\mathrm{e}^x.$$

Cette relation suggère d'effectuer le changement de variable $\phi : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et de considérer la fonction $f : t \mapsto 2/(t^2+1)$. L'application ϕ est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ à valeurs dans $J = \mathbb{R}_*^+$ et f est continue sur J. D'après la proposition 18.13, une primitive de $g = (f \circ \phi) \times \phi'$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{(\mathrm{e}^x)^2+1}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\int f(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\mathrm{e}^x} = \left[2\arctan(t)\right]_{t=\mathrm{e}^x} = 2\arctan(\mathrm{e}^x).\end{aligned}$$

---

(28) Voir la proposition 16.7 p. 761.
(29) Voir la proposition 14.12 p. 676.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est donc $G : x \mapsto 2\arctan(\mathrm{e}^x)$ et toutes les primitives de g s'en déduisent en ajoutant une constante à l'expression de G.

De manière formelle, on peut aussi présenter le calcul de la manière suivante : posons $t = \mathrm{e}^x$; on a $\mathrm{d}t = e^x\ \mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{2}{(\mathrm{e}^x)^2+1}\ \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t \\ &= 2\Big[\arctan(t)\Big]_{t=\mathrm{e}^x} = 2\arctan(\mathrm{e}^x).\end{aligned}$$

Exercice 4 Calculer les primitives suivantes en utilisant le changement de variable proposé.

1 - $\displaystyle\int \tan(x)\ \mathrm{d}x$ avec $\phi : x \mapsto \cos(x)$.

2 - $\displaystyle\int \cos(x)\sin^2(x)\ \mathrm{d}x$ avec $\phi : x \mapsto \sin(x)$.

3 - $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{sh}^3(x)}\ \mathrm{d}x$ avec $\phi : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$.

On notera au travers des exemples précédents la façon dont est utilisée la proposition 18.13. On essaie de faire apparaître la forme $(f \circ \phi) \times \phi'$, éventuellement par transformation de l'expression de la fonction à l'aide de formules usuelles, pour l'expression de la fonction dont on cherche la primitive ce qui « suggère » le changement de variable $t = \phi(x)$. Bien entendu une telle approche n'est pas toujours possible en pratique et on dispose d'une autre approche pour calculer une primitive par changement de variable qui est donnée dans la proposition suivante. L'idée est de se donner *a priori* une fonction de changement de variable, d'appliquer la formule de changement de variable, en espérant que la fonction obtenue se prête mieux au calcul d'une primitive (si ce n'est pas le cas, le calcul n'aura servi à rien). On effectue alors le changement de variable inverse pour obtenir une primitive de la fonction de départ.

Proposition 18.14 (Seconde formule du changement de variable) *Soient I et J deux intervalles, ϕ une bijection de I dans J continue dont la bijection réciproque est continue de J dans I et f une application continue sur J. On suppose que ϕ est dérivable sur I et que ϕ' ne s'annule pas sur I. Si H est une primitive de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur I alors $H \circ \phi^{-1}$ est une primitive de f sur J. On note*

$$\int f(t)\ \mathrm{d}t = \left[\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\ \mathrm{d}x\right]_{x=\phi^{-1}(t)}$$

et on dit que l'on a effectué le changement de variable $x = \phi^{-1}(t)$.

Démonstration L'application H, qui est la primitive de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur I, est d'après la définition 18.7 dérivable sur I. Par ailleurs, puisque l'application ϕ

est dérivable sur I et que ϕ' ne s'annule pas sur I, sa bijection réciproque ϕ^{-1} est dérivable sur J, à valeurs dans I et[30]

$$\forall x \in J \qquad (\phi^{-1}(x))' = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))}.$$

L'application $H \circ \phi^{-1}$ est donc dérivable sur J et[31] pour tout $x \in J$,

$$\big(H(\phi^{-1}(x))\big)' = (\phi^{-1}(x))'\ H'(\phi^{-1}(x)) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))}\ H'(\phi^{-1}(x)).$$

Comme par hypothèse H est une primitive de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur I, on a $H' = (f \circ \phi) \times \phi'$ et par conséquent

$$H'(\phi^{-1}(x)) = f(\phi(\phi^{-1}(x)))\ \phi'(\phi^{-1}(x)) = f(x)\ \phi'(\phi^{-1}(x)).$$

Finalement, on obtient pour tout $x \in J$

$$\big(H(\phi^{-1}(x))\big)' = f(x).$$

D'après la définition 18.7, cette relation indique que $H \circ \phi^{-1}$ est une primitive de f sur J. □

Remarque Étant donnés deux intervalles I et J, une application ϕ de I dans J qui est continue et bijective et dont la bijection réciproque est continue sur J est appelée un *homéomorphisme* de I dans J. Si de plus on impose que ϕ est dérivable sur I et que sa dérivée ϕ' ne s'annule pas sur I, alors d'après la proposition 14.2, page 659, la bijection réciproque ϕ^{-1} est elle même dérivable sur J. L'application ϕ est dans ce cas qualifiée de *difféomorphisme*. Les hypothèses de la seconde formule du changement de variable se résument donc en : ϕ est un difféomorphisme de I dans J et f est une application continue sur J.

On peut expliquer la différence entre les deux formules du changement de variable de la façon suivante. Dans la première formule du changement de variable, on fait apparaître dans l'expression de la fonction à intégrer la quantité $\phi(x)$. On détermine donc la primitive $\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\ \mathrm{d}x$ par le biais de la primitive $\int f(t)\ \mathrm{d}t$. Une fois la primitive de la fonction f reconnue ou calculée, il est facile d'obtenir l'expression de la primitive de départ par simple substitution de variable $t = \phi(x)$. La fonction de changement de variable ϕ n'a pas besoin d'être une bijection. Dans la seconde formule du changement de variable, on cherche à transformer *ex abrupto* l'expression de la primitive $\int f(t)\ \mathrm{d}t$ par le changement de variable $t = \phi(x)$ afin d'obtenir une primitive $\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\ \mathrm{d}x$ plus simple à calculer. Cela nécessite, une fois ce calcul effectué, d'exprimer le résultat en fonction de la variable t pour avoir l'expression de la primitive $\int f(t)\ \mathrm{d}t$. On ne peut exprimer x en fonction de t que dans la mesure où ϕ est une bijection.

[30] Voir la proposition 14.2 p. 659.
[31] Voir la proposition 16.7 p. 761.

La substitution de variable $x = \phi^{-1}(t)$ permet d'obtenir l'expression cherchée. Mentionnons qu'il est parfois possible d'utiliser indifféremment l'une ou l'autre des deux formules du changement de variable pour calculer une primitive. On pourra considérer à ce sujet l'exemple fourni pour le calcul d'une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 1/\operatorname{ch}(x)$.

Exemples

1. Calculons une primitive sur $]-1,1[$ de $f : t \mapsto t^2/\sqrt{1-t^2}$ en considérant le changement de variable défini par l'application $\phi : x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\mapsto \sin(x)$. L'application ϕ est continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et bijective de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans $]-1,1[$. Elle est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et sa dérivée qui est la fonction $x \mapsto \cos(x)$ ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. La bijection réciproque $\phi^{-1} : t \in]-1,1[\mapsto \arcsin(t) \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est continue sur $]-1,1[$. D'après la proposition 18.14, une primitive de f sur $]-1,1[$ est $H \circ \phi^{-1}$ où H est une primitive de $h = (f \circ \phi) \times \phi'$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a

$$h(x) = \frac{\sin^2(x)\cos(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{\sin^2(x)\cos(x)}{|\cos(x)|} = \sin^2(x)$$

car sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ la fonction cosinus est à valeurs positives. On a donc

$$\begin{aligned}\int f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=\phi^{-1}(t)} = \left[\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=\arcsin(t)} \\ &= \left[\int \tfrac{1}{2}(1-\cos(2x))\,\mathrm{d}x\right]_{x=\arcsin(t)} = \left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin(2x)\right]_{x=\arcsin(t)} \\ &= \tfrac{1}{2}\arcsin(t) - \tfrac{1}{4}\sin(2\arcsin(t)) = \tfrac{1}{2}\arcsin(t) - \tfrac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}.\end{aligned}$$

Une primitive sur $]-1,1[$ de f est donc $t \mapsto \frac{1}{2}\arcsin(t) - \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}$.

Mentionnons qu'une autre manière de calculer une primitive de f consiste à écrire pour $t \in]-1,1[$,

$$f(t) = \frac{1-1+t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \sqrt{t^2-1}.$$

Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est $t \mapsto \arcsin(t)$ et on peut calculer une primitive de $t \mapsto \sqrt{t^2-1}$ par un changement de variable comme cela est indiqué à l'exercice 4 ou encore en utilisant une primitivation par parties comme cela a été fait page 914.

2. Calculons une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : t \mapsto 1/\operatorname{ch}(t)$ en considérant le changement de variable défini par l'application $\phi : x \in]0,+\infty[\mapsto \ln(x)$. L'application ϕ est continue sur $]0,+\infty[$ et bijective de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée qui est la fonction $x \mapsto 1/x$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. La bijection réciproque $\phi^{-1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$. En utilisant la seconde formule du changement de variable, on obtient

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=\phi^{-1}(t)} = \left[\int \frac{1}{\operatorname{ch}(\ln(x))}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right]_{x=\mathrm{e}^t}.$$

Or, $\mathrm{ch}(\ln(x)) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\ln(x)} + \mathrm{e}^{-\ln(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{2x}$. On a donc

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\ \mathrm{d}t \quad = \quad \left[\int \frac{2}{1+x^2}\ \mathrm{d}x\right]_{x=\mathrm{e}^t} = 2\Big[\arctan(x)\Big]_{x=\mathrm{e}^t} = 2\arctan\left(\mathrm{e}^t\right).$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto 1/\,\mathrm{ch}(t)$ est donc $t \mapsto 2\arctan(\mathrm{e}^t)$.

De manière formelle, on peut aussi présenter le calcul ainsi : soit $u = \mathrm{e}^t$; on a $\mathrm{d}u = u'(t)\ \mathrm{d}t = e^t\ \mathrm{d}t = u\ \mathrm{d}t$ et par conséquent $\mathrm{d}t = 1/u\ \mathrm{d}u$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\ \mathrm{d}t &= \int \frac{2\mathrm{e}^t}{\left(\mathrm{e}^t\right)^2+1}\ \mathrm{d}t = \int \frac{2u}{u^2+1}\ \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u = 2\int \frac{1}{u^2+1}\ \mathrm{d}u\\ &= 2\Big[\arctan(u)\Big]_{u=\mathrm{e}^t} = 2\arctan(\mathrm{e}^t).\end{aligned}$$

Exercice 5

1 - En considérant le changement de variable $\phi : x \mapsto \ln(x)$, déterminer une primitive de $f : t \mapsto 1/\,\mathrm{sh}(t)$.

2 - En considérant le changement de variable $\phi : x \mapsto \sin(x)$, déterminer une primitive de $f : t \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

18.4 Résultats généraux sur l'intégrale de Riemann

18.4.1 Intégration par parties

Théorème 18.1 (Formule d'intégration par parties)
Soient u et v deux applications de classe C^1 sur un intervalle fermé borné d'extrémités a et b. On a

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration Nous supposons que $a < b$; dans le cas où $a > b$ un raisonnement identique peut être effectué en inversant les rôles de a et de b. La fonction $F : x \mapsto u(x)\,v(x)$ est une primitive sur $[a,b]$ de la fonction $f : x \mapsto u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x)$ puisque $F' = f$. D'après la proposition 18.11, on a donc

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(u(t)\,v'(t) + u'(t)\,v(t)\big)\ \mathrm{d}t &= \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b\\ &= \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a),\end{aligned}$$

ce qui implique que $\displaystyle\int_a^b u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t.$ □

Remarques

1. Pour que la fonction $g : x \mapsto u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x)$ soit définie sur $[a, b]$, il suffit de supposer u et v dérivables sur $[a, b]$. Par contre, cette hypothèse n'est pas suffisante pour être certain que le terme $\int_a^b \big(u(t)\,v'(t) + u'(t)\,v(t)\big)\,\mathrm{d}t$ soit toujours défini ; il faut supposer que g est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. On a vu qu'il était souvent difficile dans le cas général de s'assurer qu'une fonction était Riemann intégrable, mais que toute fonction continue était Riemann-intégrable. En supposant u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, on s'assure que g est continue sur $[a, b]$ (en tant que produit et somme d'applications continues sur $[a, b]$) et par conséquent qu'elle est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Bien entendu l'hypothèse u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ est alors une condition suffisante pour que la formule d'intégration par parties ait un sens. Il ne s'agit pas d'une condition nécessaire.

2. La formule d'intégration par parties peut également être établie à partir de la formule de primitivation par parties par le biais de la proposition 18.11.

Cette formule constitue un moyen puissant de calculer des intégrales comme l'illustrent les exemples suivants.

Exemples

1. Calculons $\int_a^b \arctan(t)\ \mathrm{d}t$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$. Considérons les applications $u : t \in [a, b] \mapsto \arctan(t)$ et $v : t \in [a, b] \mapsto t$. Les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in [a, b]$ on a

$$u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = 1.$$

La formule d'intégration par parties indique que

$$\begin{aligned}\int_a^b \arctan(t)\ \mathrm{d}t &= \Big[t\arctan(t)\Big]_a^b - \int_a^b \frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \Big[t\arctan(t)\Big]_a^b - \Big[\tfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big]_a^b \\ &= b\ \arctan(b) - a\ \arctan(a) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a^2}{1+b^2}\right).\end{aligned}$$

2. Calculons $I = \int_a^b \cos(t)\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$ où a et b sont deux réels avec $a < b$. Considérons les applications $u : t \in [a, b] \mapsto \cos(t)$ et $v : t \in [a, b] \mapsto \mathrm{e}^t$. Les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $u' : t \in [a, b] \mapsto -\sin(t)$ et $v' : t \in [a, b] \mapsto \mathrm{e}^t$. La formule d'intégration par parties indique que

$$I = \int_a^b \cos(t)\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \Big[\cos(t)\,\mathrm{e}^t\Big]_a^b + \int_a^b \sin(t)\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t.$$

Une seconde utilisation de la formule d'intégration par parties, en considérant cette fois-ci les applications $\widetilde{u} : t \in [a, b] \mapsto \sin(t)$ et $\widetilde{v} : t \in [a, b] \mapsto \mathrm{e}^t$ permet d'établir que

$$\int_a^b \sin(t)\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \Big[\sin(t)\,\mathrm{e}^t\Big]_a^b - \int_a^b \cos(t)\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \Big[\sin(t)\,\mathrm{e}^t\Big]_a^b - I.$$

On combinant les deux relations obtenues, on obtient

$$I = \Big[\cos(t)\,\mathrm{e}^t\Big]_a^b + \Big[\sin(t)\,\mathrm{e}^t\Big]_a^b - I,$$

ce qui permet d'en déduire que

$$I = \frac{1}{2}\Big[\cos(t)\,\mathrm{e}^t\Big]_a^b + \frac{1}{2}\Big[\sin(t)\,\mathrm{e}^t\Big]_a^b = \frac{1}{2}\big(\cos b + \sin b\big)\,\mathrm{e}^b - \frac{1}{2}\big(\cos a + \sin a\big)\,\mathrm{e}^a.$$

3. Considérons pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $J_n(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-n}\,\mathrm{d}t$. Les applications $u : t \in \mathbb{R} \mapsto (1+t^2)^{-n}$ et $v : t \in \mathbb{R} \mapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $u' : t \in \mathbb{R} \mapsto -2nt\,(1+t^2)^{-n-1}$ et $v' : t \in \mathbb{R} \mapsto 1$. La formule d'intégration par partie indique que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \int_0^x u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_0^x - \int_0^x u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En considérant la décomposition $t^2 = (1+t^2) - 1$, on obtient

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\ \mathrm{d}t - 2n\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nJ_n(x) - 2nJ_{n+1}(x). \end{aligned}$$

On a donc établi que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(J_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$J_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\,J_n(x).$$

Cette expression permet de calculer $J_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$ par récurrence à partir de l'expression de $J_1(x) = \arctan(x)$.

Exercice 6 Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\ \mathrm{d}x$.
1 - Calculer I_0 et I_1.
2 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(3+2n)I_n = 2nI_{n-1}$.

18.4.2 Formule du changement de variable pour une intégrale

Théorème 18.2 (Changement de variable pour une intégrale)
Soit ϕ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$ et f une application continue sur l'intervalle fermé borné $\phi([a,b])$; on a

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(\phi(y))\,\phi'(y)\ \mathrm{d}y.$$

On dit que l'on effectue le changement de variable $t = \phi(y)$.

Démonstration Commençons par remarquer que l'application ϕ étant continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$, l'ensemble $J = \phi([a, b])$ qui est l'image par une application continue d'un intervalle fermé et borné, est un intervalle fermé et borné, voir le théorème **13.4**, page 626.

Comme f est continue sur l'intervalle J, d'après le corollaire 18.2, elle admet une primitive F sur J. De plus, puisque f est continue sur l'intervalle fermé borné J, elle est Riemann-intégrable sur J et comme $\phi(a)$ et $\phi(b)$ appartiennent à J, la proposition 18.11 indique que

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\ \mathrm{d}t = F(\phi(b)) - F(\phi(a)).$$

Comme ϕ est dérivable sur $[a, b]$ et que f est continue sur $J = \phi([a, b])$, la première formule du changement de variable pour une primitive (proposition 18.13) indique que $F\circ\phi$ est une primitive sur $[a, b]$ de $h = (f\circ\phi)\times\phi'$. De plus, puisque ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et que f est continue sur $J = \phi([a, b])$, l'application h est continue sur $[a, b]$ et par conséquent elle est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. La proposition 18.11 indique que l'on a

$$\int_a^b f(\phi(y))\,\phi'(y)\ \mathrm{d}y = \Big[F(\phi(y))\Big]_a^b = F(\phi(b)) - F(\phi(a)).$$

Par transitivité, on en conclut que

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(\phi(y))\,\phi'(y)\ \mathrm{d}y.$$

Le théorème est démontré. □

La formule du changement de variable est un outil puissant pour le calcul d'intégrales. Cette formule peut être utilisée « dans les deux sens ».

- On souhaite calculer $\int_a^b g(y)\ \mathrm{d}y$ et on remarque que $g(y) = f(\phi(y))\phi'(y)$ sur l'intervalle $[a, b]$. Le changement de variable $t = \phi(y)$ consiste alors à calculer $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\ \mathrm{d}t$.
- On souhaite calculer $\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t$. Le changement de variable $t = \phi(y)$ (où ϕ est une fonction donnée ou à déterminer) consiste alors à trouver deux réels a, b tels que $\alpha = \phi(a)$ et $\beta = \phi(b)$ puis à calculer $\int_a^b f(\phi(y))\ \phi'(y)\ \mathrm{d}y$.

Il n'y a donc pas de seconde formule du changement de variable pour une intégrale.

Exemples

1. Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{ch}(y)}\ \mathrm{d}y$. D'après la définition de la fonction cosinus hyperbolique,

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \frac{1}{\mathrm{ch}(y)} = \frac{2}{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}} = \frac{2\,\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^{2y}+1} = \frac{2\mathrm{e}^y}{(\mathrm{e}^y)^2+1}.$$

On a donc
$$\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch}(y)}\ \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{2}{(\mathrm{e}^y)^2+1}\ \mathrm{e}^y\ \mathrm{d}y$$
et cette expression nous suggère d'avoir recours au changement de variable $\phi : y \in [0,1] \mapsto \mathrm{e}^y$. L'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et la fonction $f : t \mapsto \frac{2}{t^2+1}$ est continue sur $\phi([0,1]) = [1,\mathrm{e}]$. La formule du changement de variable nous indique que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch}(y)}\ \mathrm{d}y = \int_0^1 f(\phi(y))\,\phi'(y)\ \mathrm{d}y = \int_{\phi(0)}^{\phi(1)} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\\ = 2\Big[\arctan(t)\Big]_1^{\mathrm{e}} = 2\arctan(\mathrm{e}) - \tfrac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

De manière formelle, on peut aussi présenter le calcul ainsi : en posant $t = \mathrm{e}^y$, on a $\mathrm{d}t = t'(y)\ \mathrm{d}y = e^y\ \mathrm{d}y$ et $t(0) = 1$, $t(1) = \mathrm{e}$; on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch}(y)}\ \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{2}{(\mathrm{e}^y)^2+1}\ \mathrm{e}^y\ \mathrm{d}y = 2\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{v^2+1}\ \mathrm{d}v\\ = 2\Big[\arctan(v)\Big]_1^{\mathrm{e}} = 2\arctan(\mathrm{e}) - \tfrac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

On prendra garde en adoptant ce formalisme à ne pas oublier de modifier les bornes de l'intégrale exprimée avec la nouvelle variable.

2. Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t$ en considérant le changement de variable $t = \mathrm{e}^y$. Introduisons les applications

$$f : t \in [\mathrm{e},\mathrm{e}^2] \longmapsto \frac{1}{t\ln(t)} \qquad \text{et} \qquad \phi : y \in [1,2] \longmapsto \mathrm{e}^y \in [\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$$

de sorte que $I = \int_{\phi(1)}^{\phi(2)} f(t)\ \mathrm{d}t$. L'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$ et f est continue sur $\phi([1,2]) = [\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ car la fonction $t \mapsto t\ln(t)$ est continue sur $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. En utilisant la formule de changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t = \int_{\phi(1)}^{\phi(2)} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^2 f(\phi(y))\,\phi'(y)\ \mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{1}{\mathrm{e}^y\ln(\mathrm{e}^y)}\ \mathrm{e}^y\ \mathrm{d}y\\ = \int_1^2 \frac{1}{y}\ \mathrm{d}y = \Big[\ln(y)\Big]_1^2 = \ln(2).\end{aligned}$$

De manière formelle, on peut aussi présenter le calcul de la manière suivante : posons $t = \mathrm{e}^y$; on a $\mathrm{d}t = t'(y)\ \mathrm{d}y = \mathrm{e}^y\ \mathrm{d}y$ et $t(1) = \mathrm{e}$, $t(2) = \mathrm{e}^2$. D'où

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{\mathrm{e}^y\ln(\mathrm{e}^y)}\ \mathrm{e}^y\ \mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{1}{y}\ \mathrm{d}y = \Big[\ln(y)\Big]_1^2 = \ln(2).$$

Remarque Dans la formule du changement de variable énoncée au théorème 18.2, il n'est pas nécessaire que l'application ϕ soit une bijection. Par contre, il faut s'assurer que l'application est bien définie et continue sur l'intervalle $\phi([a,b])$. D'autre part, on notera que l'intervalle $\phi([a,b])$ n'est pas nécessairement l'intervalle $[\phi(a),\phi(b)]$ (c'est le cas par exemple si ϕ est croissante). Enfin, il arrive souvent que dans l'expression de la fonction dont on souhaite calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variable, le terme $\phi'(y)$ n'apparaisse pas explicitement. Il convient alors de l'intercaler (en multipliant et en divisant l'expression par $\phi'(y)$) après s'être assuré que ϕ' ne s'annule pas sur l'intervalle d'intégration. Les exemples suivants viennent éclairer ces différentes remarques.

Exemples

1. On vérifie aisément qu'une primitive sur $[-1,1]$ de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{4-x}$ est la fonction $x \mapsto -\ln(4-x)$. On a donc

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-\ln(4-t)\Big]_{-1}^{1} = \ln(5/3)\,.$$

On peut également calculer cette intégrale en considérant le changement de variable défini par la fonction $\phi : x \mapsto 4-x$. On a $g(x) = 1/\phi(x)$ ce que l'on peut encore écrire, en multipliant et en divisant l'expression par $\phi'(x)$,

$$g(x) = \frac{1}{\phi(x)}\left(\phi'(x)\,\frac{1}{\phi'(x)}\right) = -\frac{1}{\phi(x)}\,\phi'(x) = f(\phi(x))\,\phi'(x)$$

où f est la fonction $x \mapsto -1/x$. On a $\phi(-1) = 5$ et $\phi(1) = 3$ et ϕ est de classe C^1 sur $[-1,1]$. Par ailleurs, la fonction f est continue sur l'intervalle $\phi([-1,1]) = [3,5]$. En utilisant la formule du changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} f(\phi(y))\;\phi'(y)\;\mathrm{d}y = \int_{\phi(-1)}^{\phi(1)} f(t)\;\mathrm{d}t = \int_{5}^{3} -\frac{1}{t}\;\mathrm{d}t \\ &= -\Big[\ln(t)\Big]_{5}^{3} = \ln(5/3) \end{aligned}$$

ce qui est conforme au résultat attendu. Toujours dans le but de calculer la valeur de I, considérons maintenant le changement de variable défini par la fonction $\psi : x \mapsto 4-x^2$. On a $\psi(\sqrt{3}) = 1$ et $\psi(-\sqrt{5}) = -1$ et ψ est de classe C^1 sur $[-\sqrt{5},\sqrt{3}]$. En utilisant la formule du changement de variable on obtient,

$$I = \int_{\psi(-\sqrt{5})}^{\psi(\sqrt{3})} g(t)\;\mathrm{d}t = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{3}} g(\psi(y))\,\psi'(y)\;\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{3}} -\frac{2}{y}\;\mathrm{d}y.$$

Malheureusement cette dernière expression n'a pas de sens car la fonction $x \mapsto -2/x$ n'est pas intégrable sur $[-\sqrt{5},\sqrt{3}]$. Cette erreur est survenue en raison d'une utilisation abusive de la formule du changement de variable. La fonction g n'est pas continue sur l'intervalle fermé borné $\psi([-\sqrt{5},\sqrt{3}]) = [-1,4]$ car elle est non bornée en 4. En étudiant la fonction ψ on se convaincra que

$\psi([-\sqrt{5}, \sqrt{3}]) \neq [\psi(-\sqrt{5}), \psi(\sqrt{3})]$ et en relisant l'énoncé du théorème 18.2 on prendra garde que la continuité de g doit porter sur l'intervalle $\psi([-\sqrt{5}, \sqrt{3}])$ et non pas seulement sur $[\psi(-\sqrt{5}), \psi(\sqrt{3})]$.

2. Considérons le changement de variable défini par la fonction $\phi : x \mapsto \sin(x)$ pour calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t.$$

On a $\phi(0) = 0$, $\phi(\frac{\pi}{2}) = 1$ et la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Par ailleurs la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur l'intervalle $\phi([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1]$. En utilisant la formule du changement de variable, on obtient

$$I = \int_{\phi(0)}^{\phi(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\phi(y))\, \phi'(y)\ \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(y)}\ \cos(y)\ \mathrm{d}y.$$

On a

$$\sqrt{1-\sin^2(y)} = \sqrt{\cos^2(y)} = |\cos(y)|$$

et puisque la fonction cosinus est positive sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y)\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(2y)+1\big)\ \mathrm{d}y = \Big[\tfrac{1}{4}\sin(2y) + \tfrac{1}{2}y\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Ici la fonction ϕ définit une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0, 1]$ mais il ne s'agit nullement d'une condition nécessaire pour appliquer la formule du changement de variable. Considérons la fonction ϕ sur l'intervalle $[0, \frac{5}{2}\pi]$. On a $\phi(0) = 0$ et $\phi(\frac{5}{2}\pi) = 1$, la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{5}{2}\pi]$ et on a $\phi([0, \frac{5}{2}\pi]) = [-1, 1]$. Comme la fonction f est continue sur $[-1, 1]$, on peut appliquer la formule du changement de variable et on obtient

$$I = \int_{\phi(0)}^{\phi(\frac{5}{2}\pi)} \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{5}{2}\pi} f(\phi(y))\ \phi'(y)\ \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{5}{2}\pi} |\cos(y)|\ \cos(y)\ \mathrm{d}y.$$

Contrairement au cas précédent, la fonction cosinus n'est pas positive sur tout l'intervalle $[0, \frac{5}{2}\pi]$. En utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y)\ \mathrm{d}y - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2(y)\ \mathrm{d}y + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \cos^2(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \Big[\tfrac{1}{4}\sin(2y) + \tfrac{1}{2}y\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\tfrac{1}{4}\sin(2y) + \tfrac{1}{2}y\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} + \Big[\tfrac{1}{4}\sin(2y) + \tfrac{1}{2}y\Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \\
&= \frac{\pi}{4} - \pi + \pi = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

On retrouve le résultat obtenu en utilisant le changement de variable précédent.

Proposition 18.15

✗ *Soit f une application continue sur $[-a, a]$.*

- *Si f est paire alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$
- *Si f est impaire alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

✗ *Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$, périodique, de période T. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration ⊵ D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant la formule du changement de variable avec $\phi : x \in [a, b] \mapsto -x$, la première intégrale devient[32]

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(0)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{0} f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit que si f est paire alors pour tout $x \in [0, a]$ on a $f(-x) = f(x)$ et

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si f est impaire alors pour tout $x \in [0, a]$ on a $f(-x) = -f(x)$ et on obtient $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. La première partie de la proposition est démontrée.

⊵ En utilisant la formule du changement de variable avec $\phi : x \in [a, b] \mapsto x+T$, on obtient

$$\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(T + x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme f est périodique de période T, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x + T) = f(x)$ et par conséquent[32] $\int_{\alpha}^{\beta} f(T + x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x$. La seconde partie de la proposition est démontrée. □

[32] On rappelle que la variable d'intégration est une variable muette et ici l'utilisation des deux variables d'intégration x et t n'a pour but que de mettre en évidence le changement de variable effectué.

18.4.3 Sommes de Riemann

Définition 18.8 *Soient f une application continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ une subdivision de $[a, b]$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on désigne par ζ_i un élément de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et on note $\zeta = (\zeta_i)_{i\in\{0,\dots,n-1\}}$. On appelle somme de Riemann associée à f, σ et ζ le réel*

$$S_{\sigma,\zeta}(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\ f(\zeta_i).$$

Remarque La somme de Riemann $S_{\sigma,\zeta}(f)$ est l'intégrale de la fonction en escalier ϕ définie par $\phi(x) = f(\zeta_i)$ pour $x \in]x_i, x_{i+1}[$ et $i \in \{0, \dots, n-1\}$, voir la figure 7.

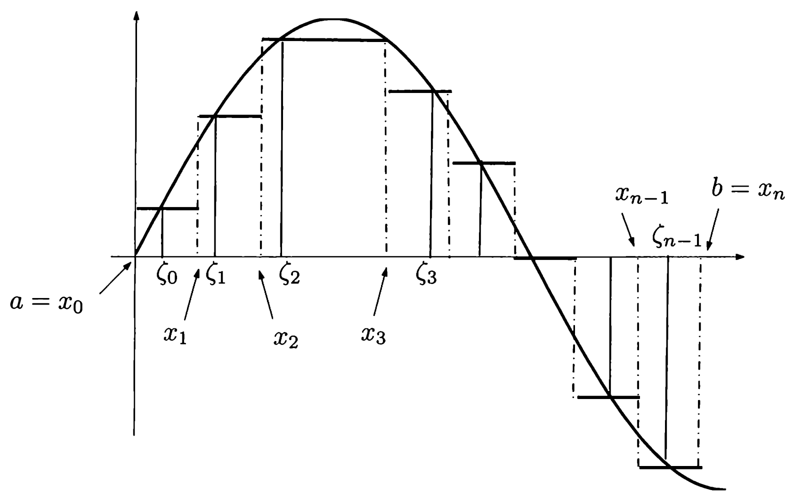


Fig. 7 Interprétation géométrique de la somme de Riemann $S_{\sigma,\zeta}(f)$.

Un cas particulier important concernant les sommes de Riemann est celui où la subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ est une subdivision uniforme[33] et où $\zeta = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n-1\}}$. On a dans ce cas $x_i = a + \frac{i}{n}(b - a)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ et la somme de Riemann associée à f, σ et ζ s'écrit

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\big(a + \tfrac{i}{n}(b - a)\big).$$

Il s'agit de l'intégrale de la fonction en escalier ψ_n définie par $\psi_n(x) = f(x_i)$ pour $x \in [x_i, x_{i+1}[$ et $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Le théorème suivant indique que la suite $(S_n)_n$ converge et que sa limite coïncide avec l'intégrale de f.

(33) Voir p. 888 la définition de subdivision uniforme.

THÉORÈME 18.3 *Soit f une application continue sur $[a, b]$. On a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\big(a + \tfrac{i}{n}(b-a)\big) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration Pour montrer que la suite $(S_n)_n$ de terme général $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\big(a + \frac{i}{n}(b-a)\big)$ converge et a pour limite $\ell = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, montrons que[34]

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N \implies |S_n - \ell| \leqslant \varepsilon\big). \tag{6}$$

Notons $x_i^{(n)} = a + \frac{i}{n}(b-a)$ pour $i \in \{0, \ldots, n\}$. Nous avons vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme S_n correspond à la somme de Riemann associée à la subdivision uniforme $\sigma = (x_i^{(n)})_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ de pas $h^{(n)} = \frac{1}{n}(b-a)$ avec $\zeta = (x_i^{(n)})_{i\in\{0,\ldots,n-1\}}$. On a

$$\int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} f(x_i^{(n)})\ \mathrm{d}x = (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)})\, f(x_i^{(n)}) = h^{(n)}\, f(x_i^{(n)})$$

d'où

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h^{(n)}\, f(x_i^{(n)}) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} f(x_i^{(n)})\ \mathrm{d}x.$$

Par ailleurs, d'après la relation de Chasles, on a

$$\ell = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

On en déduit que

$$|S_n - \ell| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} \big(f(x_i^{(n)}) - f(x)\big)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} \big|f(x_i^{(n)}) - f(x)\big|\ \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Considérons un réel ε strictement positif. Comme f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$, d'après le théorème de Heine[35] elle est uniformément continue sur $[a, b]$, ce qui implique que[36]

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall (x,y) \in [a,b]^2 \quad \Big(|x-y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big). \tag{8}$$

[34] Voir la définition 5.1 p. 172.

[35] Voir le théorème 13.5 p. 628.

[36] Voir la définition 13.7 p. 627 ; on prend dans cette définition en lieu et place du réel ε, le réel $\frac{1}{b-a}\,\varepsilon$.

Soit $N = \mathrm{E}(\frac{b-a}{\eta}) + 1$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$, on a $h^{(n)} = \frac{1}{n}(b-a) \leqslant \eta$, et par conséquent

$$\forall x \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}] \qquad |f(x) - f(x_i^{(n)})| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

La relation (7) indique que l'on a donc

$$|S_n - \ell| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} \frac{\varepsilon}{b-a}\ \mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} h^{(n)} = \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un entier N, qui vaut $N = \mathrm{E}(\frac{b-a}{\eta}) + 1$ où η est défini par la relation (8), tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $|S_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. L'assertion (6) est établie et le théorème est démontré. □

Remarque La démonstration du théorème 18.3 a besoin d'être très peu aménagée pour établir que quel que soit le choix des réels $\zeta = (\zeta_i)_{i\in\{0,\ldots,n-1\}}$ la somme de Riemann $S_n = \frac{1}{n}(b-a) \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)$, associée à la subdivision uniforme $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ de l'intervalle $[a,b]$, converge vers $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

Application des sommes de Riemann à l'étude des suites numériques

En considérant l'intervalle $[0,1]$, le théorème 18.3 indique que quelle que soit la fonction f continue sur $[0,1]$, la suite $(S_n)_n$ de terme général

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(i/n\right)$$

converge vers $\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$.

Exemple Déterminons la limite de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général est $u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\frac{i}{n}+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} f(i/n)$$

où $f : x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{x+1}$ est une application continue. D'après le théorème 18.3, on peut affirmer que la suite $(u_n)_n$ converge et a pour limite

$$\ell = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\ \mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln(2).$$

Application des sommes de Riemann à la quadrature numérique

Dans la pratique, il y a énormément de fonctions dont on ne connaît pas de primitives (ces primitives ne s'exprimant pas à l'aide des fonctions usuelles) ou pour lesquelles le calcul de la primitive est extrêmement compliqué. Cela signifie que le calcul d'une intégrale n'est pas toujours possible[37]. Il est alors intéressant de disposer de méthodes permettant d'obtenir une valeur numérique approchée d'une telle intégrale, à défaut de disposer de la valeur exacte.

Les sommes de Riemann fournissent un moyen de calculer la valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue f sur un intervalle $[a,b]$. D'après le théorème 18.3, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\big(a+\tfrac{i}{n}(b-a)\big) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t,$$

et on peut s'attendre à ce que pour n choisi suffisamment grand le réel $S_n = \frac{1}{n}(b-a)\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{i}{n}(b-a))$ soit une assez bonne approximation de la valeur de $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$. C'est effectivement le cas comme l'illustre le programme MAPLE suivant qui calcule une valeur approchée de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\ \mathrm{d}x$ à l'aide des sommes de Riemann S_n. On affiche pour des valeurs de n croissantes, la valeur de la somme de Riemann S_n ainsi que l'erreur commise (la valeur exacte de l'intégrale est $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$).

```
> f:= x->sin(x): a:=0: b:=Pi/4: # Données
> Iex:=evalf(int(f(x),x=a..b)); # Valeur exacte
                        Iex := 0.2928932190
> Sn:= n->(b-a)/n*sum(f(a+i*(b-a)/n),i=0..n-1): # Somme de Riemann
> for n from 10 to 100 by 10 do
     printf("n = %3g | Sn = %.6f | erreur = %.6E \n",
             n,evalf(Sn(n)), evalf(abs(Iex-Sn(n))));
  od;
n =  10 | Sn = 0.264975 | erreur = 2.791859E-02
n =  20 | Sn = 0.278972 | erreur = 1.392165E-02
n =  30 | Sn = 0.283620 | erreur = 9.272735E-03
n =  40 | Sn = 0.285942 | erreur = 6.951415E-03
n =  50 | Sn = 0.287334 | erreur = 5.559626E-03
n =  60 | Sn = 0.288261 | erreur = 4.632185E-03
n =  70 | Sn = 0.288923 | erreur = 3.969933E-03
n =  80 | Sn = 0.289420 | erreur = 3.473355E-03
n =  90 | Sn = 0.289806 | erreur = 3.087194E-03
n = 100 | Sn = 0.290115 | erreur = 2.778307E-03
```

On peut être un peu frustré à la lecture de ces résultats. La convergence de la suite $(S_n)_n$ ne semble pas très rapide. De plus, en pratique, si l'on souhaite calculer une valeur approchée d'une intégrale c'est que la valeur exacte n'est pas disponible. Se pose alors la question de savoir quelle valeur de n va fournir

[37] Signalons que le calcul d'une primitive n'est qu'une des méthodes de calcul d'une intégrale, mais que l'on peut calculer certaines intégrales pour des fonctions n'ayant pas de primitives s'exprimant à l'aide des fonctions usuelles. L'exemple classique est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}$ dont la primitive ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles mais dont on peut donner la valeur exacte de certaines de ses intégrales.

une valeur approchée S_n de l'intégrale avec la certitude d'avoir la précision souhaitée. Un peu d'analyse mathématique va nous permettre de répondre à cette question. L'erreur qui est commise en prenant S_n pour valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ vaut

$$E_n = \left|S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Reprenant la relation (7) de la démonstration du théorème 18.3, on obtient la majoration

$$E_n \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|f(x_i) - f(x)\right| \mathrm{d}x$$

où $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$. Nous allons supposer que l'application f est dérivable sur l'intervalle $[a,b]$; le théorème des accroissements finis[38] appliqué à l'application f sur l'intervalle $[x_i, x]$ pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$ fixé, indique l'existence d'un réel $c_i \in]x_i, x[$ tel que

$$\left|f(x_i) - f(x)\right| = (x - x_i)\,|f'(c_i)| \leqslant M_1(x - x_i)$$

où $M_1 = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. On obtient donc

$$\begin{aligned} E_n &\leqslant M_1 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)\,\mathrm{d}x = M_1 \sum_{i=0}^{n-1} \left[\tfrac{1}{2}(x - x_i)^2\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &= M_1 \sum_{i=0}^{n-1} \tfrac{1}{2}\left(x_{i+1} - x_i\right)^2 = M_1 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n^2}(b-a)^2 = \frac{M_1\,(b-a)^2}{2n}. \end{aligned}$$

L'erreur commise en approchant $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par S_n est donc majorée par $\mu_n = \frac{M_1\,(b-a)^2}{2n}$. Si l'on souhaite que l'erreur soit inférieure à une valeur ε fixée, il faut choisir n tel que

$$n \geqslant \eta_\varepsilon \quad \text{où} \quad \eta_\varepsilon = \frac{M_1\,(b-a)^2}{2\varepsilon}.$$

Reprenons le calcul d'une valeur approchée de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide des sommes de Riemann S_n. On a $b - a = \frac{\pi}{4}$ et $M_1 = 1$ car la dérivée de la fonction sinus qui est la fonction cosinus est bornée par 1. Pour que l'erreur soit inférieure à 10^{-3}, il faut d'après notre étude que $n \geqslant 309$. Bien entendu, le réel μ_n n'est qu'un majorant de l'erreur et il est possible et même vraisemblable que l'on ait atteint une valeur approchée à la précision souhaitée pour des valeurs de l'indice n de la somme de Riemann plus petit que η_ε. Illustrons ce propos avec MAPLE.

```
> n:=309:
> printf("n = %3g | Sn = %6.6f | erreur = %6.6E \n",
         n,evalf(Sn(n)), evalf(abs(Iex-Sn(n))));
n = 309 | Sn = 0.291994 | erreur = 8.987992E-04
```

(38) Voir le théorème 16.2 p. 769.

Pour $n = 309$, l'erreur commise est bien inférieure à la précision de 10^{-3}. En fait, cette précision est atteinte pour des valeurs de n plus petites puisque

```
n = 278 | Sn = 0.291894 | erreur = 9.990443E-04
```

La méthode que nous venons de décrire est une méthode d'intégration très connue qui porte le nom de *méthode des rectangles à gauche*. La *méthode des rectangles à droite* consiste, pour une subdivision uniforme $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ à considérer la somme de Riemann pour $\zeta = (x_{i+1})_{i=0,\ldots,n-1}$. Elle possède les mêmes caractéristiques que la méthode des rectangles à gauche que nous venons d'étudier. Une autre méthode d'intégration numérique bien connue est la *méthode du point milieu* qui consiste à prendre $\zeta_i = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)$ c'est-à-dire le milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

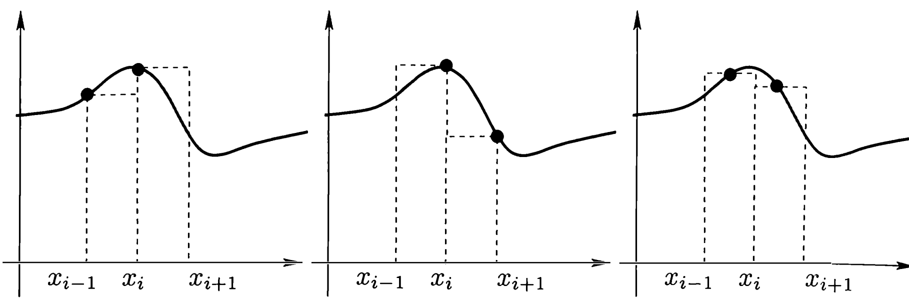


Fig. 8 Principe de la méthode des rectangles à gauche, de la méthode des rectangles à droite et de la méthode du point milieu.

Reprenons notre exemple page 930 du calcul d'une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide cette fois-ci des sommes de Riemann S_n correspondant à la formule de quadrature du point milieu, c'est-à-dire à l'aide des sommes de Riemann pour $\zeta = (\zeta_i)_{i=0,\ldots,n-1}$ où $\zeta_i = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)$.

```
> Sn:= n-> (b-a)/n*sum(f(a+(i+1/2)*(b-a)/n),i=0..n-1):
> for n from 10 to 100 by 10 do
     printf("n = %3g | Sn = %.8f | erreur = %.6E \n",
            n,evalf(Sn(n)), evalf(abs(Iex-Sn(n))));
  od;
n =  10 | Sn = 0.29296851 | erreur = 7.529320E-05
n =  20 | Sn = 0.29291204 | erreur = 1.882060E-05
n =  30 | Sn = 0.29290158 | erreur = 8.364400E-06
n =  40 | Sn = 0.29289792 | erreur = 4.704900E-06
n =  50 | Sn = 0.29289623 | erreur = 3.011100E-06
n =  60 | Sn = 0.29289531 | erreur = 2.090800E-06
n =  70 | Sn = 0.29289476 | erreur = 1.536400E-06
n =  80 | Sn = 0.29289440 | erreur = 1.176100E-06
n =  90 | Sn = 0.29289415 | erreur = 9.296000E-07
n = 100 | Sn = 0.29289397 | erreur = 7.525000E-07
```

En comparant ces valeurs à celles de la page 930 correspondant à la méthode des rectangles à gauche, on observe la bien meilleure qualité de l'approximation fournie par la méthode du point milieu. L'analyse mathématique va nous permettre d'en comprendre la raison. L'erreur qui est commise en prenant la somme de Riemann S_n correspondant à la formule du point milieu pour valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ vaut $E_n = \left|S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. Reprenant le raisonnement de la démonstration du théorème 18.3, on aboutit à

$$E_n = \Big|\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f(\zeta_i) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big|$$

où $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ et $\zeta_i = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)$. Supposant l'application f deux fois dérivable sur l'intervalle $[a,b]$, la formule de Taylor-Lagrange[39] indique qu'il existe un réel c_i compris entre x et ζ_i tel que

$$f(x) = f(\zeta_i) + (x-\zeta_i)\,f'(\zeta_i) + \tfrac{1}{2}(x-\zeta_i)^2\,f''(c_i).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f(\zeta_i) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big((x-\zeta_i)\,f'(\zeta_i) + \tfrac{1}{2}(x-\zeta_i)^2\,f''(c_i)\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\tfrac{1}{2}(x-\zeta_i)^2\,f'(\zeta_i)\Big]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tfrac{1}{2}(x-\zeta_i)^2\,f''(c_i)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tfrac{1}{2}(x-\zeta_i)^2\,f''(c_i)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}E_n &= \Big|\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tfrac{1}{2}(x-\zeta_i)^2\,f''(c_i)\,\mathrm{d}x\Big| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tfrac{1}{2}(x-\zeta_i)^2\,|f''(c_i)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant M_2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tfrac{1}{2}(x-\zeta_i)^2\,\mathrm{d}x = M_2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 = M_2\,\frac{(b-a)^3}{24n^2}\end{aligned}$$

où $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ et $h = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}(b-a)$. Ainsi, un majorant de l'erreur d'approximation pour la formule du point milieu est $M_2\,\frac{(b-a)^3}{24n^2}$ alors qu'un majorant de l'erreur d'approximation pour la formule des rectangles à gauche est $M_1\,\frac{(b-a)^2}{2n}$. L'erreur diminue comme le carré de n pour la formule du point milieu alors qu'elle ne diminue que linéairement avec n pour la formule des rectangles à gauche.

Signalons qu'il existe d'autres méthodes plus efficaces que celle évoquées ici pour calculer une valeur approchée d'une intégrale[40].

---

[39] Voir le théorème 16.4 p. 789.

[40] Pour une présentation détaillée de ces méthodes, on pourra consulter par exemple l'ouvrage *Introduction à l'analyse numérique* de Jacques Rappaz et Marco Picasso chez le même éditeur.

18.4.4 Formules de la moyenne

DÉFINITION 18.9 *Soit f une application Riemann-intégrable sur $[a,b]$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Puisque[41] l'application f est intégrable sur $[a,b]$, elle est bornée sur $[a,b]$. Notons $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ et $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$; puisque pour tout $x \in [a,b]$, on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$, on en déduit que

$$(b-a)\,m \;\leqslant\; \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;\leqslant\; (b-a)\,M.$$

La valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est donc comprise entre m et M.

PROPOSITION 18.16 (Première formule de la moyenne)
Soit f une application continue sur $[a,b]$. Il existe un réel $c \in \,]a,b[$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c).$$

Démonstration D'après les propositions 18.7 et 18.8, l'intégrale indéfinie associée à f sur $[a,b]$ qui est l'application $F : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et de dérivée f. Le théorème des accroissements finis[42] appliqué à la fonction F indique l'existence d'un réel $c \in \,]a,b[$ tel que $F(b) - F(a) = F'(c)\,(b-a)$, c'est-à-dire tel que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\,(b-a).$$

La première formule de la moyenne découle de cette égalité. □

Interprétation graphique La première formule de la moyenne indique qu'il existe un réel c tel que l'aire (algébrique) comprise entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, la représentation graphique de f et l'axe des abscisses soit égale à l'aire (algébrique) du rectangle de longueur $b - a$ et de hauteur $f(c)$. Par exemple, si on considère l'application

$$f : x \in [0,1] \longmapsto \sqrt{1-x^2},$$

la première formule de la moyenne indique, voir la figure 9, qu'il existe un réel c tel que l'aire du quart de disque centré en $(0,0)$ et de rayon 1, qui vaut $\frac{1}{4}\pi$, soit égale à l'aire du rectangle[43] de longueur 1 et de hauteur $f(c)$, qui vaut $f(c)$. Ce réel c, qui est unique, vaut $c = \sqrt{1 - \frac{1}{16}\pi^2}$.

---

[41] Voir la remarque effectuée p. 892.

[42] Voir le théorème 16.2 p. 769.

[43] Ce résultat est à rapprocher d'un problème qui a occupé de nombreux mathématiciens

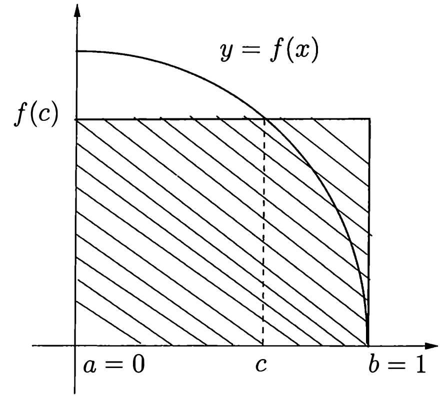


Fig. 9 Interprétation de la première formule de la moyenne.

Remarque La formule de la moyenne admet la généralisation suivante que nous admettons : si f est une application continue sur $[a, b]$ et g une application Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et positive alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

18.4.5 Formule de Taylor à reste intégral

Théorème 18.4 (Formule de Taylor à reste intégral)
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur l'intervalle $[a, b]$. On a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration Raisonnons par récurrence en considérant le prédicat $\mathcal{P}_n$ « pour toute application f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, b]$, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \quad ».$$

depuis l'Antiquité : celui de la « quadrature du cercle ». Il s'agit d'obtenir une construction géométrique d'un segment de droite de longueur π à partir d'un segment de longueur unité en faisant uniquement usage de la règle et du compas. Formulé autrement, il s'agit de construire un rectangle dont l'aire qu'il délimite est identique à celle d'un cercle donné. L'impossibilité de cette construction n'a été prouvée qu'en 1882 par Ferdinand Lindemann (Hanovre, 1852 - Munich, 1939), qui a prouvé que π était un nombre transcendant.

L'assertion $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque d'après le corollaire 18.3, pour toute application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$, on a

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrons que le prédicat $\mathcal{P}_n$ est héréditaire. Pour cela montrons que si l'assertion $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier n donné alors l'assertion $\mathcal{P}_{n+1}$ est elle aussi vraie. Considérons une application f de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur un intervalle $[a, b]$; l'application f étant aussi de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$, notre hypothèse de récurrence implique que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Une intégration par parties indique que

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t &= \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\ (b-a)^{(n+1)} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En combinant ces deux expressions, on en déduit que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Le prédicat est donc héréditaire et l'assertion $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Avec la formule de Taylor-Lagrange[44] et la formule de Taylor-Young[45], la formule de Taylor à reste intégral est la troisième formule de Taylor que nous établissons. Ces formules diffèrent par les hypothèses imposées sur la fonction f considérée et par l'expression du reste. En général, seul le contexte incite à utiliser l'une des formules plutôt qu'une autre.

Exercice 7 On considère la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\ \mathrm{d}x$.
1 - En utilisant le théorème d'encadrement, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2 - En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $nI_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x$.
3 - En utilisant la formule de Taylor à reste intégral, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\ln(1+t) \leqslant t$. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

[44] Voir le théorème 16.4 p. 789.
[45] Voir le théorème 17.1 p. 821.

18.5 Méthodes de calcul de primitives

On trouvera dans cette section un certain nombre de procédés permettant de calculer les primitives de fonctions courantes. Cette liste n'est pas exhaustive et les procédés proposés ne fournissent pas toujours la façon la plus rapide de calculer la primitive mais une manière systématique pour aboutir au résultat. D'autre part certaines primitives ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles. C'est le cas par exemple de $\int \exp(x^2)\,dx$. Les logiciels de calcul formel tel MAPLE savent calculer les primitives et rendent vaine toute virtuosité mentale dans le calcul des primitives. Il est cependant important de connaître les procédés classiques de calcul de primitives pour la suite du cours d'analyse.

18.5.1 Intégration d'une fonction rationnelle

Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle irréductible[(46)] dans $\mathbb{R}(X)$. On cherche à calculer une primitive de la fonction rationnelle $x \mapsto F(x)$. On assimile au niveau des notations, une fraction rationnelle à la fonction rationnelle qui lui est associée et un polynôme à la fonction polynomiale qui lui est associée.

Cas général

On décompose[(47)] dans $\mathbb{R}(X)$ la fonction rationnelle en la somme d'une fonction polynomiale, d'éléments simples de première espèce et d'éléments simples de seconde espèce.

Une primitive de la fonction polynomiale s'obtient sans grande difficulté.

Un élément simple de première espèce est de la forme $u(x) = \dfrac{\alpha}{(x-\beta)^n}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une primitive U de u est donnée par

$$\begin{aligned} & U(x) = \frac{\alpha}{1-n}\,\frac{1}{(x-\beta)^{n-1}} && \text{si } n \neq 1; \\ \text{et}\qquad & U(x) = \alpha\,\ln(|x-\beta|) && \text{si } n = 1. \end{aligned}$$

Un élément simple de seconde espèce est de la forme $v(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{(x^2+\gamma x+\delta)^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\Delta = \gamma^2 - 4\delta < 0$. On a

$$\begin{aligned} x^2+\gamma x+\delta &= \left(x+\tfrac{1}{2}\gamma\right)^2 + \underbrace{\delta - \tfrac{1}{4}\gamma^2}_{=-\frac{1}{4}\Delta} = \left(x+\tfrac{1}{2}\gamma\right)^2 - \tfrac{1}{4}\Delta \\ &= \frac{-\Delta}{4}\left(\frac{4}{-\Delta}\left(x+\tfrac{1}{2}\gamma\right)^2 + 1\right) = \frac{-\Delta}{4}\left(1 + \left(\frac{2x+\gamma}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right). \end{aligned}$$

(46) Voir la définition 7.2 p. 275.

(47) Voir p. 286 pour la forme de la décomposition d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$.

Le changement de variable $t = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(2x+\gamma)$ conduit au calcul des primitives suivantes :

$$I_n(t) = \int \frac{2t}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n(t) = \int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

On obtient immédiatement,

$$\begin{array}{lll} & I_n(t) = \dfrac{1}{1-n}\,\dfrac{1}{(1+t^2)^{n-1}} & \text{si } n > 1; \\ \text{et} & I_n(t) = \ln(|1+t^2|) & \text{si } n = 1. \end{array}$$

La fonction J_n est calculée par la formule de récurrence suivante obtenue par primitivation par parties, voir page 921 pour le détail du calcul,

$$J_1(t) = \arctan(t) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad J_{n+1}(t) = \frac{2n-1}{2n}\,J_n(t) + \frac{t}{2n(1+t^2)^n}.$$

On a en particulier $J_2(t) = \dfrac{1}{2}\arctan(t) + \dfrac{t}{2(1+t^2)}$.

Exemple Cherchons une primitive sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$ de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{x^2-3x-2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}.$$

On a la décomposition en éléments simples suivante[48] :

$$\frac{x^2-3x-2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{x-2}{x^2+x+1} + \frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}.$$

On obtient immédiatement une primitive des deux premiers termes de la décomposition en éléments simples de f :

$$\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(|x+1|) \quad \text{et} \quad \int \frac{2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{x+1}.$$

Intéressons-nous au calcul d'une primitive des 2 éléments simples de seconde espèce. On a

$$x^2+x+1 = (x^2 + 2\,\tfrac{1}{2}\,x + \tfrac{1}{4}) + \tfrac{3}{4} = (x+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{4}\big((\tfrac{2}{\sqrt{3}}x + \tfrac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1\big).$$

Nous allons effectuer le changement de variable $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$, voir la proposition 18.14, page 916. On a $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}$ et l'application $\phi : y \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ est clairement un difféomorphisme. Soient

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x-2}{x^2+x+1} \quad \text{et} \quad g_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}.$$

---

[48] Voir les techniques de calcul d'une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle au chap. 7.

La seconde formule de changement de variable pour une primitive indique que

$$\begin{aligned}
\int g_1(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[\int g_1(\phi(y))\,\phi'(y)\,\mathrm{d}y\Big]_{y=\phi^{-1}(x)} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}(1+y^2)}\,\mathrm{d}y\right]_{y=\phi^{-1}(x)} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\int \frac{2y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\Big]_{y=\phi^{-1}(x)} - \frac{5}{\sqrt{3}}\Big[\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\Big]_{y=\phi^{-1}(x)} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln(|1+y^2|)\Big]_{y=\phi^{-1}(x)} - \frac{5}{\sqrt{3}}\Big[\arctan(y)\Big]_{y=\phi^{-1}(x)} \\
&= \frac{1}{2}\ln(|1+\phi^{-1}(x)^2|) - \frac{5}{\sqrt{3}}\arctan(\phi^{-1}(x)).
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\int g_2(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[\int g_2(\phi(y))\,\phi'(y)\,\mathrm{d}y\Big]_{y=\phi^{-1}(x)} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}y-\frac{5}{2}}{\frac{9}{16}(1+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\right]_{y=\phi^{-1}(x)} \\
&= 2\left[\int \frac{2y}{(1+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\right]_{y=\phi^{-1}(x)} - \frac{20}{3\sqrt{3}}\left[\int \frac{1}{(1+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\right]_{y=\phi^{-1}(x)} \\
&= 2\left[-\frac{1}{1+y^2}\right]_{y=\phi^{-1}(x)} - \frac{20}{3\sqrt{3}}\Big[J_2(y)\Big]_{y=\phi^{-1}(x)} \\
&= -\frac{2}{1+\phi^{-1}(x)^2} - \frac{10}{3\sqrt{3}}\left(\arctan(\phi^{-1}(x)) + \frac{\phi^{-1}(x)}{1+\phi^{-1}(x)^2}\right) \\
&= -\frac{10}{3\sqrt{3}}\arctan(\phi^{-1}(x)) - \frac{2-\frac{10}{3\sqrt{3}}\,\phi^{-1}(x)}{1+\phi^{-1}(x)^2}.
\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $\phi^{-1}(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$, on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{x+1} &- \ln(|x+1|) + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) \\
&- \frac{25}{3\sqrt{3}}\arctan(\tfrac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)) - \frac{5x+7}{3(x^2+x+1)}.
\end{aligned}$$

C'est le résultat que trouve également MAPLE, à ceci près que la valeur absolue dans l'expression de $\ln(|x+1|)$ est omise ce qui pose un problème pour l'expression de la primitive sur $]-\infty,-1[$.

```
> int( (x^2-3*x-2)/((x+1)^2*(x^2+x+1)^2),x);
```

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{25}{9}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\,(2\,x+1)\,\sqrt{3}\right) - \frac{2}{x+1} - \ln\left(x+1\right) + \frac{1}{3}\,\frac{-5\,x-7}{x^2+x+1}$$

Cas particulier des primitives de la forme $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

Pour des primitives de la forme $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$, la procédure de calcul de la primitive d'une fraction rationnelle décrite précédemment peut être simplifiée en remarquant que

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}_{=D}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.$$

Le premier terme a pour primitive $\frac{A}{2a}\ln(\left|ax^2+bx+c\right|)$. Pour calculer le second terme, trois cas sont à envisager suivant le signe de $\Delta = b^2-4ac$.

1. Si $\Delta > 0$ alors le polynôme aX^2+bX+c admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 et $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. À partir de la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_1}$$

où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\alpha}{x-x_1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\beta}{x-x_2}\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha\ln(|x-x_1|)+\beta\ln(|x-x_2|)\end{aligned}$$

2. Si $\Delta = 0$ alors le polynôme aX^2+bX+c admet une unique racine réelle x_1 et $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$. On en déduit que

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x-x_1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a(x-x_1)}.$$

3. Si $\Delta < 0$ alors le polynôme aX^2+bX+c n'a pas de racine réelle. On effectue la transformation d'écriture

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \underbrace{\frac{c}{a^2}-\frac{b^2}{4a^2}}_{=-\frac{\Delta}{4a^2}}\right) = \frac{-\Delta}{4a}\left(1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right)$$

et en utilisant le changement de variable $t=(2ax+b)/\sqrt{-\Delta}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right]_{t=(2ax+b)/\sqrt{-\Delta}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right).\end{aligned}$$

Exemples

1. Calculons une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{4x+3}{x^2-3x+2}$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$, $]1, 2[$ et $]2, +\infty[$. On a

$$f(x) = 2\,\frac{2x-3}{x^2-3x+2} + 9\,\frac{1}{x^2-3x+2} = 2\,\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{9}{u(x)}$$

où $u : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est une fonction polynomiale dont les deux racines réelles sont 1 et 2. D'une part, on a

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|u(x)|) = \ln(|x^2-3x+2|) = \ln(|x-1|) + \ln(|x-2|).$$

D'autre part, la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

conduit à

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln(|x-2|) - \ln(|x-1|).$$

On obtient finalement

$$\int \frac{4x+3}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = 11\,\ln(|x-2|) - 7\,\ln(|x-1|).$$

2. Calculons une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{6x+3}{x^2+2x+1}$ sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$. On a

$$\frac{6x+3}{x^2+2x+1} = 3\,\frac{2x+2}{x^2+2x+1} - \frac{3}{x^2+2x+1} = 3\,\frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{3}{u(x)}$$

où $u : x \mapsto x^2 + 2x + 1$ est une fonction polynomiale qui admet pour racine double -1. D'une part, on a

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|u(x)|) = \ln(|x^2+2x+1|) = \ln\left((x+1)^2\right) = 2\ln(|x+1|),$$

et d'autre part

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+x}.$$

On en conclut que

$$\int \frac{6x+3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = 6\ln(|x+1|) + \frac{3}{x+1}.$$

3. Calculons une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+4x+6}$ sur $\mathbb{R}$. On a

$$\frac{2x+1}{x^2+4x+6} = \frac{2x+4}{x^2+4x+6} - \frac{3}{x^2+4x+6} = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{3}{u(x)}$$

où $u : x \mapsto x^2+4x+6$ est une fonction polynomiale sans racine réelle. D'une part, on a

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, \mathrm{d}x = \ln(|u(x)|) = \ln(x^2+4x+6).$$

D'autre part, $u(x) = (x+2)^2 + 2 = 2\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}\right)^2 + 1\right)$ de sorte que

$$\int \frac{1}{u(x)}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+\sqrt{2}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+\phi(x)^2}\, \phi'(x)\, \mathrm{d}x$$

où $\phi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$. La première formule du changement de variable pour une primitive indique que

$$\int \frac{1}{u(x)}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\right]_{t=\phi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\phi(x)).$$

Finalement, on en conclut que

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+6}\, \mathrm{d}x = \ln(x^2+4x+6) - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+2)\right).$$

18.5.2 Intégration d'une fonction rationnelle en sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique

Le changement de variable $t = e^x$ conduit au calcul de la primitive d'une fonction rationnelle en la variable t. On peut alors utiliser la méthode décrite à la section 18.5.1. Illustrons cette méthode sur un exemple.

Exemple Calculons une primitive de $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)}$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. L'application $\phi : t \in]0, +\infty[\mapsto \ln(t) \in \mathbb{R}$ est un difféomorphisme dont la bijection réciproque est $\phi^{-1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^x$. D'après la seconde formule du changement de variable pour une primitive considérée sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ séparément, on a

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \left[\int f(\phi(t))\, \phi'(t)\, \mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)} = \left[\int \frac{1}{\mathrm{ch}(\ln(t))\, \mathrm{sh}(\ln(t))}\, \mathrm{d}t\right]_{t=\mathrm{e}^x}.$$

On a $\mathrm{ch}(\ln(t))\,\mathrm{sh}(\ln(t)) = \frac{1}{4t^2}(t^2+1)(t^2-1)$ et la décomposition en éléments simples

$$\frac{4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} = \frac{2}{t^2+1} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$$

conduit à

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}(\ln(t))\,\operatorname{sh}(\ln(t))}\,\mathrm{d}t = 2\arctan(t) + \ln(|t-1|) - \ln(|t+1|).$$

On en conclut que

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\operatorname{ch}(x)\ \operatorname{sh}(x)} = 2\arctan(\mathrm{e}^x) + \ln\left(\frac{|\mathrm{e}^x - 1|}{\mathrm{e}^x + 1}\right).$$

18.5.3 Intégration d'une fonction rationnelle en sinus et cosinus

Cas général

Le changement de variable $t = \tan(x/2)$ conduit au calcul de la primitive d'une fonction rationnelle en la variable t. On peut alors utiliser la méthode décrite à la section 18.5.1. Illustrons cette méthode sur un exemple.

Exemple Calculons sur $]0,\pi[$ une primitive de la fonction $f : x \mapsto 1/\sin(x)$. La fonction $\phi : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 2\arctan(t)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0,\pi[$ dont la bijection réciproque est $\phi^{-1} : x \in]0,\pi[\mapsto \tan(x/2)$. D'après la seconde formule du changement de variable pour une primitive, on a

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x &= \left[\int \frac{\phi'(t)}{\sin(\phi(t))}\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)} \\ &= \left[\int \frac{1}{\sin(2\arctan(t))}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}.\end{aligned}$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) = 2\cos^2(\alpha)\tan(\alpha) = 2\frac{\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$$

ce qui implique que

$$\sin(2\arctan(t)) = 2\frac{\tan(\arctan(t))}{1+\tan^2(\arctan(t))} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

On en déduit que sur $]0,\pi[$,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right]_{t=\tan(\frac{x}{2})} &= \Big[\ln(|t|)\Big]_{t=\tan(\frac{x}{2})} \\ &= \ln\left(\tan(x/2)\right).\end{aligned}$$

On notera que la valeur absolue peut être enlevée car pour $x \in]0,\pi[$, on a $\tan(x/2) > 0$. On pourra vérifier que sur chaque intervalle I_n de la forme $]n\pi,(n+1)\pi[$ les primitives de $x \mapsto 1/\sin(x)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln\left(|\tan(x/2)|\right) + c_n$ où $c_n \in \mathbb{R}$.

Règles de Bioche

On peut, dans certains cas, simplifier les calculs de $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est une fraction rationnelle en sinus, cosinus et tangente par un changement de variable adapté aux propriétés de la fonction f à intégrer. Ces changements de variables sont connues sous le nom de *règles de Bioche*[(49)].

- Si f est impaire, on fait le changement de variable $t = \cos(x)$.
- Si f vérifie $f(\pi - x) = -f(x)$, on fait le changement de variable $t = \sin(x)$.
- Si f est π périodique, on fait le changement de variable $t = \tan(x)$.

Cas d'une fonction polynomiale en $\sin(x), \cos(x)$

Pour calculer une primitive de $\sin^p(x)\cos^q(x)$ on peut effectuer les changements de variables suivants selon la parité de p et q.

- Si p est pair et q impair, on fait le changement de variable $t = \sin(x)$.
- Si p et q sont impairs, on fait le changement de variable $t = \sin(x)$ ou $t = \cos(x)$.
- Si p est impair et q pair, on fait le changement de variable $t = \cos(x)$.
- Si p et q sont pairs, on utilise les formules de trigonométrie pour exprimer $\sin^p(x)\cos^q(x)$ en fonction de l'angle double $2x$ ce qui permet de retomber sur les cas envisagés ci-dessus.

18.5.4 Intégration d'une fonction rationnelle à radical du second degré

On s'intéresse au calcul d'une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ qui est définie sur l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c > 0 \right\}.$$

Pour $x \in \mathcal{D}$, on a

$$f(x) = \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{2a}\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \underbrace{\left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}_{=D}\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Le premier terme a pour primitive $\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}$. Pour calculer le second terme quatre cas sont à envisager suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta = 0$ et $a > 0$ alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$. On a $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x - x_0|$ et
$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(|x - x_0|).$$

(49) Bioche, Charles (1859, Paris - 1949, Ferrières-en-Brie). Enseignant en lycée, C. Bioche n'exerça pas d'activité de chercheur universitaire mais publia de nombreux articles dans des revues mathématiques de haut niveau. Il a été élu président de la Société mathématique de France en 1909.

2. Si $\Delta > 0$ et $a > 0$ alors

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \underbrace{-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}_{=-\Delta/4a^2}\right) = \frac{\Delta}{4a}\left(\frac{4a^2}{\Delta}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-1\right)$$
$$= \frac{\Delta}{4a}\left(\left(\frac{2a}{\sqrt{\Delta}}\,x+\frac{b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2-1\right).$$

On effectue le changement de variable $t = \frac{2a}{\sqrt{\Delta}}x + \frac{b}{\sqrt{\Delta}}$ et on est amené à considérer la primitive $\int (t^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$ qui correspond à la fonction argument cosinus hyperbolique.

3. Si $\Delta > 0$ et $a < 0$ alors

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \underbrace{-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}_{=-\Delta/4a^2}\right) = -\frac{\Delta}{4a}\left(\frac{-4a^2}{\Delta}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+1\right)$$
$$= -\frac{\Delta}{4a}\left(1-\left(\frac{2a}{\sqrt{\Delta}}x+\frac{b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right).$$

On effectue le changement de variable $t = \frac{2a}{\sqrt{\Delta}}x + \frac{b}{\sqrt{\Delta}}$ et on est amené à considérer la primitive $\int (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$ qui correspond à la fonction arc-sinus.

4. Si $\Delta < 0$ alors

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \underbrace{-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}_{=-\Delta/4a^2}\right) = \frac{-\Delta}{4a}\left(\frac{4a^2}{-\Delta}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+1\right)$$
$$= \frac{-\Delta}{4a}\left(\left(\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}x+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right).$$

On effectue alors le changement de variable $t = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}x + \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}$ et on est amené à considérer la primitive $\int (1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$ qui correspond à la fonction argument sinus hyperbolique.

Exemple Calculons la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+6}}$. On a

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+6}} = \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+6}} - \frac{3}{\sqrt{x^2+4x+6}} = \frac{\phi'(x)}{\sqrt{\phi(x)}} - 3\frac{1}{\sqrt{\phi(x)}}$$

où $\phi : x \mapsto x^2+4x+6$ est une fonction polynomiale sans racine réelle. On a

$$\int \frac{\phi'(x)}{\sqrt{\phi(x)}}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi(x)} = \left[2\sqrt{t}\right]_{t=\phi(x)} = 2\sqrt{x^2+4x+6}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x^2 + 4x + 6 = (x+2)^2 + 2 = 2\Big(\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}\big)^2 + 1\Big) = 2(\psi(x)^2 + 1)$$

où $\psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$. On en déduit que

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+6}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{\psi(x)^2+1}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{=\psi'(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t\right]_{t=\psi(x)}$$

$$= \Big[\mathrm{argsh}(t)\Big]_{t=\psi(x)} = \mathrm{argsh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right).$$

On obtient finalement

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+6}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x^2+4x+6} - 3\,\mathrm{argsh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right).$$

Exercice 8 Calculer les primitives suivantes après avoir préciser les intervalles sur lesquels est effectué le calcul :

1 - $\displaystyle\int \frac{x^4+4}{x^4-4}\,\mathrm{d}x$ 2 - $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$

3 - $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ 4 - $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$

18.6 Exercices de synthèse

Exercice 9 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction*

$$J_n : x \longmapsto \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx)\,\mathrm{d}t$$

et on s'intéresse aux propriétés de J_n au voisinage de 0.

1 - a) Montrer que J_n est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que J_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle atteint son maximum en 0.

2 - a) Établir la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (2n+1)\,J_n(0) = 2n\,J_{n-1}(0).$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $J_n(0) = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3 - a) Montrer que pour tout $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a $0 \leqslant 1 - \cos(y) \leqslant \frac{1}{2}y^2$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application J_n est continue en 0.

4 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application J_n est dérivable en 0 et déterminer la valeur de $J_n'(0)$.

EXERCICE 10

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de terme général* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t$.

1 - Calculer I_0, I_1 *et* I_2 *et montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ \mathrm{d}t$.

2 - En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *on a* $(n+1)I_{n+1} = n\,I_{n-1}$. *En déduire que pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *on a*

$$I_{2p} = \frac{P_1(p)}{P_2(p)}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = \frac{P_2(p)}{P_1(p+1)}$$

où on a noté[50] $P_1(p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ *et* $P_2(p) = \prod_{k=1}^{p} 2k$.

3 - Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *on a* $\cos^n(t) \leqslant \cos^{n-1}(t)$. *En déduire que la suite* $(I_n)_n$ *est positive et décroissante.*

4 - a) Montrer que la suite de terme général $u_p = I_{2p-1}/I_{2p}$ *converge vers* 1.

b) En déduire la formule de Wallis,

$$\lim_{n\longmapsto+\infty} \frac{1}{n}\frac{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^2}{\left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)^2} = \pi.$$

5 - Montrer que la suite de terme général $w_n = (n+1)I_nI_{n+1}$ *est une suite constante. En déduire que* $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

EXERCICE 11 *On considère la fonction définie pour* $x \in \mathbb{R}^+$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+tx)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t & si\ x \geqslant 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1 - En utilisant la première formule de la moyenne, montrer que f *est continue à droite en* 0.

2 - On suppose que $x > 0$ *et on considère un réel* h *non nul tel que* $h > -x$.

a) Montrer que $\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = I_1(h) + I_2(h)$ *où*

$$I_1(h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{\ln(1+(x+h)t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

et

$$I_2(h) = \frac{1}{h}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\Big(\ln(1+(x+h)t) - \ln(1+xt)\Big)\ \mathrm{d}t.$$

b) En utilisant la première formule de la moyenne, déterminer $\lim_{h\to 0} I_1(h)$.

[50] On rappelle, voir p. 100, que le symbole $\prod_{k=1}^{p}$ sert à indiquer un produit de la même manière que le symbole $\sum_{k=1}^{p}$ sert à indiquer une somme.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, calculer $\phi(x) = \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}\,\mathrm{d}t$.

d) À l'aide d'une formule de Taylor, montrer qu'il existe un réel $c \in]x, x+h[$ tel que

$$\ln(1+(x+h)t) - \ln(1+xt) = \frac{th}{1+xt} - \frac{t^2h^2}{2(1+ct)^2}.$$

En déduire que $I_2(h) = \phi(x) - \frac{1}{2}h\,R(h)$ où $0 \leqslant R(h) \leqslant \frac{1}{3}x^3$.

e) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée

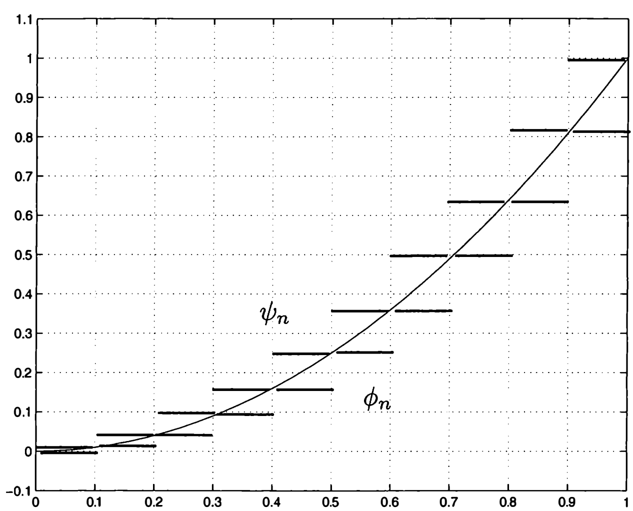
$$f' : x \in]0, +\infty[\longmapsto \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \phi(x).$$

3 - En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

18.7 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - Représentation graphique des fonctions f, ϕ_n et ψ_n pour $n = 10$.



2 - On a[51]

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^1 \phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} h\,f(x_i) = h\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\tfrac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}. \end{aligned}$$

[51] On rappelle, voir la proposition 3.5 p. 104, que pour tout entier k non nul, on a $\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$.

De même, on a

$$J_n = \int_0^1 \psi_n = \sum_{i=0}^{n-1} h\, f(x_{i+1}) = h \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\tfrac{i+1}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

3 - Pour montrer que f est Riemann-intégrable, considérons les réels

$$I_-(f) = \sup \left\{ \int_0^1 \phi \mid \phi \in \mathcal{E}_{[0,1]} \ \text{ et } \ \phi \leqslant f \right\}$$

et

$$I_+(f) = \inf \left\{ \int_0^1 \psi \mid \psi \in \mathcal{E}_{[0,1]} \ \text{ et } \ \psi \geqslant f \right\}.$$

Par définition de la borne inférieure[(52)], on a $I_-(f) \leqslant J_n$ et par définition de la borne supérieure, on a $I_+(f) \geqslant I_n$. Par ailleurs, on a $I_+(f) \leqslant I_-(f)$ car pour tout $(\phi, \psi) \in \mathcal{E}([0,1], \mathbb{R})^2$, on a

$$\phi \leqslant f \leqslant \psi \quad \Longrightarrow \int_0^1 \phi \ \leqslant \int_0^1 \psi\ .$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$I_n \leqslant I_+(f) \leqslant I_-(f) \leqslant J_n.$$

Or, on a clairement,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{1}{3}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$I_+(f) = I_-(f) = \frac{1}{3}.$$

Cela implique, voir p. 894, que f est Riemann-intégrable sur $[0,1]$ et que

$$\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Solution de l'exercice 2

Supposons que f soit croissante et non constante sur $[a, b]$ (le cas où f est décroissante sur $[a, b]$ se ramène à la situation considérée en remarquant que dans ce cas $-f$ est croissante ; par ailleurs, si f est constante sur $[a, b]$ alors f est clairement Riemann-intégrable car il s'agit alors d'une fonction en escalier).

(52) Voir la définition 3.5 p. 96.

D'après la définition 18.4, pour montrer que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, nous devons montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe deux fonctions ϕ_ε et ψ_ε en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \quad < \varepsilon.$$

Sous notre hypothèse initiale, on a $f(b) > f(a)$ et pour ε réel strictement positif fixé, on peut considérer une subdivision uniforme $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ de $[a,b]$ de pas h vérifiant $h < (f(b)-f(a))^{-1}\,\varepsilon$. Introduisons les deux fonctions ϕ_ε et ψ_ε en escalier sur $[a,b]$ définies par

- $\phi_\varepsilon(x) = f(x_i)$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$;
- $\psi_\varepsilon(x) = f(x_{i+1})$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$;
- $\phi_\varepsilon(b) = \psi_\varepsilon(b) = f(b)$.

Puisque f est croissante sur $[a,b]$, pour tout $i \in \{0,\dots,n-1\}$ on a $f(x_i) \leqslant f(x_{i+1})$ et par conséquent pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$ on a $\phi_\varepsilon(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_\varepsilon(x)$. On a donc $\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon$ sur $[a,b]$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int_a^b \Big(\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\Big) &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big(\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\Big)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} h\,\Big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\Big) = h\,\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)\\ &= h\,(f(b) - f(a)) < \varepsilon.\end{aligned}$$

On en conclut que l'application f est Riemann-intégrable sur l'intervalle $[a,b]$.

Solution de l'exercice 3

1 - L'application $v : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + 1$ est une application polynomiale ; elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Son image est $J = [1, +\infty[$. L'application $f : t \in [1,+\infty[\mapsto \ln(t)$ étant continue, la proposition 18.9 indique que l'application ϕ est dérivable sur J de dérivée en $x \in J$,

$$\phi'(x) = v'(x) \times \phi(v(x)) = 2x\,\ln(x^2+1).$$

2 - Soit $\psi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x\ln(x) - x$. L'application ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car la fonction logarithme est dérivable sur cet ensemble. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\psi'(x) = 1 + \ln(x) - 1 = \ln(x)$. On en déduit que ψ est une primitive de la fonction logarithme. On a donc

$$\phi(x) = \int_1^{1+x^2} \ln(t)\ \mathrm{d}t = \Big[t\ln(t) - t\Big]_1^{1+x^2} = (x^2+1)\ln(x^2+1) - x^2.$$

Dérivons,

$$\begin{aligned}\Big((x^2+1)\ln(x^2+1) - x^2\Big)' &= 2x\ln(x^2+1) + (x^2+1)\frac{2x}{x^2+1} - 2x\\ &= 2x\ln(x^2+1).\end{aligned}$$

On retrouve l'expression de la première question.

Solution de l'exercice 4

1 - L'application tangente est 2π périodique et elle est continue sur chacun des intervalles $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$. Nous allons donc calculer les primitives de la fonction tangente sur chacun des deux intervalles $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$.

L'application $\phi : x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\mapsto \cos(x) \in]0,1]$ est dérivable et

$$\int \tan(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ \mathrm{d}x = \int -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\ \mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\phi'(x)\ \mathrm{d}x$$

où $f : t \in]0,1] \mapsto -1/t$. En utilisant la première formule du changement de variable pour une primitive, on obtient

$$\int \tan(x)\ \mathrm{d}x = \Big[\int -\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t\Big]_{t=\cos(x)} = \Big[-\ln(|t|)\Big]_{t=\cos(x)} = -\ln(|\cos(x)|).$$

Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, la fonction cosinus est strictement positive de sorte qu'une primitive de la fonction tangente sur cet intervalle est $x \mapsto -\ln(\cos(x))$. En considérant l'application $\phi : x \in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[\mapsto \cos(x) \in]0,1]$, un calcul en tout point analogue permet d'établir que sur l'intervalle $]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$, une primitive de la fonction tangente est $x \mapsto -\ln(-\cos(x))$.

2 - La fonction $g : x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. L'application $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) \in [-1,1]$ est dérivable avec $\phi' : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$ et la première formule du changement de variable pour une primitive indique que

$$\int g(x)\ \mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\phi'(x)\ \mathrm{d}x = \Big[\int f(t)\ \mathrm{d}t\Big]_{t=\phi(x)}$$

où $f : t \in [-1,1] \mapsto t^2$. On a donc

$$\int g(x)\ \mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{3}\,t^3\Big]_{t=\sin(x)} = \tfrac{1}{3}\,\sin^3(x).$$

3 - La fonction sinus hyperbolique est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0. On en déduit que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}/\operatorname{sh}^3(x)$ admet des primitives sur chacun des deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\operatorname{sh}^3(x)} = \frac{8\,\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})^3} = \frac{8\,\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x}-1)^3}.$$

L'application $\phi : x \in]-\infty,0[\mapsto \mathrm{e}^{2x} \in]0,1[$ est dérivable et sa dérivée est $\phi' : x \in]-\infty,0[\mapsto 2\,\mathrm{e}^{2x} \in]0,1[$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\operatorname{sh}^3(x)}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{4\,\phi'(x)}{(\phi(x)-1)^3}\ \mathrm{d}x = \Big[\int \frac{4}{(t-1)^3}\ \mathrm{d}t\Big]_{t=\phi(x)} \\ &= \Big[-\frac{2}{(t-1)^2}\Big]_{t=\mathrm{e}^{2x}} = -\frac{2}{(\mathrm{e}^{2x}-1)^2}.\end{aligned}$$

Un calcul en tout point analogue peut être mené sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Solution de l'exercice 5

1 - Déterminons dans un premier temps les primitives de $f : x \mapsto 1/\operatorname{sh}(x)$ sur $]-\infty,0[$ en considérant le changement de variable $\phi : x \in]0,1[\mapsto \ln(x) \in]-\infty,0[$. L'application ϕ est continue sur $]0,1[$ et bijective de $]0,1[$ dans $]-\infty,0[$. Elle est dérivable sur $]0,1[$ et sa dérivée qui est la fonction $x \mapsto 1/x$ ne s'annule pas sur $]0,1[$. La bijection réciproque $\phi^{-1} : x \in]-\infty,0[\mapsto \mathrm{e}^x \in]0,1[$ est continue sur $]-\infty,0[$. L'application ϕ est donc un difféomorphisme et la seconde formule du changement de variable indique que

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=\phi^{-1}(t)} = \left[\int \frac{1}{\operatorname{sh}(\ln(x))}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right]_{x=\mathrm{e}^t}.$$

Pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\operatorname{sh}(\ln(x)) = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\ln(x)} - \mathrm{e}^{-\ln(x)}\right) = \tfrac{1}{2}\left(x - x^{-1}\right) = \frac{x^2-1}{2x}.$$

On en déduit que sur $]-\infty,0[$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}(t)}\,\mathrm{d}t = -2\left[\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right]_{x=\mathrm{e}^t} = -2\Big[\operatorname{argth}(x)\Big]_{x=\mathrm{e}^t} = -2\operatorname{argth}\left(\mathrm{e}^t\right).$$

Signalons qu'en utilisant l'expression logarithmique d'argument tangente hyperbolique[53], on obtient sur $]-\infty,0[$

$$\begin{aligned}-2\operatorname{argth}\left(\mathrm{e}^t\right) &= -\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^t}{1-\mathrm{e}^t}\right) = -\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}}\right) = -\ln\left(\frac{\operatorname{ch}(\frac{1}{2}t)}{-\operatorname{sh}(\frac{1}{2}t)}\right)\\ &= \ln\left(-\operatorname{sh}(\tfrac{1}{2}t)\right) - \ln\left(\operatorname{ch}(\tfrac{1}{2}t)\right) = \ln\left(\frac{-\operatorname{sh}(\frac{1}{2}t)}{\operatorname{ch}(\frac{1}{2}t)}\right) = \ln\left(\left|\operatorname{th}\left(\tfrac{1}{2}t\right)\right|\right).\end{aligned}$$

Déterminons à présent les primitives de f sur $]0,+\infty[$ en considérant le changement de variable $\phi : x \in]1,+\infty[\mapsto \ln(x) \in]0,+\infty[$. L'application ϕ est continue sur $]1,+\infty[$ et bijective de $]1,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. Elle est dérivable sur $]1,+\infty[$ et sa dérivée qui est la fonction $x \mapsto 1/x$ ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$. La bijection réciproque $\phi^{-1} : x \in]0,+\infty[\mapsto \mathrm{e}^x \in]1,+\infty[$ est continue sur $]0,+\infty[$. D'après la seconde formule du changement de variable, sur $]0,+\infty[$ on a

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\operatorname{sh}(t)}\,\mathrm{d}t &= \left[\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=\phi^{-1}(t)} = \left[\int \frac{1}{\operatorname{sh}(\ln(x))}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right]_{x=\mathrm{e}^t}\\ &= -2\left[\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right]_{x=\mathrm{e}^t}.\end{aligned}$$

---

[53] Voir la proposition 14.26 p. 695.

On prendra garde que sur l'intervalle $]1,+\infty[$, une primitive de la fonction $x \mapsto 1/(1-x^2)$ n'est pas la fonction argument tangente hyperbolique ; celle-ci n'est définie que sur $]-1,1[$. On déduit de la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{1-X^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{X+1}.$$

que

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Par conséquent, une primitive sur $]0,+\infty[$ de f est

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t &= -\ln\left(\frac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t-1}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^t-1}{\mathrm{e}^t+1}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{t/2}-\mathrm{e}^{-t/2}}{\mathrm{e}^{t/2}+\mathrm{e}^{-t/2}}\right)\\ &= \ln\left(\mathrm{th}(\tfrac{1}{2}t)\right) = \ln\left(\left|\mathrm{th}(\tfrac{1}{2}t)\right|\right).\end{aligned}$$

2 - Calculons une primitive de $f : t \mapsto \sqrt{1-x^2}$ en considérant le changement de variable $\phi : x \mapsto \sin(x)$. La fonction f est définie sur $[-1,1]$; elle est continue sur cet intervalle. L'application ϕ est difféomorphisme de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans $]-1,1[$ dont la bijection réciproque est $\phi^{-1} : t \in [-1,1] \mapsto \arcsin(t) \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. La seconde formule du changement de variable pour une primitive indique que

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=\phi^{-1}(t)} = \left[\int \sqrt{1-\sin^2(x)}\,\cos(x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=\arcsin(t)}.$$

On a $\sqrt{1-\sin^2(x)} = |\cos(x)|$ et sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ la fonction cosinus est positive. On en déduit que

$$\begin{aligned}\int f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=\arcsin(t)} = \left[\int +\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=\arcsin(t)}\\ &= \left[+\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin(2x)\right]_{x=\arcsin(t)} = \tfrac{1}{2}\arcsin(t) + \tfrac{1}{4}\sin(2\arcsin(t))\\ &= \tfrac{1}{2}\arcsin(t) + \tfrac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6

1 - On a

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

et en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{3}\left[-\tfrac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{15}.\end{aligned}$$

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en intégrant par parties on obtient

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{2}{3}(1-x)^{3/2}x^n\right]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)(1-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^{n}(1-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x\\ &= I_{n-1} - I_n.\end{aligned}$$

On en déduit que $I_n = \frac{2}{3}n\,(I_{n-1} - I_n)$ ce qui permet de conclure que $(3+2n)\,I_n = 2n\,I_{n-1}$.

Solution de l'exercice 7

1 - Pour $x \in [0,1]$, on a $1 \leqslant x^n + 1 \leqslant 2$. On en déduit que $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$ puis que $\frac{1}{2}\,x^n \leqslant \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$. Comme $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$, on obtient

$$\frac{1}{2(n+1)} = \int_0^1 \frac{1}{2}\,x^n\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement indique que la suite $(I_n)_n$ converge et a pour limite 0.

2 - On a

$$n\,I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(\ln(1+x^n)\right)'\,\mathrm{d}x.$$

La formule d'intégration par parties indique que

$$n\,I_n = \Big[x\ln(1+x^n)\Big]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

3 - Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$; pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0,t]$ et la formule de Taylor à reste intégral à l'ordre 1 indique que

$$\ln(1+t) = f(t) = f(0) + t\,f'(0) + \int_0^t \frac{(t-x)^2}{2!}f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

On a $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f''(x) = -1/(1+x)^2$ ce qui nous donne la relation

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{(t-x)^2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Puisque la fonction $x \in [0,t] \mapsto \frac{(t-x)^2}{(1+x)^2}$ est strictement positive sur $]0,t[$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\int_0^t \frac{(t-x)^2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x > 0$$

et on peut conclure que $\ln(1+t) < t$.

Pour tout $x \in]0,1]$, on a $x^n \in \mathbb{R}_+^*$ et par conséquent $\ln(1+x^n) < x^n$. On a donc

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Le théorème d'encadrement, permet d'en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0,$$

ce que l'on peut également exprimer sous la forme $\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = o_{+\infty}(1)$. D'après la question précédente, on a donc

$$n\,I_n = \ln(2) + o_{+\infty}(1)$$

ce qui entraîne que $nI_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(2)$, autrement dit que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$.

Solution de l'exercice 8

1 - La fonction polynomiale $x \mapsto x^4 - 4$ admet deux racines réelles $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. On est donc amené à s'intéresser aux primitives de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^4+4}{x^4-4}$ sur chacun des intervalles $]-\infty, -\sqrt{2}[$, $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ et $]\sqrt{2}, +\infty[$. Une étape préliminaire au calcul des primitives de f consiste à effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fonction rationnelle $\frac{X^4+4}{X^4-4}$. On obtient, en utilisant les méthodes de décomposition présentées au chap. 7,

$$\frac{X^4+4}{X^4-4} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}X-2} - \frac{1}{\sqrt{2}X+2} - \frac{2}{X^2+2},$$

ce que l'on peut réécrire,

$$\frac{X^4+4}{X^4-4} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}X-2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}X+2} - \sqrt{2}\frac{1/\sqrt{2}}{\left(X/\sqrt{2}\right)^2+1}.$$

Posons $\phi_1 : x \mapsto \sqrt{2}x - 2$; la première formule de changement de variable pour une primitive indique que

$$\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\phi_1'(x)}{\phi_1(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|\phi_1(x)|) = \ln(|\sqrt{2}x-2|).$$

Posons $\phi_2 : x \mapsto \sqrt{2}x + 2$; on a

$$\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\phi_2'(x)}{\phi_2(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|\phi_2(x)|) = \ln(|\sqrt{2}x+2|).$$

Enfin, posons $\phi_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}x$; on a

$$\int \frac{1/\sqrt{2}}{\left(x/\sqrt{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\phi_3'(x)}{\phi_3^2(x)+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(\phi_3(x)) = \arctan(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x).$$

On en conclut que

$$\int \frac{x^4+4}{x^4-4}\,\mathrm{d}x = x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(|\sqrt{2}x-2|) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(|\sqrt{2}x+2|) - \sqrt{2}\arctan(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x).$$

2 - La fonction $f : x \mapsto \sin^3(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle admet par conséquent[54] des primitives sur $\mathbb{R}$. Une étape préliminaire dans le calcul de ces primitives consiste à linéariser $\sin^3(x)$, en utilisant les méthodes exposées au chap. 4. On a

$$\sin^3(x) = -\tfrac{1}{4}\sin(3x) + \tfrac{3}{4}\sin(x)$$

ce qui implique que

$$\int \sin^3(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x).$$

3 - La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et elle est π-périodique. On peut obtenir ses primitives sur $\mathbb{R}$ en ayant recours au changement de variable $t = \tan(x)$ conformément aux formules de Bioche[55]. Il résulte des propriétés de la fonction arc-tangente que l'application $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est un difféomorphisme dont la bijection réciproque est la fonction tangente. La seconde formule du changement de variable pour une primitive indique que

$$\int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}.$$

Or

$$\begin{aligned} f(\phi(t)) &= \frac{\sin^2(\arctan(t))}{1+\cos^2(\arctan(t))} = \frac{\tan^2(\arctan(t))}{\big(\cos(\arctan(t))\big)^{-2}+1} \\ &= \frac{t^2}{\big(\cos(\arctan(t))\big)^{-2}+1} = \frac{t^2}{2+t^2} \end{aligned}$$

car $\frac{1}{\cos^2(u)} = 1+\tan^2(u)$, cette expression représentant aussi la dérivée en u de la fonction tangente. On en déduit que

$$\int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)}\,\mathrm{d}t\right]_{t=\tan(x)}.$$

En utilisant la décomposition en éléments simples

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)} = -\frac{1}{1+t^2} + \frac{2}{2+t^2},$$

[54] Voir le corollaire 18.2 p. 909.

[55] Voir p. 944.

on obtient

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)}\ \mathrm{d}t = -\int \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t + \sqrt{2}\int \frac{1/\sqrt{2}}{1+\left(t/\sqrt{2}\right)^2}\ \mathrm{d}t$$
$$= -\arctan(t) + \sqrt{2}\arctan(\tfrac{1}{\sqrt{2}}t).$$

On en conclut que

$$\int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)}\ \mathrm{d}x = -\arctan(\tan(x)) + \sqrt{2}\arctan(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\tan(x)).$$

On veillera à éviter des simplifications hâtives. On a $\arctan(\tan(x)) = x$ uniquement si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La primitive est ici exprimée sur $\mathbb{R}$.

4 - Le polynôme X^2+X+1 a pour discriminant -3. Il n'a donc pas de racine réelle. La fonction $f : x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ est par conséquent continue sur $\mathbb{R}$. Pour calculer ses primitives sur $\mathbb{R}$, commençons par remarquer que

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{(x^2+x+1)'}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Considérons l'application $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2+x+1$; cette application est dérivable et la première formule de changement de variable pour une primitive indique que

$$\int \frac{(x^2+x+1)'}{2\sqrt{x^2+x+1}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sqrt{\phi(x)}}\ \phi'(x)\ \mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t\right]_{t=\phi(x)}$$
$$= \left[\sqrt{t}\right]_{t=x^2+x+1} = \sqrt{x^2+x+1}.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$x^2+x+1 = \tfrac{3}{4}\left(\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}x + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right) = \tfrac{3}{4}(\psi^2(x)+1)$$

où $\psi : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$. Cette application est dérivable et la première formule de changement de variable pour une primitive indique que

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{\psi^2(x)+1}}\ \psi'(x)\ \mathrm{d}x$$
$$= \left[\int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\ \mathrm{d}y\right]_{y=\psi(x)} = \operatorname{argsh}\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}x + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

On en conclut que

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\ \mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\operatorname{argsh}\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}x + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Solution de l'exercice 9

1 - a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $f : t \in [0,1] \mapsto (1-t^2)^n \cos(tx)$ est continue car il s'agit du produit d'une fonction polynomiale par la fonction cosinus qui sont deux fonctions continues sur $[0,1]$.

b) Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$ on a $|(1-t^2)^n \ \cos(tx)| \leqslant (1-t^2)^n$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $|J_n(x)| \leqslant \int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t$, autrement dit, que l'application J_n est bornée sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, pour $t \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leqslant \cos(tx) \leqslant 1$. Ainsi,

$$-J_n(0) = -\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t \leqslant J_n(x) \leqslant \int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t = J_n(0).$$

La valeur maximale de J_n sur $\mathbb{R}$ est donc $J_n(0)$.

2 - a) En intégrant par parties on obtient

$$\begin{aligned}
J_n(0) = \int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t &= \underbrace{\Big[t(1-t^2)^n\Big]_0^1}_{=0} + 2n\int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1} \,\mathrm{d}t \\
&= 2n\int_0^1 (t^2-1)(1-t^2)^{n-1} \,\mathrm{d}t + 2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-1} \,\mathrm{d}t \\
&= -2nJ_n(0) + 2nJ_{n-1}(0).
\end{aligned}$$

On en déduit la relation de récurrence $(2n+1)J_n(0) = 2nJ_{n-1}(0)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrons que $J_n(0) = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ en utilisant un raisonnement par récurrence. Pour $n=0$ on a $J_0(0) = \displaystyle\int_0^1 1 \,\mathrm{d}t = 1 = \frac{2^0(0!)^2}{1!}$. La relation est donc vraie pour l'entier 0.

Supposons que pour un entier k donné on ait $J_k(0) = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$ et montrons que le prédicat est héréditaire c'est-à-dire que $J_{k+1}(0) = \dfrac{2^{2(k+1)}((k+1)!)^2}{(2(k+1)+1)!}$. On a d'après la question $2-a$,

$$\begin{aligned}
J_{k+1}(0) &= \frac{2(k+1)}{2(k+1)+1} J_k(0) = \frac{2(k+1)}{2(k+1)+1}\,\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} \\
&= \underbrace{\frac{2(k+1)}{(2k+2)}}_{=1}\,\frac{2(k+1)}{2k+3}\,\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2(k+1)}((k+1)!)^2}{(2(k+1)+1)!}.
\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que $J_n(0) = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 - a) Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à la fonction cosinus entre 0 et y pour $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ fixé : il existe un réel c dans l'intervalle d'extrémités 0 et y tel que

$$\cos(y) = \cos(0) + y\cos'(0) + \frac{y^2}{2}\cos''(c) = 1 - \frac{y^2}{2}\cos(c).$$

Puisque $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $0 \leqslant \cos(c) \leqslant 1$. On en déduit que

$$0 \leqslant 1 - \cos y = \frac{y^2}{2}\cos(c) \leqslant \frac{y^2}{2}.$$

On peut bien entendu étudier la fonction $y \mapsto 1 - \cos y - \frac{1}{2}y^2$ et déterminer son signe sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mais c'est beaucoup plus long.

b) J_n est continue en 0 si $\lim\limits_{x\to 0} J_n(x) = J_n(0)$. On a

$$J_n(0) - J_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \ (1-\cos(tx)) \ dt.$$

Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a $tx \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour toute valeur de t comprise entre 0 et 1 et

$$0 \leqslant J_n(0) - J_n(x) \leqslant \int_0^1 (1-t^2)^n \frac{(tx)^2}{2} \ dt = \frac{x^2}{2}\int_0^1 t^2(1-t^2)^n \ dt = C\ \frac{x^2}{2}$$

où C est une constante réelle. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x\to 0} J_n(x) - J_n(0) = 0$$

et par conséquent que J_n est continue en 0.

On peut également utiliser la première formule de la moyenne pour conclure à la continuité de J_n en 0. Il existe un réel $c \in]0,1[$ tel que

$$J_n(0) - J_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \ (1-\cos(tx)) \ dt = (1-c^2)^n \ (1-\cos(cx))$$

et $\lim\limits_{x\to 0}(1-c^2)^n \ (1-\cos(cx)) = 0$.

4 - J_n est dérivable en 0 si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{J_n(x) - J_n(0)}{x}$ existe. On a montré que pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on avait

$$0 \leqslant J_n(0) - J_n(x) \leqslant \frac{x^2}{2}\int_0^1 t^2(1-t^2)^n \ dt.$$

On en déduit que pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leqslant \frac{J_n(0) - J_n(x)}{x} \leqslant \frac{x}{2}\int_0^1 t^2(1-t^2)^n \ dt$$

et par conséquent que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{J_n(x)-J_n(0)}{x} = 0$. Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0[$ on a

$$\frac{x}{2}\int_0^1 t^2(1-t^2)^n \, dt \leqslant \frac{J_n(0)-J_n(x)}{x} \leqslant 0$$

et par conséquent $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{J_n(x)-J_n(0)}{x} = 0$. Finalement $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{J_n(x)-J_n(0)}{x} = 0$ et $J_n'(0) = 0$.

Solution de l'exercice 10

1 - $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$.

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = 1$.

$I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = 1/2 \int_0^{\pi/2} 1+\cos(2t) \, dt = \frac{1}{2}\Big[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

Considérons le changement de variable $\phi : x \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \frac{\pi}{2} - x$. L'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \, dt = \int_{\phi(\pi/2)}^{\phi(0)} \cos^n(t) \, dt = \int_{\pi/2}^0 - \cos^n(\pi/2 - x) \, dx \\ &= -\int_{\pi/2}^0 \sin^n(x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \, dx. \end{aligned}$$

2 - Intégrons par parties, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) \ \sin(t) \, dt \\ &= \Big[-\cos(t)\sin^n(t)\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} n\sin^{n-1}(t) \ \cos^2(t) \, dt \\ &= n\int_0^{\pi/2} n\sin^{n-1}(t) \ (1-\sin^2(t)) \, dt \\ &= n\left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(t) \, dt - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t) \, dt\right) \\ &= n(I_{n-1} - I_{n+1}). \end{aligned}$$

On en déduit la relation $(\mathcal{R}) \quad (n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$.

Vérifions par un raisonnement par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2p} = \frac{P_1(p)}{P_2(p)}\frac{\pi}{2}$$

La relation est vraie pour $p = 1$ puisque

$$I_2 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \frac{P_1(1)}{P_2(1)}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2}.$$

Supposons la relation vraie pour un entier p donné. On a alors d'après la relation de récurrence $(\mathcal{R})$

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}\, I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{2p+1}{2p+2}\,\frac{P_1(p)}{P_2(p)}$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{2p+1}{2p+2}\,\frac{\prod_{k=1}^{p} 2k-1}{\prod_{k=1}^{p} 2k} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\prod_{k=1}^{p+1}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{p+1} 2k} = \frac{\pi}{2}\,\frac{P_1(p+1)}{P_2(p+1)}.$$

La relation

$$I_{2p+1} = \frac{P_2(p)}{P_1(p+1)}$$

se démontre de la même manière en ayant recours à un raisonnement par récurrence.

3 - Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$. On en déduit que

$$0 \leqslant \cos^n(t) = \cos(t)\, \cos^{n-1}(t) \leqslant \cos^{n-1}(t).$$

Cela implique que

$$0 \leqslant I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t = I_n.$$

La suite $(I_n)_n$ est donc décroissante et minorée par 0 ; on en déduit[56] qu'elle converge vers un réel ℓ.

4 - Puisque la suite $(I_n)_n$ converge, il en est de même de toutes les suites extraites de la suite $(I_n)_n$. En particulier la suite extraite correspondant aux termes d'indice pair $(I_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et la suite extraite correspondant aux termes d'indice impair $(I_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers ℓ. On en déduit que la suite de terme général $u_p = \dfrac{I_{2p-1}}{I_{2p}}$ converge vers 1. Or

$$u_p = \frac{I_{2p-1}}{I_{2p}} = \frac{\dfrac{P_2(p-1)}{P_1(p)}}{\dfrac{P_1(p)}{P_2(p)}\dfrac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\frac{P_2(p-1)P_2(p)}{P_1(p)^2} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2p}\left(\frac{P_2(p)}{P_1(p)}\right)^2$$

$$= \frac{1}{p\pi}\left(\prod_{k=1}^{p} 2k \Big/ \prod_{k=1}^{p}(2k-1)\right)^2.$$

Comme la suite $(u_p)_p$ converge vers 1, on en déduit la formule de Wallis,

$$\lim_{n\longmapsto+\infty} \frac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^{n} 2k \Big/ \prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)^2 = \pi.$$

---

[56] Voir le théorème 5.2 p. 189.

5 - Considérons la suite de terme général $w_n = (n+1)I_nI_{n+1}$. D'après la relation de récurrence $(\mathcal{R})$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}I_n\right) = (n+1)I_nI_{n+1} = w_n.$$

La suite $(w_n)_n$ est donc une suite constante. On a $w_0 = I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$ donc $w_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs

$$w_n = (n+1)I_nI_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} nI_n^2.$$

On en déduit que $\frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} nI_n^2$ autrement dit que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Solution de l'exercice 11

1 - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction $g : t \longmapsto \frac{\ln(1+tx)}{1+t^2}$ est continue sur l'intervalle $[0,x]$ en tant que quotient de deux fonctions continues sur $[0,x]$, la fonction au dénominateur ne s'annulant pas. On en déduit par la première formule de la moyenne qu'il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que

$$f(x) = \int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t = x\ g(c) = x\ \frac{\ln(1+cx)}{1+c^2}.$$

Lorsque x tend vers 0, c tend vers 0 et, puisque $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$, on en déduit que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\,g(c) = 0.$$

L'application f est donc bien continue à droite en 0.

2 - a) On a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{x+h} \frac{\ln(1+t(x+h))}{1+t^2}\ \mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^x \frac{\ln(1+tx)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_0^x \frac{\ln(1+t(x+h))}{1+t^2}\ \mathrm{d}t + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{\ln(1+t(x+h))}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&\quad - \frac{1}{h}\int_0^x \frac{\ln(1+tx)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\Big(\ln(1+(x+h)t) - \ln(1+xt)\Big)\ \mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{\ln(1+(x+h)t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= I_2(h) + I_1(h).
\end{aligned}$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $h > -x$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1+(x+h)t)}{1+t^2}$ est continue sur $[x, x+h]$ en tant que quotient de deux fonctions continues sur $[x, x+h]$, la fonction au dénominateur ne s'annulant pas. On en déduit par la première formule de la moyenne qu'il existe un réel $c \in]x, x+h[$ tel que

$$I_1(h) = \frac{\ln(1+(x+h)c)}{1+c^2}.$$

Lorsque h tend vers 0, le réel c tend vers x et par conséquent

$$\lim_{h \to 0} I_1(h) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}.$$

c) La fonction rationnelle $t \mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)(1+xt)}$ admet une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)} = \frac{\alpha t + \beta}{1+t^2} + \frac{\gamma}{1+xt},$$

où les coefficients α, β, γ sont déterminés en utilisant les techniques présentées au chapitre 7. On obtient

$$\gamma = -\frac{x}{x^2+1}, \quad \beta = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{x^2+1}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \alpha \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \beta \int_0^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t + \gamma \int_0^x \frac{1}{1+xt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\alpha}{2}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^x + \beta\Big[\arctan(t)\Big]_0^x + \frac{\gamma}{x}\Big[\ln(1+xt)\Big]_0^x \\
&= \frac{\alpha}{2}\ln(1+x^2) + \beta \arctan(x) + \frac{\gamma}{x}\ln(1+x^2) \\
&= \frac{x}{x^2+1}\arctan(x) - \frac{1}{2(1+x^2)}\ln(1+x^2).
\end{aligned}$$

d) Considérons, pour $t \in \mathbb{R}^+$ fixé, l'application $\psi_t : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \ln(1+xt)$. L'application ψ_t est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\psi_t'(x) = \frac{t}{1+xt}, \quad \psi_t''(x) = -\frac{t^2}{(1+xt)^2}.$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, il existe un réel $c \in]x, x+h[$ tel que

$$\psi_t(x+h) - \psi_t(x) = h\,\psi_t'(x) + \frac{h^2}{2}\,\psi_t''(c),$$

autrement dit, il existe un réel $c \in]x, x+h[$ tel que

$$\ln(1+(x+h)t) - \ln(1+xt) = \frac{th}{1+xt} - \frac{t^2h^2}{2(1+ct)^2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
I_2(h) &= \frac{1}{h}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\Big(\ln(1+(x+h)t) - \ln(1+xt)\Big)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\Big(\psi_t(x+h) - \psi_t(x)\Big)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\Big(\frac{th}{1+xt} - \frac{t^2h^2}{2(1+ct)^2}\Big)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}\ \mathrm{d}t - \frac{h}{2}\int_0^x \frac{t}{(1+ct)^2(1+t^2)}\ \mathrm{d}t \\
&= \phi(x) - \frac{h}{2}R(h)
\end{aligned}$$

où $R(h) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+ct)^2(1+t^2)}\ \mathrm{d}t$. Puisque $x > 0$, $h > -x$ et que $c \in]x, x+h[$, $t \in]0, x[$, on a $1 + ct \geqslant 1$ et $1 + t^2 \geqslant 1$. On en déduit que

$$0 \leqslant \frac{t^2}{(1+ct)^2(1+t^2)} \leqslant t^2$$

et par conséquent que $0 \leqslant R(h) \leqslant \displaystyle\int_0^x t^2\ \mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}$.

e) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = I_1(h) + I_2(h)$. Des questions précédentes, on déduit que :

- $\lim_{h\to 0} I_2(h) = \phi(x)$ car $\lim_{h\to 0} \frac{1}{2}hR(h) = 0$ puisqu'il s'agit du produit d'une fonction tendant vers 0 par une fonction bornée ;
- $\lim_{h\to 0} I_1(h) = \ln(1+x^2)/(1+x^2)$.

Ainsi, la quantité $\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$ a une limite lorsque h tend vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée en $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \phi(x).$$

3 - Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \phi(x)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^x \left(\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} + \phi(t)\right)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \left(\frac{t}{t^2+1}\arctan(t) + \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)}\right)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \big(u'(t)\, v(t) + u(t)\, v'(t)\big)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

où $u : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{1}{2}\arctan(t)$ et $v : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \ln(1+t^2)$. On a donc

$$f(x) = \int_0^x (u(t)\, v(t))'\ \mathrm{d}t = u(x)v(x) - u(0)v(0) = \frac{1}{2}\arctan(x)\ln(1+x^2).$$

CHAPITRE 19

L'intégrale généralisée

Au chapitre précédent nous avons étudié l'intégrale d'une fonction définie sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'intégration d'une fonction définie sur un intervalle I qui n'est pas fermé ou qui n'est pas borné, c'est-à-dire sur un intervalle de l'une des formes suivantes,

1. $I = [a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,
2. $I =]a, b]$ où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$,
3. $I =]a, b[$ où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,.

En d'autres termes, on cherche à intégrer une fonction sur un intervalle non borné ou à intégrer sur un intervalle d'extrémités a et b une fonction non bornée au voisinage de a ou de b. Cette intégrale est qualifiée *d'intégrale généralisée* ou encore *d'intégrale impropre*.

19.1 Nature d'une intégrale généralisée

DÉFINITION 19.1 (Fonction localement intégrable)
Soit f une application définie sur un intervalle I. On dit que f est localement intégrable (au sens de Riemann) sur I si pour tout $(\alpha, \beta) \in I^2$ la restriction de f à l'intervalle fermé et borné $[\alpha, \beta]$ est Riemann-intégrable.

Les résultats que nous avons établis pour l'intégrale de Riemann conduisent aux critères suivants permettant d'établir qu'une fonction est localement intégrable.

- Il résulte de la proposition 18.2, page 897, que toute fonction continue sur I est localement intégrable sur I.
- Il résulte de la proposition 18.3, page 898, que toute fonction continue par morceaux sur I est localement intégrable sur I.
- Il résulte de l'exercice 2, page 898, que toute fonction monotone sur I est localement intégrable sur I.

Il résulte également des propriétés de l'intégrale de Riemann que l'ensemble des fonctions localement intégrables sur un intervalle I donné est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 19.2 (Nature d'une intégrale généralisée)

✗ *Soit f une application localement intégrable sur $[a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si la fonction*

$$F : x \in [a, b[\longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

admet une limite (finie) lorsque x tend vers b. Cette limite est appelée intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ et elle est notée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$. Si cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente.

✗ *Soit f une application localement intégrable sur $]a, b]$ où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est convergente si la fonction*

$$F : x \in]a, b] \longmapsto \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

admet une limite (finie) lorsque x tend vers a. Cette limite est appelée intégrale généralisée de f sur $]a, b]$ et elle est notée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$. Si cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est divergente.

Remarque La définition 19.2 pour l'intégrale généralisée d'une fonction f localement intégrable sur l'intervalle $[a, b[$ (resp. $]a, b]$) est cohérente avec la définition donnée pour l'intégrale d'une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ au sens où si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ alors la valeur de l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est égale à la limite lorsque x tend vers b (resp. a) de $F(x)$.

Définition 19.3 *Soit f une application localement intégrable sur $]a, b[$ où $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et soit $c \in]a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente si les 2 intégrales $\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$ sont convergentes*[(1)]*. Dans ce cas, on appelle intégrale généralisée de f sur $]a, b[$ le réel noté $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ qui est défini par*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Considérons une fonction f définie sur un intervalle $I =]a, b[$ privé d'un nombre fini de valeurs $\{c_k\}_{k=1,\dots,n}$ avec

$$a < c_1 < \cdots < c_n < b.$$

(1) On peut établir que la convergence de $\int_a^b f(x)\ dx$ ne dépend pas du choix de c.

On pose $c_0 = a$ et $c_{n+1} = b$. Si, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, f est localement intégrable sur chacun des intervalles $I_k =]c_k, c_{k+1}[$ et si les intégrales $\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t$ sont convergentes alors on dit que f admet une intégrale généralisée sur $]a, b[$ convergente et on pose

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Le principe de l'étude de la nature d'une intégrale généralisée consiste donc à découper l'intervalle d'intégration en autant de sous-intervalles que nécessaire de sorte que f soit localement Riemann-intégrable sur chacun de ces sous-intervalles et à étudier la nature de chacune des intégrales généralisées. Si elles sont toutes convergentes alors l'intégrale généralisée de f sur I est convergente. Si l'une des intégrales généralisées de f sur I_k diverge alors l'intégrale généralisée de f sur I est divergente.

Exemples

1. L'application $f : x \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{x}$ est continue, donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$. On a pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \ln(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty.$$

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ est donc divergente.

2. L'application $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est continue, donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

L'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est donc convergente et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = 1$.

3. L'application $f : x \in]0, 1] \mapsto 1/\sqrt{x}$ est continue, donc localement intégrable sur $]0, 1]$. Pour tout réel $x \in]0, 1]$, on a

$$F(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} F(x) = 2.$$

L'intégrale de f sur $]0, 1]$ est donc convergente et $\int_0^1 1/\sqrt{t}\ \mathrm{d}t = 2$.

4. L'application $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sin(x)$ est continue, donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$. On a pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$,

$$F(x) = \int_0^x \sin(t)\ \mathrm{d}t = \left[-\cos(t)\right]_0^x = 1 - \cos(x)$$

et cosinus n'a pas de limite en $+\infty$. L'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est donc divergente.

5. L'application $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto 1/(1+x^2)$ est continue, donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan(t)\Big]_0^x = \arctan(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale de f sur $[0,+\infty[$ est donc convergente et $\int_0^{+\infty} 1/(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \pi/2$. De même, f étant continue sur $]-\infty,0]$, elle est localement intégrable sur $]-\infty,0]$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^-$, on a

$$F(x) = \int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan(t)\Big]_x^0 = -\arctan(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale de f sur $]-\infty,0]$ est convergente et $\int_{-\infty}^0 1/(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \pi/2$. On en déduit que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi.$$

Exercice 1 Déterminer la nature et la valeur éventuelle des intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|1-t^2|}}\,\mathrm{d}t$

Interprétation graphique

$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ représente l'aire algébrique $\mathcal{A}_x$ (hachurée sur la figure ci-contre) comprise entre la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites parallèles à l'axe des ordonnées et passant par les points des coordonnées $(a,0)$ et $(x,0)$. Dire que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge signifie que lorsque x tend vers $+\infty$ l'aire $\mathcal{A}_x$ tend vers une limite finie. On a ainsi l'exemple d'un domaine dont le périmètre est infini mais dont l'aire finie.

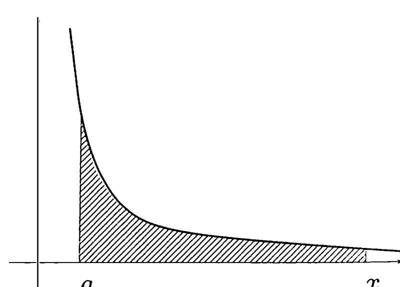


Fig. 1 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ représente l'aire algébrique hachurée.

Remarques

1. Il est inexact d'écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Si c'était le cas, toute fonction impaire continue sur $\mathbb{R}$ aurait une intégrale convergente égale à zéro. Par exemple, l'intégrale sur $[0,+\infty[$ de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ est divergente (voir l'exemple 4 page 967) et l'intégrale sur $]-\infty,0[$ est aussi

divergente. L'intégrale sur $\mathbb{R}$ de f est donc divergente alors que $\int_{-x}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Toutefois, si l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge alors la valeur de l'intégrale est égale à $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$.

2. Avant de calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle donné il faut s'assurer que la fonction considérée est bien intégrable sur ledit intervalle. Ainsi l'application $x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1/x$ n'est pas localement Riemann-intégrable sur $[-1, 1]$. En effet, les intégrales $\int_{-1}^{0} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ et $\int_{0}^{1} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ sont divergentes, voir l'exemple 1 page 967. Un calcul sans précaution pourrait conduire à écrire

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \Big[\ln(|t|)\Big]_{-1}^{1} = 0$$

ce qui est bien sûr inexact.

Un premier critère pour déterminer la nature d'une intégrale généralisée est fourni par la proposition suivante (on a un énoncé similaire concernant l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t$).

Proposition 19.1 *Soit f une fonction localement Riemann-intégrable sur $[a, +\infty[$. Si f admet une limite non nulle en $+\infty$ alors l'intégrale généralisée $\int_{a}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.*

Démonstration Supposons que la fonction f localement Riemann-intégrable sur $[a, +\infty[$ admette pour limite en $+\infty$ le réel strictement positif ℓ et montrons que dans ce cas l'intégrale indéfinie $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Le cas où $\ell < 0$ se déduira de la situation considérée en considérant l'application $-f$.

Puisque[(2)] f admet pour limite ℓ en $+\infty$,

$$\exists \tau \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \,]a, +\infty[\quad \big(x \geqslant \tau \implies |f(x) - \ell| \leqslant \tfrac{1}{2}\,\ell\big).$$

Soit $\eta = \max\{a, \tau\}$. Pour tout $x \in [\eta, +\infty[$ on a $\frac{1}{2}\,\ell \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}\,\ell$ et par conséquent

$$\underbrace{\int_{\eta}^{x} \tfrac{1}{2}\,\ell\ \mathrm{d}t}_{= \frac{1}{2}\,\ell(x-\eta)} \leqslant \int_{\eta}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_{\eta}^{x} \tfrac{3}{2}\,\ell\ \mathrm{d}t}_{= \frac{3}{2}\,\ell(x-\eta)}\ .$$

Désignons par C la valeur de l'intégrale de Riemann de f entre a et η ; pour tout $x \in [\eta, +\infty[$, on a

$$F(x) = \int_{a}^{\eta} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{\eta}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = C + \int_{\eta}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$$

(2) Voir p. 601 ; on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}\,\ell$.

et par conséquent,

$$\tfrac{1}{2}\,\ell(x-\eta)+C \leqslant F(x) \leqslant \tfrac{3}{2}\,\ell(x-\eta)+C.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\,\ell(x-\eta)+C=+\infty$, le théorème 13.2, page 607, indique que F a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. L'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est par conséquent divergente. □

La proposition 19.1 indique que si f est une fonction localement Riemann-intégrable sur $[a,+\infty[$ admettant une limite en $+\infty$ alors pour que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, il est nécessaire que f tende vers 0 en $+\infty$. La condition n'est bien entendu pas suffisante comme le prouve l'exemple de l'intégrale généralisé $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ qui diverge, voir page 967. Par ailleurs, f peut ne pas avoir de limite en $+\infty$ et cependant avoir une intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ convergente. C'est le cas par exemple de l'intégrale généralisée sur $[1,+\infty[$ de $f : x\in[1,+\infty[\mapsto \frac{x}{1+\sin^2(x)\operatorname{sh}(x)}$ qui converge bien que f soit sans limite en $+\infty$ (f est une fonction positive, non bornée qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$).

Nous étudierons ultérieurement d'autres critères permettant d'établir la nature d'une intégrale généralisée. Nous allons dans un premier temps étendre au cas de l'intégrale généralisée certains résultats vus au chapitre précédent pour l'intégrale de Riemann et qui sont utiles pour les calculs d'intégrales généralisées.

19.2 Calcul des intégrales généralisées

On retrouve pour l'intégrale généralisée les propriétés de l'intégrale de Riemann (linéarité, relation de Chasles, etc) données à la section 18.2.3. Nous ne les redonnons pas. Nous allons présenter la formule de changement de variable et la formule d'intégration par parties pour l'intégrale généralisée.

19.2.1 Formule de changement de variable

Proposition 19.2 (Formule du changement de variable)
Soient $(a,b,\alpha,\beta)\in\overline{\mathbb{R}}^4$, ϕ une bijection de $]a,b[$ dans $]\alpha,\beta[$ de classe $\mathcal{C}^1$ et f une application continue sur $]\alpha,\beta[$. L'intégrale généralisée de f sur $]\alpha,\beta[$ est convergente si et seulement si l'intégrale généralisée de $(f\circ\phi)\,\phi'$ sur $]a,b[$ est convergente. De plus, lorsque les intégrales généralisées convergent, on a

$$\int_\alpha^\beta f(x)\ \mathrm{d}x=\int_a^b f(\phi(t))\times\phi'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration Puisque ϕ est une bijection de $]a,b[$ dans $]\alpha,\beta[$ qui est continue, il s'agit nécessairement d'une application strictement monotone[(3)]. D'après

[(3)] Voir l'exercice 14 p. 640.

la proposition 14.1, page 657, sa bijection réciproque ϕ^{-1} est une application continue et strictement monotone sur $]\alpha, \beta[$, de même sens de variation que ϕ. Nous allons supposer que ϕ est strictement croissante ; dans le cas où ϕ est strictement décroissante on peut effectuer un raisonnement en tout point analogue. Sous cette hypothèse, on a $\lim_{y \to a^+} \phi(y) = \alpha$ et $\lim_{y \to b^-} \phi(y) = \beta$.

$\trianglerighteq$ Supposons que l'intégrale généralisée de f sur $]\alpha, \beta[$ soit convergente et considérons un réel $c \in]a, b[$. D'après la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(\phi(t)) \times \phi'(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^c f(\phi(t)) \times \phi'(t) \, \mathrm{d}t + \int_c^b f(\phi(t)) \times \phi'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Soit $y \in]a, c[$; d'après les hypothèses de la proposition, l'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[y, c]$ et f est continue sur $[y, c]$. La formule du changement de variable pour l'intégrale de Riemann[4] indique que

$$F(y) = \int_y^c f(\phi(t)) \times \phi'(t) \, \mathrm{d}t = \int_{\phi(y)}^{\phi(c)} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Puisque $\lim_{y \to a^+} \phi(y) = \alpha$ et que f est Riemann-intégrable sur $]\alpha, \phi(c)]$, on a $\lim_{y \to a^+} F(y) = \int_\alpha^{\phi(c)} f(x) \, \mathrm{d}x$, ce qui d'après la définition 19.2 indique que l'intégrale généralisée $\int_a^c f(\phi(t)) \times \phi'(t) \, \mathrm{d}t$ converge et qu'elle est égale à $\int_\alpha^{\phi(c)} f(x) \, \mathrm{d}x$. On établit de la même manière que l'intégrale généralisée $\int_c^b f(\phi(t)) \times \phi'(t) \, \mathrm{d}t$ converge et qu'elle est égale à $\int_{\phi(c)}^\beta f(x) \, \mathrm{d}x$.

D'après la définition 19.3, on peut donc en conclure que si l'intégrale de f sur $]\alpha, \beta[$ est convergente alors l'intégrale généralisée de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur $]a, b[$ est convergente et

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\phi(t)) \times \phi'(t) \, \mathrm{d}t &= \int_a^c f(\phi(t)) \times \phi'(t) \, \mathrm{d}t + \int_c^b f(\phi(t)) \times \phi'(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_\alpha^{\phi(c)} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\phi(c)}^\beta f(x) \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x) \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$\trianglerighteq$ Réciproquement, supposons que l'intégrale généralisée de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur $]a, b[$ soit convergente et montrons que l'intégrale généralisée $\int_\gamma^\beta f(x) \, \mathrm{d}x$ est convergente. D'après la relation de Chasles, étant donné un réel $\gamma \in]\alpha, \beta[$, on a

$$\int_\alpha^\beta f(x) \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\gamma f(x) \, \mathrm{d}x + \int_\gamma^\beta f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Soit $z \in]\alpha, \gamma[$; puisque ϕ est une bijection de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$, il existe un unique réel $c \in]a, b[$ tel que $\gamma = \phi(c)$ et il existe un unique réel $y \in]a, c[$ tel que $z = \phi(y)$. Comme ϕ est strictement croissante, on a $y < c$. D'après les

[4] Voir le théorème 18.2 p. 921.

hypothèses de la proposition, l'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[y,c]$ et f est continue sur $[z,\gamma]$. La formule du changement de variable pour l'intégrale de Riemann[5] indique que

$$F(z) = \int_z^\gamma f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\phi(y)}^{\phi(c)} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_y^c f(\phi(t))\,\phi'(t)\ \mathrm{d}t$$
$$= \int_{\phi^{-1}(z)}^c f(\phi(t))\,\phi'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Comme $\lim_{z\to\alpha^+} \phi^{-1}(z) = a$ et que $(f\circ\phi)\times\phi'$ est Riemann-intégrable sur $]a,c]$, on a $\lim_{z\to\alpha^+} F(z) = \int_a^c f(\phi(t))\,\phi'(t)\ \mathrm{d}t$. D'après la définition 19.2, cela indique que l'intégrale généralisée $\int_\alpha^\gamma f(x)\ \mathrm{d}x$ est convergente et qu'elle vaut $\int_a^c f(\phi(t))\times\phi'(t)\ \mathrm{d}t$. On vérifie de la même manière que l'intégrale généralisée $\int_\gamma^\beta f(x)\ \mathrm{d}x$ est convergente et qu'elle vaut $\int_c^b f(\phi(t))\times\phi'(t)\ \mathrm{d}t$.

D'après la définition 19.3, on a peut donc en conclure que si l'intégrale de $(f\circ\phi)\times\phi'$ sur $]a,b[$ est convergente alors l'intégrale généralisée de f sur $]\alpha,\beta[$ est convergente et

$$\int_\alpha^\beta f(x)\ \mathrm{d}x = \int_\alpha^\gamma f(x)\ \mathrm{d}x + \int_\gamma^\beta f(x)\ \mathrm{d}x$$
$$= \int_a^c f(\phi(t))\ \phi'(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(\phi(t))\ \phi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(\phi(t))\ \phi'(t)\ \mathrm{d}t.$$

La proposition est démontrée. □

Exemples

1. Intéressons-nous à la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{sh}^3(x)}\ \mathrm{d}x$ en utilisant la fonction de changement de variable $\phi : t\in[\mathrm{e},+\infty[\mapsto \ln(t)\in[1,+\infty[$. L'application $f : x\in[1,+\infty[\mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{sh}^3(x)}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et par conséquent localement Riemann-intégrable sur cet intervalle. L'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ et il s'agit d'une bijection. D'après la formule du changement de variable, les intégrales généralisées suivantes sont de même nature et elles sont égales si elles convergent :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{sh}^3(x)}\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_\mathrm{e}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\ln(t)}}{\mathrm{sh}^3(\ln(t))}\ \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Pour tout $t\in[\mathrm{e},+\infty[$, on a

$$\frac{\mathrm{e}^{-\ln(t)}}{t\ \mathrm{sh}^3(\ln(t))} = \frac{8t}{(t^2-1)^3}.$$

[5] Voir le théorème 18.2 p. 921.

Or, pour tout $T \in]\mathrm{e}, +\infty[$, on a

$$F(T) = \int_{\mathrm{e}}^{T} \frac{8t}{(t^2-1)^3}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{(t^2-1)^2}\right]_{\mathrm{e}}^{T} = \frac{2}{(\mathrm{e}^2-1)^2} - \frac{2}{(T^2-1)^2}.$$

Comme $\lim_{T\to+\infty} F(T) = 2\,(\mathrm{e}^2-1)^{-2}$, on en déduit que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{sh}^3(x)}\ \mathrm{d}x$ converge et vaut $2\,(\mathrm{e}^2-1)^{-2}$.

2. Intéressons-nous à la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{sh}^3(x)}\ \mathrm{d}x$ en utilisant la fonction de changement de variable $\phi : t \in]1, \mathrm{e}[\mapsto \ln(t) \in]0,1[$. L'application $f : x \in]0,1] \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{sh}^3(x)}$ est continue sur $]0,1]$ et par conséquent localement Riemann-intégrable sur cet intervalle. L'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ et il s'agit d'une bijection. D'après la formule du changement de variable, les intégrales généralisées suivantes sont de même nature :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{sh}^3(x)}\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{e}^{-\ln(t)}}{\mathrm{sh}^3(\ln(t))}\,\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Pour tout $T \in]0,1[$, on a

$$F(T) = \int_T^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{e}^{-\ln(t)}}{\mathrm{sh}^3(\ln(t))}\ \mathrm{d}t = \int_T^{\mathrm{e}} \frac{8t}{(t^2-1)^3}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{(t^2-1)^2}\right]_T^{\mathrm{e}}$$
$$= \frac{2}{(T^2-1)^2} - \frac{2}{(\mathrm{e}^2-1)^2}.$$

Comme $F(T)$ n'a pas de limite quand T tend vers 1, on peut affirmer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{sh}^3(x)}\ \mathrm{d}x$ diverge.

3. Intéressons-nous à l'intégrale généralisée $\int_0^1 \sin(1/x)\ \mathrm{d}x$. L'application $\phi : t \in]1, +\infty[\mapsto 1/t \in]0,1[$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la formule du changement de variable, l'intégrale généralisée $\int_0^1 \sin(1/x)\ \mathrm{d}x$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \sin(t)/t^2\ \mathrm{d}t$ converge. Nous établirons à la section 19.4 que cette dernière intégrale converge.

Exercice 2 En utilisant la proposition 19.2, montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

19.2.2 Intégration par parties

Proposition 19.3 (Formule d'intégration par parties)
Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et u et v deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ telles que la fonction $t \mapsto u(t)\,v(t)$ possède une limite à droite en a et une limite à gauche en b. Les deux intégrales généralisées $\int_a^b u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_a^b u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t$ sont de même nature. De plus, si elles convergent, on a

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{t\to b^-} \big(u(t)\,v(t)\big) - \lim_{t\to a^+} \big(u(t)\,v(t)\big) - \int_a^b u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration Soient $(x, y, c) \in]a, b[^3$ tel que $x < c < y$. D'après les hypothèses de la proposition, les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, c]$ et sur $[c, y]$. En utilisant la formule d'intégration par parties pour l'intégrale de Riemann[6], on obtient

$$\int_x^c u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t = u(c)\,v(c) - u(x)\,v(x) - \int_x^c u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t \tag{1}$$

et $$\int_c^y u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t = u(y)\,v(y) - u(c)\,v(c) - \int_c^y u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Supposons que l'intégrale généralisée $\int_a^b u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t$ converge ; d'après la définition 19.3, les deux intégrales généralisées $\int_a^c u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_c^b u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t$ sont convergentes. D'après la définition 19.2, cela implique que la quantité $\int_x^c u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t$ a une limite lorsque x tend vers a et que la quantité $\int_c^b u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t$ a une limite lorsque x tend vers b. Comme par hypothèse la fonction $t \mapsto u(t)\,v(t)$ possède une limite à droite en a et une limite à gauche en b, on déduit de la relation (1) que l'intégrale généralisée $\int_a^c u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t$ converge et on déduit de la relation (2) que l'intégrale généralisée $\int_c^b u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t$ converge. Comme les deux intégrales généralisées $\int_a^c u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_c^b u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t$ convergent, la définition 19.3 indique que l'intégrale généralisée $\int_a^b u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t$ converge elle aussi. De plus, en considérant les limites lorsque x tend vers a et lorsque y tend vers b dans les relations (1) et (2), on obtient

$$\int_a^c u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t = u(c)\,v(c) - \lim_{t\to a^+}\big(u(t)\,v(t)\big) - \int_a^c u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t,$$

et $$\int_c^b u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{t\to b^-}\big(u(t)\,v(t)\big) - u(c)\,v(c) - \int_c^b u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t.$$

En sommant ces deux relations, on établit que

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{t\to b^-}\big(u(t)\,v(t)\big) - \lim_{t\to a^+}\big(u(t)\,v(t)\big) - \int_a^b u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, en échangeant le rôle des deux intégrales de chacun des membres des équations (1) et (2), on établit de la même manière que ce qui vient d'être fait que si l'intégrale généralisée $\int_a^b u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t$ converge alors l'intégrale généralisée $\int_a^b u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t$ converge aussi. Cela permet d'affirmer que les deux intégrales généralisées sont de même nature. □

Remarque Si on note $\big[u(t)\,v(t)\big]_a^b$ le terme $\lim_{t\to b^-} u(t)\,v(t) - \lim_{t\to a^+} u(t)\,v(t)$ dans la proposition 19.3 alors la formule d'intégration par parties pour une intégrale généralisée a une expression analogue à celle donnée au théorème 18.1, page 919, pour l'intégrale de Riemann.

---

[6] Voir le théorème 18.1 p. 919.

Exemples

1. Appliquons la formule d'intégration par parties pour calculer $\int_0^1 (\ln(t))^2 \, \mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto (\ln(t))^2$ est continue sur $]0,1]$ donc localement intégrable sur $]0,1]$. Considérons les deux applications

$$u : t \in]0,1] \longmapsto \ln(t) \quad \text{et} \quad v' : t \in]0,1] \longmapsto \ln(t).$$

On a

$$u' : t \in]0,1] \longmapsto 1/t \quad \text{et} \quad v : t \in]0,1] \longmapsto t\ln(t) - t.$$

Les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et $\lim_{t\to 0^+} u(t)\,v(t) = 0$. De plus, l'intégrale généralisée $\int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ converge puisque

$$\int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(\ln(t) - 1\big)\,\mathrm{d}t = -1 + \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

et il a été établi à l'exercice 1 que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut -1. La formule d'intégration par parties indique que l'intégrale généralisée $\int_0^1 (\ln(t))^2\,\mathrm{d}t$ converge et que

$$\int_0^1 (\ln(t))^2\,\mathrm{d}t = u(1)\,v(1) - \int_0^1 \big(\ln(t) - 1\big)\,\mathrm{d}t = 2.$$

2. Intéressons-nous à l'intégrale généralisée[7] $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sin(t)/t\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ est continue sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$ donc localement intégrable sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$. Posons

$$u : t \in [\tfrac{\pi}{2}, +\infty[\longmapsto 1/t \quad \text{et} \quad v' : t \in [\tfrac{\pi}{2}, +\infty[\longmapsto \sin(t).$$

On a

$$u' : t \in [\tfrac{\pi}{2}, +\infty[\longmapsto -1/t^2 \quad \text{et} \quad v : t \in [\tfrac{\pi}{2}, +\infty[\longmapsto \cos(t).$$

Les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$ et

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} u(t)\,v(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty} u(t)\,v(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\cos(t)}{t} = 0.$$

D'après la proposition 19.3, l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sin(t)/t\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \cos(t)/t^2\,\mathrm{d}t$ converge et on a dans ce cas

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Nous établirons page 990 que l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

[7] On peut étudier de la même manière l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \cos(t)/t\,\mathrm{d}t$ et plus généralement remplacer la borne $\frac{\pi}{2}$ par un réel a strictement positif sans changer les conclusions de l'étude.

19.2.3 Exemples de référence

Les exemples qui suivent sont très importants car ils permettront, par comparaison, d'établir des règles de convergence pour les intégrales généralisées. Dans cette section α et β désignent deux réels.

Intégrales généralisées de Riemann[8]

① $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si $\alpha < 1$, diverge si $\alpha \geqslant 1$

② $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha \leqslant 1$

Justifions ces affirmations en ayant recours à la définition 19.2. Pour tout réel α la fonction $f_\alpha : x \mapsto 1/x^\alpha$ est continue sur $]0,+\infty[$ et par conséquent localement intégrable sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x \in]0,1[$, la quantité

$$F_\alpha(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1 - x^{1-\alpha}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

admet une limite lorsque x tend vers 0 si et seulement si $\alpha < 1$. Par ailleurs, pour tout $x \in]1,+\infty[$, la quantité

$$F_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.
On notera que quelle que soit la valeur du réel α, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge.

③ $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge

④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si $\alpha < 0$, diverge si $\alpha \geqslant 0$

La convergence de l'intégrale $\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ a été établie à l'exercice 1. Justifions la seconde affirmation en ayant recours à la définition 19.2. L'application $x \in [0,+\infty[\mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ est continue et par conséquent localement intégrable sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la quantité

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} x & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha x} - 1\right) & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

a une limite quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si $\alpha < 0$.

[8] On ne confondra pas les intégrales de Riemann définies ici avec la notion d'intégrale au sens de Riemann introduite au chapitre précédent.

⑤ Pour $a \in]1, +\infty[$ fixé, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^\alpha}\, \mathrm{d}t \qquad \begin{array}{ll} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha \leqslant 1 \end{array}$$

⑥ Pour $a \in]0, 1[$ fixé, l'intégrale généralisée

$$\int_0^a \frac{1}{t\,|\ln(t)|^\alpha}\, \mathrm{d}t \qquad \begin{array}{ll} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha \leqslant 1 \end{array}$$

Justifions ces affirmations en ayant recours à la formule du changement de variable pour une intégrale généralisée (proposition 18.1). L'application $\phi : x \in]\ln(a), +\infty[\mapsto \mathrm{e}^x \in]a, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et constitue une bijection. De plus, l'application $f : x \in [a, +\infty[\mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$ est continue et $f(\phi(x))\,\phi'(x) = (\ln(\mathrm{e}^x))^\alpha = x^\alpha$. D'après la formule du changement de variable, les intégrales généralisées

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t\,(\ln(t))^\alpha}\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{\ln(a)}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x$$

sont de même nature. On a établi que l'intégrale généralisée de Riemann $\int_{\ln(a)}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ce qui démontre le premier résultat. De manière très similaire, le changement de variable défini par l'application $\phi : x \in]-\infty, \ln(a)[\mapsto \mathrm{e}^x \in]a, 0[$ permet d'établir que l'intégrale généralisée $\int_0^a \frac{1}{x|\ln(x)|^\alpha}\, \mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

D'une manière plus générale, on a le résultat suivant.

Intégrales généralisées de Bertrand

⑦ Pour $a \in]1, +\infty[$ fixé, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\beta(\ln(x))^\alpha}\, \mathrm{d}x$ converge dans les deux cas suivants

$$\begin{cases} \beta > 1, & \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta = 1, & \alpha > 1 \end{cases}$$

et diverge dans les autres cas.

⑧ Pour $a \in]0, 1[$ fixé, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^\beta\,|\ln(x)|^\alpha}\, \mathrm{d}x$ converge dans les deux cas suivants

$$\begin{cases} \beta < 1, & \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta = 1, & \alpha > 1 \end{cases}$$

et diverge dans les autres cas.

Dans le cas où $\beta = 1$ on retrouve les exemples 5 et 6. L'étude de la nature de ces intégrales généralisées dans le cas où $\beta \neq 1$ sera abordée page 986.

19.3 Critères de convergence

19.3.1 Remarques préliminaires

Soient $(a,b,c) \in \overline{\mathbb{R}}^3$ avec $a < c < b$ et f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $]a,b[$. D'après les définitions 19.2 et 19.3, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'application

$$F : x \in]a,b[\longmapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

possède une limite à droite en a et possède une limite à gauche en b. L'étude de la nature d'une intégrale généralisée se ramène donc à l'étude de l'existence de limites pour l'application F qui est une primitive de f sur $]a,b[$. Toutefois, le calcul de primitives n'étant pas toujours facile ou même possible, il est intéressant de disposer de critères permettant de déterminer la nature d'une intégrale généralisée sans avoir recours à un calcul de primitive. Nous allons présenter dans cette partie quelques critères.

Pour simplifier la présentation des critères, nous allons considérer une intégrale généralisée de la forme $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est localement intégrable sur $[a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Cette hypothèse n'est nullement restrictive car si f est localement intégrable sur $]a,b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on se ramène à la situation considérée par le changement de variable $x = -t$. Si f est localement intégrable sur $]a,b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, on se ramène à la situation considérée en étudiant la convergence des deux intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où $c \in]a,b[$.

Proposition 19.4 *Soient f et g deux applications localement intégrables sur $[a,b[$. Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, si les deux intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent alors l'intégrale généralisée $\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge.*

Démonstration Comme f et g sont deux applications localement intégrables sur $[a,b[$ et que l'ensemble des applications localement intégrables sur un intervalle donné possède une structure d'espace vectoriel, pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ l'application $\lambda f + \mu g$ est localement intégrable sur $[a,b[$. Considérons l'application $F : x \in [a,b[\mapsto \int_a^x \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t$; d'après la définition 19.2, l'intégrale généralisée $\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F a une limite à gauche en b. La linéarité de l'intégrale de Riemann[9] implique que pour tout $x \in [a,b[$, on a $F(x) = \lambda F_1(x) + \mu F_2(x)$ où

$$F_1 : x \in [a,b[\longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F_2 : x \in [a,b[\longmapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

[9] Voir la proposition 18.4 p. 899.

Comme par hypothèse, les deux intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ convergent, d'après la définition 19.2, les fonctions F_1 et F_2 ont une limite à gauche en b. Cela permet d'affirmer, voir la proposition 13.12, page 608, que F a également une limite en b. □

> On sera attentif au fait que l'application $h = \lambda f + \mu g$ peut avoir une intégrale généralisée convergente sur $[a, b[$ sans que les applications f et g aient des intégrales généralisées convergentes sur $[a, b[$.

Afin d'illustrer la mise en garde, considérons la fonction $h : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$. Il s'agit d'une fonction rationnelle dont la décomposition en éléments simples est

$$\frac{2}{1-X^2} = \frac{1}{1+X} + \frac{1}{1-X}.$$

On en déduit que pour tout $x \in]2, +\infty[$,

$$\begin{aligned} H(x) = \int_2^x h(t)\ \mathrm{d}t &= \int_2^x \frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t - \int_2^x \frac{1}{t-1}\ \mathrm{d}t \\ &= \Big[\ln(1+t)\Big]_2^x - \Big[\ln(t-1)\Big]_2^x = -\ln(3) + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right). \end{aligned}$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1-1/x}{1+1/x}\right) = 0$$

et par conséquent $\lim_{x\to+\infty} H(x) = -\ln(3)$. D'après la définition 19.2, on peut affirmer que l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} \frac{2}{1-t^2}\ \mathrm{d}t$ converge et vaut $-\ln(3)$. La décomposition en éléments simples indique aussi que $h = f + g$ où

$$f : x \in [2, +\infty[\longmapsto \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad g : x \in [2, +\infty[\longmapsto \frac{1}{1-x}$$

mais les deux intégrales généralisées $\int_2^{+\infty} \frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t$ et $\int_2^{+\infty} \frac{1}{1-t}\ \mathrm{d}t$ divergent. Dans la situation considérée ici, il est donc faux d'écrire

$$\int_2^{+\infty} \big(f(t) + g(t)\big)\ \mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_2^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t.$$

19.3.2 Critère de Cauchy

Conformément aux considérations de la page 978, on considère uniquement le cas d'applications localement intégrables sur $[a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$.

Proposition 19.5 *Soit f une application localement intégrable sur $[a, b[$. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de réels appartenant à $[a, b[$ et convergeant vers b, la suite de terme général $F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.*

Démonstration D'après la définition 19.2, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'application $F : x \in [a, b[\mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ admet une limite à gauche en b. D''après la proposition 13.11, page 604, l'application F admet une limite à gauche en b si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de réels appartenant à l'intervalle $[a, b[$ et convergeant vers b, la suite de terme général $F(x_n)$ converge. La propriété énoncée découle de ces deux équivalences. $\square$

Remarque Compte tenu de la difficulté pratique de vérifier que pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers b, la suite de terme général $F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, le résultat de la proposition 19.5 est surtout utilisé sous la forme de sa négation. Si on dispose d'une suite $(x_n)_n$ de $[a, b[$ convergeant vers b et telle que la suite de terme général $F(x_n)$ diverge alors on peut en conclure que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.

Exemple Vérifions que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |\sin(t)|/t\ \mathrm{d}t$ diverge. L'application $f : x \in]0, +\infty[\mapsto |\sin(x)|/x$ est continue et admet la valeur 1 pour limite à droite en 0. Elle est donc prolongeable par continuité à l'intervalle $[0, +\infty[$ et par conséquent f est localement intégrable sur $[0, +\infty[$. Considérons la suite $(x_n)_n$ de terme général $x_n = n\pi$ qui tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} F(x_n) &= \int_0^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\ \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\ \mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(t)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi} S_n \end{aligned}$$

où $(S_n)_n$ est la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Nous avons établi page 199 que la suite $(S_n)_n$ diverge. La proposition 19.5 permet de conclure que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |\sin(t)|/t\ \mathrm{d}t$ est divergente.

Le résultat suivant est appelé « critère de Cauchy ». Peu pratique à utiliser pour établir la nature d'une intégrale généralisée, il se révèle néanmoins très utile pour établir d'autres critères plus simples, eux, à manipuler.

THÉORÈME 19.1 (Critère de Cauchy)
Soit f une application localement intégrable sur $[a, b[$. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, si et seulement si,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists X \in \mathbb{R} \quad \forall (u, v) \in [a, b[^2 \quad \left(X < u < v \implies \left|\int_u^v f(t)\ \mathrm{d}t\right| < \varepsilon\right).$$

Démonstration D'après la définition 19.2, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si l'application $F : x \in [a, b[\mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ admet une limite en b, c'est-à-dire[10] s'il existe un réel I tel que

$$\forall \widetilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in [a, b[\quad (|x - b| < \eta \Longrightarrow |F(x) - I| \leqslant \widetilde{\varepsilon})\,. \tag{3}$$

⊵ Supposons que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et établissons le critère de Cauchy. Étant donné un réel strictement positif ε, d'après la relation (3), on a[11]

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in [a, b[\quad \left(|x - b| < \eta \Longrightarrow |F(x) - I| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\right). \tag{4}$$

Soit $(u, v) \in [a, b[^2$ avec $u < v$ tel que $|u - b| < \eta$ et $|v - b| < \eta$. En utilisant la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_u^v f(t)\ \mathrm{d}t\right| &= \left|-\int_a^u f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^v f(t)\ \mathrm{d}t\right| = |F(v) - F(u)| \\ &\leqslant |F(u) - I| + |F(v) - I|\,.\end{aligned}$$

On en déduit, d'après la relation (4) que $\left|\int_u^v f(t)\ \mathrm{d}t\right| < \varepsilon$. Notons $X = b - \eta$; si $(u, v) \in [a, b[^2$ vérifie $X < u < v$ alors on a $|u - b| < \eta$ et $|v - b| < \eta$. Cela permet de conclure que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \ \exists X \in \mathbb{R} \ \ \forall (u, v) \in [a, b[^2 \quad \left(X < u < v \implies \left|\int_u^v f(t)\ \mathrm{d}t\right| < \varepsilon\right). \tag{5}$$

⊵ Réciproquement, supposons que la relation (5) est vraie et montrons que dans ce cas l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge. D'après la proposition 19.5, pour montrer que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, il faut et il suffit de montrer que pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de $[a, b[$ convergeant vers b, la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = F(x_n)$ converge. Pour montrer que la suite $(u_n)_n$ converge, nous allons montrer qu'il s'agit d'une suite de Cauchy[12]. Soit $(x_n)_n$ une suite de réels appartenant à l'intervalle $[a, b[$ et qui converge vers b et soit ε un réel strictement positif fixé. Par hypothèse, voir la relation (5), il existe un réel X tel que

$$\forall (u, v) \in [a, b[^2 \quad \left(X < u < v \implies \left|\int_u^v f(t)\ \mathrm{d}t\right| < \varepsilon\right). \tag{6}$$

Considérons le réel strictement positif $\mu = b - X$. Puisque[13] la suite $(x_n)_n$ converge vers b,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \implies |x_n - b| < \mu)\,.$$

---

[10] Voir la définition 13.2 p. 597.

[11] On prend par exemple $\widetilde{\varepsilon} = \frac{1}{3}\varepsilon$; on a $|F(x) - I| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon < \frac{1}{2}\varepsilon$.

[12] Voir la définition 5.8 p. 198 et le théorème 5.5 p. 199.

[13] Voir la définition 5.1 p. 172.

Pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geqslant N$ et $m \geqslant N$, cette assertion indique que l'on a $X = b - \mu \leqslant x_n \leqslant b$ et $X = b - \mu \leqslant x_m \leqslant b$. D'après la relation (6), on en déduit que si $x_m \neq x_n$ alors

$$\left|F(x_n) - F(x_m)\right| = \left|\int_{x_n}^{x_m} f(t)\ \mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Dans le cas où $x_n = x_m$ on a $|F(x_n) - F(x_m)| = 0 < \varepsilon$. On a donc montré que pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier N tel que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \big((m \geqslant N \ \text{ et } \ n \geqslant N) \implies |F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon\big).$$

Cela établit que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = F(x_n)$ est une suite de Cauchy[12]. La suite $(u_n)_n$ est donc une suite convergente[12], ce qui achève la démonstration. □

19.3.3 Critères de convergence pour les fonctions positives

Remarques préliminaires

Dans un souci de simplicité nous énonçons les critères de convergence pour des fonctions localement intégrables sur l'intervalle[14] $[a, b[$ et positives[15]. Ces critères pourraient être énoncés pour des fonctions négatives puisque l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^b -f(t)\ \mathrm{d}t$ converge. La condition importante pour utiliser les critères que nous allons présenter, est que la fonction soit de signe constant sur l'intervalle d'intégration. Il suffit en fait que la fonction considérée soit de signe constant dans un voisinage à gauche de b. En effet, dans ce cas il existe $c \in [a, b[$ tel que f est de signe constant sur l'intervalle $[c, b[$ et d'après la relation de Chasles

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t;$$

la première intégrale du second membre est une intégrale de Riemann sur un intervalle fermé borné ; la seconde intégrale correspond à une intégrale généralisée pour une fonction de signe constant. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est donc de la même nature que l'intégrale généralisée $\int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Un critère technique

PROPOSITION 19.6 *Soit f une application localement intégrable sur $[a, b[$ à valeurs positives. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in [a, b[$ on ait $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant M$.*

---

[14] Cette situation n'est pas limitative comme cela a été précisé à la page 978.

[15] C'est-à-dire des fonctions définies sur l'intervalle $[a, b[$ telles que : $\forall t \in [a, b[\ f(t) \geqslant 0$.

Démonstration D'après la définition 19.2, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'application $F : x \in [a, b[\mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ a une limite à gauche en b. Comme f est par hypothèse une fonction positive, l'application F est une application croissante[16] car pour tout $(x_1, x_2) \in [a, b[^2$, si $x_1 \leqslant x_2$ alors[17]

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$$

et par conséquent $F(x_1) \leqslant F(x_2)$. Cela implique que lorsque x tend vers b, ou bien $F(x)$ tend vers un réel, ou bien $F(x)$ tend vers $+\infty$. La seconde possibilité est à exclure dans la mesure où par hypothèse l'application F est majorée sur $[a, b[$. Pour l'application F, la propriété d'être majorée est donc équivalente à la propriété d'avoir une limite en b. On peut donc déduire de ces considérations que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si F est majorée sur $[a, b[$, autrement dit si et seulement si[18]

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in [a, b[\qquad \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant M.$$

La proposition est démontrée. □

Le principe de comparaison et ses corollaires

Le théorème suivant donne le principe de base de tous les critères pratiques d'étude de la convergence. On compare la fonction dont on étudie la nature de l'intégrale généralisée à une autre fonction dont on connaît la nature de l'intégrale généralisée.

THÉORÈME 19.2 (Principe de comparaison)
Soient f et g deux applications localement intégrables sur $[a, b[$, positives et telles que $f \leqslant g$.

✗ *Si l'intégrale $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ converge alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.*

✗ *Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge alors l'intégrale $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.*

Démonstration Soient F et G les applications définies sur $[a, b[$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Comme par hypothèse, pour tout $t \in [a, b[$ on a $f(t) \leqslant g(t)$, il en résulte que[19] $F \leqslant G$. D'après la proposition 19.6, si l'intégrale $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ converge

[16] Voir p. 591.
[17] Voir la proposition 18.4 p. 899.
[18] Voir p. 593.
[19] Voir la proposition 18.4 p. 899.

alors G est majorée sur $[a, b[$. Comme $F \leqslant G$, l'application F est elle aussi majorée sur $[a, b[$. D'après la proposition 19.6, cela implique que l'intégrale $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ converge. La première assertion de la proposition est donc démontrée. La seconde assertion qui est la contraposée de la première a la même valeur de vérité. □

Remarque La nature de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ dépend du comportement de f au voisinage de b. Il suffit d'avoir $f \leqslant g$ sur un voisinage à gauche de b, et pas nécessairement sur tout l'intervalle $[a, b[$, pour pouvoir utiliser le théorème 19.2. En effet, s'il existe $c \in [a, b[$ tel que $f \leqslant g$ sur l'intervalle $[c, b[$ alors, d'après la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t;$$

sous l'hypothèse que f est localement intégrable sur $[a, b[$, la première intégrale du second membre est une intégrale de Riemann sur un intervalle fermé borné ; la seconde intégrale correspond à une intégrale généralisée pour laquelle les hypothèses du théorème 19.2 sont satisfaites. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est de la même nature que l'intégrale généralisée $\int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Exemples

1. Intéressons-nous à l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $t^2 \geqslant t$ et la fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Soient $f : x \in [1, +\infty[\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ et $g : x \in [1, +\infty[\mapsto \mathrm{e}^{-x}$; ces deux applications sont continues donc localement Riemann intégrables sur $[1, +\infty[$. Elles sont positives et on a $f \leqslant g$. Pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$G(x) = \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{e} - \frac{1}{\mathrm{e}^x}$$

tend vers e^{-1} quand x tend vers $+\infty$. D'après la définition 19.2, on en déduit que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$ converge. D'après le théorème 19.2, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge également. Comme d'après la relation de Chasles, on a

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$$

et que l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ est de la même nature que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$. On en conclut que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ converge.

2. Intéressons-nous à la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1/\sin(t)\ \mathrm{d}t$. L'application $f : x \in]0, \frac{\pi}{2}] \mapsto 1/\sin(x)$ est positive et continue donc localement Riemann intégrable. Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ on a $0 < \sin(t) \leqslant t$ et par conséquent

$f(t) \geqslant 1/t$. Comme l'intégrale généralisée de Riemann $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1/t \; \mathrm{d}t$ est divergente, le théorème 19.2 indique que l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1/\sin(t) \; \mathrm{d}t$ diverge.

PROPOSITION 19.7 *Soient f et g deux applications définies sur $[a,b[$, à valeurs positives, localement intégrables sur $[a,b[$, telles que la fonction f/g admette le réel ℓ pour limite à gauche en b.*

✗ *Si $\ell \neq 0$ alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t) \; \mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t) \; \mathrm{d}t$ sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.*

✗ *Si $\ell = 0$ alors la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) \; \mathrm{d}t$ implique la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) \; \mathrm{d}t$.*

Démonstration Puisque les fonctions f et g sont positives sur $[a,b[$, on a nécessairement $\ell \in \mathbb{R}^+$.

⊵ Supposons que f/g admette le réel ℓ pour limite à gauche en b, c'est-à-dire supposons que[20]

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall t \in [a,b[\quad \left(b - t \leqslant \eta \implies \left|\frac{f(t)}{g(t)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}\ell$ dans cette assertion, on établit l'existence d'un réel strictement positif η tel que pour tout $t \in [a,b[\cap [b-\eta, b]$, on ait

$$\left|\frac{f(t)}{g(t)} - \ell\right| \leqslant \frac{\ell}{2}.$$

Cela implique que pour t appartenant à l'intervalle $]\min(a, b-\eta), b[$ on a

$$\tfrac{1}{2}\,\ell\, g(t) \leqslant f(t) \leqslant \tfrac{3}{2}\,\ell\, g(t).$$

D'après le principe de comparaison[21], on déduit de cet encadrement que si l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) \; \mathrm{d}t$ converge alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) \; \mathrm{d}t$ converge aussi. On en déduit également que si l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) \; \mathrm{d}t$ diverge alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) \; \mathrm{d}t$ diverge aussi.

⊵ Supposons que f/g admette 0 pour limite à gauche en b, c'est-à-dire, supposons que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall t \in [a,b[\quad \left(b - t \leqslant \eta \implies \left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

En prenant $\varepsilon = 1$ dans l'assertion précédente, on établit l'existence d'un réel strictement positif η tel que pour tout $t \in [a,b[\cap [b-\eta, b]$ on ait $|f(t)/g(t)| \leqslant 1$. Cela implique que pour $t \in]\min(a, b-\eta), b[$ on a

$$0 \leqslant f(t) \leqslant g(t).$$

---

[20] Voir la définition 13.3 p. 613.

[21] Voir le théorème 19.2 p. 983.

D'après le principe de comparaison, on en déduit que si l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ converge alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge aussi. $\square$

Remarques

1. Les assertions la proposition 19.7 peuvent être reformulées de la manière suivante :
   - si $f = \mathcal{O}_b(g)$ alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ sont de même nature ;
   - si $f = o_b(g)$ alors la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ implique la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.
2. En prenant la contraposée de la deuxième assertion de la proposition 19.7, on obtient le résultat suivant : si $\ell = 0$ alors la divergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ implique la divergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

Exemples Intéressons-nous aux intégrales de Bertrand, voir page 977.

1. Soient α, β deux réels avec $\beta > 1$ et f l'application définie sur $[a, +\infty[$ (où $a > 1$) par
$$f(t) = \frac{1}{t^\beta\,(\ln(t))^\alpha}.$$
L'application f est à valeurs positives. Puisque $\beta > 1$, il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\beta = 1 + 2\mu$. Considérons la fonction g définie sur $[a, +\infty[$ par $g(t) = 1/t^{1+\mu}$. L'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée de Riemann qui converge[22] et on a
$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{t^{1+\mu}}{t^\beta\,(\ln(t))^\alpha} = \frac{t^{1+\mu}}{t^{1+2\mu}\,(\ln(t))^\alpha} = \frac{1}{t^\mu\,(\ln(t))^\alpha}.$$
On en déduit[23] que $\lim_{t\to+\infty} f(t)/g(t) = 0$ et par conséquent d'après la proposition 19.7, l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si $\beta > 1$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Soient α et β deux réels avec $\beta < 1$ et f l'application définie sur $]0, a]$ (où $a \in]0, 1[$) par
$$f(t) = \frac{1}{t^\beta\,|\ln(t)|^\alpha}.$$
L'application f est à valeurs positives. Puisque $\beta < 1$, il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\beta = 1 - 2\mu$. Considérons la fonction g définie sur $]0, a[$ par $g(t) = 1/t^{1-\mu}$. L'intégrale généralisée $\int_0^a g(t)\ \mathrm{d}t$ converge et on a
$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{t^{1-\mu}}{t^\beta\,|\ln(t)|^\alpha} = \frac{t^{1-\mu}}{t^{1-2\mu}\,|\ln(t)|^\alpha} = \frac{t^\mu}{|\ln(t)|^\alpha}.$$
On en déduit que $\lim_{t\to0} f(t)/g(t) = 0$. La proposition 19.7 indique que l'intégrale généralisée $\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si $\beta < 1$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

---

[22] Voir p. 976.

[23] Voir la proposition 14.10 p. 674.

Exercice 3 Soient f et g deux applications définies et positives sur $[a, b[$, localement intégrables sur $[a, b[$ et telles que $\lim_{t \to b^-} f(t)/g(t) = +\infty$.
1 - Montrer que si l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ diverge alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge aussi.
2 - En déduire que pour tout $a \in]1, +\infty[$, l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\beta (\ln(t))^\alpha}\ \mathrm{d}t$ diverge si $\beta < 1$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et que pour tout $a \in]0, 1[$, l'intégrale généralisée $\int_0^a \frac{1}{t^\beta (\ln(t))^\alpha}\ \mathrm{d}t$ diverge si $\beta > 1$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corollaire 19.1 *Soient f et g deux applications localement intégrables sur $[a, b[$ à valeurs positives. Si f et g sont équivalentes dans un voisinage à gauche de b alors les intégrales $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ sont de même nature.*

Démonstration Si f et g sont équivalentes dans un voisinage à gauche de b alors[24] $\lim_{t \to b^-} f(t)/g(t) = 1$. La proposition 19.7 indique que les deux intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ sont ou bien toutes les deux convergentes ou bien toutes les deux divergentes. □

Exemple Intéressons-nous à la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ où $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \arctan(x)/(1 + x^2)$. L'application f étant continue, elle est localement intégrable sur $[0, +\infty[$. Elle est positive. On a $\arctan(t) \underset{+\infty}{\sim} \pi/2$ et $1 + t^2 \underset{+\infty}{\sim} t^2$ de sorte que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \pi/(2t^2)$. Comme l'intégrale généralisée de Riemann $\int_1^{+\infty} 1/t^2\ \mathrm{d}t$ converge, d'après le corollaire 19.1 l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est elle aussi convergente. On en conclut que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

Corollaire 19.2 (Premier critère de Riemann)
Soit f une application localement intégrable sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives.
✗ *S'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} C/t^\alpha$ alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.*
✗ *S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1]$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} C/t^\alpha$ alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.*

Démonstration L'intégrale de Riemann $\int_a^{+\infty} 1/t^\alpha\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. D'après le corollaire 19.1, si $f(t) \underset{+\infty}{\sim} C/t^\alpha$ alors les intégrales

[24] Voir la proposition 15.4 p. 723.

généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} 1/t^\alpha\ \mathrm{d}t$ sont de même nature ce qui établit les deux assertions de la proposition. □

COROLLAIRE 19.3 (Second critère de Riemann)
Soit f une application localement intégrable sur $]0,a]$ et à valeurs positives.
✗ *S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f(t) \underset{0+}{\sim} C/t^\alpha$ alors l'intégrale généralisée $\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.*
✗ *S'il existe $\alpha \in [1, +\infty[$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f(t) \underset{0+}{\sim} C/t^\alpha$ alors l'intégrale généralisée $\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.*

Démonstration L'intégrale de Riemann $\int_0^a 1/t^\alpha\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. D'après le corollaire 19.1, si $f(t) \underset{0+}{\sim} C/t^\alpha$ alors les intégrales généralisées $\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_0^a 1/t^\alpha\ \mathrm{d}t$ sont toutes les deux de même nature ce qui établit les deux assertions de la proposition. □

Remarques

1. Il résulte de la proposition 19.7 que si f est une application localement intégrable sur $[a, +\infty[$, à valeurs positives, telle qu'il existe $\alpha > 1$ pour lequel $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
2. De même, si f est une application localement intégrable sur $]0, a]$, à valeurs positives, telle qu'il existe $\alpha < 1$ pour lequel $\lim_{t\to 0} t^\alpha f(t) = 0$ alors l'intégrale généralisée $\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

EXERCICE 4 Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ \ln(\tan(t))\ \mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\ \mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t,$$

on distinguera la nature de la 3e intégrale selon la valeur du réel α.

19.4 Convergence absolue

DÉFINITION 19.4 *Soit f une application localement intégrable sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument (ou encore qu'il s'agit d'une intégrale généralisée absolument convergente) si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.*

Remarque On notera que pour l'intégrale généralisée de fonctions à valeurs positives, les deux notions de convergence et de convergence absolue coïncident puisque pour des fonctions positives $\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$. Ces deux notions sont distinctes pour des fonctions qui ne sont pas de signe constant ; certaines intégrales généralisées convergent sans être absolument convergentes. On a toutefois la propriété suivante.

Proposition 19.8 *Toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.*

Démonstration Supposons que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ soit absolument convergente ce qui signifie que l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ converge. Elle satisfait par conséquent le critère de Cauchy[25],

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists X \in \mathbb{R} \quad \forall (u,v) \in [a,b[^2 \quad \left(X < u < v \implies \left|\int_u^v |f(t)|\ \mathrm{d}t\right| < \varepsilon\right).$$

Or

$$\left|\int_u^v f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_u^v |f(t)|\ \mathrm{d}t = \left|\int_u^v |f(t)|\ \mathrm{d}t\right|.$$

On en déduit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ vérifie elle aussi le critère de Cauchy et par conséquent, qu'il s'agit d'une intégrale généralisée convergente. □

La réciproque est fausse : une intégrale généralisée peut être convergente sans être absolument convergente. C'est le cas de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ qui converge mais ne converge pas absolument, voir page 975 et page 980.

Théorème 19.3 (Critère de convergence absolue)
Soit f une application localement intégrable sur $[a,b[$. S'il existe une application ϕ localement intégrable sur $[a,b[$, à valeurs positives, telle que

1. *l'intégrale généralisée $\int_a^b \phi(t)\ \mathrm{d}t$ converge ;*
2. $\forall t \in [a,b[\quad |f(t)| \leqslant \phi(t)$ *;*

alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Démonstration Si l'intégrale généralisée $\int_a^b \phi(t)\ \mathrm{d}t$ converge alors compte tenu de la seconde relation, le principe de comparaison (théorème 19.2) indique que l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ converge, autrement dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente. □

[25] Voir le théorème 19.1 p. 980.

Exemples

1. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ et $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$. Puisque l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, d'après le critère de convergence absolue, les intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont absolument convergentes.
2. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a

$$\left|\frac{\sin(t)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Puisque l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, on en déduit que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Remarque La fonction $t \mapsto |f(t)|$ étant positive, les critères de convergence de l'intégrale généralisée relatifs aux fonctions positives énoncés à la section 19.3.3 sont utilisés pour montrer qu'une intégrale est absolument convergente.

La plupart des critères pour étudier la nature d'une intégrale généralisée concernent les fonctions positives ; il n'y a pas de critère simple permettant de déterminer la nature d'une intégrale généralisée correspondant à une fonction de signe quelconque. Pour étudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction localement Riemann intégrable sur $[a, b[$ dont le signe n'est pas constant dans un voisinage à gauche de b, on procède de la manière suivante. On considère l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et on applique les critères de convergence pour les fonctions positives afin d'établir la nature de cette intégrale généralisée.

- Si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.
- Si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente. Il peut s'agir d'une intégrale généralisée convergente mais on doit trouver une autre approche pour étudier la nature de cette intégrale généralisée. C'est l'objet de la section suivante.

19.5 Semi-convergence

Définition 19.5 *Soit f une application localement intégrable sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente s'il s'agit d'une intégrale généralisée convergente mais non d'une intégrale généralisée absolument convergente.*

Remarque Si f est une application localement intégrable sur $[a, b[$ de signe constant et si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors l'intégrale généralisée est absolument convergente. La notion d'intégrale semi-convergente n'a d'intérêt que pour des fonctions qui ne sont pas de signe constant.

Exemple Nous avons vu page 980 que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ ne converge pas absolument. Nous avons établi page 975 que les intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$ étaient de même nature. Enfin, page 990 nous avons montré que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$ est convergente. On en conclut que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Le théorème d'Abel

Il n'existe pas de critère simple pour établir qu'une intégrale est semi-convergente. Le théorème d'Abel, que nous admettrons, permet de traiter certains cas de semi-convergence.

THÉORÈME 19.4 (Théorème d'Abel)
Soient f et g deux applications localement intégrables sur $[a, +\infty[$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. *l'application f est positive, décroissante sur $[a, +\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$;*
2. *il existe un réel $M > 0$ tel que*

$$\forall x \in [a, +\infty[\qquad \left| \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant M;$$

alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\ g(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Exemple Vérifions que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ est convergente. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}$ est prolongeable par continuité en 0, donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t.$$

L'application $f : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}}$ est positive, décroissante et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$; pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a

$$\left| \int_1^x \sin(t)\ \mathrm{d}t \right| = |\cos(x) - \cos(1)| \leqslant 2.$$

Le théorème d'Abel indique que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ est convergente. On en conclut que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ est convergente. Cette intégrale est appelée *intégrale de Fresnel* et on montre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

EXERCICE 5 Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\, \mathrm{d}t$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3} \cos(t)\sin^3(t)\, \mathrm{d}t$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(\sqrt{t}) - \cos(\sqrt{t})}{t^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}t.$

Méthode par éclatement de termes

Lorsque l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente et que le théorème d'Abel ne s'applique pas, on peut essayer de déterminer la nature de l'intégrale généralisée en utilisant un développement asymptotique[26] de f dans un voisinage à gauche de b. Si on peut déterminer la nature de l'intégrale généralisée correspondant à chacun des termes du développement asymptotique, alors on pourra conclure en ayant recours à la proposition 19.4. Nous allons illustrer cette méthode nommée « méthode par éclatement de termes » sur un exemple.

Exemple Intéressons-nous à la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right)\, \mathrm{d}t$$

L'application $f : x \in [1, +\infty[\mapsto \ln(1+\sin(x)/\sqrt{x})$ est continue donc localement Riemann-intégrable sur $[1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n\pi) = 0$ et f change de signe en $n\pi$ car $f'(n\pi) = (-1)^n/\sqrt{n\pi} \neq 0$. L'application f n'est donc pas de signe constant sur $[1, +\infty[$. Calculons un développement asymptotique[27] pour f au voisinage de $+\infty$. Considérons la fonction f_0 définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ par $f_0(t) = f(1/t)$. On a

$$f_0(t) = \ln\left(1 + \sqrt{t}\sin(\tfrac{1}{t})\right).$$

Comme $\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}\, \sin(\frac{1}{t}) = 0$ et que $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}\, u^2 + \frac{1}{3}\, u^3 + o_0(u^3)$, on en déduit que

$$f_0(t) = \sqrt{t}\sin(\tfrac{1}{t}) - \tfrac{1}{2}\, t\, \sin^2(\tfrac{1}{t}) + \tfrac{1}{3}\, t^{\frac{3}{2}}\, \sin^3(\tfrac{1}{t}) + o_0(t^{\frac{3}{2}} \sin^3(\tfrac{1}{t})).$$

Un développement asymptotique pour f au voisinage de $+\infty$ est donc

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, \sin(x) - \frac{1}{2x}\, \sin^2(x) + \frac{1}{3x^{\frac{3}{2}}}\, \sin^3(x) + o_{+\infty}(x^{-\frac{3}{2}}\, \sin^3(x)).$$

---

[26] Voir p. 855.

[27] Voir la définition 17.4 p. 840.

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\ \mathrm{d}t + \frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t.$$

où g est la fonction correspondant au reste dans le développement asymptotique. Nous avons vu précédemment que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ est semi-convergente. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \sin^3(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente car

$$\forall t \in [1, +\infty[\qquad \left|\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \sin^3(t)\right| \leqslant \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée de Riemann convergente, voir page 976. De plus, comme

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|g(t)|}{|t^{\frac{3}{2}} \sin^3(t)|} = 0 \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin^3(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\right|\ \mathrm{d}t \text{ converge}$$

d'après la proposition 19.7, page 985, on peut affirmer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} |g(t)|\ \mathrm{d}t$ est convergente. Il reste donc à déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\ \mathrm{d}t$. On a

$$\forall t \in [1, +\infty[\qquad \sin^2(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2t)$$

et par conséquent

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{\cos(t)}{t}\right)\ \mathrm{d}t.$$

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ converge, voir page 975 et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée de Riemann divergente, voir page 976. Il résulte de la proposition 19.4 que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ diverge. On conclut l'étude en ayant recours à la proposition 19.4 ; l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est la somme de 4 intégrales généralisées dont l'une diverge et les 4 autres convergent. Il s'agit donc d'une intégrale généralisée divergente.

Si toutes les intégrales généralisées qui interviennent dans l'expression de l'intégrale généralisée étudiée après le processus « d'éclatement » sont convergentes alors l'intégrale généralisée étudiée converge. Toutefois, comme cela a été indiqué dans la mise en garde de la page 979, si l'intégrale généralisée étudiée se décompose sous la forme d'une somme d'intégrales généralisées dont 2 sont divergentes, on se gardera de conclure à la divergence de l'intégrale généralisée étudiée.

Nous avons vu au corollaire 19.1 que si f et g sont deux fonctions positives, localement Riemann-intégrables sur $[a, +\infty[$ et équivalentes au voisinage de $+\infty$ alors les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$ sont de même nature. La condition de positivité de f et g est essentielle comme le prouve l'exemple précédent. On a

$$\ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(x)$$

mais l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \ln(1 + \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}})\ \mathrm{d}t$ diverge alors que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \sin(t)\ \mathrm{d}t$ converge, voir page 991.

19.6 Exercices de synthèse

Exercice 6 *Déterminer les valeurs des réels α et β pour lesquelles l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}\ln(1+t)}{t^\beta}\ \mathrm{d}t$ *converge.*

Exercice 7 *Le but de cet exercice est de montrer que*(28)

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t$. *On rappelle le résultat suivant établi au cours de l'exercice 10, page 947 :* $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

1 - Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée convergente.

2 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

---

(28) Cette intégrale intervient fréquemment en probabilité puisque la fonction

$$f : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

est la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Ce résultat permet de montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\ \mathrm{d}s = 1,$$

autrement dit, que f est bien une loi de probabilité (il est en effet évident que f est positive). Mentionnons enfin que cette vérification peut se faire de manière beaucoup plus rapide en utilisant des résultats concernant l'intégrale double.

et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0, \sqrt{n}] \qquad \mathrm{e}^{-t^2} \geqslant \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n.$$

3 - a) En considérant le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(x)$*, montrer que*

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}\ I_{2n+1}.$$

b) En considérant le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(x)$ *montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\ I_{2n-2}.$$

4 - En utilisant le résultat rappelé en début d'exercice, que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 8 *On considère la fonction* Γ *définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}\ \mathrm{d}t.$$

1 - Montrer que l'ensemble de définition de la fonction Γ *est* $\mathbb{R}_+^*$.

2 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$*, on a* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$*. En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a* $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3 - Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$*, l'application* $g_t : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto t^{x-1}$ *est convexe*(29)*. En déduire que l'application* Γ *est convexe sur* $\mathbb{R}_+^*$.

4 - On admet que l'application Γ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$*. Montrer que* $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} 1/x$.

Exercice 9 *On considère les fonctions* F *et* G *définies par*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}\ \mathrm{d}t.$$

1 - Déterminer les ensembles de définition de F *et* G*. Étudier la parité de ces fonctions.*

2 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$*, on a* $F(x) = |x|F(1)$.

3 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$*, on a* $0 \leqslant F(x) - G(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$*. En déduire un équivalent de* G *au voisinage de* $+\infty$.

(29) Voir la définition 16.7 p. 775.

19.7 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - L'application logarithme est continue sur $]0,1]$, donc elle est localement intégrable sur $]0,1]$ et l'intégrale indéfinie

$$F(x)=\int_x^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t=\Big[t\ln(t)-t\Big]_x^1=-x\ln(x)+x-1$$

admet pour limite -1 à droite en 0. On en conclut que l'intégrale $\int_0^1 \ln(x)\ \mathrm{d}x$ converge et vaut -1.

2 - La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ est continue sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$. Elle est donc localement intégrable sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1,+\infty[$. Pour tout $x\in[0,1[$ on a

$$F(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\ \mathrm{d}t=\Big[\operatorname{argth}(t)\Big]_0^x=\operatorname{argth}(x)$$

et $\lim_{x\to 1^-} F(x)=+\infty$. On en déduit que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{1-t^2}\ \mathrm{d}t$ diverge et qu'il en va donc de même de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-t^2}\ \mathrm{d}t$.

3 - La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{|1-t^2|}}$ est continue sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$. Elle est donc localement intégrable sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1,+\infty[$. Pour tout $x\in[0,1[$, on a

$$F_1(x)=\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t=\Big[\arcsin(t)\Big]_0^x=\arcsin(x)$$

et $\lim_{x\to 1^-} F_1(x)=\frac{\pi}{2}$. On en déduit que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|1-t^2|}}\ \mathrm{d}t$ converge. Soient $a\in]1,+\infty[$ et $x\in]1,a[$. On a

$$F_2(x)=\int_x^a f(t)\ \mathrm{d}t=\int_x^a \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\ \mathrm{d}t=\Big[\operatorname{argch}(t)\Big]_x^a=\operatorname{argch}(a)-\operatorname{argch}(x)$$

et $\lim_{x\to 1^+} F_2(x)=\operatorname{argch}(a)$. On en déduit que l'intégrale généralisée $\int_1^a \frac{1}{\sqrt{|1-t^2|}}\ \mathrm{d}t$ converge. Pour $x\in]a,+\infty[$ on a

$$F_3(x)=\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t=\int_a^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\ \mathrm{d}t=\Big[\operatorname{argch}(t)\Big]_a^x=\operatorname{argch}(x)-\operatorname{argch}(a)$$

et $\lim_{x\to+\infty} F_3(x)=+\infty$. On en déduit que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|1-t^2|}}\ \mathrm{d}t$ diverge et qu'il en est donc de même de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|1-t^2|}}\ \mathrm{d}t$.

Solution de l'exercice 2

Considérons la fonction de changement de variable $\phi : t \in [0, +\infty[\mapsto \arctan(t)$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ (elle est même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$) de dérivée l'application

$$t \in [0, +\infty[\longmapsto \frac{1}{1+t^2}.$$

Il s'agit d'une bijection dont la bijection réciproque est $x \in [0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \tan(x)$. On a donc par la formule de changement de variable,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \phi(t)\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Solution de l'exercice 3

1 - L'hypothèse $\lim_{t\to b^-} f(t)/g(t) = +\infty$ se traduit par[30]

$$\forall \kappa \in \mathbb{R} \quad \exists \eta_\kappa \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall t \in [a, b[\quad \left(|t-b| \leqslant \eta_\kappa \implies \frac{f(t)}{g(t)} \geqslant \kappa\right).$$

Prenons $\kappa = 1$; il existe un réel η strictement positif tel que pour tout $t \in [b-\eta, b[$ on a $f(t) \geqslant g(t)$. D'après le principe de comparaison[31], on déduit de cette majoration que si l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi.

2 - Soient $a \in]1, +\infty[$ et $\beta < 1$. Il existe un réel ε strictement positif tel que $\beta = 1 - 2\varepsilon$. Soit f la fonction à valeurs positives définie sur $[a, +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{1}{t^\beta\,(\ln(t))^\alpha}.$$

Considérons la fonction g définie sur $[a, +\infty[$ par $g(t) = 1/t^{1-\varepsilon}$. L'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ qui est une intégrale généralisée de Riemann, voir p. 976, diverge et on a

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{t^{1-\varepsilon}}{t^\beta\,(\ln(t))^\alpha} = \frac{t^{1-\varepsilon}}{t^{1-2\varepsilon}\,(\ln(t))^\alpha} = \frac{t^\varepsilon}{(\ln(t))^\alpha}.$$

D'après la proposition 14.10 page 674, on en déduit que $\lim_{t\to+\infty} f(t)/g(t) = +\infty$ et par conséquent la question précédente nous permet d'affirmer que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\beta(\ln(t))^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge si $\beta < 1$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soient β un réel strictement supérieur à 1, $a \in]0, 1[$ et f la fonction à valeurs positives définie sur $]0, a]$ par

$$f(t) = \frac{1}{t^\beta\,|\ln(t)|^\alpha}.$$

---

[30] Voir p. 601.

[31] Voir le théorème 19.2 p. 983.

Puisque $\beta > 1$, il existe alors $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\beta = 1 + 2\varepsilon$. Considérons la fonction g définie sur $]0, a[$ par $g(t) = 1/t^{1+\varepsilon}$. L'intégrale généralisée $\int_0^a g(t)\ \mathrm{d}t$ qui est une intégrale généralisée de Riemann, voir p. 976, diverge et on a

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{t^{1+\varepsilon}}{t^\beta\,|\ln(t)|^\alpha} = \frac{t^{1+\varepsilon}}{t^{1+2\varepsilon}\,|\ln(t)|^\alpha} = \frac{1}{t^\varepsilon\,|\ln(t)|^\alpha}.$$

D'après la proposition 14.10 page 674, on en déduit que $\lim_{t\to 0} f(t)/g(t) = +\infty$ et par conséquent la proposition 19.7 nous permet d'affirmer que l'intégrale généralisée $\int_0^a \frac{1}{t^\beta(\ln(t))^\alpha}\ \mathrm{d}t$ diverge si $\beta > 1$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 4

1 - La fonction $f : t \mapsto \cos(t)\ \ln(\tan(t))$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Elle n'est pas prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Pour étudier la limite éventuelle de f à gauche en $\frac{\pi}{2}$, considérons la fonction f_0 définie pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ par $f_0(x) = f(x + \frac{\pi}{2})$. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, on a[32]

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \cos(x + \tfrac{\pi}{2})\ \ln(\tan(x + \tfrac{\pi}{2})) = -\sin(x)\ \ln(-\tan(x)^{-1}) \\ &= \sin(x)\ \ln(-\tan(x)). \end{aligned}$$

Puisque $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et que $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$ avec $\lim_{x\to 0^-} -\tan(x) = 0 \neq 1$, on a[33] $f_0(x) \underset{0^-}{\sim} -x\ln(x)$. Par conséquent, comme

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} f(t) = \lim_{x\to 0^-} f_0(x) = \lim_{x\to 0^-} -x\ln(x) = 0,$$

on en déduit que f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$ en posant $f(\frac{\pi}{2}) = 0$. La fonction f est donc localement intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. La fonction f est négative sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ et positive sur $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. D'après la relation de Chasles,

$$\int_0^{\pi/2} \cos(t)\ \ln(\tan(t))\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \cos(t)\ \ln(\tan(t))\ \mathrm{d}t + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(t)\ \ln(\tan(t))\ \mathrm{d}t.$$

L'intégrale $\int_0^{\pi/4} \cos(t)\ \ln(\tan(t))\ \mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann et on se contente d'étudier la convergence de l'intégrale généralisée à intégrant positif $\int_0^{\pi/4} \cos(t)\ \ln(\tan(t))\ \mathrm{d}t$. On a $\tan(t) \underset{0}{\sim} t$ et $\cos(t) \underset{0}{\sim} 1$; de plus, comme $\lim_{t\to 0^+} \tan(t) = 0 \neq 1$, on en déduit[33] l'équivalent suivant :

$$\cos(t)\ \ln(\tan(t)) \underset{0^+}{\sim} \ln(t).$$

On peut conclure à la convergence de l'intégrale généralisée par le corollaire 19.1, p. 987, puisque les fonctions intégrées sont positives et que $\int_0^{\pi/4} \ln(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale de Bertrand convergente.

---

[32] On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ et $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$; il en résulte que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a la relation $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -1/\tan(x)$.

[33] Voir la proposition 15.8 p. 729.

2 - La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. Elle est strictement positive sur cet intervalle. On a

$$f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t}$$

donc, d'après le corollaire 19.3, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. On peut remarquer que

$$f(t) = \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

et par conséquent, d'après le corollaire 19.2, en déduire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

3 - Pour tout réel α, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$, donc elle est localement intégrable sur cet intervalle. Cette fonction est positive sur $]0, 1]$ et comme $\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o_0(t^2)$, on a

$$f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{t^2/2}{t^\alpha} = \frac{1}{2t^{2-\alpha}}.$$

On en déduit, d'après le corollaire 19.3, que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha - 2 < 1$, autrement dit si $\alpha < 3$.

Solution de l'exercice 5

1 - La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^{3/2}}$ est continue sur $]0, +\infty[$; elle est donc localement intégrable sur cet intervalle. La fonction f est positive sur $]0, \pi]$ et

$$f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Comme l'intégrale généralisé $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée de Riemann convergente, voir p. 976, le corollaire 19.1 indique que l'intégrale généralisée $\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Par ailleurs, pour tout $t \in [\pi, +\infty[$ on a

$$|f(t)| \leqslant \frac{1}{t^{3/2}}.$$

Comme l'intégrale généralisé $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée de Riemann convergente, voir p. 976, le théorème 19.4 indique que l'intégrale généralisée $\int_\pi^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2 - La fonction $f : t \mapsto \cos(t)\,(\sin(t)/t)^3$ est continue sur $]0, +\infty[$. Elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. La fonction f est donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$|f(t)| = |\cos(t)| \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|^3 = \underbrace{|\cos(t)|}_{\leqslant 1} \underbrace{|\sin(t)|^3}_{\leqslant 1} \frac{1}{t^3} \leqslant \frac{1}{t^3}.$$

D'après le théorème 19.4, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge car l'intégrale $\int_1^{+\infty} 1/t^3\ \mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, voir p. 976.

3 - La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}(\sqrt{t}) - \cos(\sqrt{t})}{t^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Elle est positive puisque la fonction cosinus hyperbolique est minorée par 1 alors que la fonction cosinus est majorée par 1. On a les développements limités d'ordre 2 en 0 suivants :

$$\cos(u) = 1 - \tfrac{1}{2}u^2 + o_0(u^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(u) = 1 + \tfrac{1}{2}u^2 + o_0(u^2).$$

On en déduit que

$$\mathrm{ch}(\sqrt{t}) - \cos(\sqrt{t}) = \left(1 + \frac{(\sqrt{t})^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{(\sqrt{t})^2}{2}\right) + o_0(t) = t + o_0(t)$$

et par conséquent que $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. On en conclut en utilisant le corollaire 19.3 que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\mathrm{ch}(\sqrt{t}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{2} \quad \text{et} \quad \cos(\sqrt{t}) = o_{+\infty}(\mathrm{ch}(\sqrt{t})).$$

On a donc $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\sqrt{t}}$. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on a $\mathrm{e}^{\sqrt{t}} \geqslant 1$ et que $\int_1^{+\infty} 1\ \mathrm{d}t$ diverge, le théorème 19.2 indique qu'il en est de même de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$. Finalement, d'après le corollaire 19.1, on peut conclure que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge et par conséquent que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge elle aussi.

Solution de l'exercice 6

Considérons l'application $f : t \in]0, +\infty[\mapsto e^{-\alpha t}\ln(1+t)/t^\beta$. Cette application est continue, donc localement Riemann intégrable sur $]0, +\infty[$. Elle est clairement positive. Intéressons-nous au comportement de f au voisinage de 0. Quelle que soit la valeur de α, on a $e^{-t\alpha} \underset{0^+}{\sim} 1$ et $\ln(1+t) \underset{0^+}{\sim} t$ donc $f(t) \underset{0^+}{\sim} 1/t^{\beta-1}$. Or l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{t^\gamma}\ \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\gamma < 1$; une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ converge est donc que $\beta < 2$.

Intéressons-nous maintenant au comportement de f au voisinage de $+\infty$.

1. Si $\alpha < 0$ alors $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge d'après la proposition 19.1.
2. Si $\alpha = 0$, puisque $\ln(1+t) \underset{+\infty}{\sim} \ln(t)$ on a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \ln(t)/t^\beta$. Or l'intégrale généralisée de Bertrand $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^\beta}\ \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$. Donc, une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge est que $\beta > 1$.

3. Si $\alpha > 0$ alors d'après la proposition 19.7, l'intégrale généralisée converge quelle que soit la valeur de β car on a $\lim_{t\to+\infty} f(t)t^2 = 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}\ln(1+t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si $\alpha > 0$ et $\beta \in]-\infty, 2[$ ou si $\alpha = 0$ et $\beta \in]1, 2[$. Elle diverge dans les autres cas.

Solution de l'exercice 7

1 - La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc est localement intégrable sur $[0, +\infty[$. Elle est positive et $\mathrm{e}^{-t^2} = o_{+\infty}\left(1/t^2\right)$. Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée de Riemann convergente, voir p. 976, on en déduit par la proposition 19.7 que $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

2 - Appliquons la formule de Taylor-Lagrange[34] à l'ordre 2 à la fonction exponentielle (qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) : pour tout réel x, il existe un réel c dans l'intervalle d'extrémités 0 et x tel que

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 + x\,\mathrm{e}^0 + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^c.$$

Puisque $\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^c$ est toujours positif, on a

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x. \tag{7}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, appliquons la relation (7) en prenant $x = t^2/n$; on obtient la majoration

$$\mathrm{e}^{t^2/n} \geqslant 1 + \frac{t^2}{n}.$$

Puisque les fonctions puissances entières sont croissantes sur $[0, +\infty[$, on en déduit que

$$\mathrm{e}^{t^2} = \left(\mathrm{e}^{t^2/n}\right)^n \geqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \quad \text{puis que} \quad \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

En appliquant la relation (7) avec $x = -t^2/n$, on obtient la relation

$$\mathrm{e}^{-t^2/n} \geqslant 1 - \frac{t^2}{n}.$$

Si $t \in [0, \sqrt{n}]$ alors $1 - t^2/n \geqslant 0$ et puisque les fonctions puissances entières sont croissantes sur $[0, +\infty[$,

$$\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n.$$

3 - a) Considérons l'application

$$\phi : x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \longmapsto \sqrt{n}\,\sin(x).$$

---

[34] Voir le théorème 16.4 p. 789.

Cette application est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et

$$\phi' : x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \longmapsto \sqrt{n}\,\cos(x).$$

En utilisant la formule de changement de variable dans une intégrale de Riemann, (voir le théorème 18.4 p. 899) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t &= \int_{\phi(0)}^{\phi(\pi/2)} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(1-\sin^2(x)\right)^n}_{=f(\phi(x))} \underbrace{\sqrt{n}\cos(x)}_{=\phi'(x)} \,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\cos(x))^{2n+1} \,\mathrm{d}x = \sqrt{n}\; I_{2n+1}.
\end{aligned}$$

b) Considérons l'application

$$\psi : x \in [0, \tfrac{\pi}{2}[\longmapsto \sqrt{n}\,\tan(x).$$

Cette application est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et

$$\psi' : x \in [0, \tfrac{\pi}{2}[\longmapsto \sqrt{n}\,(1+\tan^2(x)).$$

En utilisant la formule de changement de variable dans une intégrale généralisée (voir la proposition 19.2), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \,\mathrm{d}t &= \int_{\psi(0)}^{\psi(\pi/2)} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(1+\tan^2(x)\right)^{-n}}_{=f(\psi(x))} \underbrace{\sqrt{n}(1+\tan^2(x))}_{=\psi'(x)} \,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (1+\tan^2(x))^{-n+1} \,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\cos(x))^{2(n-1)} \,\mathrm{d}x = \sqrt{n}\; I_{2n-2}.
\end{aligned}$$

4 - On déduit des calculs précédents les majorations suivantes

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \,\mathrm{d}t = \sqrt{n}\; I_{2n-2}$$

$$\text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \,\mathrm{d}t = \sqrt{n}\; I_{2n+1},$$

en utilisant le fait que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est positive sur $[0, +\infty[$. On en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n}\; I_{2n+1} \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\; I_{2n-2}. \tag{8}$$

Comme $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, on obtient

$$I_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \quad \text{et} \quad I_{2n-2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ I_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ I_{2n+1} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}.$$

En utilisant le théorème d'encadrement[35], on déduit de (8) que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Solution de l'exercice 8

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, désignons par f_x l'application

$$f_x : t \in]0, +\infty[\longmapsto \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}.$$

Cette application est positive et continue sur $]0, +\infty[$; de plus, pour tout $t \in]0, +\infty[$ on a

$$f_x(t) = \exp\big((x-1)\ln(t) - t\big).$$

1 - Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ revient à déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ converge. Comme f_x est continue sur $]0, +\infty[$, cette fonction est localement intégrable sur cet intervalle. La nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ est donc liée au comportement de f_x aux deux bornes 0 et $+\infty$ de l'intervalle d'intégration.

On a $f_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ et l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, voir p. 976. On en déduit que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f_x(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

Pour montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f_x(t)\ \mathrm{d}t$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ nous allons avoir recours à la proposition 19.7 et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\lim_{t\to+\infty} t^2 f_x(t) = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$t^2 f_x(t) = t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t} = \exp\big((x+1)\ln(t) - t\big) = \exp\left(t\left((x+1)\ln(t)/t - 1\right)\right).$$

Comme $\lim_{t\to+\infty} \ln(t)/t = 0$, on a $\lim_{t\to+\infty} ((x+1)\ln(t)/t - 1) = -1$ et $\lim_{t\to+\infty} t\left((x+1)\ln(t)/t - 1\right) = -\infty$. Comme $\lim_{u\to-\infty} \mathrm{e}^u = 0$, on en conclut que $\lim_{t\to+\infty} t^2 f_x(t) = 0$. Finalement, comme l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ converge, la proposition 19.7 indique que $\int_1^{+\infty} f_x(t)\ \mathrm{d}t$ converge également. On en conclut que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f_x(t)\ \mathrm{d}t$ converge quel que soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'ensemble de définition de la fonction Γ est donc $\mathbb{R}_+^*$.

---

[35] Voir le théorème 5.1 p. 185.

2 - Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^x \,\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale généralisée est convergente. Intégrons par parties[36] en prenant

$$u : t \longmapsto t^x \qquad v : t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}$$
$$u' : t \longmapsto x\, t^{x-1} \qquad v' : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}.$$

La fonction $u \times v$ admet pour limite 0 en 0^+ et en $+\infty$ donc

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^x \,\mathrm{d}t = \Big[-e^{-t}\, t^x\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, x\, t^{x-1} \,\mathrm{d}t = x \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

On a donc établi que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout réel $x \in]0, +\infty[$.

Vérifions à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$. La relation est vraie pour $n = 1$ puisque

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 1 = 0!.$$

Supposons la relation vraie pour un entier n donné. On a alors

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

La récurrence est achevée.

3 - Considérons pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, l'application $g_t : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto t^{x-1}$. Cette application est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$g_t'' : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto (\ln(t))^2\, t^{x-1}.$$

La dérivée seconde de g_t est donc une application positive. D'après la proposition 16.13 p. 776, on en déduit que g_t est une application convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Vérifions maintenant que Γ est une application convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. On ne peut pas utiliser le même raisonnement que pour g_t car nous ne savons pas si Γ est dérivable et nous ne connaissons de toute façon pas sa dérivée. On est donc contraint de revenir à la définition de la convexité[37]. Soient $\lambda \in [0,1]$ et $(x, y) \in \mathbb{R}_+^*$; on a

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, g_t(\lambda x + (1-\lambda)y) \,\mathrm{d}t$$

et comme g_t est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$g_t(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda\, g_t(x) + (1-\lambda)\, g_t(y).$$

---

[36] Voir la proposition 19.3 p. 973.

[37] Voir la définition 16.7 p. 775.

On en déduit que

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y) &\leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, \Big(\lambda\, g_t(x)+(1-\lambda)\, g_t(y)\Big)\ \mathrm{d}t\\ &= \lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ g_t(x)\ \mathrm{d}t + (1-\lambda)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ g_t(y)\ \mathrm{d}t\\ &= \lambda\,\Gamma(x)+(1-\lambda)\,\Gamma(y).\end{aligned}$$

La fonction Γ est donc convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

4 - Puisque Γ est continue en 1, on a

$$\lim_{x\to 0}\Gamma(x+1)=\Gamma(1)=1.$$

On en déduit que $\Gamma(x+1) \underset{0}{\sim} 1$. Par ailleurs pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ on a

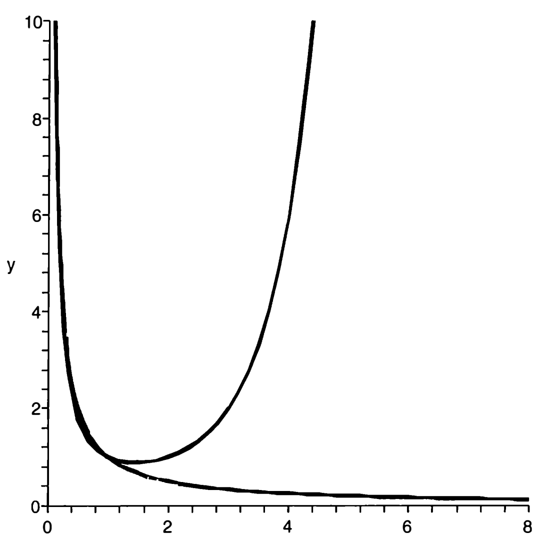
$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

On déduit de ces deux résultats que

$$\Gamma(x) \underset{0+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

La fonction Γ est une fonction reconnue de MAPLE sous le nom `GAMMA`. Illustrons avec MAPLE les résultats établis au cours de cet exercice.

```
> plot([GAMMA(x),1/x],x=0..8,y=0..10);
```



La figure représente la fonction Γ ainsi que la fonction $x\mapsto \frac{1}{x}$.

Solution de l'exercice 9

1 - Considérons pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{\sin^2(tx)}{t^2}$. Pour tout réel x, cette fonction est prolongeable par continuité en 0 puisque

$$\lim_{t\to 0} f_x(t) = \lim_{t\to 0} x^2 \left(\frac{\sin(tx)}{tx}\right)^2 = x^2 \lim_{u\to 0} \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 = x^2.$$

On en déduit que f_x est Riemann intégrable sur $[0, b]$ pour tout réel b strictement positif. Par ailleurs, pour tout réel x on a

$$|f_x(t)| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

et l'intégrale généralisée $\int_b^{+\infty} 1/t^2 \, \mathrm{d}t$ converge, voir p. 976. Le théorème 19.4 indique que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f_x(t) \, \mathrm{d}t$ est (absolument) convergente pour tout réel x. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Considérons pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}$. Il s'agit de la fonction nulle si $x = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, cette fonction est prolongeable par continuité en 0 en posant $g_x(0) = x^2$ puisque $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$, $1 + t^2 \underset{0}{\sim} 1$ et par conséquent

$$g_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{(tx)^2}{t^2} = x^2.$$

On en déduit que g_x est Riemann intégrable sur $[0, b]$ pour tout réel b strictement positif. Par ailleurs, pour tout réel x on a

$$|g_x(t)| \leqslant \frac{1}{(1+t^2)t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

et l'intégrale généralisée $\int_b^{+\infty} 1/t^2 \, \mathrm{d}t$ converge. Le théorème 19.4 indique que $\int_0^{+\infty} g_x(t) \, \mathrm{d}t$ est (absolument) convergente pour tout réel x. La fonction G est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions F et G sont paires puisque

$$F(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(-tx)}{t^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} \, \mathrm{d}t = F(x)$$

$$\text{et} \quad G(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(-tx)}{t^2(1+t^2)} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} \, \mathrm{d}t = G(x).$$

2 - Supposons $x > 0$ et considérons le changement de variable défini par la bijection $\phi : t \in [0, +\infty[\mapsto tx \in [0, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la proposition 19.2, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} \, \mathrm{d}t = x \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\phi(t))}{\phi(t)^2} \, \phi'(t) \, \mathrm{d}t \\ &= x \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} \, \mathrm{d}u = x\, F(1). \end{aligned}$$

On a donc $F(x) = |x|F(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs $F(0) = 0 = 0 \times F(1)$. Puisque F est une application paire, pour $x < 0$ on obtient

$$F(x) = F(-\underbrace{(-x)}_{>0}) = F(-x) = -x\,F(1) = |x|\,F(1).$$

La relation $F(x) = |x|F(1)$ est donc vraie pour tout réel x.

3 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a

$$f_x(t) - g_x(t) = \frac{\sin^2(tx)}{t^2} - \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} = \frac{\sin^2(tx)}{1+t^2}.$$

Puisque $0 \leqslant \sin^2(tx) \leqslant 1$, on en déduit que

$$0 \leqslant f_x(t) - g_x(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

puis, d'après la proposition 18.4, p. 899, que

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \big(f_x(t) - g_x(t)\big)\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \Big[\arctan(t)\Big]_0^{+\infty} = \pi/2$, on obtient la relation

$$0 \leqslant F(x) - G(x) \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Puisque $F(x) = |x|\,F(1)$, on a pour $x \in]0, +\infty[$

$$0 \leqslant 1 - \frac{G(x)}{xF(1)} \leqslant \frac{\pi}{2x\,F(1)}.$$

D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{G(x)}{xF(1)}\right) = 0$ et par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{xF(1)} = 1.$$

On en conclut que $G(x) \underset{+\infty}{\sim} x\,F(1)$.

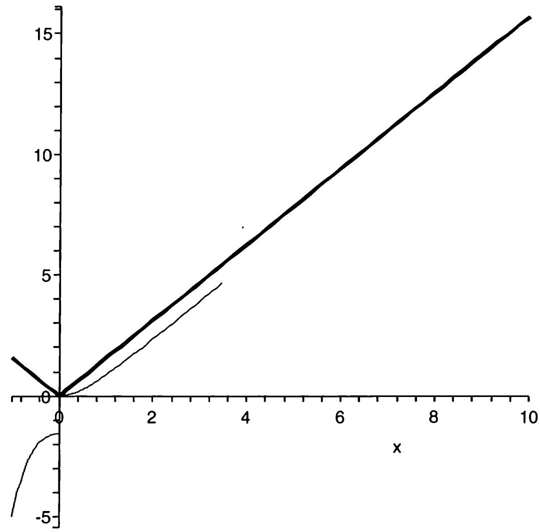
Illustrons les résultats obtenus dans cet exercice avec MAPLE.

```
> F:=x-> int(sin(t*x)^2/t^2,t=0..+infinity):
> G:=x-> int(sin(t*x)^2/(t^2*(1+t^2)),t=0..+infinity):
> a:=F(1);
```

$$a := \frac{\pi}{2}$$

On a donc $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\pi}{2}x$. Traçons les représentations graphiques des fonctions F et G.

```
> plot([F(x),G(x),a*abs(x)],x=-1..10,color=[blue,red,black],
                        linestyle=[1,1,2],thickness=[1,1,2]);
```



On se rend compte que la représentation graphique de la fonction G donnée par MAPLE n'est pas conforme aux propriétés de la fonction G établies dans l'exercice.

```
> G(20);
> evalf(%);
```

$$\frac{1}{4}\cosh(40)\,\pi + \frac{39}{4}\,\pi - \frac{1}{4}\,\pi\,\sinh(40)$$

$$0$$

Le problème observé pour la représentation graphique de G est liée à l'évaluation de la fonction G lorsque les réels sont écrits dans le format à virgule flottante. Dans le format à virgule flottante usuel, les réels $\cosh(40)$ et $\sinh(40)$ sont identiques.

```
> evalf(cosh(40));
                                        17
                         1.176926334 10
> evalf(sinh(40));
                                        17
                         1.176926334 10
```

On peut contourner le problème en imposant à MAPLE d'effectuer les calculs en virgule flottante avec une mantisse élargie.

```
> evalf(cosh(40)-sinh(40),40);
                                   -18
                           4.2483 10
> evalf(G(20),40);
                     30.63052837250048407834737
```

CHAPITRE 20

Équations différentielles linéaires

20.1 Définitions et terminologie

Dans l'étude de nombreux problèmes physiques on est amené à rechercher une fonction inconnue qui est solution d'une équation liant cette fonction à ses dérivées successives. Une relation liant une fonction d'une variable réelle à ses dérivées est appelée une *équation différentielle*. Il est d'usage de noter y la fonction inconnue dans l'équation différentielle et de noter[(1)] t la variable réelle dont dépend la solution de l'équation différentielle. L'ordre de dérivation le plus élevé de la fonction inconnue apparaissant dans l'équation différentielle est appelé *ordre de l'équation différentielle*. D'une manière générale, une équation différentielle d'ordre n est de la forme

$$\text{(E)} \qquad F\big(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)\big) = 0$$

où F est une application définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+2}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

On appelle *solution sur l'intervalle* I de l'équation différentielle (E) toute application ϕ définie sur I, admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n sur I et dont les dérivées successives $\phi', \ldots, \phi^{(n)}$ vérifient pour tout $t \in I$

$$F\big(t, \phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(n-1)}(t), \phi^{(n)}(t)\big) = 0.$$

Exemple Selon la loi de Hooke[(2)], la force f requise pour allonger un ressort de ℓ mètres au-delà de sa longueur au repos est donnée par $f(\ell) = k \times \ell$ où $k \in \mathbb{R}_+^*$ est le coefficient d'élasticité du ressort (exprimé en N/kg). Considérons un objet de masse m suspendu au ressort et repéré sur un axe vertical orienté vers le bas en convenant que l'origine correspond à la position du ressort au repos, voir la figure 1. Après avoir été tiré vers le bas puis relâché, la position $y(t)$ de l'objet en fonction du temps t, est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1) \qquad y''(t) + \omega^2 y(t) = 0,$$

où $\omega = \sqrt{k/m}$ correspond à la pulsation propre du ressort.

---

(1) Cette notation est justifiée par le fait que dans de nombreux problèmes physiques la solution de l'équation différentielle considérée est une fonction du temps.

(2) HOOKE, Robert (1635, Île de Wight - 1703, Londres).

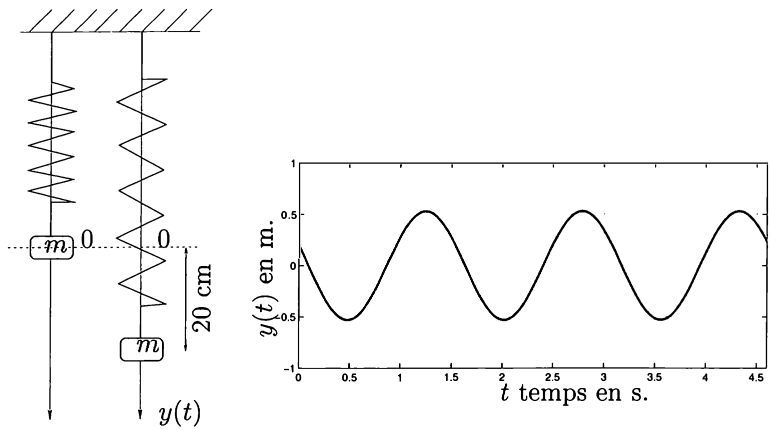


Fig. 1 Évolution au cours du temps d'une masse m de 0.3 kg suspendue à un ressort ($k = 5$ N/m) étiré depuis sa position d'équilibre de 0.2 m puis relâché avec une vitesse initiale de 2 m/s.

Ici, l'équation différentielle est d'ordre 2 ; c'est une équation différentielle qui s'écrit sous la forme (E) avec

$$F : (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto x_3 + \omega^2 \, x_1 \in \mathbb{R}.$$

L'application $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(\omega\, t)$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_1) puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi''(t) = -\omega^2 \cos(\omega\, t)$$

et par conséquent

$$\phi''(t) + \omega^2 \, \phi(t) = -\omega^2 \cos(\omega\, t) + \omega^2 \cos(\omega\, t) = 0.$$

Par un calcul analogue, on peut vérifier que toutes les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto C_1 \cos(\omega\, t) + C_2 \sin(\omega\, t)$$

où C_1 et C_2 désignent deux constantes réelles, sont solutions de l'équation différentielle (E_1).

Un peu de vocabulaire

✗ Par le terme *solution générale* d'une équation différentielle, on désigne tous les éléments de l'ensemble des solutions. L'une des solutions de l'équation différentielle est appelée *solution particulière*.

✗ On appelle *courbes intégrales* d'une équation différentielle les courbes représentatives des solutions de cette équation.

✗ Les lois de la physique conduisent fréquemment à considérer des équations différentielles. Toutefois, comme pour l'exemple précédent, une équation différentielle admet de nombreuses solutions. Autrement dit, l'équation différentielle ne suffit pas pour déterminer complètement la solution d'un problème physique. Pour choisir entre les différentes solutions d'une équation différentielle, il faut posséder d'autres données qui dépendent de la nature du problème, par exemple des *conditions initiales.* Ainsi pour l'exemple précédent, la solution est déterminée si l'on impose qu'à l'instant initial $t = 0$ le ressort est tiré de 20 cm vers le bas puis relâché avec une vitesse ascensionnelle de 2 m/s. On a alors les conditions initiales $y(0) = 1/5$ (car 20 cm $= 1/5$ m) et $y'(0) = -2$ et il existe une seule solution de l'équation différentielle (E_1) qui satisfait ces deux conditions initiales. Il s'agit de la fonction

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{5}\cos(\omega\, t) - 2\omega\, \sin(\omega\, t).$$

Cette solution est représentée graphiquement à la figure 1 dans la cas où $k = 5$ N/m et $m = 0.3$ kg.

✗ On appelle *problème de Cauchy*, le problème constitué par une équation différentielle d'ordre n et de n conditions initiales portant sur la fonction inconnue et ses dérivées.

✗ Une équation différentielle est également caractérisée par son caractère linéaire ou non linéaire. L'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad F\big(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)\big) = 0$$

est dite *linéaire* lorsque pour $t \in I$ fixé, la fonction

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto F\big(t, x_1, \ldots, x_{n+1}\big) \in \mathbb{R}^p$$

est une application linéaire[(3)]. Dans le cas courant où $p = 1$, une équation différentielle linéaire est de la forme[(4)]

$$c_n(t)\, y^{(n)}(t) + c_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + c_1(t)\, y'(t) + c_0(t)\, y(t) = g(t)$$

où $c_0, \ldots, c_n$ et g sont des fonctions réelles d'une variable réelle. Les fonctions $c_0, \ldots, c_n$ sont appelées *coefficients* de l'équation différentielle et la fonction g est appelée *second membre* de l'équation différentielle.

Une équation différentielle linéaire est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

1. la fonction inconnue y et ses dérivées sont liées par le biais d'une combinaison linéaire[(5)] ;
2. les fonctions $c_0, \ldots, c_n$, coefficients de la combinaison linéaire, ne dépendent que de la variable t et pas de l'inconnue y.

✗ Une équation différentielle linéaire d'ordre n est dite *normalisée* si $c_n = 1$.

---

(3) Voir la définition 9.1 p. 369.

(4) Voir la proposition 9.1 p. 371.

(5) Voir la définition 8.3 p. 316.

Exemples

1. L'équation différentielle (E_1) est une équation différentielle linéaire du second ordre normalisée. On a $c_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto \omega^2$, $c_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto 0$ et $c_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto 1$. Elle est dite à *coefficients constants* car les fonctions c_0, c_1, c_2 sont des fonctions constantes.

2. L'équation différentielle $2t\,y'(t) + y(t) = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre qui n'est pas normalisée. On a $c_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto 1$ et $c_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto 2t$.

✗ Une équation différentielle qui n'est pas linéaire est dite *non linéaire*. Par exemple, les équations différentielles suivantes

$$y(t)\,y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^t, \qquad y''(t) + \sin\big(y(t)\big) = 0, \qquad y''(t) + y(t)^2 = 0,$$

sont des équations différentielles non linéaires.

L'étude d'une équation différentielle inclut l'étude de l'existence d'une solution. Nous n'aborderons pas cet aspect de manière générale. Pour les équations différentielles que nous étudierons, l'existence de solutions résultera de leurs calculs. Nous nous restreindrons dans ce livre à l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre et des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

20.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Dans l'étude théorique des équations différentielles linéaires du premier ordre que nous allons effectuer, nous considérerons des équations différentielles normalisées. Nous nous intéresserons d'abord aux équations différentielles homogènes (c'est-à-dire dont le second membre est nul) puis aux équations différentielles non homogènes.

20.2.1 Normalisation d'une équation différentielle

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et c_1, c_0, g trois applications continues de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'application c_1 n'admet qu'un nombre fini de zéros dans I. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(\mathrm{E}) \quad c_1(t)\,y'(t) + c_0(t)\,y(t) = g(t)$$

admet pour forme *normalisée* l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(\mathrm{E}_N) \quad y'(t) + \frac{c_0(t)}{c_1(t)}\,y(t) = \frac{g(t)}{c_1(t)}.$$

L'équation différentielle (E) est définie pour tout $t \in I$ alors que l'équation différentielle (E_N) n'est définie que pour les valeurs de t pour lesquelles c_1 ne s'annule pas. Si l'application c_1 ne s'annule pas sur I, les équations différentielles (E) et (E_N) sont toutes les deux définies sur I et équivalentes. Par contre, si l'application c_1 admet des zéros, l'équation différentielle (E_N) n'est pas définie sur tout l'intervalle I mais sur un sous-ensemble J de I. Remarquons que toute solution de l'équation différentielle (E) est solution de l'équation différentielle (E_N) sur le sous-ensemble J de I où celle-ci est définie. Par contre, une fois obtenues les solutions de l'équation (E_N) sur J, se pose le problème d'établir s'il existe une solution sur I à l'équation différentielle (E).

Supposons, pour simplifier[6] que l'application c_1 s'annule en une valeur t_0 et une seule appartenant à l'intérieur de I. Désignons par I_1 l'intervalle $]-\infty, t_0[\cap I$ et par I_2 l'intervalle $]t_0, +\infty[\cap I$.

Dans ce cas, l'étude de l'existence d'une solution sur I à l'équation différentielle (E) consiste à déterminer s'il existe une application ϕ de I dans $\mathbb{R}$,

1. dérivable sur I,
2. dont la restriction à l'intervalle I_1 soit solution de (E_N) considérée sur I_1,
3. dont la restriction à l'intervalle I_2 soit solution de (E_N) considérée sur I_2.

Les deux dernières conditions impliquent que ϕ est solution de l'équation différentielle (E) sur I_1 et sur I_2. De plus[7], comme les applications c_0, c_1 et g sont continues sur I et que c_1 ne s'annule pas sur I_1 et sur I_2, la dérivée de l'application ϕ qui est donnée en tout $t \in I_1 \cup I_2$ par

$$\phi'(t) = \frac{g(t) - c_0(t)\phi(t)}{c_1(t)}, \tag{1}$$

est continue sur I_1 et I_2. L'application ϕ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_1 et sur I_2 ; l'application ϕ' admet par conséquent une limite à droite et à gauche en t_0. Comme $\lim_{t \to t_0} c_1(t) = 0$, la relation (1) indique qu'étant donné que ϕ' admet une limite à droite et à gauche en t_0, on doit nécessairement avoir

$$\lim_{t \to t_0} \big(g(t) - c_0(t)\,\phi(t)\big) = 0 \quad \text{i.e.} \quad g(t_0) - c_0(t_0)\,\phi(t_0) = 0.$$

L'application ϕ vérifie donc la relation $c_0(t_0)\phi(t_0) = g(t_0)$ et comme $c_1(t_0) = 0$, elle vérifie aussi la relation $c_1(t_0)\,y'(t_0) + c_0(t_0)\phi(t_0) = g(t_0)$. Cela signifie que ϕ est solution de l'équation différentielle (E) en t_0.

On retiendra le résultat suivant : toute application qui est *dérivable sur I* et qui satisfait l'équation différentielle normalisée (E_N) sur I_1 et sur I_2 est solution[8] sur I de l'équation différentielle (E).

---

[6] Le cas général où l'application c_1 s'annule en plusieurs réels de l'intervalle I s'étudie de manière analogue en considérant autant de subdivisions de l'intervalle I que nécessaire.

[7] Voir la proposition 13.18 p. 622.

[8] On veut signifier que lorsque l'on a trouvé une solution de l'équation différentielle (E) sur I_1 et I_2 et que cette solution est dérivable en t_0, on dispose d'une solution de l'équation différentielle (E) sur I sans qu'il soit nécessaire de vérifier que la solution obtenue satisfait bien à l'équation différentielle (E) en t_0.

L'étude d'une équation différentielle non normalisée sur un intervalle I consiste donc

- à normaliser cette équation différentielle et à résoudre[9] l'équation différentielle normalisée sur chaque sous-intervalle $I_1, \ldots, I_q$ où elle est définie ;
- à déterminer les applications de I dans $\mathbb{R}$, dérivables sur I, qui coïncident sur chaque sous-intervalle $I_1, \ldots, I_q$ avec une solution de l'équation différentielle normalisée.

Exemple L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(\mathrm{E}_2) \quad 2t\, y'(t) + y(t) = 0$$

admet pour équation normalisée associée l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_{2,N}) \quad y'(t) + \frac{1}{2t}\, y(t) = 0.$$

L'équation différentielle (E_2) est définie pour $t \in \mathbb{R}$ alors que l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{2,N})$ est définie pour $t \in \mathbb{R}^*$. On recherchera dans un premier temps les solutions de $(\mathrm{E}_{2,N})$ sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$. On étudiera ensuite l'existence d'applications ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ avec des solutions de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{2,N})$. Les détails de la résolution sont donnés page 1016.

Nous nous intéresserons dans ce qui suit uniquement à l'étude des équations différentielles normalisées.

20.2.2 Équations différentielles homogènes

DÉFINITION 20.1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une application continue sur I. On appelle équation différentielle linéaire homogène du premier ordre une équation différentielle de la forme*

$$(\mathrm{E}_0) \qquad y'(t) + a(t)\, y(t) = 0.$$

On dit que l'application ϕ est solution de (E_0) sur l'intervalle I si ϕ est dérivable sur I et si

$$\forall t \in I \qquad \phi'(t) + a(t)\, \phi(t) = 0.$$

Remarque La fonction nulle est solution de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre (E_0).

Nous avons vu page 1010 qu'une équation différentielle pouvait admettre une infinité de solutions. Nous allons, dans les deux résultats qui suivent, caractériser l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation différentielle (E_0).

---

[9] Nous verrons dans les pages qui suivent les méthodes de résolution.

Rappelons que l'ensemble $\mathcal{A}(I,\mathbb{R})$ des applications de I dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (voir la proposition 13.2, page 588 et l'exemple de la page 312). L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation différentielle (E_0) est un sous-espace vectoriel[10] de $\mathcal{A}(I,\mathbb{R})$. En effet,

- d'une part l'application nulle étant solution l'équation différentielle (E_0), l'ensemble $\mathcal{S}_0$ n'est pas vide ;
- d'autre part, si ϕ_1 et ϕ_2 désignent deux solutions de (E_0) et μ_1 et μ_2 deux réels alors l'application $\mu_1\phi_1 + \mu_2\phi_2$ est dérivable sur I et on a

$$(\mu_1\,\phi_1 + \mu_2\,\phi_2)' + a\,(\mu_1\,\phi_1 + \mu_2\,\phi_2) = \mu_1(\phi_1' + a\,\phi_1) + \mu_2(\phi_2' + a\,\phi_2) = 0$$

ce qui indique que $\mu_1\,\phi_1 + \mu_2\,\phi_2$ est solution de l'équation différentielle (E_0). Ainsi, toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{S}_0$ appartient à $\mathcal{S}_0$.

On a donc établi[11] la proposition suivante.

PROPOSITION 20.1 *L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation différentielle (E_0) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Le théorème suivant explicite les éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$, autrement dit fournit la forme des solutions de l'équation différentielle (E_0).

THÉORÈME 20.1 *L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation différentielle (E_0) sur I est donné par*

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \in I \mapsto \kappa\,\mathrm{e}^{-A(t)} \;\middle|\; \kappa \in \mathbb{R} \right\}$$

où A désigne une primitive de a sur I.
Il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration Commençons par remarquer que l'application a étant continue sur I, elle admet[12] une primitive A sur I. Le fait que pour tout $t \in I$ on ait $\mathrm{e}^{-A(t)} \neq 0$ justifie les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi \in \mathcal{S}_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I \quad \phi'(t) + a(t)\,\phi(t) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I \quad \mathrm{e}^{A(t)}\,\phi'(t) + a(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\phi(t) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I \quad \left(\mathrm{e}^{A(t)}\,\phi(t)\right)' = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists \kappa \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I \quad \mathrm{e}^{A(t)}\,\phi(t) = \kappa \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists \kappa \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I \quad \phi(t) = \kappa\,\mathrm{e}^{-A(t)}.
\end{aligned}$$

[10] Voir la définition 8.5 p. 319.

[11] Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel donné hérite de la structure d'espace vectoriel de celui-ci et constitue lui même un espace vectoriel, voir p. 319.

[12] Voir le corollaire 18.2 p. 909.

On a donc bien $\mathcal{S}_0 = \{t \in I \mapsto \kappa\, \mathrm{e}^{-A(t)} \mid \kappa \in \mathbb{R}\}$.

Nous avons démontré, voir la proposition 20.1, que $\mathcal{S}_0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'expression des éléments de $\mathcal{S}_0$ obtenue dans la première partie de cette démonstration indique que l'application $t \in I \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ est génératrice et cette application est non nulle. On en conclut que la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{S}_0$ est égale à 1. □

Remarques

1. Le théorème 20.1 indique que l'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$ est de dimension 1 et qu'un générateur de $\mathcal{S}_0$ est l'application $g_0 : t \in I \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$. L'application $t \in I \mapsto \kappa\, \mathrm{e}^{-A(t)}$ où κ désigne un réel, est appelée *solution générale* de l'équation différentielle (E_0).

2. On déduit également du théorème 20.1 qu'il existe une unique solution ϕ à l'équation différentielle (E_0) qui prend une valeur donnée $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ en $t_0 \in I$ fixé, c'est-à-dire telle que

$$y(t_0) = \zeta_0.$$

Cette solution correspond à la valeur $\zeta_0 \mathrm{e}^{A(t_0)}$ de la constante κ dans le théorème 20.1.

Exemples

1. Reprenons l'exemple de la page 1014 et déterminons sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ la solution générale de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_{2,N}) \quad y'(t) + \frac{1}{2t}\, y(t) = 0.$$

Une primitive de l'application $a : t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{2t}$ sur chacun des 2 intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ est

$$A : t \longmapsto \tfrac{1}{2}\, \ln(|t|).$$

On a $\mathrm{e}^{-A(t)} = 1/\sqrt{|t|}$ et d'après le théorème 20.1, la solution générale de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{2,N})$ est, sur chacun des 2 intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ considérés séparément

$$\phi_0 : t \longmapsto \frac{\kappa}{\sqrt{|t|}}, \qquad \kappa \in \mathbb{R}.$$

En d'autres termes, sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la solution générale de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{2,N})$ est $\phi_{0,1} : t \in]-\infty, 0[\mapsto \kappa_1/\sqrt{-t}$ avec $\kappa_1 \in \mathbb{R}$ et sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la solution générale est $\phi_{0,2} : t \in]0, +\infty[\mapsto \kappa_2/\sqrt{t}$ avec $\kappa_2 \in \mathbb{R}$.

Considérons à présent sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_2) \quad 2t\, y'(t) + y(t) = 0$$

dont $(\mathrm{E}_{2,N})$ correspond à la forme normalisée. Comme les applications $\phi_{0,1}$ et $\phi_{0,2}$ ne sont pas bornées en 0 si κ_1 et κ_2 ne sont pas nuls, la seule application dérivable sur $\mathbb{R}$ qui puisse coïncider sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ avec une solution de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{2,N})$ est l'application nulle. On en déduit que l'équation différentielle (E_2) admet pour unique solution sur $\mathbb{R}$ l'application nulle.

2. Considérons sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène et normalisée

$$(\mathrm{E}_3) \quad y'(t) + \frac{y(t)}{\tan(t)} = 0.$$

L'application $a : t \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto 1/\tan(t)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et une de ses primitives est[13] $A : t \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \ln(\sin(t))$. D'après le théorème 20.1, la solution générale de l'équation différentielle (E_3) est l'application

$$t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\longmapsto \frac{\kappa}{\sin(t)}, \quad \kappa \in \mathbb{R}, \quad \text{car} \quad \mathrm{e}^{-\ln(\sin(t))} = \frac{1}{\sin(t)}.$$

Il y a une unique solution qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{4}$. Il s'agit de l'application

$$t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}\,\sin(t)}.$$

En pratique lorsque l'on doit intégrer une équation différentielle de la forme $y'(t) + a(t)\,y(t) = 0$ où a est une application continue sur un intervalle I, on peut écrire de manière formelle :

$$« \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = -a(t) \qquad \text{d'où} \qquad \ln(y(t)) = -A(t) + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$ et $A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$. La solution est donc

$$y(t) = \kappa \exp(-A(t)) \qquad \text{où } \kappa = \exp(C). \qquad »$$

Cette présentation du calcul est justifiée par le fait que les solutions de l'équation différentielle (autre que la solution nulle) ne s'annulent jamais sur I. Signalons qu'une telle présentation du calcul serait incorrecte si la fonction a possédait des points de discontinuité sur I.

20.2.3 Équations différentielles non homogènes

Définition 20.2 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux applications continues sur I. On appelle équation différentielle linéaire non homogène du premier ordre, une équation différentielle de la forme*

$$(\mathrm{E}) \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t).$$

On dit que l'application ϕ est solution de (E) *sur l'intervalle I si ϕ est dérivable sur I et si*

$$\forall t \in I \qquad \phi'(t) + a(t)\,\phi(t) = b(t).$$

On appelle équation différentielle homogène associée à (E) *l'équation différentielle*

$$(\mathrm{E}_0) \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = 0.$$

[13] On vérifiera que pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $A'(t) = 1/\tan(t)$.

Rappelons que l'on appelle *solution particulière* de l'équation différentielle (E), une solution, quelle qu'elle soit, de (E). Cette terminologie s'oppose à celle de *solution générale* de l'équation différentielle (E) qui désigne l'expression « générale » que prennent toutes les solutions de (E). Le théorème qui suit indique que la solution générale de l'équation différentielle (E) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E) et d'une solution particulière de (E).

Théorème 20.2 *Soient ϕ_1 une solution particulière sur I de l'équation différentielle* (E) *et A une primitive de a sur I. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle* (E) *est*

$$\mathcal{S} = \left\{t \in I \mapsto \kappa\,\mathrm{e}^{-A(t)} + \phi_1(t) \;\middle|\; \kappa \in \mathbb{R}\right\}.$$

Démonstration Pour $\kappa \in \mathbb{R}$, notons $\phi_{0,\kappa} : t \in I \mapsto \kappa\,\mathrm{e}^{-A(t)}$; il s'agit de la solution générale[14] de l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E). Désignons momentanément par $\mathcal{T}$ l'ensemble $\left\{t \in I \mapsto \phi_{0,\kappa}(t)+\phi_1(t) \;\middle|\; \kappa \in \mathbb{R}\right\}$. Démontrer le théorème 20.2 revient à établir que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle (E) est égal à $\mathcal{T}$.

$\trianglerighteq$ Montrons que $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, c'est-à-dire montrons que que tout élément de $\mathcal{T}$ est une solution de l'équation différentielle (E). Tout élément de $\mathcal{T}$ s'écrit $\psi = \phi_{0,\kappa} + \phi_1$ avec $\kappa \in \mathbb{R}$ et est dérivable sur I car $\phi_{0,\kappa}$ et ϕ_1 sont dérivables sur I. D'autre part, on a

$$\psi' + a\,\psi = (\phi_1 + \phi_{0,\kappa})' + a\,(\phi_1 + \phi_{0,\kappa}) = \underbrace{(\phi_1' + a\,\phi_1)}_{=b} + \underbrace{(\phi_{0,\kappa}' + a\,\phi_{0,\kappa})}_{=0} = b,$$

donc ψ est solution de (E).

$\trianglerighteq$ Montrons à présent que $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Pour cela, considérons une solution ϕ de l'équation différentielle (E) ; l'application $\phi - \phi_1$ est dérivable sur I car ϕ et ϕ_1 sont dérivables sur I et on a

$$(\phi - \phi_1)' + a(\phi - \phi_1) = \underbrace{(\phi' + a\,\phi)}_{=b} - \underbrace{(\phi_1' + a\,\phi_1)}_{=b} = 0.$$

On en déduit que $\phi - \phi_1$ est solution de l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E). D'après le théorème 20.1, il existe un réel κ tel que

$$\forall t \in I \quad \phi(t) - \phi_1(t) = \kappa\,\mathrm{e}^{-A(t)}.$$

Toute solution ϕ de l'équation différentielle (E) est donc de la forme $\phi : t \in I \mapsto \kappa\,\mathrm{e}^{-A(t)} + \phi_1(t)$. Elle appartient par conséquent à $\mathcal{T}$. $\square$

[14] Voir le théorème 20.1 p. 1015.

Exemple Considérons sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre normalisée

$$(\mathrm{E}_4) \qquad y'(t) + \frac{y(t)}{\tan(t)} = 2\cos(t).$$

Nous avons vu page 1016 que la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E_4) est

$$\phi_0 : t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\longmapsto \frac{\kappa}{\sin(t)}$$

où $\kappa \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, l'application $\phi_1 : t \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \sin(t)$ est une solution particulière de (E_4) puisque

$$\forall t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\qquad \phi_1'(t) + \frac{\phi_1(t)}{\tan(t)} = \cos(t) + \frac{\sin(t)}{\tan(t)} = 2\cos(t).$$

On déduit du théorème 20.2 que les solutions de l'équation différentielle (E_4) sont toutes les fonctions de la forme

$$\phi : t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\longmapsto \frac{\kappa}{\sin(t)} + \sin(t)$$

où κ désigne un réel.

Dans l'exemple précédent, nous avons pu trouver assez facilement une solution particulière « évidente » de l'équation différentielle (E_4), ce qui a permis grâce au théorème 20.2 de déterminer la solution générale de cette équation différentielle. Dans la plupart des cas on aura cependant des difficultés à trouver une solution particulière « évidente ». On peut toutefois, dans tous les cas, obtenir une solution particulière de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t)$$

par un calcul de primitives. Notons ϕ_1 l'application définie sur I par $\phi_1(t) = B(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)}$ où A désigne une primitive de l'application $t \in I \mapsto a(t)$ et B désigne une primitive de l'application $t \in I \mapsto b(t)\, \mathrm{e}^{A(t)}$. Montrons que ϕ_1 est une solution de l'équation différentielle (E). Pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}\phi_1'(t) &= \big(B(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)}\big)' = B'(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)} - A'(t)\, B(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)} \\ &= b(t)\, \mathrm{e}^{A(t)}\, \mathrm{e}^{-A(t)} - a(t)\, B(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)} = b(t) - a(t)\, B(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\phi_1'(t) + a(t)\, \phi_1(t) = b(t) - a(t)\, B(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)} + a(t) B(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)} = b(t),$$

ce qui établit que l'application ϕ_1 est bien une solution particulière de l'équation différentielle (E). Le théorème 20.2 peut donc être reformulé de la manière suivante.

PROPOSITION 20.2 *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle* (E) *sur I est*

$$\mathcal{S} = \left\{ t \in I \mapsto \big(\kappa + B(t)\big)\, \mathrm{e}^{-A(t)} \;\middle|\; \kappa \in \mathbb{R} \right\}$$

où A désigne une primitive de l'application $t \in I \mapsto a(t)$ et B une primitive de l'application $t \in I \mapsto b(t)\, \mathrm{e}^{A(t)}$, i.e.

$$A(t) = \int a(t)\, \mathrm{d}t \qquad et \qquad B(t) = \int b(t)\, \mathrm{e}^{A(t)}\ \mathrm{d}t.$$

Remarque Le choix de la valeur de la constante dans l'expression de la primitive A et de B ne modifie pas la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E) donnée par la proposition 20.2.

Exemple Considérons sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_5) \qquad y'(t) + \frac{y(t)}{\tan(t)} = \mathrm{e}^t.$$

On a $a : t \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto 1/\tan(t)$ et $b : t \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \mathrm{e}^t$. Nous avons vu page 1016 que la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E_5) est

$$\phi_0 : t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\longmapsto \frac{\kappa}{\sin(t)}$$

où $\kappa \in \mathbb{R}$. Une primitive de a sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ est[15]

$$A(t) = \int a(t)\ \mathrm{d}t = \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\ \mathrm{d}t = \ln(\sin(t))$$

et on en déduit que pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $b(t)e^{A(t)} = \mathrm{e}^t\, \mathrm{e}^{\ln(\sin(t))} = \mathrm{e}^t\ \sin(t)$. Pour obtenir l'expression de B, on a recours à une (double) primitivation par parties[16] ; on a

$$B(t) = \int \mathrm{e}^t\ \sin(t)\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\ \sin(t) - \int \mathrm{e}^t\ \cos(t)\ \mathrm{d}t$$

et

$$\int \mathrm{e}^t\ \cos(t)\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\ \cos(t) + \int \mathrm{e}^t\ \sin(t)\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\ \cos(t) + B(t).$$

On en déduit que

$$B : t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\longmapsto \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^t\, (\sin(t) - \cos(t)).$$

[15] On remarquera que sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ la fonction sinus est strictement positive.

[16] Voir la proposition 18.12 p. 913.

D'après la proposition 20.2, les solutions de l'équation différentielle (E_5) sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ sont toutes les fonctions ϕ dont l'expression est

$$\phi(t) = \frac{\kappa}{\sin(t)} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^t\,(\sin(t) - \cos(t))\,\frac{1}{\sin(t)} = \frac{\kappa}{\sin(t)} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^t\Big(1 - \frac{1}{\tan(t)}\Big)$$

où κ désigne un réel.

Le résultat suivant peut se révéler très utile dans la pratique car il permet de ramener la résolution d'une équation différentielle au second membre « compliqué » à la résolution de plusieurs équations différentielles aux seconds membres « plus simples ».

Proposition 20.3 (Principe de superposition)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b_1, ..., b_m des applications continues sur I. Si pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, l'application ϕ_k est une solution particulière sur I de l'équation différentielle

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = b_k(t)$$

alors $\phi = \sum_{k=1}^{m} \phi_k$ est une solution particulière sur I de l'équation différentielle

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k(t).$$

Démonstration La fonction $\phi = \sum_{k=1}^{m} \phi_k$ est une solution sur I de l'équation différentielle

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k(t)$$

car pour tout $t \in I$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \phi_k(t)\right)' + a(t)\left(\sum_{k=1}^{m} \phi_k(t)\right) = \sum_{k=1}^{m}\Big(\phi_k'(t) + a(t)\,\phi_k(t)\Big) = \sum_{k=1}^{m} b_k(t).$$

□

On peut trouver difficile de retenir l'expression, donnée à la proposition 20.2, d'une solution particulière pour une équation différentielle. Nous allons voir qu'il existe un moyen d'obtenir une solution particulière à travers un processus calculatoire connu sous le nom de *méthode de la variation de la constante.*

Méthode de la variation de la constante

Considérons sur I la solution générale ϕ_0 de l'équation différentielle homogène (E_0) associée à l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t).$$

D'après le théorème 20.1, cette solution s'écrit comme le produit d'une constante C et de la fonction $g_0 : t \in I \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ où A désigne une primitive de a sur I. Nous allons établir qu'il existe une solution particulière de l'équation différentielle (E) de la forme

$$\phi_1 : t \in I \longmapsto C(t)\, g_0(t)$$

où C désigne ici une application dérivable sur I. L'intérêt de la méthode de la variation de la constante, et l'origine de la terminologie employée, est que l'on peut calculer une solution particulière de l'équation différentielle (E) en partant de l'expression de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E) et en remplaçant la constante C par une fonction inconnue C de la variable t. En écrivant que pour que ϕ_1 soit solution de l'équation différentielle (E) on doit avoir $\phi_1'(t) + a(t)\,\phi_1(t) = b(t)$ pour tout $t \in I$, on obtient une condition sur la dérivée de la fonction C qui permet d'obtenir l'expression de C par un calcul de primitives.

Justifions la validité de la méthode. Si $\phi_1 = C\, g_0$ est solution de (E), on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \forall t \in I \quad \phi_1'(t) + a(t)\,\phi_1(t) = b(t) \\
\iff\ & \forall t \in I \quad \big(C(t)\, g_0(t)\big)' + a(t)\, C(t)\, g_0(t) = b(t) \\
\iff\ & \forall t \in I \quad C'(t)\, g_0(t) + C(t)\, g_0'(t) + a(t)\, C(t)\, g_0(t) = b(t) \\
\iff\ & \forall t \in I \quad C'(t)\, g_0(t) + C(t)\underbrace{\Big(g_0'(t) + a(t)\, g_0(t)\Big)}_{\text{nul car } g_0 \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0)} = b(t) \\
\iff\ & \forall t \in I \quad C'(t)\, g_0(t) = b(t) \\
\iff\ & \forall t \in I \quad C(t) = \int \frac{b(t)}{g_0(t)}\, \mathrm{d}t \qquad \text{car la fonction } g_0 \text{ ne s'annule pas sur } I\ .
\end{aligned}$$

L'équation différentielle (E) admet donc bien une solution particulière de la forme $\phi_1 = C\, g_0$.

Remarquons que la fonction inconnue C est donnée pour tout $t \in I$ par

$$C(t) = \int \frac{b(t)}{g_0(t)}\, \mathrm{d}t = \int b(t)\, \mathrm{e}^{A(t)}\, \mathrm{d}t = B(t).$$

On retrouve donc la solution particulière de l'équation différentielle (E) donnée par la proposition 20.2.

On dispose ainsi d'un moyen calculatoire pour déterminer une solution particulière ϕ_1 de l'équation différentielle (E) : on cherche une solution particulière de la forme

$$\phi_1 : t \in I \longmapsto C(t)\, g_0(t)$$

où la fonction inconnue C est déterminée en exprimant que ϕ_1 doit satisfaire l'équation différentielle (E).

Nous détaillons dans l'exemple suivant la manière d'utiliser la méthode de la variation de la constante.

Exemple Considérons sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_6) \qquad y'(t) + \frac{y(t)}{\tan(t)} = \cos^3(t).$$

Nous avons vu page 1016 que la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E_6) est

$$\phi_0 : t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\longmapsto \frac{C}{\sin(t)}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. Utilisons la méthode de la variation de la constante pour calculer une solution particulière de l'équation différentielle (E_6). On cherche une solution ϕ_1, définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, qui soit de la forme :

$$\phi_1(t) = \frac{C(t)}{\sin(t)}$$

où C désigne une fonction dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\phi_1'(t) = \frac{C'(t)\sin(t) - C(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{C'(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{\tan(t)}\,\frac{C(t)}{\sin(t)}.$$

Puisque la fonction ϕ_1 recherchée doit être une solution de l'équation différentielle (E_6), on doit avoir pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\phi_1'(t) + \frac{\phi_1(t)}{\tan(t)} = \cos^3(t),$$

autrement dit, la fonction C doit vérifier pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\left(\frac{C'(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{\tan(t)}\frac{C(t)}{\sin(t)}\right) + \frac{1}{\tan(t)}\left(\frac{C(t)}{\sin(t)}\right) = \cos^3(t).$$

On en déduit que

$$C'(t) = \cos^3(t)\,\sin(t)$$

puis que

$$C : t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\longmapsto -\tfrac{1}{4}\cos^4(t) + c \tag{2}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante. Puisqu'on est intéressé par une solution particulière de l'équation différentielle (E_6), prenons une valeur particulière pour c, par exemple $c = 0$. Une solution particulière ϕ_1 de l'équation différentielle (E_6) est donc donnée par

$$\forall t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\qquad \phi_1(t) = \frac{C(t)}{\sin(t)} = -\frac{\cos^4(t)}{4\sin(t)}$$

et d'après le théorème 20.2, la solution générale de l'équation différentielle (E_6) est

$$\phi : t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\longmapsto \frac{4\kappa - \cos^4(t)}{4\sin(t)} \qquad \text{où } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Remarques

1. Puisque κ désigne une constante, $K = 4\kappa$ est également une constante. La solution générale de l'équation différentielle (E_6) s'exprime donc plus simplement sous la forme

$$\phi : t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\longmapsto \frac{K - \cos^4(t)}{4\sin(t)} \qquad \text{où } K \in \mathbb{R}.$$

On pourra s'assurer de l'absence d'erreur de calcul en vérifiant que la solution générale obtenue vérifie bien l'équation différentielle que l'on cherchait à résoudre. On vérifiera ici qu'après simplifications, $\phi'(t) + \frac{1}{\tan(t)}\,\phi(t)$ est bien égal à $\cos^3(t)$ pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

2. Signalons qu'en pratique il est possible de simplifier les calculs effectués au cours de l'exemple précédent en conservant, sans l'expliciter, l'expression de la solution particulière ϕ_1 en fonction de g_0. Puisque $\phi_1(t) = C(t)\,g_0(t)$, on a

$$\phi_1'(t) = C'(t)\,g_0(t) + C(t)\,g_0'(t).$$

Comme ϕ_1 est une solution de l'équation différentielle (E_6), on doit avoir pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\phi_1'(t) + \frac{\phi_1(t)}{\tan(t)} = C'(t)\,g_0(t) + C(t)\left(g_0'(t) + \frac{g_0(t)}{\tan(t)}\right) = \cos^3(t).$$

Le terme entre parenthèses est nul puisque g_0 est solution de l'équation différentielle homogène associée à (E_6). On obtient donc à nouveau

$$\forall t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\qquad C'(t) = \frac{\cos^3(t)}{g_0(t)} = \cos^3(t)\sin(t).$$

3. Mentionnons aussi que, si l'on prend une valeur différente de 0 pour la constante c dans l'expression de C donnée par la relation (2), on obtient pour expression de la solution générale de l'équation différentielle (E_6)

$$\phi(t) = \left(-\tfrac{1}{4}\cos^4(t) + c\right)\frac{1}{\sin(t)} + \frac{\kappa}{\sin(t)} = \frac{4(\kappa + c) - \cos^4(t)}{4\sin(t)}.$$

On retrouve l'expression de la solution générale de l'équation différentielle (E_6) donnée précédemment car $K = 4(\kappa + c)$ est une constante.

Après avoir effectué un calcul menant à la solution d'une équation différentielle, il convient de s'assurer qu'aucune erreur de calcul n'a été faite en vérifiant que les fonctions proposées comme solutions de l'équation différentielle vérifient effectivement l'équation différentielle.

Exercice 1 Déterminer la solution générale des équations suivantes après avoir indiqué sur quel intervalle la solution est définie[17].

1 - $3y'(t) + 12\,y(t) = 4$. 2 - $y'(t) + y(t) = e^{3t}$.

3 - $y'(t) + \dfrac{t+2}{t}\,y(t) = \dfrac{e^t}{t^2}$. 4 - $y'(t) = (1 - y(t))\,\mathrm{ch}(t)$.

[17] On prendra garde à déterminer le domaine de validité I de la solution avant tout calcul.

Théorème 20.3 (Théorème de Cauchy)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux applications continues sur I. Quels que soient $t_0 \in I$ et $\eta \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy constitué de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t)$$

et de la condition initiale $y(t_0) = \eta$.

Démonstration ⊵ D'après le théorème 20.2, les solutions de l'équation différentielle (E) sont toutes les applications de la forme

$$\phi : t \in I \longmapsto (\kappa + B(t))\,\mathrm{e}^{-A(t)}, \qquad \kappa \in \mathbb{R},$$

où A désigne une primitive de a sur I et B désigne une primitive de $t \mapsto b(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$ sur I. Nous avons indiqué que le choix de la valeur des constantes d'intégration dans l'expression des primitives A et B ne modifiait pas l'expression de la solution générale de l'équation différentielle (E). Nous pouvons donc imposer que A (resp. B) désigne la primitive de a (resp. de b) qui prend la valeur 0 en t_0. Pour que ϕ prenne la valeur η en t_0, on doit avoir

$$(\kappa + B(t_0))\,\mathrm{e}^{-A(t_0)} = \eta.$$

c'est-à-dire $\kappa = \eta\,\mathrm{e}^{A(t_0)} - B(t_0)$. On a donc trouvé une solution sur I à l'équation différentielle (E) qui prend la valeur η en t_0 ; il s'agit de l'application

$$\phi : t \in I \longmapsto \kappa_0\,\mathrm{e}^{-A(t)} + B(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} \quad \text{où} \quad \kappa_0 = \eta\,\mathrm{e}^{A(t_0)} - B(t_0)$$

et A (resp. B) désigne la primitive de a (resp. de b) qui prend la valeur 0 en t_0.

⊵ Démontrons l'unicité de la solution du problème de Cauchy constitué de l'équation différentielle (E) et de la condition initiale $y(t_0) = \eta$. Supposons qu'il existe deux solutions ϕ et ψ au problème de Cauchy. On a dans ce cas

$$\forall t \in I \quad \phi'(t) + a(t)\,\phi(t) = b(t) \quad \text{et} \quad \forall t \in I \quad \psi'(t) + a(t)\,\psi(t) = b(t).$$

La fonction $\chi = \psi - \phi$ vérifie donc par différence entre ces deux équations différentielles

$$\forall t \in I \quad \chi'(t) + a(t)\,\chi(t) = 0.$$

D'après le théorème 20.1, il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que $\chi : t \in I \mapsto \kappa\,\mathrm{e}^{-A(t)}$ où A désigne une primitive de a sur I. Or, on déduit de la condition initiale du problème de Cauchy que $\chi(t_0) = \psi(t_0) - \phi(t_0) = \eta - \eta = 0$ et par ailleurs

Ce domaine de validité dépend de l'ensemble de continuité des fonctions a et b qui sont coefficients de l'équation différentielle. La fonction solution peut avoir un ensemble de définition plus grand, mais elle n'est solution que sur l'intervalle I. Par exemple, sur l'intervalle $]0, \pi/2[$ l'équation différentielle $y'(t) + \frac{y(t)}{\tan(t)} = 2\cos(t)$ admet pour solution générale la fonction $y : t \mapsto -\frac{1}{2}\frac{\cos(2t)}{\sin(t)} + \frac{\kappa}{\sin(t)}$ où $\kappa \in \mathbb{R}$, qui est, elle, définie sur $]0, \pi[$.

$\chi(t_0) = \kappa\, \mathrm{e}^{-A(t_0)}$. Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on en déduit que nécessairement $\kappa = 0$. Cela implique que χ est la fonction nulle et par conséquent que $\psi = \phi$. On en conclut qu'il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy Le théorème est démontré. $\square$

20.2.4 Étude détaillée d'un exemple

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(\mathrm{E}_7) \quad 2t(t+1)\, y'(t) + (t+1)\, y(t) = 1.$$

Mise sous forme normalisée

L'équation (E_7) admet pour forme normalisée l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_{7,N}) \quad y'(t) + \frac{1}{2t}\, y(t) = \frac{1}{2t(t+1)}.$$

Considérons les applications

$$a : t \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{1}{2t} \qquad \text{et} \qquad b : t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \longmapsto \frac{1}{2t(t+1)}.$$

L'application a est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. L'application b est continue sur $]-\infty, -1[$, sur $]-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. On s'intéresse donc aux solutions de l'équation $(\mathrm{E}_{7,N})$ sur chacun des trois intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$. L'équation $(\mathrm{E}_{7,N})$ admet pour équation homogène associée

$$(\mathrm{E}_{7,0}) \quad y'(t) + \frac{1}{2t}\, y(t) = 0.$$

Résolution de l'équation homogène

La seconde étape de la résolution de l'équation différentielle (E_7) consiste à déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène $(\mathrm{E}_{7,0})$. Sur chaque intervalle $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$, une primitive de la fonction a est $A : t \mapsto \frac{1}{2} \ln|t|$. Comme $\mathrm{e}^{-A(t)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln|t|} = \left(\mathrm{e}^{\ln|t|}\right)^{-\frac{1}{2}} = |t|^{-\frac{1}{2}}$, on déduit du théorème 20.1 que sur chacun de ces trois intervalles considérés séparément, la solution générale de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{7,0})$ est

$$\phi_0 : t \longmapsto \frac{C}{\sqrt{|t|}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière de l'équation $(\mathrm{E}_{7,N})$

L'équation $(\mathrm{E}_{7,N})$ ne possédant pas de solution évidente, on a recours à la méthode de la variation de la constante[18]. On recherche donc une solution

[18] Rappelons que l'on pourrait également utiliser la proposition 20.2 mais qu'en pratique, on préfère procéder au calcul par la méthode de la variation de la constante plutôt que de retenir le résultat de la proposition 20.2.

particulière de l'équation différentielle ($\mathrm{E}_{7,N}$) de la forme

$$\phi_1 : t \longmapsto \frac{C(t)}{\sqrt{|t|}}$$

où C désigne une fonction dérivable inconnue différente sur chaque intervalle $]-\infty,-1[,]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. Notons $g_0 : t \mapsto 1/\sqrt{|t|}$; en utilisant la règle de dérivation d'un produit, on a pour tout t dans l'un des trois intervalles $]-\infty,-1[,]-1,0[$ ou $]0,+\infty[$,

$$\phi_1'(t) = C'(t)\, g_0(t) + C(t)\, g_0'(t).$$

Puisque la fonction recherchée est solution de l'équation différentielle ($\mathrm{E}_{7,N}$),

$$\phi_1'(t) + \frac{1}{2t}\,\phi_1(t) = \frac{1}{2t(t+1)},$$

ce qui implique que

$$C'(t)\, g_0(t) + C(t)\, g_0'(t) + \frac{C(t)\, g_0(t)}{2t} = C'(t)\, g_0(t) + C(t)\left(\underbrace{g_0'(t) + \frac{g_0(t)}{2t}}_{=0}\right)$$

car g_0 est solution de l'équation différentielle homogène ($\mathrm{E}_{7,0}$). On a donc

$$C'(t)\, g_0(t) = \frac{1}{2t(t+1)}.$$

Pour que ϕ_1 soit solution de l'équation ($\mathrm{E}_{7,N}$), la fonction inconnue C sur chacun des trois intervalles $]-\infty,-1[,]-1,0[$ et $]0,+\infty[$ doit donc avoir pour dérivée

$$C'(t) = \frac{\sqrt{|t|}}{2t(t+1)}.$$

Pour déterminer l'expression de C, effectuons une disjonction de cas selon le signe de t.

$\trianglerighteq$ *Recherche d'une solution particulière sur* $]-\infty,-1[$ *et sur* $]-1,0[$.

Sur les intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,0[$, on a $|t| = -t$ et $t = -\sqrt{-t}\times\sqrt{-t}$ donc

$$C(t) = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{-t}(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{-t}}}{1-(\sqrt{-t})^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pour calculer cette primitive, considérons le changement de variable défini par $u : t \mapsto \sqrt{-t}$. On a $u'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{-t}}$ et en utilisant la première formule de changement de variable pour une primitive[19], on obtient

$$C(t) = \int \frac{u'(t)}{1-u^2(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right]_{x=u(t)} = \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_{x=u(t)}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right|\right).$$

[19] Voir la proposition 18.13, p. 914.

Une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{7,N})$ sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,0[$ a donc pour expression

$$\phi_1(t)=\frac{C(t)}{\sqrt{-t}}=\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{|\sqrt{-t}-1|}\right).$$

Sur l'intervalle $]-1,0[$, une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ est la fonction argument tangente hyperbolique mais la fonction argument tangente hyperbolique qui est définie (et dérivable) sur $]-1,1[$ n'est pas une primitive de f sur $]-\infty,-1[$.

⊵ *Recherche d'une solution particulière sur* $]0,+\infty[$.

Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, on a

$$C(t)=\int\frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t=\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{1+(\sqrt{t})^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pour calculer cette primitive, considérons le changement de variable défini par $u : t\in]0,+\infty[\mapsto\sqrt{t}$. D'après la première formule de changement de variable pour une primitive(19), on a

$$C(t)=\int\frac{u'(t)}{1+u^2(t)}\,\mathrm{d}t=\left[\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right]_{x=u(t)}=\Big[\arctan(x)\Big]_{x=u(t)}=\arctan(\sqrt{t}).$$

On obtient donc pour expression de la solution particulière de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{7,N})$ sur $]0,+\infty[$

$$\phi_1(t)=\frac{C(t)}{\sqrt{t}}=\frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}.$$

Solution générale de l'équation $(\mathrm{E}_{7,N})$

D'après le théorème 20.2, on obtient la solution générale de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{7,N})$ sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$, en ajoutant la solution générale de l'équation différentielle homogène $(\mathrm{E}_{7,0})$ à une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{7,N})$.

⊵ *Solution générale sur* $]-\infty,-1[$.

La solution générale de l'équation $(\mathrm{E}_{7,N})$ sur $]-\infty,-1[$ est

$$\phi : t\in]-\infty,-1[\longmapsto\frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}}+\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right)\qquad\text{où }\kappa_1\in\mathbb{R}.$$

⊵ *Solution générale sur* $]-1,0[$.

La solution générale de l'équation $(\mathrm{E}_{7,N})$ sur $]-1,0[$ est

$$\phi : t\in]-1,0[\longmapsto\frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}}+\frac{\operatorname{argth}(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}}\qquad\text{où }\kappa_2\in\mathbb{R}.$$

⊵ *Solution générale sur* $]0,+\infty[$.

La solution générale de l'équation $(\mathrm{E}_{7,N})$ sur $]0,+\infty[$ est

$$\phi : t \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{\kappa_3}{\sqrt{t}} + \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \qquad \text{où } \kappa_3 \in \mathbb{R}.$$

Étude des solutions de l'équation (E_7)

Les équations différentielles (E_7) et $(\mathrm{E}_{7,N})$ ne sont pas équivalentes puisqu'elles ne sont pas définies sur le même ensemble ; l'équation différentielle (E_7) est définie sur $\mathbb{R}$ alors que l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{7,N})$ est définie sur les 3 intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. Une solution de (E_7), si elle existe, sera solution de $(\mathrm{E}_{7,N})$ sur les trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. On a déterminé les solutions de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{7,N})$ sur ces trois intervalles. Se pose maintenant la question de savoir si à partir des solutions de $(\mathrm{E}_{7,N})$ sur les trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$, on peut obtenir une solution de l'équation différentielle (E_7) sur $\mathbb{R}$. En d'autres termes, peut-on trouver une application ϕ définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que ϕ restreinte à $]-\infty,-1[$ soit solution de $(\mathrm{E}_{7,N})$ sur $]-\infty,-1[$, ϕ restreinte à $]-1,0[$ soit solution de $(\mathrm{E}_{7,N})$ sur $]-1,0[$ et ϕ restreinte à $]0,+\infty[$ soit solution de $(\mathrm{E}_{7,N})$ sur $]0,+\infty[$?

Si une telle solution ϕ existe, elle est nécessairement de la forme :

$$\phi(t) = \begin{cases} \dfrac{\kappa_1}{\sqrt{-t}} + \dfrac{1}{2\sqrt{-t}} \ln\left(\dfrac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right) & \text{pour } t \in]-\infty,-1[\\[2ex] \dfrac{\kappa_2}{\sqrt{-t}} + \dfrac{\operatorname{argth}(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}} & \text{pour } t \in]-1,0[\\[2ex] \dfrac{\kappa_3}{\sqrt{t}} + \dfrac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{pour } t \in]0,+\infty[\end{cases}$$

où κ_1, κ_2 et κ_3 désignent trois constantes réelles. Pour que cette fonction ϕ soit une solution de l'équation différentielle (E_7), il faut qu'elle soit prolongeable par continuité en -1 et 0 et que la fonction prolongée à $\mathbb{R}$ ainsi obtenue soit dérivable sur $\mathbb{R}$, voir page 1013.

⊵ *Étude du raccord en* 0.

Puisque[20] $\arctan(u) \underset{0}{\sim} u$ et que $\operatorname{argth}(u) \underset{0}{\sim} u$, on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{argth}(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}} = 1.$$

Par ailleurs $t \mapsto 1/\sqrt{|t|}$ n'est pas bornée en 0. On en déduit que ϕ est prolongeable par continuité en 0 si, et seulement si, $\kappa_3 = \kappa_2 = 0$. Regardons

[20] Voir le chap. 15 p. 732.

maintenant la dérivabilité de ϕ en 0. Le taux d'accroissement[(21)] de ϕ en 0 vaut

$$\Delta_0(h) = \frac{\phi(h)-\phi(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{\arctan(\sqrt{h})-\sqrt{h}}{h^{3/2}} & \text{si } h>0 \\ -\dfrac{\operatorname{argth}(\sqrt{-h})-\sqrt{-h}}{(-h)^{3/2}} & \text{si } h<0 \end{cases}$$

En ayant recours aux développements limités à l'ordre 3 en 0 pour les fonctions arc-tangente et argument tangente hyperbolique[(22)], on obtient

$$\frac{\arctan(u)-u}{u^3} = -\frac{1}{3} + o_0(u) \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{argth}(u)-u}{u^3} = \frac{1}{3} + o_0(u),$$

et on en déduit que[(23)]

$$\lim_{h\to 0^+} \Delta_0(h) = \lim_{u\to 0} \frac{\arctan(u)-u}{u^3} = -\frac{1}{3}$$
$$\text{et} \quad \lim_{h\to 0^-} \Delta_0(h) = \lim_{u\to 0} -\frac{\operatorname{argth}(u)-u}{u^3} = -\frac{1}{3}.$$

Par conséquent, la fonction ϕ pour les valeurs $\kappa_3 = \kappa_2 = 0$ est dérivable en 0 et $\phi'(0) = -1/3$.

⊵ *Étude du raccord en* -1.

La fonction ϕ ne peut pas être prolongée par continuité en -1 car quelle que soit la valeur de κ_1, on a

$$\lim_{t\to -1^-} \frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}} + \frac{1}{2\sqrt{-t}} \ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right) = +\infty.$$

⊵ *Conclusion.*

L'équation (E_7) admet des solutions sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$ qui sont respectivement les applications

$$t \in]-\infty,-1[\longmapsto \frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}} + \frac{1}{2\sqrt{-t}} \ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right)$$

$$t \in]-1,0[\longmapsto \frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}} + \frac{\operatorname{argth}(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}}$$

$$t \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{\kappa_3}{\sqrt{t}} + \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$$

---

(21) Voir la définition 16.1 p. 747.

(22) Voir le chap. 17 p. 834 et l'exercice 5 p. 836.

(23) Considérer les changements de variable $u = \sqrt{h}$ pour la limite à droite et $u = \sqrt{-h}$ pour la limite à gauche.

avec $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}$.

Elle admet une unique solution sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ qui est

$$\phi : t \in]-1, +\infty[\longmapsto \begin{cases} \dfrac{\operatorname{argth}(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}} & \text{si } t \in]-1, 0[\\ 1 & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{cases}$$

Elle n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Résoudre l'équation différentielle

$$t\,y'(t) + (3t+1)\,y(t) = \mathrm{e}^{-3t}.$$

20.2.5 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients complexes constants

Intéressons-nous maintenant au cas des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients complexes constants. Pour cela, il est indispensable de préciser au préalable quelques notions concernant les fonctions d'une variable réelle qui sont à valeurs complexes.

Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Considérons une application f de I dans $\mathbb{C}$ qui à un réel t associe le complexe $z = f(t)$. Puisque le nombre complexe z varie selon les valeurs prises par la variable t, sa partie réelle et sa partie imaginaire varient également avec la variable t. Ainsi, étant donnée une fonction f de I dans $\mathbb{C}$, il existe deux fonctions f_r et f_i de I dans $\mathbb{R}$ (déterminées de manière unique) telles que pour tout $t \in I$

$$f(t) = f_r(t) + \mathrm{i}\, f_i(t).$$

✗ On dit que f est continue en $t_0 \in I$ (resp. sur I) si les deux fonctions réelles d'une variable réelle f_r et f_i sont continues en t_0 (resp. sur I).

✗ On dit que f est dérivable en $t_0 \in I$ (resp. sur I) si les deux fonctions réelles d'une variable réelle f_r et f_i sont dérivables en t_0 (resp. sur I) et on a

$$f'(t_0) = f_r'(t_0) + \mathrm{i}\, f_i'(t_0).$$

Exemple L'application $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t) \in \mathbb{C}$ est continue et dérivable. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $f'(t) = -\sin(t) + \mathrm{i}\cos(t)$.

L'exponentielle complexe

Étant donné un nombre complexe z de partie réelle x et de partie imaginaire y, on appelle exponentielle de z et on note $\exp(z)$, le nombre complexe

$$\exp(z) = \mathrm{e}^{x}(\cos(y) + \mathrm{i}\,\sin(y)).$$

On dispose ainsi d'une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, appelée exponentielle complexe, qui prolonge l'application exponentielle réelle définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ au sens où si le complexe z a une partie imaginaire y nulle, c'est-à-dire si $z = x$, alors $\exp(z)$ est égal à e^{x}.

De plus, si le complexe z a une partie réelle x nulle, c'est-à-dire si $z = \mathrm{i}\,y$, alors

$$\exp(z) = \exp(\mathrm{i}\,y) = \cos(y) + \mathrm{i}\,\sin(y),$$

ce qui éclaire la convention de notation prise dans le chapitre 4 page 141 sur l'écriture polaire des nombres complexes.

On démontre les propriétés suivantes pour la fonction exponentielle complexe[24] :

1. $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad \exp(z_1) \times \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$;
2. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \left(\exp(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad \exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}\right)$;
3. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\exp(z))^{n} = \exp(nz)$;
4. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

Par la suite, on notera également e^{z} l'exponentielle du complexe z.

Exemple Étant donné un nombre complexe a de partie réelle α et de partie imaginaire β, considérons l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(t) = \mathrm{e}^{at}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = f_r(t) + \mathrm{i}\,f_i(t)$ où

$$f_r(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad \text{et} \quad f_i(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t).$$

Les deux applications f_r et f_i sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f_r'(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t)\right) \quad \text{et} \quad f_i'(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t)\right).$$

On en déduit que

$$f'(t) = f_r'(t) + \mathrm{i}\,f_i'(t) = (\alpha + \mathrm{i}\,\beta)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta t} = a\,\mathrm{e}^{at}.$$

Symboliquement, on retiendra que $(\mathrm{e}^{at})' = a\,\mathrm{e}^{at}$ que le scalaire a soit réel ou complexe.

---

[24] Voir le chapitre 4 du *Cours de mathématiques de deuxième année* p. 204 pour la preuve de ces propriétés.

Équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficient complexe constant

Considérons une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficient complexe de la forme

$$\text{(E)} \quad y'(t) + a\,y(t) = 0 \qquad \text{où } a \in \mathbb{C}.$$

Toute solution de l'équation différentielle (E) est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$\phi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \phi_r(t) + \mathrm{i}\,\phi_i(t) \in \mathbb{C}$$

où ϕ_r et ϕ_i désignent deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La proposition suivante, que nous admettrons, indique que les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la même forme que celles d'une équation différentielle où le coefficient a serait réel, voir le théorème 20.1. On notera toutefois que la constante κ est un complexe et non plus un réel.

PROPOSITION 20.4 *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficient complexe*

$$\text{(E)} \quad y'(t) + a\,y(t) = 0 \qquad \textit{où } a \in \mathbb{C}$$

est $\mathcal{S}_0 = \Big\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \kappa\,\mathrm{e}^{-at} \mid \kappa \in \mathbb{C} \Big\}$.

Remarque On vérifiera que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ de dimension 1.

Exemple D'après la proposition 20.4, l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_8) \quad y'(t) + \mathrm{i}\,y(t) = 0$$

admet pour solution générale $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \kappa\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}, \quad \kappa \in \mathbb{C}$.
En notant $\kappa = C_1 + \mathrm{i}\,C_2$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = \kappa\,(\cos(t) - \mathrm{i}\,\sin(t)) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) + \mathrm{i}\,(C_2\cos(t) - C_1\sin(t)).$$

L'équation différentielle (E_8) admet une unique solution qui prend la valeur $1+\mathrm{i}$ en 0. Elle correspond à la valeur $\kappa = 1 + \mathrm{i}$. Il s'agit de l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto (1+\mathrm{i})\cos(t) + (1-\mathrm{i})\sin(t)$ correspondant aux valeurs $C_1 = C_2 = 1$.

20.3 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants

Il arrive assez fréquemment en physique que l'on cherche simultanément plusieurs fonctions qui sont solutions d'équations différentielles liant leurs dérivées.

Considérons par exemple une charge électrique q de masse m se déplaçant dans l'espace sous l'action d'un champ magnétique $\overrightarrow{B} = (B_1, B_2, B_3)$ constant au cours du temps et d'un champ électrique $\overrightarrow{E} = (E_1, E_2, E_3)$ variant au cours du temps. La vitesse $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de la particule au cours du temps vérifie le système différentiel[25]

$$(\mathrm{S}_1) \qquad \begin{cases} v_1'(t) = \dfrac{q}{m}\,\big(B_3\ v_2(t) - B_2\ v_3(t) + E_1(t)\big) \\[2mm] v_2'(t) = \dfrac{q}{m}\,\big(B_1\ v_3(t) - B_3\ v_1(t) + E_2(t)\big)\ . \\[2mm] v_3'(t) = \dfrac{q}{m}\,\big(B_2\ v_1(t) - B_1\ v_2(t) + E_3(t)\big) \end{cases}$$

Nous allons nous intéresser aux propriétés d'un tel système différentiel et à la manière de le résoudre.

20.3.1 Généralités

Soient a_{ij} où $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ des réels et b_i où $i \in \{1\ldots,n\}$ des applications continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle *système différentiel linéaire à coefficients constants*, un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants de la forme

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} y_1'(t) &=& a_{11}\,y_1(t) + a_{12}\,y_2(t) + \cdots + a_{1n}\,y_n(t) + b_1(t) \\ &\vdots& \\ y_n'(t) &=& a_{n1}\,y_1(t) + a_{n2}\,y_2(t) + \cdots + a_{nn}\,y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire sous forme condensée

$$(\mathrm{S}) \qquad \forall i \in \{1,\ldots,n\} \qquad y_i'(t) = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,y_j(t)\Big) + b_i(t).$$

On appelle système différentiel homogène associé au système différentiel (S) le système d'équations différentielles homogènes

$$(\mathrm{S}_0) \qquad \forall i \in \{1,\ldots,n\} \qquad y_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j(t).$$

Notons A la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les scalaires a_{ij} pour tous $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ et désignons par $\mathrm{B}(t)$ et $\mathrm{Y}(t)$ les matrices-colonnes

[25] Ce système est obtenu en utilisant le principe fondamental de la dynamique et la loi de Lorentz et correspond à la relation

$$m\overrightarrow{v}' = q\ \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} + q\overrightarrow{E}.$$

(fonctions de la variable t et définies pour tout $t \in I$)

$$\mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}.$$

En désignant pour tout $t \in I$ par $\mathrm{Y}'(t)$ la matrice-colonne dont les coefficients sont $y_1'(t), \dots, y_n'(t)$, le système différentiel (S) peut s'écrire sous la forme :

$$\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t) + \mathrm{B}(t)$$

et le système différentiel homogène (S_0) sous la forme :

$$\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t).$$

Remarquons que pour tout $t \in I$, $\mathrm{Y}(t)$, $\mathrm{Y}'(t)$ et $\mathrm{B}(t)$ sont des vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par abus de langage et de notation courants, nous dirons que ce sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (confondant ainsi un vecteur et sa représentation matricielle) et nous noterons $\mathrm{Y}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Y}'(t) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{B}(t) \in \mathbb{R}^n$.

Exemples

1. Le système différentiel (S_1) s'écrit $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t) + \mathrm{B}(t)$ où

$$\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} \frac{q}{m}E_1(t) \\ \frac{q}{m}E_2(t) \\ \frac{q}{m}E_3(t) \end{pmatrix} = \frac{q}{m}\begin{pmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \\ E_3(t) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{A} = \frac{q}{m}\begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Le système différentiel homogène

$$(\mathrm{S}_2) \qquad \begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + 3y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) + \ \, y_2(t) \end{cases}.$$

s'écrit $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t)$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$.

3. Pour $a \in \mathbb{R}^*$, le système différentiel homogène

$$(\mathrm{S}_3) \qquad \begin{cases} y_1'(t) = a\,y_2(t) \\ y_2'(t) = -a\,y_1(t) \end{cases}$$

s'écrit $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t)$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$.

Reprenant les étapes de l'étude d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, nous allons commencer par l'étude des systèmes différentiels homogènes puis nous aborderons celle des systèmes non homogènes.

20.3.2 Systèmes différentiels homogènes

Comme dans le cas d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, l'étude d'un système différentiel linéaire du premier ordre passe dans un premier temps par l'étude du système différentiel homogène associé. On considère dans cette partie le système différentiel homogène

$$(\mathrm{S_0}) \qquad \mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t)$$

où $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. La solution Φ recherchée est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant pour tout $t \in I$,

$$\Phi'(t) = \mathrm{A}\,\Phi(t)$$

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions du système différentiel homogène $(\mathrm{S_0})$ est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. On montre la proposition suivante d'une manière très similaire à la proposition 20.1.

Proposition 20.5 *L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions du système différentiel* $(\mathrm{S_0})$ *est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n.*

Par analogie avec ce qui a été vu dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants (voir la méthode de la variation de la constante page 1021), on peut se demander s'il existe des solutions Φ du système différentiel $(\mathrm{S_0})$ de la forme

$$\Phi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{U} \tag{3}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{U} \in \mathbb{R}^n$. Si c'est le cas, on a $\mathrm{Y}'(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{U}$ et cette fonction est solution du système différentiel $(\mathrm{S_0})$ si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{U} = \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{A}\,\mathrm{U},$$

c'est-à-dire (puisque $\mathrm{e}^{\lambda t}$ n'est jamais nul) si, et seulement si, $\mathrm{A}\,\mathrm{U} = \lambda\,\mathrm{U}$. On en déduit que le système différentiel $(\mathrm{S_0})$ admet bien des solutions de la forme (3) où (λ, U) correspond à un couple formé d'une valeur propre et d'un vecteur propre de A.

Déterminer les solutions du système différentiel $(\mathrm{S_0})$ qui sont de la forme $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{U}$ consiste donc à calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A. Nous allons envisager deux cas : celui où la matrice A est diagonalisable (cas pour lequel les choses sont relativement simples à établir) et le cas où la matrice A n'est pas diagonalisable. Rappelons[26] qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Si la matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, puisqu'on a l'inclusion $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il se peut toutefois que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Mais là encore, une matrice n'est pas nécessairement diagonalisable dans $\mathbb{C}$. On est donc amené à

[26] Voir les conditions de diagonalisation d'une matrice p. 563.

considérer les cas suivants : le cas où la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et le cas où la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Bien entendu, si A est une matrice à coefficients réels, alors la solution du système différentiel (S_0) est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ et, le cas échéant, le passage dans $\mathbb{C}$ pour diagonaliser la matrice et obtenir les solutions peut être vu comme un artifice de calcul[27].

Théorème 20.4 (Cas d'une matrice diagonalisable)
Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice diagonalisable et* $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_n$ *des vecteurs propres de* A *associés respectivement aux valeurs propres (non nécessairement distinctes)* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. *La solution générale du système différentiel homogène* (S_0) *est l'application* Φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{K}^n$ *définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi(t) = \kappa_1 \, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \, \mathrm{U}_1 + \cdots + \kappa_n \, \mathrm{e}^{\lambda_n t} \, \mathrm{U}_n$$

où $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{K}$ *désignent des constantes scalaires.*

Démonstration Notons D la matrice diagonale de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont les n éléments diagonaux sont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A. La matrice A étant supposée diagonalisable dans $\mathbb{K}$, d'après la définition 12.8, page 562, il existe une matrice inversible $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1} \, \mathrm{A} \, \mathrm{P}$$

où les colonnes de P sont les vecteurs propres $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n$ de A associés, dans cet ordre, aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

On a $\mathrm{A} = \mathrm{P} \, \mathrm{D} \, \mathrm{P}^{-1}$ et le système différentiel (S_0) s'écrit donc également

$$\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{P} \, \mathrm{D} \, \mathrm{P}^{-1} \, \mathrm{Y}(t). \tag{4}$$

En multipliant à gauche par P^{-1} chaque membre de (4), on obtient :

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{D}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y}(t). \tag{5}$$

Notons $\mathrm{X}(t)$ le vecteur $\mathrm{P}^{-1} \, \mathrm{Y}(t)$; ce vecteur exprime[28] la solution du système différentiel (S_0) dans la base $(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$ de $\mathbb{K}^n$ formée des vecteurs propres de A et la relation (5) s'écrit

$$\mathrm{X}'(t) = \mathrm{D} \, \mathrm{X}(t).$$

La matrice D étant diagonale, les composantes $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ du vecteur $\mathrm{X}(t)$ sont solutions des n équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants suivantes

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad x_i'(t) - \lambda_i \, x_i(t) = 0.$$

[27] On peut faire un parallèle avec la factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ où dans certains cas il est avantageux d'avoir recours à l'inclusion $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ pour établir, dans un premier temps, les résultats dans $\mathbb{C}[X]$, avant de les exprimer dans $\mathbb{R}[X]$.

[28] Voir la proposition 10.17 p. 463.

Les solutions sont[29] $x_i(t) = \kappa_i \, \mathrm{e}^{\lambda_i t}$ où $\kappa_i \in \mathbb{K}$. On a donc

$$\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} \kappa_1 \, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \kappa_n \, \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système différentiel (S_0) s'obtient par conséquent par changement de base

$$\Phi(t) = \mathrm{P}\,\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathrm{U}_1 & & \mathrm{U}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \kappa_n \, \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Le calcul du produit de la matrice P par le vecteur fournit l'expression $\Phi(t) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \, \mathrm{e}^{\lambda_i t} \, \mathrm{U}_i$ annoncée. □

Remarques

1. Même si on est conduit, pour des raisons liées à la diagonalisation, à considérer la matrice comme élément de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ pour appliquer le théorème 20.4, si cette matrice est à coefficients réels, on pourra toujours exprimer la solution comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ car les valeurs propres complexes d'une matrice à coefficients réels sont conjuguées deux à deux, de même que les vecteurs propres qui leur sont associés (voir le second exemple donné ci-après).

2. Nous avions indiqué à la proposition 20.5 que l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions du système différentiel (S) est un espace vectoriel de dimension n. On retrouve cette caractéristique au niveau de l'expression de l'ensemble des solutions donné par le théorème 20.4.

Exemples

1. Déterminons les couples de fonctions (ϕ_1, ϕ_2) qui sont solutions du système différentiel

$$(\mathrm{S}_2) \qquad \begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + 3y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) + \ y_2(t) \end{cases}.$$

Ce système différentiel s'écrit sous la forme $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t)$ avec, voir page 1035,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[29] On utilise le théorème 20.1 si λ_i est une valeur propre réelle ou la proposition 20.4 si λ_i est une valeur propre complexe.

La matrice A admet deux valeurs propres réelles distinctes[30] : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$. Les vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres sont respectivement[31]

$$\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 20.4, la solution générale du système différentiel (S_2) est

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{U}_1 + C_2\,\mathrm{e}^{4t}\,\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{-t} + 3\,C_2\,\mathrm{e}^{4t} \\ -C_1\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,C_2\,\mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}$$

où C_1 et C_2 désignent deux constantes réelles. Les solutions du système différentiel (S_2) sont donc tous les couples (ϕ_1, ϕ_2) où

$$\phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto C_1\,\mathrm{e}^{-t} + 3C_2\,\mathrm{e}^{4t} \quad \text{et} \quad \phi_2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto -C_1\,\mathrm{e}^{-t} + 2C_2\,\mathrm{e}^{4t}$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Étant donnés trois réels a, α, β fixés avec $a \neq 0$, déterminons les couples de fonctions (ϕ_1, ϕ_2) solutions du système différentiel, voir page 1035,

$$(\mathrm{S}_3) \qquad \begin{cases} y_1'(t) = a\,y_2(t) \\ y_2'(t) = -a\,y_1(t) \end{cases}$$

qui vérifient la condition initiale $\phi_1(0) = \alpha$ et $\phi_2(0) = \beta$. Ce système différentiel s'écrit sous la forme $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t)$ avec

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique associée à la matrice A est $P = X^2 + a^2$. Il n'a pas de racine réelle mais possède deux racines complexes conjuguées $\alpha_1 = \mathrm{i}\,a$ et $\alpha_2 = -\mathrm{i}\,a$. La matrice A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Nous allons donc utiliser le théorème 20.4 avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Par rapport à l'exemple précédent une étape supplémentaire sera nécessaire pour exprimer les solutions obtenues comme fonctions de la variable réelle. Les vecteurs propres associés aux deux valeurs propres de A sont respectivement

$$\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 20.4, la solution générale du système différentiel (S_3) est

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} &= C_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,at}\,\mathrm{U}_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,at}\,\mathrm{U}_2 \\ &= C_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,at} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,at} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,at} + C_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,at} \\ \mathrm{i}\,C_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,at} - \mathrm{i}\,C_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,at} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[30] Voir p. 553 pour un exemple d'un tel calcul.

[31] Voir p. 559 pour un exemple d'un tel calcul.

où C_1 et C_2 désignent deux constantes complexes. Les solutions complexes du système différentiel (S_3) sont donc tous les couples (ϕ_1, ϕ_2) où

$$\phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto C_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, at} + C_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, at} \quad \text{et} \quad \phi_2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{i}\, C_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, at} - \mathrm{i}\, C_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, at} \tag{6}$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$. Remarquons que puisque a est réel, chaque composante ϕ_1 et ϕ_2 d'un couple de solutions est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors que l'expression de ces applications donnée par (6) fait intervenir des quantités complexes. Intéressons-nous à la façon d'exprimer ces solutions uniquement à l'aide de quantités réelles. Commençons par constater que l'on peut exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} &\phi_1(t) = (C_1 + C_2)\cos(at) + \mathrm{i}\,(C_1 - C_2)\sin(at) \\ \text{et} \quad &\phi_2(t) = -(C_1 + C_2)\sin(at) + \mathrm{i}\,(C_1 - C_2)\cos(at) \end{aligned}$$

ce qui indique que les deux applications

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(at) \\ -\sin(at) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} \sin(at) \\ \cos(at) \end{pmatrix}$$

forme une famille génératrice réelle du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions du système différentiel (S_3). Cet espace vectoriel étant de dimension 2, on dispose ainsi d'une base réelle de cet espace vectoriel. On en déduit que les solutions du système différentiel (S_3) s'expriment également, pour tout $t \in \mathbb{R}$, sous la forme réelle

$$\Phi(t) = K_1 \begin{pmatrix} \cos(at) \\ -\sin(at) \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} \sin(at) \\ \cos(at) \end{pmatrix}$$

où K_1 et K_2 désignent ici des constantes réelles. Les solutions du système différentiel (S_3) sont donc tous les couples (ϕ_1, ϕ_2) où

$$\begin{aligned} &\phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto K_1\cos(at) + K_2\sin(at) \\ \text{et} \quad &\phi_2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto -K_1\sin(at) + K_2\cos(at) \end{aligned}$$

avec $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.

On a $\phi_1(0) = K_1$ et $\phi_2(0) = K_2$. Il existe donc une unique solution vérifiant la condition initiale $\phi_1(0) = \alpha$ et $\phi_2(0) = \beta$ qui est

$$\begin{aligned} &\phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha\cos(at) + \beta\sin(at) \\ \text{et} \quad &\phi_2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto -\alpha\sin(at) + \beta\cos(at). \end{aligned} \tag{7}$$

Signalons qu'en partant de l'expression des solutions donnée par (6), on obtient pour valeur des constantes complexes C_1 et C_2

$$C_1 = \frac{\alpha - \mathrm{i}\,\beta}{2} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\alpha + \mathrm{i}\,\beta}{2}$$

ce qui après simplification de l'expression de la solution fournit également (7).

Intéressons-nous maintenant au cas où la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Commençons par préciser une notion indispensable pour cette partie.

Nous avons vu[32] qu'étant donné un corps $\mathbb{K}$, un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}^n$, un polynôme de $\mathbb{C}^n[X]$ désigne donc un polynôme dont les coefficients sont des éléments de $\mathbb{C}^n$ autrement dit, chaque coefficient du polynôme est un « vecteur » dont les n composantes sont des nombres complexes. Par exemple,

$$P = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} X^2 + \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

est un polynôme de $\mathbb{C}^2[X]$. La fonction polynomiale associée à P est

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto \begin{pmatrix} (1+\mathrm{i})\, z^2 + \mathrm{i}\, z + 1 \\ 2\mathrm{i}\, z^2 + (2+\mathrm{i})\, z + 2 \end{pmatrix}.$$

Nous admettrons[33] le résultat suivant qui n'est pas « optimal » (on peut être plus précis sur la forme des solutions) mais qui est simple d'utilisation.

Théorème 20.5 (Cas d'une matrice seulement trigonalisable)
Soit A *une matrice de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *de valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *supposées distinctes deux à deux et de multiplicités respectives* $h_1, \ldots, h_p$. *Les solutions du système différentiel homogène* (S_0) *sont des applications de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}^n$ *de la forme*

$$\Phi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t} R_1(t) + \cdots + \mathrm{e}^{\lambda_p t} R_p(t)$$

où pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, R_i *désigne un polynôme de* $\mathbb{C}^n[X]$ *de degré inférieur ou égal à* $h_i - 1$.

Remarques

1. Rappelons[34] qu'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est toujours trigonalisable et par conséquent lorsque le théorème 20.4 ne peut pas être utilisé car la matrice n'est diagonalisable ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$, il est toujours possible d'utiliser le théorème 20.5 pour résoudre le système différentiel considéré.

2. On sera attentif au fait que toutes les fonctions de la forme $t \mapsto \sum_{i=1}^{p} \mathrm{e}^{\lambda_i t} R_i(t)$ ne sont pas nécessairement solution du système différentiel (S_0). Il faut rechercher les solutions parmi les fonctions ayant cette forme comme cela est illustré dans l'exemple suivant.

3. Si A est une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ qui est trigonalisable[35] dans $\mathbb{R}$, alors dans l'énoncé du théorème 20.5, les polynômes R_i appartiennent à $\mathbb{R}^n[X]$.

---

[32] Voir la définition 6.1.1 p. 221.

[33] On pourra consulter le chapitre 2 du tome 4 du *cours de Mathématiques* de J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès pour une démonstration.

[34] Voir la proposition 12.9 p. 569 et la remarque de la p. 571.

[35] Voir p. 571 les conditions de trigonalisation d'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple Considérons le système différentiel

$$(\mathrm{S}_4) \qquad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 10x(t) - 5y(t) + 7z(t) \\ z'(t) = 4x(t) - 2y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

qui s'écrit sous forme matricielle $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t)$ où

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

La matrice A a pour polynôme caractéristique $X^3 + X^2$. Elle admet donc une valeur propre double $\lambda_1 = 0$ et une valeur propre simple $\lambda_2 = -1$. Le sous-espace propre[36] associé à la valeur propre double $\lambda_1 = 0$ est[37]

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{U} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathrm{A}\,\mathrm{U} = 0\} = \mathrm{Vect}\big(1, 2, 0\big).$$

Comme la dimension du sous-espace propre est différente de la multiplicité de la valeur propre, on en déduit[38] que la matrice A n'est pas diagonalisable. Toutefois, puisque[39] le nombre de valeurs propres réelles comptées avec multiplicité est 3 et coïncide avec la dimension de la matrice, celle-ci est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

D'après le théorème 20.5, les solutions du système différentiel (S_4) sont des fonctions de la forme $\Phi : t \in \mathbb{R} \mapsto R_1(t) + R_2(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ où R_1 désigne un polynôme de $\mathbb{R}^3[X]$ de degré 1 et R_2 désigne un polynôme de $\mathbb{R}^3[X]$ de degré 0. On a donc

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \phi_3(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 + c_1\,\mathrm{e}^{-t} \\ a_2 t + b_2 + c_2\,\mathrm{e}^{-t} \\ a_3 t + b_3 + c_3\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

où $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ désignent des réels. Le théorème 20.5 indique que les solutions du système différentiel (S_4) ont cette forme, mais toutes les fonctions de cette forme ne sont pas solutions. En d'autres termes, certaines conditions lient les 9 réels $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ pour qu'une fonction de la forme (8) soit solution de (S_4). Puisque l'espace vectoriel des solutions du système différentiel (S_4) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, on s'attend à pouvoir exprimer 6 de ces réels en fonction uniquement de 3 d'entre eux. Ces 6

---

[36] Voir la définition 12.4 p. 551.

[37] Voir p. 558 pour des détails sur la façon de déterminer une base d'un sous-espace propre.

[38] Voir p. 566 les conditions de diagonalisation d'une matrice.

[39] Voir p. 571 les conditions de trigonalisation d'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

relations entre les réels $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ s'obtiennent en regardant à quelles conditions une fonction de la forme (8) vérifie effectivement le système différentiel (S_4), en d'autres termes en regardant à quelles conditions on a $\Phi'(t) = \mathrm{A}\,\Phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} a_1 - c_1\,\mathrm{e}^{-t} \\ a_2 - c_2\,\mathrm{e}^{-t} \\ a_3 - c_3\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\text{et}\quad \mathrm{A}\,\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 + c_1\,\mathrm{e}^{-t} \\ a_2 t + b_2 + c_2\,\mathrm{e}^{-t} \\ a_3 t + b_3 + c_3\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2a_1 - a_2 + 2a_3)t + (2b_1 - b_2 + 2b_3) + (2c_1 - c_2 + 2c_3)\,\mathrm{e}^{-t} \\ (10a_1 - 5a_2 + 7a_3)t + (10b_1 - 5b_2 + 7b_3) + (10c_1 - 5c_2 + 7c_3)\,\mathrm{e}^{-t} \\ (4a_1 - 2a_2 + 2a_3)t + (4b_1 - 2b_2 + 2b_3) + (4c_1 - 2c_2 + 2c_3)\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

Par identification, on obtient le système linéaire formé des neuf équations que doivent satisfaire les réels $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ pour que Φ soit solution du système différentiel $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t)$:

$$\begin{cases} 2\,a_1 - a_2 + 2\,a_3 = 0 \\ 10\,a_1 - 5\,a_2 + 7\,a_3 = 0 \\ 4\,a_1 - 2\,a_2 + 2\,a_3 = 0 \\ 2\,b_1 - b_2 + 2\,b_3 = a_1 \\ 10\,b_1 - 5\,b_2 + 7\,b_3 = a_2 \\ 4\,b_1 - 2\,b_2 + 2\,b_3 = a_3 \\ 2\,c_1 - c_2 + 2\,c_3 = -c_1 \\ 10\,c_1 - 5\,c_2 + 7\,c_3 = -c_2 \\ 4\,c_1 - 2\,c_2 + 2\,c_3 = -c_3 \end{cases}$$

Ce système se scinde de manière évidente en trois sous-systèmes de trois équations à trois inconnues dont la résolution ne pose pas de difficulté[40]. On obtient les relations suivantes :

$$a_3 = 0\ ,\ a_2 = 2a_1\ ,\ b_2 = 2b_1 + a_1\ ,\ b_3 = a_1\ ,\ c_2 = -c_1\ ,\ c_3 = -2c_1\ .$$

On en déduit que les solutions du système différentiel (S_4) sont toutes les fonctions de la forme

$$\Phi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 + c_1\,\mathrm{e}^{-t} \\ a_1(2t+1) + 2b_1 - c_1\,\mathrm{e}^{-t} \\ a_1 - 2c_1\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

où a_1, b_1 et c_1 sont trois constantes réelles. On notera que l'espace vectoriel des solutions est bien de dimension 3.

---

[40] Pour résoudre ces systèmes linéaires, on utilisera par exemple la méthode d'élimination de Gauss présentée p. 527.

20.3.3 Systèmes différentiels non homogènes

Étant données une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et une fonction B de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, on s'intéresse à présent à la résolution du système différentiel linéaire du premier ordre non homogène

$$(\mathrm{S}) \qquad \mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t) + \mathrm{B}(t).$$

Le système différentiel homogène associé est

$$(\mathrm{S}_0) \qquad \mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t).$$

Le théorème suivant indique que, comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, la solution générale du système différentiel (S) s'obtient en sommant la solution générale du système différentiel homogène (S_0) et une solution particulière du système différentiel (S).

Théorème 20.6 *Soient* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *et* B *une application de I dans* $\mathbb{R}^n$. *Si* Φ_0 *désigne la solution générale du système différentiel homogène* (S_0) *et* Φ_1 *une solution particulière du système différentiel* (S), *alors la solution générale du système différentiel* (S) *est* $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$.

Démonstration Désignons par $\mathcal{S}_0$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions du système différentiel (S_0) et par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système différentiel (S). Étant donnée une solution particulière Φ_1 du système différentiel (S), il s'agit de montrer que

$$\mathcal{S} = \big\{\Phi_0 + \Phi_1 \mid \Phi_0 \in \mathcal{S}_0\big\}.$$

Notons momentanément $\mathcal{T}$ l'ensemble $\big\{\Phi_0 + \Phi_1 \mid \Phi_0 \in \mathcal{S}_0\big\}$ et montrons que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

⊵ Soit Φ_0 une solution du système différentiel homogène (S_0). D'une part, puisque Φ_0 est solution de (S_0), pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\Phi_0'(t) = \mathrm{A}\,\Phi_0(t)$. D'autre part, puisque Φ_1 est solution du système différentiel (S), pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\Phi_1'(t) = \mathrm{A}\,\Phi_1(t) + \mathrm{B}(t)$. On a donc

$$\begin{aligned}(\Phi_1(t) + \Phi_0(t))' &= \Phi_1'(t) + \Phi_0'(t) = \mathrm{A}\,\Phi_1(t) + \mathrm{B}(t) + \mathrm{A}\,\Phi_0(t)\\ &= \mathrm{A}\,(\Phi_1(t) + \Phi_0(t)) + \mathrm{B}(t),\end{aligned}$$

ce qui indique que toute fonction de la forme $\Phi = \Phi_1 + \Phi_0$ est solution de (S), autrement dit que $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$.

⊵ Considérons à présent une solution Φ de (S). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(\Phi(t) - \Phi_1(t))' &= \Phi'(t) - \Phi_1'(t) = (\mathrm{A}\,\Phi(t) + \mathrm{B}(t)) - (\mathrm{A}\,\Phi_1(t) + \mathrm{B}(t))\\ &= \mathrm{A}\,(\Phi(t) - \Phi_1(t)).\end{aligned}$$

On en déduit que $\Phi - \Phi_1$ est solution de (S_0), autrement dit que $\Phi - \Phi_1 = \Phi_0$ où $\Phi_0 \in \mathcal{S}_0$. Cela implique que $\Phi \in \mathcal{T}$. On a donc établi que $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

Puisque l'on a simultanément $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, on en déduit que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ ce qui achève la preuve. □

Le résultat suivant généralise au cas des systèmes différentiels linéaires le théorème de Cauchy (théorème 20.3) vu dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre. Il assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy.

THÉORÈME 20.7 (Théorème de Cauchy)
Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *et* B *une application continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^n$. *Étant donné* $t_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\eta \in \mathbb{R}^n$, *le problème de Cauchy constitué du système différentiel*

$$\text{(S)} \qquad \mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t) + \mathrm{B}(t)$$

et de la condition $\mathrm{Y}(t_0) = \eta$ *admet une unique solution.*

Méthode de la variation de la constante

Le théorème 20.6 indique que pour résoudre un système différentiel linéaire du premier ordre non homogène, on procède comme pour une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène en recherchant la solution générale du système différentiel homogène et en l'ajoutant à une solution particulière du système non homogène. Cette solution peut être une solution « évidente ». On peut également déterminer une solution particulière par la méthode de la variation de la constante. Nous ne justifierons pas cette affirmation dans le cas général. Nous nous contentons de donner un exemple d'utilisation de la méthode de la variation de la constante pour les systèmes différentiels.

Exemple Considérons le système différentiel

$$(\mathrm{S}_5) \qquad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + 2z(t) + t\,\mathrm{e}^t \\ y'(t) = 10x(t) - 5y(t) + 7z(t) + \cos(t) \\ z'(t) = 4x(t) - 2y(t) + 2z(t) + t^2 \end{cases}$$

qui s'écrit sous forme matricielle $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t) + \mathrm{B}(t)$ où

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} t\,\mathrm{e}^t \\ \cos(t) \\ t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Nous avons montré page 1042 que le système homogène associé admettait pour solution générale

$$\Phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} at + b + c\,\mathrm{e}^{-t} \\ a(2t+1) + 2b - c\,\mathrm{e}^{-t} \\ a - 2c\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

où a, b et c désignent trois constantes réelles. La méthode de la variation de la constante appliquée à ce système différentiel consiste à rechercher une solution particulière qui soit de la forme

$$\Phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} a(t)t + b(t) + c(t)\,\mathrm{e}^{-t} \\ a(t)(2t+1) + 2b(t) - c(t)\,\mathrm{e}^{-t} \\ a(t) - 2c(t)\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \tag{9}$$

où a, b et c désignent ici 3 fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On détermine la forme que doivent prendre les 3 fonctions inconnues a, b et c pour que Φ_1 soit solution du système différentiel (S_5) en explicitant la relation $\Phi_1'(t) = \mathrm{A}\,\Phi_1(t) + \mathrm{B}(t)$. On a

$$\Phi_1'(t) = \begin{pmatrix} a(t) + a'(t)\,t + b'(t) + c'(t)\,\mathrm{e}^{-t} - c(t)\,\mathrm{e}^{-t} \\ 2a(t) + a'(t)(2t+1) + 2b'(t) + c(t)\,\mathrm{e}^{-t} - c'(t)\,\mathrm{e}^{-t} \\ a'(t) - 2c'(t)\,\mathrm{e}^{-t} + 2c(t)\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{A}\,\Phi_1(t) + \mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 2x(t) - y(t) + 2z(t) + t\,\mathrm{e}^{t} \\ 10x(t) - 5y(t) + 7z(t) + \cos(t) \\ 4x(t) - 2y(t) + 2z(t) + t^2 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit aux conditions suivantes pour a', b' et c'

$$\begin{cases} a'(t)t + b'(t) + c'(t)\,\mathrm{e}^{-t} = t\,\mathrm{e}^{t} \\ a'(t)(2t+1) + 2b'(t) - c'(t)\,\mathrm{e}^{-t} = \cos(t) \\ a'(t) - 2c'(t)\,\mathrm{e}^{-t} = t^2 \end{cases}.$$

En résolvant ce système linéaire d'inconnues $a'(t), b'(t)$ et $c'(t)$, on obtient

$$\begin{cases} a'(t) = 3t^2 - 2\cos(t) + 4t\,\mathrm{e}^{t} \\ b'(t) = -t^2(3t+1) + (2t+1)\cos(t) - (4t+1)t\,\mathrm{e}^{t} \\ c'(t) = (t^2 - \cos(t) + 2t\,\mathrm{e}^{t})\,\mathrm{e}^{t} \end{cases}.$$

On en déduit que[41] pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a(t) &= \int (3t^2 - 2\cos(t) + 4t\,\mathrm{e}^{t})\ \mathrm{d}t = t^3 - 2\sin(t) + 4(t-1)\,\mathrm{e}^{t}, \\ b(t) &= \int (-t^2(3t+1) + (2t+1)\cos(t) - (4t+1)t\,\mathrm{e}^{t})\ \mathrm{d}t \\ &= -t^3\left(\tfrac{3}{4}t + \tfrac{1}{3}\right) + 2\cos(t) + (2t+1)\sin(t) + \mathrm{e}^{t}(7t - 7 - 4t^2), \\ c(t) &= \int (t^2 - \cos(t) + 2t\,\mathrm{e}^{t})\,\mathrm{e}^{t}\ \mathrm{d}t \\ &= (t^2 - 2t + 2)\,\mathrm{e}^{t} - \tfrac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t))\,\mathrm{e}^{t} + \left(t - \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2t}. \end{aligned}$$

---

[41] On vérifie, en utilisant une primitivation par parties, que $\int t\cos(t)\ \mathrm{d}t = t\sin(t) + \cos(t)$,

$$\int t\,\mathrm{e}^{t}\ \mathrm{d}t = (t-1)\,\mathrm{e}^{t}, \qquad \int t^2\,\mathrm{e}^{t}\ \mathrm{d}t = (t^2 - 2t + 2)\,\mathrm{e}^{t}, \qquad \int t\,\mathrm{e}^{2t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4}(2t-1)\,\mathrm{e}^{2t}.$$

Par ailleurs, une double primitivation par parties, permet d'établir que

$$\int \mathrm{e}^{t}\ \cos(t)\ \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t))\,\mathrm{e}^{t}.$$

Chacune des primitives est donnée ici avec la constante de primitivation égale à 0.

Compte tenu de (9), une solution particulière du système différentiel (S_5) est donc

$$\Phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 2t + 2 + \left(4t - \frac{15}{2}\right)\, \mathrm{e}^t + \frac{3}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t - 2 + \left(9t - \frac{35}{2}\right)\, \mathrm{e}^t + \frac{9}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) \\ t^3 - 2t^2 + 4t - 4 + (2t - 3)\, \mathrm{e}^t + \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}.$$

On peut par ailleurs établir des résultats généraux donnant la forme d'une solution particulière du système non homogène en fonction de la forme du second membre B. La proposition suivante, que nous admettons, indique sous quelle forme chercher une solution particulière lorsque le second membre est constitué d'un produit de fonctions trigonométriques, exponentielles et polynomiales.

Proposition 20.6 *Soient* A *une matrice de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *dont les valeurs propres distinctes deux à deux sont notées* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *et leurs multiplicités respectives* $h_1, \ldots, h_p$. *Soient* $\mu \in \mathbb{C}$ *et* Q *un polynôme de* $\mathbb{C}^n[X]$ *de degré* q.
Le système différentiel

$$(\mathrm{S}) \quad \mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\ \mathrm{Y}(t) + \mathrm{e}^{\mu t}\, Q(t)$$

admet une solution particulière de la forme $\Phi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\mu t} R(t)$ *où* R *désigne un polynôme de* $\mathbb{C}^n[X]$ *de degré*

- q *si* μ *n'est pas valeur propre de* A ;
- *inférieur ou égal à* $q + h_i$ *si* $\mu = \lambda_i$.

Remarques

1. Si la matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ n'a que des valeurs propres réelles, et si $\mu \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^n[X]$, une solution particulière du système différentiel (S) est de la forme $\Phi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\mu t} R(t)$ où R désigne un polynôme de $\mathbb{R}^n[X]$. Par contre, si la matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ possède des valeurs propres qui ne sont pas réelles, il est nécessaire de se placer dans $\mathbb{C}$ pour appliquer la proposition 20.6.

2. La proposition 20.6 permet de traiter le cas où le second membre est de la forme $\cos(\omega t)\, \mathrm{Q}(t)$ ou $\sin(\omega t)\, \mathrm{Q}(t)$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^n[X]$ et $\omega \in \mathbb{R}^*$. Les solutions sont obtenues en prenant les parties réelles ou imaginaires des solutions du système $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\ \mathrm{Y}(t) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{Q}(t)$.

En complément à l'utilisation de la proposition 20.6, le résultat suivant est utile en pratique puisqu'il permet, lorsque le second membre a une expression compliquée, de scinder la résolution du système en plusieurs problèmes aux seconds membres plus simples. Ce résultat est la généralisation au cas des systèmes différentiels de la proposition 20.3 concernant les équations différentielles.

Proposition 20.7 (Principe de superposition)
Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soient $B_1, \dots, B_m$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. Si pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$ la fonction Φ_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ est une solution particulière du système différentiel

$$Y'(t) = A\,Y(t) + B_k(t)$$

alors la fonction $\Phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{m} \Phi_k$ est une solution particulière du système différentiel

$$Y'(t) = A\,Y(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k(t).$$

Exemple Considérons à nouveau le système différentiel

$$(S_5) \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + 2z(t) + t\,e^t \\ y'(t) = 10x(t) - 5y(t) + 7z(t) + \cos(t) \\ z'(t) = 4x(t) - 2y(t) + 2z(t) + t^2 \end{cases}.$$

Ce système différentiel s'écrit sous la forme matricielle

$$Y'(t) = A\,Y(t) + B_1(t) + B_2(t) + B_3(t)$$

où

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} t\,e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

D'après le principe de superposition, une solution particulière du système (S_5) est $\Phi_1 = \Phi_{1,1}+\Phi_{1,2}+\Phi_{1,3}$ où pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\Phi_{1,i}$ est une solution particulière du système différentiel

$$(S_{5,i}) \quad Y'(t) = A\,Y(t) + B_i(t).$$

D'après la proposition 20.6, une solution particulière du système différentiel $(S_{5,1})$ est à rechercher sous la forme $\Phi_{1,1}(t) : t \mapsto e^t R(t)$ où R est un vecteur-colonne dont chacune des trois composantes est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus 1 (car 1 n'est pas valeur propre de A). Autrement dit, une solution particulière de $(S_{5,1})$ est à rechercher sous la forme

$$\Phi_{1,1}(t) = e^t \begin{pmatrix} \alpha_1 t + \beta_1 \\ \alpha_2 t + \beta_2 \\ \alpha_3 t + \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(\alpha_1 t + \beta_1) \\ e^t(\alpha_2 t + \beta_2) \\ e^t(\alpha_3 t + \beta_3) \end{pmatrix}$$

avec $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $i \in \{1,2,3\}$. En explicitant la relation $\Phi'_{1,1}(t) = \mathrm{A}\,\Phi_{1,1}(t) + \mathrm{B}_1(t)$ correspondant fait que $\Phi_{1,1}$ est solution du système différentiel $(\mathrm{S}_{5,1})$, on obtient que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on doit avoir

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1\,t + \beta_1 + \alpha_1 &= 2(\alpha_1\,t + \beta_1) - (\alpha_2\,t + \beta_2) + 2(\alpha_3\,t + \beta_3) + t \\ \alpha_2\,t + \beta_2 + \alpha_2 &= 10(\alpha_1\,t + \beta_1) - 5(\alpha_2\,t + \beta_2) + 7(\alpha_3\,t + \beta_3) \\ \alpha_3\,t + \beta_3 + \alpha_3 &= 4(\alpha_1\,t + \beta_1) - 2(\alpha_2\,t + \beta_2) + 2(\alpha_3\,t + \beta_3) \end{aligned}\right.$$

En identifiant les coefficients de monômes de même degré en t dans chacun des membres de chacune des équations précédentes, on obtient le système linéaire suivant dont $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est solution

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 1 \\ -\alpha_1 + \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 &= 0 \\ 10\alpha_1 - 6\alpha_2 + 7\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + 10\beta_1 - 6\beta_2 + 7\beta_3 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 4\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}\right. .$$

En résolvant ce système linéaire[42], on trouve

$$\alpha_1 = 4,\ \alpha_2 = 9,\ \alpha_3 = 2,\ \beta_1 = -\frac{15}{2},\ \beta_2 = -\frac{35}{2} \ \text{ et } \ \beta_3 = -3.$$

On en déduit qu'une solution particulière du système différentiel $(\mathrm{S}_{5,1})$ est

$$\Phi_{1,1} : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\,(4t - 15/2) \\ \mathrm{e}^t\,(9t - 35/2) \\ \mathrm{e}^t\,(2t - 3) \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 20.6, une solution particulière du système différentiel $(\mathrm{S}_{5,2})$ est à rechercher sous la forme $\Phi_{1,2} : t \mapsto R_1(t)\,\cos(t) + R_2(t)\,\sin(t)$ où R_1 et R_2 sont des vecteurs colonnes dont chacune des trois composantes est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus 0 (car i n'est pas valeur propre de A). Autrement dit, on recherche $\Phi_{1,2}$ sous la forme

$$\Phi_{1,2}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}\cos(t) + \gamma_{12}\sin(t) \\ \gamma_{21}\cos(t) + \gamma_{22}\sin(t) \\ \gamma_{31}\cos(t) + \gamma_{32}\sin(t) \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \gamma_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2,3\}, \forall j \in \{1,2\}.$$

Comme précédemment, on obtient le système linéaire dont $(\gamma_{ij})_{i\in\{1,2,3\},j\in\{1,2\}}$ est solution à partir de la condition $\Phi'_{1,2}(t) = \mathrm{A}\,\Phi_{1,2}(t) + \mathrm{B}_2(t)$ traduisant le

[42] Pour résoudre ce système linéaire, on utilisera par exemple la méthode d'élimination de Gauss présentée p. 527.

fait que $\Phi_{1,2}$ doit être solution de $(S_{5,2})$. Ce système linéaire est

$$\begin{cases} \gamma_{12} - 2\,\gamma_{11} + \gamma_{21} - 2\,\gamma_{31} = 0 \\ \gamma_{22} - 10\,\gamma_{11} + 5\,\gamma_{21} - 7\,\gamma_{31} = 1 \\ \gamma_{32} - 4\,\gamma_{11} + 2\,\gamma_{21} - 2\,\gamma_{31} = 0 \\ -\gamma_{11} - 2\,\gamma_{12} + \gamma_{22} - 2\,\gamma_{32} = 0 \\ -\gamma_{21} - 10\,\gamma_{12} + 5\,\gamma_{22} - 7\,\gamma_{32} = 0 \\ -\gamma_{31} - 4\,\gamma_{12} + 2\,\gamma_{22} - 2\,\gamma_{32} = 0 \end{cases}$$

et sa résolution[42] conduit à

$$\gamma_{11} = \frac{3}{2},\ \gamma_{12} = \frac{1}{2},\ \gamma_{21} = \frac{9}{2},\ \gamma_{22} = \frac{1}{2},\ \gamma_{31} = 1,\ \gamma_{32} = -1.$$

On obtient pour solution particulière du système différentiel $(S_{5,2})$

$$\Phi_{1,2} : t \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{9}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Enfin, d'après la proposition 20.6, une solution particulière du système $(S_{5,3})$ est à rechercher sous la forme $\Phi_{1,3} : t \mapsto R(t)$ où R est un vecteur colonne dont chacune des trois composantes est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus 4 car $\lambda = 0$ est valeur propre double de A. On est cette fois-ci amené à résoudre un système linéaire de 15 équations à 15 inconnues dont une solution[43] fournit comme solution particulière $\Phi_{1,3}$ du système différentiel $(S_{5,2})$

$$\Phi_{1,3} : t \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + t^2 \\ \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 6t - 4 \\ t^3 - 2t^2 + 4t - 2 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 20.7, une solution particulière du système différentiel (S_5) est

$$\Phi_1 : t \longmapsto \begin{pmatrix} e^t\,(4t - \frac{15}{2}) + \frac{3}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + t^2 \\ e^t\,(9t - \frac{35}{2}) + \frac{9}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 6t - 4 \\ e^t\,(2t - 3) + \cos(t) - \sin(t) + t^3 - 2t^2 + 4t - 2 \end{pmatrix}.$$

> On dispose de deux approches possibles pour déterminer une solution particulière d'un système différentiel linéaire non homogène : la méthode de la variation de la constante d'une part et l'utilisation conjointe du principe de superposition et de la proposition 20.7 d'autre part. Selon les systèmes différentiels étudiés l'une ou l'autre approche calculatoire peut se révéler plus rapide, sans qu'il soit possible de donner de règle générale sur la méthode à privilégier.

[43] En résolvant ce système linéaire avec la méthode de Gauss, on met en évidence qu'il ne s'agit pas d'un système de Cramer.

20.3.4 Équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants

On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants* une équation différentielle de la forme[44]

$$\text{(E)} \qquad y^{(n)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = b(t)$$

où pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ le coefficient a_k est un réel et où b désigne une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

L'étude d'une telle équation différentielle se ramène à l'étude du système différentiel du premier ordre de dimension n. Introduisons les inconnues auxiliaires $y_1, \dots, y_{n-1}$ définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} y_1(t) = y'(t) \\ y_2(t) = y''(t) \\ \quad\vdots \\ y_{n-2}(t) = y^{(n-2)}(t) \\ y_{n-1}(t) = y^{(n-1)}(t) \end{cases} \tag{10}$$

L'équation différentielle (E) se réécrit sous la forme

$$y'_{n-1}(t) = b(t) - a_{n-1}\, y_{n-1}(t) - \cdots - a_1\, y_1(t) - a_0\, y(t) \tag{11}$$

et les relations (10) peuvent encore s'écrire[45]

$$\begin{cases} y'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = y_2(t) \\ \quad\vdots \\ {y_{n-2}}'(t) = y_{n-1}(t) \end{cases} \tag{12}$$

En posant

$$\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_{n-2}(t) \\ y_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

[44] Rappelons que la notation $y^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction y, voir p. 760.

[45] On utilise ici le fait que la dérivée d'ordre k de la fonction y est la dérivée de la dérivée d'ordre $(k-1)$ de y : $y^{(k)} = {y^{(k-1)}}'$, voir p. 760.

et

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

le système différentiel constitué des équations (11) et (12) s'écrit sous la forme matricielle

$$\text{(S)} \qquad \mathrm{Y}'(t) = \mathrm{AY}(t) + \mathrm{B}(t).$$

Il est donc inutile de développer un cadre théorique propre à ce type d'équation. D'un point de vue calculatoire, la première composante $\phi_1(t)$ du vecteur $\Phi(t)$ qui est la solution générale du système différentiel linéaire (S) fournit la solution générale de l'équation différentielle (E).

Exemple L'équation différentielle linéaire d'ordre 3

$$(\mathrm{E}_9) \quad y'''(t) - 2y'(t) - y(t) = 0$$

admet pour système différentiel linéaire du premier ordre associé $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t)$ où

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A admet 3 valeurs propres distinctes qui sont

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$$

La matrice A est donc diagonalisable et les sous-espaces propres associés à chacune des 3 valeurs propres sont engendrés respectivement par les 3 vecteurs propres

$$\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ 1+\lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_3 \\ 1+\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 20.4, la solution générale du système différentiel est

$$\Phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + C_3\,\mathrm{e}^{\lambda_3 t} \\ -C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,\lambda_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + C_3\,\lambda_3\,\mathrm{e}^{\lambda_3 t} \\ C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,(1+\lambda_2)\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + C_3\,(1+\lambda_3)\,\mathrm{e}^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$$

où C_1, C_2 et C_3 désignent trois constantes réelles. On en déduit que la solution générale de l'équation différentielle (E_9) est

$$\phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + C_3\,\mathrm{e}^{\lambda_3 t}.$$

On rencontre très fréquemment dans les applications issues de la physique des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants. Nous détaillons dans la partie qui suit les propriétés de ces équations différentielles que nous obtiendrons à partir des propriétés générales établies pour les systèmes différentiels d'ordre 2.

20.4 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre* non homogène à coefficients constants une équation différentielle de la forme

$$\text{(E)} \quad y''(t) + a\, y'(t) + b\, y(t) = g(t)$$

où g est une application réelle définie sur un intervalle I et a, b sont deux réels.

Nous allons utiliser les résultats concernant les systèmes différentiels du premier ordre pour obtenir les propriétés des équations différentielles du second ordre à coefficients constants. Introduisons la fonction inconnue $z = y'$. L'équation différentielle (E) s'écrit alors

$$z'(t) + a\, z(t) + b\, y(t) = g(t).$$

Ainsi, résoudre l'équation différentielle (E) revient à résoudre le système différentiel

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = -az(t) - b\, y(t) + g(t) \end{cases}$$

que l'on peut exprimer sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Dans la suite de cette partie, nous utiliserons les notations suivantes

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Avec ces notations, le système différentiel (S) s'écrit

$$\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\mathrm{Y}(t) + \mathrm{B}(t).$$

Notons qu'une fois la solution générale Φ du système différentiel (S) déterminée, la solution générale de l'équation différentielle (E) coïncide avec la première composante de la fonction Φ.

20.4.1 Équations différentielles homogènes

Considérons l'équation différentielle homogène

$$(\mathrm{E}_0) \quad y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = 0$$

associée à l'équation différentielle (E) et le système différentiel homogène

$$(\mathrm{S}_0) \quad \mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t)$$

associé au système différentiel (S).

Exploitons les résultats établis pour les systèmes différentiels afin d'expliciter l'expression de la solution générale de l'équation différentielle homogène (E_0) en fonction des valeurs prises par les coefficients a et b. Rappelons que si Φ_0 désigne une solution du système différentiel (S_0) alors Φ_0 est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la première fonction composante est solution de l'équation différentielle (E_0).

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $P = X^2 + aX + b$. Trois situations distinctes se présentent selon le signe du discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

1. Si $\Delta > 0$, la matrice A possède deux valeurs propres réelles distinctes

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

   La matrice A est donc diagonalisable[46] dans $\mathbb{R}$ et on vérifie[47] qu'une base de vecteurs propres est $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$ où

$$\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

   D'après le théorème 20.4, les solutions du système différentiel (S_0) sont

$$\begin{aligned}\Phi_0(t) &= \kappa_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\mathrm{U}_1 + \kappa_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\,\mathrm{U}_2 = \kappa_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \kappa_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \kappa_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \kappa_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \kappa_1\,\lambda_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \kappa_2\,\lambda_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

   où κ_1 et κ_2 désignent deux constantes réelles. La solution générale de l'équation différentielle (E_0), qui coïncide avec la première composante de Φ_0, est donc

$$\phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \kappa_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \kappa_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

2. Si $\Delta = 0$, la matrice A possède une valeur propre réelle double $\lambda = -\frac{1}{2}a$ dont le sous-espace propre associé

$$\mathcal{E}_\lambda = \left\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2b\,u_1 + a\,u_2 = 0\right\}$$

[46] Voir le corollaire 12.2 p. 565 et la discussion effectuée p. 566.

[47] Voir p. 556 pour la méthode.

est de dimension 1. La matrice A n'est donc pas diagonalisable. D'après le théorème 20.5, les solutions du système différentielle (S_0) sont donc de la forme

$$\mathrm{Y}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{pmatrix} R_{1,1}(t) \\ R_{1,2}(t) \end{pmatrix},$$

où $R_{1,1}$ et $R_{1,2}$ sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à 1. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont de la forme

$$\phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t}\big(\kappa_1\, t + \kappa_2\big), \tag{13}$$

où κ_1 et κ_2 désignent deux constantes réelles. On vérifiera que l'on dispose bien de la solution générale de l'équation différentielle (E_0) en établissant que toute solution de la forme (13) est bien une solution de (E_0).

3. Si $\Delta < 0$, la matrice A possède deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \frac{-a + \mathrm{i}\sqrt{4b - a^2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-a - \mathrm{i}\sqrt{4b - a^2}}{2} = \overline{\lambda_1}.$$

La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et on vérifie aisément qu'une base de vecteurs propres est $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$ où

$$\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{\lambda_1} \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 20.4, les solutions complexes du système différentiel (S_0) ont pour expression

$$\Phi_0(t) = \kappa_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\, \mathrm{U}_1 + \kappa_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\, \mathrm{U}_2 = \kappa_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \kappa_2\, \mathrm{e}^{\overline{\lambda_1} t} \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{\lambda_1} \end{pmatrix}$$

où κ_1 et κ_2 désignent deux constantes complexes. L'expression de la solution générale du système différentiel (S_0) faisant intervenir des nombres complexes, transformons cette expression de sorte de n'avoir que des quantités réelles. La condition d'appartenance de Φ_0 à l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ implique que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\overline{\Phi_0(t)} = \Phi_0(t)$. On en déduit que nécessairement $\kappa_2 = \overline{\kappa_1}$. Désignons par α la partie réelle de λ_1 et par β sa partie imaginaire. La solution générale de l'équation différentielle (E_0) qui correspond à la première composante de Φ_0 est donc donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= \kappa_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \kappa_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \kappa_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \overline{\kappa_1}\, \mathrm{e}^{\overline{\lambda_1} t} \\ &= 2\mathcal{R}\mathrm{e}\big(\kappa_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\big) = 2\mathrm{e}^{\alpha t}\, \left(c_1\, \cos(\beta t) + c_2\, \sin(\beta t)\right). \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation différentielle (E_0) est donc

$$\phi_0(t) : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\big(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)\big),$$

où C_1 et C_2 désignent deux constantes réelles.

L'étude qui vient d'être effectuée met en évidence le rôle du discriminant du trinôme X^2+aX+b, correspondant au polynôme caractéristique de la matrice A associée au système différentiel (S_0), dans la forme prise par les solutions de l'équation différentielle (E_0).

Définition 20.3 (Equation caractéristique)
Étant donnés deux réels a et b, on appelle équation caractéristique *associée à l'équation différentielle*

$$(\mathrm{E}_0) \qquad y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = 0,$$

l'équation polynomiale du second degré

$$(\mathrm{C}) \qquad x^2 + ax + b = 0.$$

Le théorème suivant donnant la solution générale de l'équation différentielle (E_0) est une conséquence de l'étude que nous avons effectuée.

Théorème 20.8 *La forme de la solution générale de l'équation différentielle* (E_0) *est déterminée par le signe du discriminant* $\Delta = a^2 - 4b$ *de l'équation caractéristique qui lui est associée.*

✗ *Si* $\Delta > 0$, *l'équation caractéristique* (C) *admet deux solutions réelles distinctes* r_1, r_2 *et la solution générale de l'équation différentielle* (E_0) *est*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto c_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{r_2 t}, \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

✗ *Si* $\Delta = 0$, *l'équation caractéristique* (C) *admet une unique solution réelle* r_0 *et la solution générale de l'équation différentielle* (E_0) *est*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto (c_1 t + c_2)\, \mathrm{e}^{r_0 t}, \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

✗ *Si* $\Delta < 0$, *l'équation caractéristique* (C) *admet deux solutions réelles complexes conjuguées* $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta, r_2 = \alpha + \mathrm{i}\beta, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^*$ *et la solution générale de l'équation différentielle* (E_0) *est*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\left(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\right), \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemples

1. Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre homogène et à coefficients constants

$$(\mathrm{E}_{10,0}) \quad y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0.$$

Elle admet pour équation caractéristique $x^2 + 3x + 2 = 0$. Cette équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes : $r_1 = -1$ et $r_2 = -2$. La solution générale de l'équation $(\mathrm{E}_{10,0})$ est donc

$$\phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto c_1 \,\mathrm{e}^{-t} + c_2 \,\mathrm{e}^{-2t} \quad \text{avec} \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Considérons l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_{11,0}) \quad y''(t) + y(t) = 0.$$

L'équation caractéristique $x^2+1 = 0$ admet deux racines complexes conjuguées : $r_1 = \mathrm{i}$ et $r_2 = -\mathrm{i}$. La solution générale de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{11,0})$ est donc

$$\phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) \quad \text{avec} \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On déduit de la proposition 20.5 et du théorème 20.8 la proposition suivante.

PROPOSITION 20.8 *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle* (E_0) *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *de dimension* 2.

EXERCICE 3 Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes.
1 - $y''(t) - 2\sqrt{2}\, y'(t) + 2\, y(t) = 0$.
2 - $y''(t) - 4\, y'(t) + 5\, y(t) = 0$.
3 - $y''(t) + y'(t) - 12\, y(t) = 0$.

20.4.2 Équations différentielles non homogènes

Compte tenu du fait qu'une équation différentielle linéaire du second ordre peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel du premier ordre de dimension 2, il résulte du théorème 20.6 que la solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre non homogène à coefficients constants

$$(\mathrm{E}) \quad y''(t) + a\, y'(t) + b\, y(t) = g(t)$$

où g désigne une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est la somme de la solution générale ϕ_0 de l'équation différentielle homogène

$$(\mathrm{E}_0) \quad y''(t) + a\, y'(t) + b\, y(t) = 0$$

et d'une solution particulière ϕ_1 de l'équation différentielle (E).

Recherche d'une solution particulière évidente

Cette solution particulière de l'équation différentielle (E) peut être une solution « évidente ».

Il est également possible d'obtenir la forme d'une solution particulière de l'équation différentielle (E) dans les quelques cas particuliers usuels. Ces résultats découlent de la proposition 20.6.

✗ Si $g(t) = P(t)$ où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n, une solution particulière est de la forme $\phi_1(t) = Q(t)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$:

- de degré n si 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique (C) ;
- de degré $n+1$ si 0 est racine simple de l'équation caractéristique (C) ;
- de degré $n+2$ si 0 est racine double de l'équation caractéristique (C).

✗ Si $g(t) = \mathrm{e}^{\delta t} P(t)$ où δ est un réel non nul et P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n, une solution particulière est de la forme $\phi_1(t) = \mathrm{e}^{\delta t} Q(t)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$:

- de degré n si δ n'est pas racine de l'équation caractéristique (C) ;
- de degré $n+1$ si δ est racine simple de l'équation caractéristique (C) ;
- de degré $n+2$ si δ est racine double de l'équation caractéristique (C).

✗ Si $g(t) = P(t)\cos(\delta t) + Q(t)\sin(\delta t)$ où δ est un réel non nul et P, Q sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, une solution particulière est de la forme

$$\phi_1(t) = A(t)\cos(\delta t) + B(t)\sin(\delta t)$$

où A et B sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

- de degré inférieur ou égal à $\max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ si $\mathrm{i}\,\delta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique (C) ;
- de degré inférieur ou égal à $\max\{\deg(P), \deg(Q)\} + 1$ si $\mathrm{i}\,\delta$ est racine de l'équation caractéristique[48].

Exemple Considérons l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_{10}) \quad y''(t) + 3\,y'(t) + 2\,y(t) = (t^2+1)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, non homogène. La solution générale de l'équation homogène associée à l'équation différentielle (E_{10}) a été déterminée page 1056 ; il s'agit de

$$\phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 \mathrm{e}^{-2t} \quad \text{avec} \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La forme du second membre de l'équation différentielle (E_{10}) nous suggère de rechercher une solution particulière de la forme

$$\phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}$$

où Q est un polynôme de degré $2+1=3$ (en effet -1 est racine simple de l'équation caractéristique $x^2+3x+2=0$). Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$Q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d.$$

On a

$$\phi_1''(t) + 3\phi_1'(t) + 2\phi_1(t) = \big(3at^2 + (2b+6a)t + c + 2b\big)\mathrm{e}^{-t} = (t^2+1)\mathrm{e}^{-t}.$$

[48] Cette racine est nécessairement une racine simple.

Par identification (deux polynômes sont égaux s'ils ont mêmes coefficients) il vient $a = \frac{1}{3}$, $b = -1$ et $c = 3$ (d pouvant être quelconque). On en déduit qu'une solution particulière, correspondant au choix $d = 0$, de l'équation différentielle (E_{10}) est

$$\phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \left(\tfrac{1}{3}t^3 - t^2 + 3t\right) \mathrm{e}^{-t}.$$

La solution générale de l'équation différentielle (E_{10}) est donc

$$\phi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \left(\tfrac{1}{3}t^3 - t^2 + 3t + c_1\right) \mathrm{e}^{-t} + c_2\, \mathrm{e}^{-2t} \quad \text{avec} \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 4 Résoudre l'équation différentielle :

$$y''(t) - 2\,y'(t) - 3\,y(t) = 4\,\mathrm{e}^{3t}.$$

Le résultat suivant, qui est un corollaire de la proposition 20.7, peut être utile dans la quête d'une solution particulière.

Proposition 20.9 (Principe de superposition)
Soient a, b deux réels et $g_1, \ldots, g_n$ des applications continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'application ϕ_k est une solution particulière sur I de l'équation différentielle

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = g_k(t)$$

alors l'application $\sum_{k=1}^{n} \phi_k$ est une solution particulière sur I de l'équation différentielle

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t).$$

Exercice 5 Résoudre les équations différentielles

$$y''(t) + y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad y''(t) + y(t) = \sin(3t).$$

En déduire, à l'aide du principe de superposition, la solution générale de l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = \sin^3(t)$.

Recherche d'une solution particulière par la méthode de la variation des constantes

Commençons par préciser que la méthode de la variation de la constante telle qu'elle a été présentée page 1021 pour la recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du premier ordre ne s'applique pas telle quelle à la recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

Compte tenu du fait qu'une équation différentielle linéaire du second ordre peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel du premier ordre de dimension 2, il est toutefois possible de déduire de la méthode de la variation de la constante pour les systèmes différentiels du premier ordre, voir page 1045, une méthode qui peut permettre de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

L'équation différentielle linéaire du second ordre non homogène à coefficients constants

$$\text{(E)} \quad y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = g(t)$$

où g désigne une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est équivalente au système différentiel linéaire du premier ordre

$$\text{(S)} \qquad \mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\ \mathrm{Y}(t) + \mathrm{B}(t)$$

où, voir page 1053,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Désignons par (Ψ_1, Ψ_2) une base[(49)] de l'espace vectoriel des solutions du système différentiel homogène (S_0) associée à (S). La solution générale du système différentiel homogène (S_0) est

$$\Phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto c_1\,\Psi_1(t) + c_2\,\Psi_2(t) \in \mathbb{R}^2$$

où c_1 et c_2 désignent deux constantes réelles. Appliquons la méthode de la variation de la constante pour les systèmes différentiels du premier ordre et recherchons une solution particulière du système différentiel (S) de la forme

$$\Phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto c_1(t)\,\Psi_1(t) + c_2(t)\,\Psi_2(t) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \Phi_1'(t) &= c_1'(t)\,\Psi_1(t) + c_2'(t)\,\Psi_2(t) + c_1(t)\,\Psi_1'(t) + c_2(t)\,\Psi_2'(t) \\ \mathrm{A}\,\Phi_1(t) + \mathrm{B} &= c_1(t)\,\mathrm{A}\,\Psi_1(t) + c_2(t)\,\mathrm{A}\,\Psi_2(t) + \mathrm{B}(t). \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que Φ_1 doit être solution du système différentiel (S) on doit avoir $\Phi_1'(t) = \mathrm{A}\,\Phi_1(t) + \mathrm{B}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, autrement dit

$$c_1'(t)\,\Psi_1(t) + c_2'(t)\,\Psi_2(t) + c_1(t)\,\big(\underbrace{\Psi_1'(t) - \mathrm{A}\,\Psi_1(t)}_{=0}\big) + c_2(t)\,\big(\underbrace{\Psi_2'(t) - \mathrm{A}\,\Psi_2(t)}_{=0}\big) = \mathrm{B}(t).$$

La fonction Φ_1 sera donc solution du système différentiel (S) si pour tout $t \in I$, $c_1'(t)\,\Psi_1(t) + c_2'(t)\,\Psi_2(t) = \mathrm{B}(t)$, c'est-à-dire si

$$\forall t \in I \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} c_1'(t)\,\psi_1'(t) + c_2'(t)\,\psi_2'(t) & = & g(t) \\ c_1'(t)\,\psi_1(t) + c_2'(t)\,\psi_2(t) & = & 0 \end{array} \right. \tag{14}$$

(49) Une telle base a été explicitée p. 1054 en fonction du signe de la quantité $a^2 - 4b$.

où ψ_1 et ψ_2 qui désignent respectivement la première composante de Ψ_1 et de Ψ_2 correspondent aux vecteurs de base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E).

La première des deux équations du système (14), compte tenu du fait que ψ_1 et ψ_2 sont solutions de l'équation homogène (E_0), vérifie successivement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& c_1'\,\psi_1' + c_2'\,\psi_2' = g \\
\iff\quad & c_1'\,\psi_1' + c_2'\,\psi_2' + c_1\big(\underbrace{\psi_1'' + a\,\psi_1' + b\,\psi_1}_{=0}\big) + c_2\big(\underbrace{\psi_2'' + a\,\psi_2' + b\,\psi_2}_{=0}\big) = g \\
\iff\quad & c_1'\,\psi_1' + c_1\,\psi_1'' + c_2'\,\psi_2' + c_2\,\psi_2'' + a\left(c_1\,\psi_1' + c_2\,\psi_2'\right) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b\left(c_1\,\psi_1 + c_2\,\psi_2\right) = g \\
\iff\quad & \left(c_1\,\psi_1 + c_2\,\psi_2\right)'' + a\left(c_1\,\psi_1 + c_2\,\psi_2\right)' + b\left(c_1\,\psi_1 + c_2\,\psi_2\right) = g,
\end{aligned}$$

la dernière équivalence utilisant la seconde équation du système (14). La première des équations du système (14) exprime donc le fait que $c_1\,\psi_1 + c_2\,\psi_2$ est solution de l'équation différentielle (E).

On est en mesure d'indiquer le principe de la méthode de la variation des constantes pour une équation différentielle linéaire du second ordre.

Méthode de la variation des constantes
Soient ψ_1 et ψ_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle homogène (E_0). La *méthode de la variation des constantes pour une équation différentielle linéaire du second ordre* consiste à rechercher une solution particulière ϕ de l'équation différentielle (E) sous la forme $\phi = c_1\,\psi_1 + c_2\,\psi_2$ où c_1 et c_2 sont deux fonctions dérivables sur I telles que

$$c_1'\,\psi_1 + c_2'\,\psi_2 = 0.$$

On sera attentif au fait qu'il faut, dans l'utilisation de la méthode de la variation des constantes pour une équation différentielle linéaire du second ordre, prendre en compte la condition $c_1'\,\psi_1 + c_2'\,\psi_2 = 0$.

Exemple Considérons à nouveau l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_{10})\quad y''(t) + 3\,y'(t) + 2\,y(t) = (t^2+1)\,\mathrm{e}^{-t}$$

étudiée page 1058. La solution générale de l'équation homogène associée à (E_{10}) est

$$\phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto c_1\,\mathrm{e}^{-t} + c_2\,\mathrm{e}^{-2t} \quad \text{avec} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Utilisons la méthode de la variation des constantes pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E_{10}). On cherche cette solution particulière sous la forme

$$\phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto c_1(t)\,\mathrm{e}^{-t} + c_2(t)\,\mathrm{e}^{-2t}$$

où c_1 et c_2 sont deux applications dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad c_1'(t)\,\mathrm{e}^{-t} + c_2'(t)\,\mathrm{e}^{-2t} = 0.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi_1'(t) = -c_1(t)\,\mathrm{e}^{-t} - 2c_2(t)\,\mathrm{e}^{-2t} + \underbrace{c_1'(t)\,\mathrm{e}^{-t} + c_2'(t)\,\mathrm{e}^{-2t}}_{=0}$$
$$\phi_1''(t) = (c_1(t) - c_1'(t))\,\mathrm{e}^{-t} + 2(2c_2(t) - c_2'(t))\,\mathrm{e}^{-2t},$$

de sorte que ϕ_1 est solution de l'équation différentielle (E_{10}) à la condition que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad -c_1'(t)\,\mathrm{e}^{-t} - 2c_2'(t)\,\mathrm{e}^{-2t} = (t^2+1)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

On pourra noter que cette relation correspond à la première équation du système (14). On est donc amené à déterminer deux fonctions c_1 et c_2 dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} c_1'(t)\,\mathrm{e}^{-t} + c_2'(t)\,\mathrm{e}^{-2t} & = \quad 0 \\ -c_1'(t)\,\mathrm{e}^{-t} - 2c_2'(t)\,\mathrm{e}^{-2t} & = \quad (t^2+1)\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

En sommant ces deux équations, on établit que c_2 vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad c_2'(t) = -(t^2+1)\,\mathrm{e}^{t}.$$

On en déduit que c_2 est une primitive sur $\mathbb{R}$ de l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto -(t^2+1)\,\mathrm{e}^{t}$. Cette primitive se calcule en ayant recourt à une (double) primitivation par parties[50]. On obtient[51] $c_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto -(t^2-2t+3)\,\mathrm{e}^{t}$. On en déduit alors que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad c_1'(t) = -c_2'(t)\,\mathrm{e}^{-t} = t^2+1$$

puis que[51] $c_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{3}\,t^3 + t$. Finalement, une solution particulière de l'équation différentielle (E_{10}) est donnée pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\phi_1(t) = c_1(t)\,\mathrm{e}^{-t} + c_2(t)\,\mathrm{e}^{-2t} = (\tfrac{1}{3}\,t^3 + t)\,\mathrm{e}^{-t} - (t^2-2t+3)\,\mathrm{e}^{-t}$$
$$= (\tfrac{1}{3}\,t^3 - t^2 + 3t + 3)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Cette solution particulière est différente de celle obtenue dans l'exemple de la page 1058, mais fournit la même solution générale pour l'équation différentielle (E_{10}) puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_0(t)+\phi_1(t) = c_2\,\mathrm{e}^{-2t}+(\tfrac{1}{3}\,t^3-t^2+3t+3+c_1)\,\mathrm{e}^{-t} = c_2\,\mathrm{e}^{-2t}+(\tfrac{1}{3}\,t^3-t^2+3t+c_3)\,\mathrm{e}^{-t}$$

où c_1, c_2 et $c_3 = 3 + c_1$ désignent des constantes réelles.

[50] Voir la proposition 18.12 p. 913.

[51] Comme on cherche *une* solution particulière de l'équation différentielle (E_{10}), par soucis de simplicité, on choisit la primitive correspondant à la constante de primitivation nulle.

EXERCICE 6 En utilisant la méthode de la variation des constantes, déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = \sin^3(t).$$

Le résultat suivant concernant le problème de Cauchy associé à l'équation différentielle (E) est un corollaire du théorème 20.7.

THÉORÈME 20.9 (Théorème de Cauchy)
Étant donnés $(\eta_0, \eta_1) \in \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution au problème de Cauchy constitué de l'équation différentielle (E) *et des conditions $y(t_0) = \eta_0$ et $y'(t_0) = \eta_1$.*

Étude du pendule simple

Un pendule simple est formé d'une boule de masse m suspendu par un fil supposé sans masse et de longueur ℓ. On désigne par θ l'angle entre la verticale passant par le point de fixation et la direction du fil. Négligeons dans un premier temps les frottements associés au déplacement du pendule dans l'air. En ayant recours aux principes de la mécanique, on peut établir qu'écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 à un instant pris comme instant initial, le pendule évolue vers sa position de repos dans un mouvement gouverné par l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_{11}) \qquad \theta''(t) + \omega_0 \sin(\theta(t)) = 0$$

où $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$, g désignant l'accélération de la pesanteur ($g \approx 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$) sous la condition initiale $\theta(0) = \theta_0$. Si le pendule est lâché sans vitesse initiale, on a également pour condition initiale $\theta'(0) = 0$. L'équation différentielle (E_{11}) est une équation différentielle non linéaire qu'il est difficile de résoudre. Comme $\sin(\theta) \underset{0}{\sim} \theta$, on a coutume de faire l'approximation suivante lorsque l'angle θ_0 est petit :

$$\sin(\theta) \approx \theta.$$

Sous cette hypothèse, au lieu de l'équation différentielle (E_{11}), on considère l'équation différentielle suivante pour étudier l'évolution du pendule au cours du temps :

$$(\mathrm{E}_{12}) \qquad \theta''(t) + \omega_0^2\, \theta(t) = 0.$$

L'équation différentielle (E_{12}) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique qui lui est associée est $x^2 + \omega_0^2 = 0$. Elle admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \mathrm{i}\,\omega_0$ et $r_2 = -\mathrm{i}\,\omega_0$. D'après le théorème 20.8, la solution générale de l'équation différentielle (E_{12}) est

$$\theta : t \in [0, +\infty[\longmapsto c_1 \cos(\omega_0\, t) + c_2 \sin(\omega_0\, t)$$

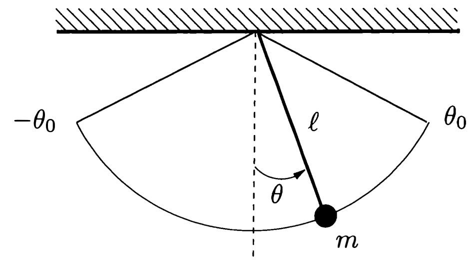


Fig. 2 Un pendule simple.

avec $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. D'après le théorème 20.9, il existe une unique solution à l'équation différentielle (E_{12}) qui satisfasse aux conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = 0$. Les valeurs des constantes c_1 et c_2 correspondant à cette solution sont obtenues en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}.$$

On obtient $c_1 = \theta_0$ et $c_2 = 0$. L'unique solution de l'équation différentielle (E_{12}) satisfaisant aux conditions initiales imposées est donc

$$\theta : t \in [0, +\infty[\longmapsto \theta_0 \cos(\omega_0 \, t).$$

Le pendule évolue donc au cours du temps entre les deux positions extrêmes correspondant aux angles $-\theta_0$ et θ_0 selon un mouvement sinusoïdal de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

L'hypothèse consistant à négliger les frottements du pendule dans l'air au cours de son évolution n'est pas très réaliste. L'expérience montre qu'un pendule une fois lâché va voir l'amplitude des oscillations de son mouvement décroître jusqu'à son arrêt complet. La résistance de l'air au déplacement du pendule va dissiper petit à petit l'énergie du pendule. On prend en compte la résistance de l'air en introduisant une force de frottement qui est proportionnelle à la vitesse. L'équation différentielle régissant l'évolution du pendule au cours du temps devient

$$(\mathrm{E}_{13}) \qquad \theta''(t) + \gamma \, \theta'(t) + \omega_0^2 \, \theta(t) = 0$$

où γ est une constante positive ayant la dimension de l'inverse d'un temps. L'équation caractéristique ($\mathcal{C}$) associée à l'équation différentielle (E_{13}) est $x^2 + \gamma \, x + \omega_0^2 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = \gamma^2 - 4\omega_0^2 = (\gamma - 2\omega_0)(\gamma + 2\omega_0)$. On distingue trois types de comportement selon les valeurs de γ et ω_0.

- Si $\gamma < 2\omega_0$ alors $\Delta < 0$ et l'équation caractéristique ($\mathcal{C}$) admet deux solutions complexes conjuguées qui sont

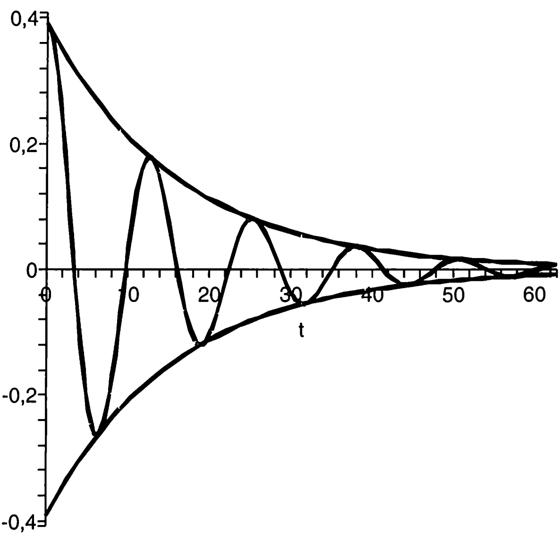
  $$r_1 = -\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}\,\omega_1 \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\gamma}{2} - \mathrm{i}\,\omega_1$$

  où $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$. D'après le théorème 20.8, la solution générale de l'équation différentielle (E_{13}) est

  $$\theta : t \in [0, +\infty[\longmapsto \big(c_1 \cos(\omega_1 \, t) + c_2 \sin(\omega_1 \, t)\big) \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma t}.$$

L'unique solution satisfaisant aux conditions initiales imposées correspond aux valeurs $c_1 = \theta_0$ et $c_2 = \frac{\gamma}{2\omega_1}\,\theta_0$. Le pendule évolue donc au cours du temps selon un mouvement sinusoïdal amorti de période $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ à décroissance exponentielle. Illustrons la situation avec MAPLE.

```
> w0:=0.5:
> theta0:=Pi/8:
> gama:=w0/4:
> w1:=sqrt(abs(gama^2/4-w0^2)):
> theta:=t->(theta0*cos(w1*t)+gama*theta0/(2*w1)*sin(w1*t))
            *exp(-gama*t/2):
> phi:=t->theta0*exp(-gama*t/2): # enveloppe de l'amortissement
> plot([theta(t),phi(t),-phi(t)],t=0..60);
```

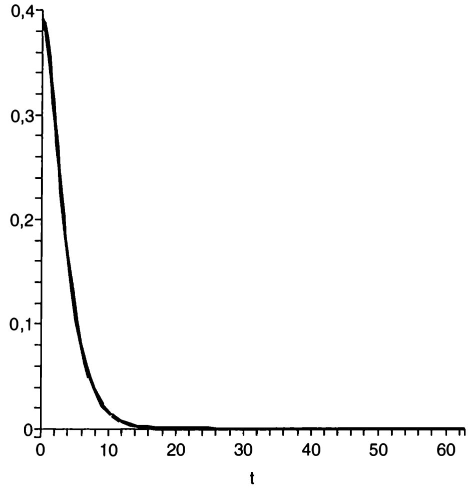


– Si $\gamma = 2\omega_0$ alors $\Delta = 0$ et l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$ admet pour racine double $r = -\frac{1}{2}\,\gamma$. D'après le théorème 20.8, la solution générale de l'équation différentielle (E_{13}) est

$$\theta : t \in [0, +\infty[\longmapsto (c_1\,t + c_2)\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma t}.$$

L'unique solution satisfaisant aux conditions initiales imposées correspond aux valeurs $c_1 = \frac{1}{2}\gamma\theta_0$ et $c_2 = \theta_0$. On a un mouvement d'amortissement qualifié de critique. Illustrons la situation avec MAPLE.

```
> w0:=0.5:
> theta0:=Pi/8:
> gama:=2*w0:
> theta:= t->(theta0+(1/2)*gama*theta0*t)*exp(-gama*t/2):
> plot(theta(t),t=0..60);
```



– Si $\gamma > 2\omega_0$ alors $\Delta > 0$ et l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$ admet deux solutions réelles distinctes qui sont

$$r_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4}\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

D'après le théorème 20.8, la solution générale de l'équation différentielle (E_{13}) est

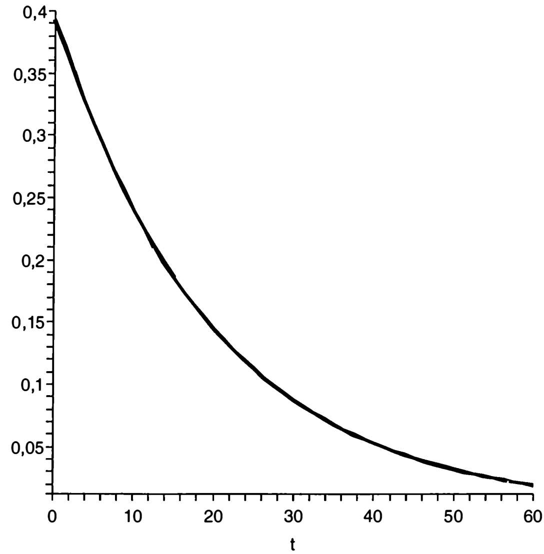
$$\theta : t \in [0, +\infty[\longmapsto c_1\, \mathrm{e}^{r_1 t} + c_2\, \mathrm{e}^{r_2 t}.$$

D'après le théorème 20.9, il existe une unique solution à l'équation différentielle (E_{13}) qui satisfasse aux conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = 0$. Les valeurs des constantes c_1 et c_2 correspondant à cette solution sont obtenues en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = & \theta_0 \\ r_1\, c_1 + r_2\, c_2 & = & 0 \end{cases}.$$

On obtient $c_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1}\,\theta_0$ et $c_2 = \frac{r_1}{r_1 - r_2}\,\theta_0$. Comme r_1 et r_2 sont deux réels négatifs, le pendule évolue au cours du temps selon un mouvement amorti et l'amortissement est d'autant rapide que γ est petit. Illustrons la situation avec MAPLE.

```
> w0:=0.5: theta0:=Pi/8: gama:=10*w0:
> r1:=-(gama/2)+sqrt(gama^2/4-w0^2):
> r2:=-(gama/2)-sqrt(gama^2/4-w0^2):
> theta:= t-> (r2/(r2-r1))*theta0*exp(r1*t)
              +(r1/(r1-r2))*theta0*exp(r2*t):
> plot(theta(t),t=0..60);
```



Si le pendule est soumis une force extérieure F, l'équation différentielle régissant l'évolution du pendule au cours du temps devient

$$(\mathrm{E}_{14}) \qquad \theta''(t) + \gamma\,\theta'(t) + \omega_0^2\,\theta(t) = F(t).$$

Une situation courante est celle où la force F est de la forme $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ où ω est un réel positif donné et F_0 un réel non nul. Il résulte du théorème 20.6 que la solution générale de l'équation différentielle (E_{14}) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène (E_{13}) et d'une solution particulière de l'équation différentielle (E_{14}).

Recherchons une solution particulière de l'équation différentielle (E_{14}) qui soit de la forme

$$\theta_1 : t \in [0, +\infty[\longmapsto A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t)$$

où A et B sont des constantes, voir page 1058 (on notera que quelle que soit la valeur du réel ω, l'imaginaire pur $\mathrm{i}\,\omega$ n'est pas solution de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (E_{14})). Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}\theta_1'(t) &= -A\omega\,\sin(\omega t) + B\omega\,\cos(\omega t)\\ \theta_1''(t) &= -A\omega^2\,\cos(\omega t) - B\omega^2\,\sin(\omega t)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\theta_1''(t) + \gamma\,\theta_1'(t) + \omega_0^2\,\theta_1(t) = &\ \big(A(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma B\omega\big)\,\cos(\omega t)\\ &+ \big(B(\omega_0^2 - \omega^2) - \gamma A\omega\big)\,\sin(\omega t).\end{aligned}$$

On en déduit que θ_1 est solution de l'équation différentielle (E_{14}) si A et B sont solutions du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{lcl} A(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma B\omega &=& F_0\\ B(\omega_0^2 - \omega^2) - \gamma A\omega &=& 0\end{array}\right.$$

La solution de ce système linéaire est

$$A = F_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \qquad B = F_0 \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2},$$

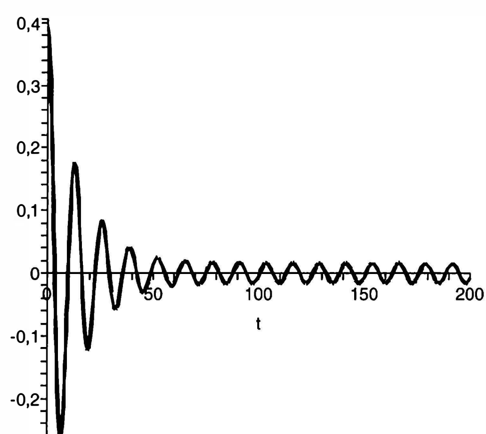
La solution générale de l'équation différentielle (E_{14}) est donc

$$\theta : t \in [0, +\infty[\longmapsto \theta_0(t) + \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \left((\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + \omega\gamma \sin(\omega t)\right)$$

où θ_0 désigne la solution générale de l'équation différentielle homogène (E_{13}) associée à (E_{14}) dont on a déterminé précédemment l'expression selon le signe de $\gamma - 2\omega_0$.

Le programme suivant résout l'équation différentielle (E_{14}) en utilisant la commande `dsolve` de MAPLE.

```
> w0:=0.5: theta0:=Pi/8: gama:=w0/4:
> w1:=sqrt(abs(gama^2/4-w0^2)):
> F0:=0.001: w:=w0:
> edo:= (D@@2)(theta)(t)+gama*D(theta)(t)+w0^2*theta(t)=F0*cos(w*t):
> dsolve({edo,theta(0)=theta0,D(theta)(0)=0},theta(t)):
> assign(%):
> plot(theta(t),t=0..200);
```



On observe sur la figure, tout d'abord un fort amortissement du signal sinusoïdal puis une évolution liée uniquement à l'entretien du mouvement du pendule par l'action de la force F.

20.5 Exercices de synthèse

Exercice 7 *On se propose de déterminer l'évolution au cours du temps de la charge q dans un circuit RLC soumis à une tension sinusoïdale. La variation de la charge au cours du temps est régie par l'équation différentielle*

$$\text{(E)} \quad L\,q''(t) + R\,q'(t) + \frac{1}{C}\,q(t) = \omega\nu\cos(\omega t)$$

où ν est une constante réelle, L, ω sont des constantes réelles positives et où R, C sont des constantes strictement positives.

1 - Étant donné $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, déterminer une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$.

2 - On suppose que $L = 0$. Calculer la solution de l'équation différentielle (E) *vérifiant $q(0) = 0$.*

3 - On suppose L strictement positif et $R^2 - 4\frac{L}{C} > 0$. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E)*.*

Exercice 8 *On s'intéresse dans cet exercice aux solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle*

$$\text{(E)} \quad y''(t) + y(t) = \frac{1}{t}$$

qui possèdent une limite en $+\infty$. On considère les fonctions

$$u : x \longmapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \textit{et} \quad v : x \longmapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1 - a) Montrer que les fonctions u et v sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que u admet une limite à droite en 0.

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$v(x) + \ln(x) = \int_1^x \frac{1 - \cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que v est équivalente à l'opposé de la fonction logarithme dans un voisinage à droite de 0.

2 - Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = u(x)\cos(x) - v(x)\sin(x)$.

a) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que f est une solution de l'équation différentielle (E) *et qu'elle admet pour limite 0 en $+\infty$.*

3 - a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle homogène (E_0) *associée à* (E)*.*

b) Montrer que la seule solution de l'équation différentielle (E_0) *ayant une limite en $+\infty$ est la fonction nulle.*

c) En déduire que f est la seule solution de (E) *ayant une limite en $+\infty$.*

4 - Montrer que f a une limite à droite en 0 (on explicitera cette limite en fonction de la limite de u à droite en 0).

20.6 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - L'équation différentielle $(\mathrm{E}_1)\quad 3y'(t) + 12\,y(t) = 4$ est définie sur $\mathbb{R}$. L'équation différentielle homogène associée est $(\mathrm{E}_{1,0})\quad 3y'(t) + 12\,y(t) = 0$. D'après le théorème 20.1, la solution générale de $(\mathrm{E}_{1,0})$ est $\phi_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto \kappa\,\mathrm{e}^{-4t}$ où $\kappa \in \mathbb{R}$. Une solution particulière évidente de l'équation différentielle (E_1) est la fonction constante égale à $\frac{1}{3}$. On déduit du théorème 20.2 que la solution générale de l'équation différentielle (E_1) est

$$\phi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \tfrac{1}{3} + \kappa\,\mathrm{e}^{-4t}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

2 - L'équation différentielle $(\mathrm{E}_2)\quad y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^{3t}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle admet pour équation différentielle homogène associée $(\mathrm{E}_{2,0})\quad y'(t)+y(t) = 0$. D'après le théorème 20.1, la solution générale de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{2,0})$ est $\phi_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto \kappa\,\mathrm{e}^{-t}$ où $\kappa \in \mathbb{R}$. Compte tenu de la forme du second membre de l'équation différentielle (E_2), on peut s'attendre à ce qu'une solution particulière soit de la forme $\phi_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha\,\mathrm{e}^{3t}$ où α désigne une constante réelle appropriée. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\phi_1'(t) + \phi_1(t) = 4\alpha\,\mathrm{e}^{3t}$. Le second membre est égal à e^{3t} si $\alpha = \frac{1}{4}$. On dispose donc d'une solution particulière « évidente »[52] de l'équation différentielle (E_2) qui est $\phi_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{3t}$. On déduit du théorème 20.2 que la solution générale de l'équation différentielle (E_2) est

$$\phi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{3t} + \kappa\,\mathrm{e}^{-t}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

3 - L'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_3)\quad y'(t) + \frac{t+2}{t}\,y(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}$$

est définie sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Elle admet pour équation différentielle homogène associée

$$(\mathrm{E}_{3,0})\quad y'(t) + \frac{t+2}{t}\,y(t) = 0.$$

Une primitive de $a : t \mapsto \frac{t+2}{t}$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ est $A : t \mapsto t + 2\ln(|t|)$. Notons que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $A(t) = t + \ln(t^2)$. D'après le théorème 20.1, la solution générale de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_{3,0})$ est $\phi_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto \kappa\,\mathrm{e}^{-t}/t^2$ où $\kappa \in \mathbb{R}$.

Déterminons une solution particulière de l'équation différentielle (E_3) en ayant recours à la méthode de la variation de la constante. On cherche sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, une solution particulière ϕ_1 de la forme $\phi_1(t) = C(t)\,\mathrm{e}^{-t}/t^2$ où C désigne une fonction dérivable. On a pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\phi_1'(t) = \big(t\,C'(t) - (t+2)\,C(t)\big)\,\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^3}$$

[52] On souhaite indiquer par là que l'on a obtenu cette solution particulière sans avoir recours à la méthode de la variation de la constante.

et
$$\phi_1'(t) + \frac{t+2}{t}\,\phi_1(t) = \frac{C'(t)\,\mathrm{e}^{-t}}{t^2}.$$
On en déduit que pour que ϕ_1 soit solution de l'équation différentielle (E_3), on doit avoir
$$\frac{C'(t)\,\mathrm{e}^{-t}}{t^2} = \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}, \quad \text{soit} \quad C'(t) = \mathrm{e}^{2t}.$$
On a donc $C(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t}$ (la constante de primitivation étant omise). On en conclut que sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, la solution générale de l'équation différentielle (E_3) est
$$y : t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^t}{2t^2} + \kappa\,\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

4 - L'équation différentielle (E_4) $y'(t) = (1 - y(t))\,\mathrm{ch}(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et se réécrit
$$(\mathrm{E}_4) \quad y'(t) + \mathrm{ch}(t)\,y(t) = \mathrm{ch}(t).$$
Elle admet pour équation différentielle homogène associée
$$(\mathrm{E}_{4,0}) \quad y'(t) + \mathrm{ch}(t)\,y(t) = 0.$$
D'après le théorème 20.1, la solution générale de l'équation différentielle ($\mathrm{E}_{4,0}$) est $\phi_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto \kappa\,\exp(-\,\mathrm{sh}(t))$ où $\kappa \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière évidente de l'équation différentielle (E_4) est la fonction constante égale à 1. D'après le théorème 20.2, la solution générale de l'équation différentielle (E_4) est
$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto 1 + \kappa\,\exp(-\,\mathrm{sh}(t)), \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 2

L'équation différentielle (E) $ty'(t) + (3t+1)\,y(t) = \mathrm{e}^{-3t}$ admet pour forme normalisée
$$(\mathrm{E}_n) \quad y'(t) + \frac{3t+1}{t}\,y(t) = \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{t}$$
qui doit être considérée sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

$\trianglerighteq$ Résolution de l'équation différentielle homogène associée.

L'équation différentielle (E_n) admet pour équation homogène associée,
$$(\mathrm{E}_0) \quad y'(t) + \frac{3t+1}{t}\,y(t) = 0.$$
La fonction $a : t \in]-\infty, 0[\mapsto (3t+1)/t$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Elle admet pour primitive
$$A : t \in]-\infty, 0[\longmapsto 3t + \ln(|t|).$$

L'équation différentielle (E_0) admet donc pour solution générale sur $]-\infty, 0[$ (resp. sur $]0,+\infty[$) $\phi_0 : t \mapsto \kappa \exp(-3t - \ln(|t|))$ avec $\kappa \in \mathbb{R}$. On a donc $\phi_0(t) = \kappa\, e^{-3t}/|t|$.

$\trianglerighteq$ Recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle (E_n).

La fonction $\phi_1 : t \longmapsto e^{-3t}$ est une solution particulière évidente[53] sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle (E_n) puisque pour tout $t \in \mathbb{R}^*$

$$\phi_1'(t) + \frac{3t+1}{t}\,\phi_1(t) = -3e^{-3t} + \left(3 + \frac{1}{t}\right) e^{-3t} = \frac{e^{-3t}}{t}.$$

$\trianglerighteq$ Solutions de l'équation (E_n).

$\triangleright$ Sur $]-\infty, 0[$; la solution générale de l'équation différentielle (E_n) est[54]

$$\phi : t \in]-\infty, 0[\longmapsto \left(1 + \frac{\kappa_1}{t}\right) e^{-3t} \qquad \kappa_1 \in \mathbb{R}.$$

$\triangleright$ Sur $]0,+\infty[$, la solution générale de l'équation différentielle (E_n) est donc

$$\phi : t \in]-\infty, 0[\longmapsto \left(1 + \frac{\kappa_2}{t}\right) e^{-3t} \qquad \kappa_2 \in \mathbb{R}.$$

$\trianglerighteq$ Étude des solutions de l'équation différentielle (E).

Regardons à présent s'il existe une application dérivable sur $\mathbb{R}$ qui coïncide sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0,+\infty[$ avec une solution sur ces intervalles de l'équation différentielle (E_n). On peut remarquer qu'une fonction de la forme $t \mapsto \left(1 + \frac{\kappa}{t}\right) e^{-3t}$ n'est bornée en 0 que si $\kappa = 0$. Si l'équation différentielle (E) admet une solution sur $\mathbb{R}$ ce ne peut être que l'application

$$\phi : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-3t}.$$

Cette application est bien continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle coïncide sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0,+\infty[$ avec une solution de l'équation différentielle (E_n). On en conclut que l'équation différentielle (E) admet une unique solution qui est $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-3t}$.

Solution de l'exercice 3

1 - L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle

$$(E_1) \quad y''(t) - 2\sqrt{2}\, y'(t) + 2\, y(t) = 0$$

---

[53] Si cette solution ne vous parait pas évidente, il est bien entendu possible de déterminer une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.

[54] On peut noter que pour $t \in]-\infty, 0[$, on a $\frac{\kappa}{|t|} = -\frac{\kappa}{t} = \frac{\kappa_1}{t}$ où $\kappa_1 = -\kappa$ désigne une constante.

est $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$. Elle admet une racine double qui est $\sqrt{2}$. La solution générale de l'équation différentielle (E_1) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\phi(t) = (At + B)\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}t} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2 - L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_2) \quad y''(t) - 4\,y'(t) + 5\,y(t) = 0$$

est $x^2 - 4x + 5 = 0$. Elle admet deux racines complexes conjuguées de partie réelle 2 et de parties imaginaires 1 et -1. La solution générale de l'équation différentielle (E_2) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{2t}\,(A\,\cos t + B\,\sin t) \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

3 - L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_3) \quad y''(t) + y'(t) - 12\,y(t) = 0$$

est $x^2 + x - 12 = 0$. Elle admet deux racines réelles distinctes : 3 et -4. La solution générale de l'équation différentielle (E_3) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\phi(t) = A\,\mathrm{e}^{3t} + B\,\mathrm{e}^{-4t} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Solution de l'exercice 4

L'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \qquad y''(t) - 2\,y'(t) - 3\,y(t) = 4\,\mathrm{e}^{3t}$$

est une équation différentielle linéaire du second ordre, non homogène et à coefficients constants. L'équation différentielle homogène associée à (E) admet pour équation caractéristique

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Cette équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes : 3 et -1. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-t} + B\,\mathrm{e}^{3t} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

La forme du second membre de l'équation différentielle (E) nous suggère de rechercher une solution particulière de la forme

$$\phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto P(t)\,\mathrm{e}^{-t}$$

où P est un polynôme de degré : $0 + 1 = 1$ (en effet 3 est racine simple de l'équation caractéristique). Notons $P = aX + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_1''(t) - 2\phi_1'(t) - 3\phi_1(t) = 4a\mathrm{e}^{3t}.$$

On en déduit que pour que ϕ_1 soit solution de l'équation différentielle (E), il faut et il suffit que $a = 1$. Le réel b peut prendre une valeur quelconque. En prenant $b = 0$, on obtient qu'une solution particulière de l'équation différentielle (E) est

$$\phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto t\,\mathrm{e}^{-t}.$$

La solution générale de l'équation différentielle (E) est donc

$$\phi : t \in \mathbb{R} \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-t} + (t+B)\,\mathrm{e}^{3t} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Solution de l'exercice 5

1 - L'équation caractéristique associée à l'équation homogène

$$(\mathrm{E}_0) \quad y''(t) + y(t) = 0$$

est $x^2 + 1 = 0$. Elle admet pour solutions i et $-$i. D'après le théorème 20.8, la solution générale de l'équation différentielle (E_0) est

$$\phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) \quad \text{avec} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2 - Considérons l'équation non-homogène

$$(\mathrm{E}_1) \quad y''(t) + y(t) = \sin(t).$$

Puisque i est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) sous la forme

$$\phi_1(t) = A(t)\cos(t) + B(t)\sin(t)$$

où A et B sont deux polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à 1. Notons $A(t) = a_1 t + a_2$ et $B(t) = b_1 t + b_2$ avec $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_1(t) = (a_1 t + a_2)\cos(t) + (b_1 t + b_2)\sin(t).$$

La fonction ϕ_1 est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \phi_1'(t) = (a_1 + b_1 t + b_2)\cos(t) + (b_1 - a_1 t - a_2)\sin(t) \\ \text{et} \quad & \phi_1''(t) = (2b_1 - a_1 t - a_2)\cos(t) + (-2a_1 - b_1 t - b_2)\sin(t). \end{aligned}$$

On a donc

$$\phi_1''(t) + \phi_1(t) = 2b_1\cos(t) - 2a_1\sin(t),$$

et ϕ_1 est solution de (E_1) si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2b_1 & = & 0 \\ -2a_1 & = & 1 \end{array} \right. .$$

On en déduit qu'une solution particulière de (E_1) est $\phi_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}t\cos(t)$. La solution générale de l'équation différentielle (E_1) est donc

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto -\tfrac{1}{2}t\cos(t) + C_1 \cos t + C_2 \sin(t) \quad \text{avec} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3 - Considérons l'équation différentielle non-homogène

$$(\mathrm{E}_2) \quad y''(t) + y(t) = \sin(3t).$$

Puisque 3i n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de l'équation différentielle (E_2) de la forme

$$\phi_2(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$$

où A et B sont deux réels. En utilisant la même méthode que celle qui vient d'être détaillée, on établit que la solution générale de l'équation différentielle (E_2) est

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto -\tfrac{1}{8}\sin(3t) + C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) \quad \text{avec} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

4 - On linéarise l'expression $\sin^3(t)$ en utilisant les techniques présentées p. 162. On obtient,

$$\sin^3(t) = -\tfrac{1}{4}\sin 3(t) + \tfrac{3}{4}\sin(t).$$

D'après le principe de superposition, on en déduit que la solution générale de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad y''(t) + y(t) = \sin^3 t$$

est

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \tfrac{1}{32}\sin 3t - \tfrac{3}{8}t\cos(t) + C_1\cos(t) + C_2\sin(t) \quad \text{avec} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Solution de l'exercice 6

Nous avons établi au cours de l'exercice 5 que la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \qquad y''(t) + y(t) = \sin^3(t)$$

est

$$\phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) \qquad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherchons une solution particulière ϕ_1 de l'équation différentielle (E) sous la forme

$$\phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto C_1(t) \cos(t) + C_2(t) \sin(t)$$

où C_1 et C_2 désignent deux applications dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad C_1'(t) \cos(t) + C_2'(t) \sin(t) = 0.$$

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\phi_1'(t) &= C_1'(t) \cos(t) - C_1(t) \sin(t) + C_2'(t) \sin(t) + C_2(t) \cos(t) \\
&= -C_1(t) \sin(t) + C_2(t) \cos(t), \\
\phi_1''(t) &= -C_1'(t) \sin(t) - C_1(t) \cos(t) + C_2'(t) \cos(t) - C_2(t) \sin(t),
\end{aligned}$$

donc pour que ϕ_1 soit solution de (E) il faut que

$$-C_1'(t)\ \sin(t) + C_2'(t)\ \cos(t) = \sin^3(t).$$

Les dérivées des deux fonctions inconnues sont donc obtenues en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} C_1'(t)\ \cos(t) + C_2'(t)\ \sin(t) = 0 \\ -C_1'(t)\ \sin(t) + C_2'(t)\ \cos(t) = \sin^3(t). \end{cases}$$

En sommant ces deux équations après avoir multipliée la première par $\sin(t)$ et la seconde par $\cos(t)$, on obtient

$$C_2'(t) = \cos(t)\ \sin^3(t)$$

d'où on déduit que $C_2(t) = \frac{1}{4}\ \sin^4(t) + K$, $K \in \mathbb{R}$. On prend $K = 0$. En faisant la différence de ces deux équations après avoir multipliée la première par $\cos(t)$ et la seconde par $\sin(t)$, on obtient

$$C_1'(t) = -\sin^4(t).$$

Pour calculer cette primitive, on linéarise $\sin^4(t)$ en utilisant les techniques présentées p. 162. On a

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -\int \sin^4(t)\ \mathrm{d}t = -\frac{3}{8}t - \frac{1}{8}\int \cos(4t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \cos(2t)\ \mathrm{d}t \\ &= -\frac{3}{8}t - \frac{1}{32}\sin(4t) + \frac{1}{4}\sin(2t) + K. \end{aligned}$$

On en déduit qu'une solution particulière de l'équation différentielle (E) a pour expression

$$\phi_1(t) = \big(-\tfrac{3}{8}t - \tfrac{1}{32}\sin(4t) + \tfrac{1}{4}\sin(2t)\big)\ \cos(t) + \tfrac{1}{4}\ \sin^5(t).$$

La solution générale de l'équation différentielle (E) est donc

$$\phi_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \big(C_1 - \tfrac{3}{8}t - \tfrac{1}{32}\sin(4t) + \tfrac{1}{4}\sin(2t)\big)\ \cos(t) + \big(\tfrac{1}{4}\ \sin^4(t) + C_2\big)\ \sin(t).$$

Cette expression, bien que différente de celle obtenue à l'exercice 5, fournit toutefois la même solution générale pour l'équation différentielle (E). On pourra s'en assurer en ayant recours aux formules trigonométriques pour montrer que

$$\phi_1(t) = C_1\ \cos(t) + (C_2 + \tfrac{9}{32})\ \sin(t) - \tfrac{3}{8}\,t\cos(t) + \tfrac{1}{32}\ \sin(3\,t)\,.$$

On obtient l'expression trouvée à l'exercice 5 en remarquant que puisque C_2 est une constante, $C_3 = C_2 + \frac{9}{32}$ est également une constante.

Solution de l'exercice 7

1 - Désignons par F une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$. En primitivant par parties[55], on obtient pour $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \int \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + \frac{\beta}{\alpha}\int \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)\,\mathrm{d}t.$$

En intégrant une seconde fois par parties, il vient

$$F(t) = \int \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + \frac{\beta}{\alpha}\Big(\tfrac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t) - \frac{\beta}{\alpha}\underbrace{\int \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\mathrm{d}t}_{=F(t)}\Big).$$

On en déduit que $F(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\Big(\alpha\cos(\beta t) + \beta\sin(\beta t)\Big)$.

2 - Dans le cas où $L = 0$, l'équation différentielle (E) s'écrit

$$q'(t) + \frac{1}{RC}\,q(t) = \frac{\omega\nu}{R}\cos(\omega t).$$

L'équation homogène associée admet pour solution

$$q_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \kappa\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E), on utilise la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution de la forme $q_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto K(t)\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} & q_1'(t) = -\frac{K(t)}{RC}\,\mathrm{e}^{-t/(RC)} + \kappa'(t)\,\mathrm{e}^{-t/(RC)} \\ \text{et}\quad & q_1'(t) + \frac{1}{RC}\,q_1(t) = -\frac{K'(t)}{RC}\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour que q_1 soit solution de l'équation différentielle (E) il faut que

$$K'(t) = \frac{\omega\nu}{R}\,\mathrm{e}^{t/(RC)}\cos(\omega t).$$

D'après la question 1 considérée avec $\alpha = 1/RC$ et $\beta = \omega$, on a

$$K(t) = \frac{\omega\nu C}{1+\omega^2R^2C^2}\,\mathrm{e}^{t/(RC)}\big(\cos(\omega t) + \omega RC\sin(\omega t)\big).$$

La solution générale de l'équation différentielle (E) sous l'hypothèse $L = 0$ est par conséquent

$$q : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\omega\nu C}{1+\omega^2R^2C^2}\,\mathrm{e}^{t/(RC)}\big(\cos(\omega t) + \omega RC\sin(\omega t)\big) + \kappa\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

L'unique solution vérifiant $q(0) = 0$ correspond à la valeur $\kappa = -\dfrac{\omega\nu C}{1+\omega^2R^2C^2}$.

[55] Voir la proposition 18.12 p. 913.

3 - Si $L \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle (E) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation différentielle homogène associée est

$$(\mathrm{E}_0) \quad Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0.$$

Elle admet pour équation caractéristiques $Lx^2 + Rx + \frac{1}{C} = 0$. Sous l'hypothèse $R^2 - 4L/C > 0$, l'équation caractéristiques admet deux racines réelles distinctes qui sont

$$r_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}.$$

On en déduit que la solution générale de l'équation différentielle (E_0) est

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 t} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Puisque $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de l'équation différentielle (E) de la forme

$$q_1(t) = \delta \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)$$

où $(\delta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} & q_1'(t) = -\delta\omega \sin(\omega t) + \gamma\omega \cos(\omega t) \\ \text{et} \qquad & q_1''(t) = -\delta\omega^2 \cos(\omega t) - \gamma\omega^2 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Pour que q_1 soit solution de l'équation différentielle (E), il faut que

$$\left(\frac{\delta}{C} + R\omega\gamma - L\omega^2\delta\right) \cos(\omega t) + \left(\frac{\gamma}{C} - R\omega\delta - L\omega^2\gamma\right) \sin(\omega t) = \omega\nu \cos(\omega t).$$

Les réels δ et γ doivent donc être solution du système linéaire

$$\begin{cases} \left(1/C - L\omega^2\right)\delta + R\omega\gamma &= \omega\nu \\ -R\omega\delta + \left(1/C - L\omega^2\right)\gamma &= 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve

$$\delta = \frac{\omega\nu\rho}{\rho^2 + R^2\omega^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\omega^2\nu R}{\rho^2 + R^2\omega^2}$$

où $\rho = 1/C - L\omega^2$. Finalement, la solution générale de l'équation différentielle (E) est

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\omega\nu\rho}{\rho^2 + R^2\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{\omega^2\nu R}{\rho^2 + R^2\omega^2} \sin(\omega t) + \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Solution de l'exercice 8

1 - a) L'intégrale généralisée $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente (ce résultat à été établi p. 979 à l'aide du critère de Cauchy). Pour montrer qu'elle converge, notons qu'en intégrant par parties, on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{\cos(t)}{t}\right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

D'une part, $\lim_{t\to+\infty} \frac{\cos(t)}{t} = 0$. D'autre part,

$$\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2} \quad \text{et l'intégrale} \quad \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t \quad \text{converge .}$$

On déduit des critères de comparaison[56] que l'intégrale généralisée $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente. Par conséquent, $u(x)$ est défini pour tout réel x strictement positif. On procède d'une manière analogue pour montrer que $v(x)$ est défini pour tout réel x strictement positif.

b) Les seuls résultats connus sur la dérivabilité des fonctions définies par une intégrale concernent l'intégrale de Riemann et non les intégrales généralisées. On se ramène à cette situation en remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$u(x) = \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = u(1) - \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t.$$

L'application u s'interprète donc comme l'opposée de l'intégrale indéfinie[57] associée à $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$. Cette application est continue, donc d'après la proposition 18.8, on peut affirmer que u est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec

$$u'(x) = -\frac{\sin(x)}{x}.$$

De manière analogue, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$v(x) = \int_x^1 \frac{\cos(t)}{t}\, \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\, \mathrm{d}t = v(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t}\, \mathrm{d}t.$$

L'application v s'interprète donc comme l'opposée de l'intégrale indéfinie associée à $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$. Cette application est continue, donc d'après la proposition 18.8, on peut affirmer que v est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec

$$v'(x) = -\frac{\cos(x)}{x}.$$

[56] Voir le théorème 19.2 p. 983.

[57] Voir p. 902 pour la définition de l'intégrale indéfinie.

c) Considérons l'application $\phi : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ prolongée par continuité en 0 en posant $\phi(0) = 1$. Cette application est continue ; elle est par conséquent Riemann intégrable sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$u(x) = u(1) - \int_1^x \phi(t)\ \mathrm{d}t$$

donc u admet une limite en 0 si l'intégrale indéfinie Φ associée à ϕ admet une limite en 0. D'après la proposition 18.7, Φ est continue sur $[0, 1]$. Elle admet donc une limite à droite en 0, ce qui est par conséquent également le cas de u.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$. On en déduit que

$$\begin{aligned} v(x) + \ln(x) &= v(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t}\ \mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= v(1) + \int_1^x \frac{1 - \cos(t)}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\ \mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1-\cos(t)}{t}\ \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{15}$$

Pour montrer que v est équivalente à l'opposé de la fonction logarithme dans un voisinage à droite de 0, il faut montrer que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{v(x)}{-\ln(x)} = 1.$$

Comme pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{v(x)}{-\ln(x)} = \frac{v(x) + \ln(x)}{-\ln(x)} + 1,$$

si on montre que $v(x) + \ln(x)$ admet une limite à droite en 0 alors on pourra conclure que $\lim_{x \to 0^+} \frac{v(x)}{-\ln(x)} = 1$.

Considérons l'application $\psi : t \in]0, 1] \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t}$. Elle est continue sur $]0, 1]$ et comme $1 - \cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} t^2$, on a $\lim_{t \to 0^+} \psi(t) = 0$. On peut donc prolonger par continuité l'application en 0 en posant $\psi(0) = 0$. La relation (15) indique que $v(x) + \ln(x) - v(1)$ s'interprète comme l'intégrale indéfinie associée à ψ. Comme ψ est continue sur $[0, 1]$, elle est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$ et d'après la proposition 18.7, son intégrale indéfinie est continue sur $[0, 1]$. On en déduit que $v(x) + \ln(x)$ admet une limite à droite quand x tend vers 0. On peut donc affirmer que $v(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$.

2 - On a montré que les applications u et v sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivables sur cet intervalle, de dérivées

$$u' : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto -\frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad v' : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto -\frac{\cos(x)}{x}.$$

Les deux fonctions u' et v' étant indéfiniment dérivables sur $]0,+\infty[$, on en déduit que les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et par conséquent que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Calculons les dérivées de f. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\cos(x) - u(x)\sin(x) - v'(x)\sin(x) - v(x)\cos(x) \\ &= -\frac{\sin(x)}{x}\cos(x) - u(x)\sin(x) + \frac{\cos(x)}{x}\sin(x) - v(x)\cos(x) \\ &= -u(x)\sin x - v(x)\cos(x). \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -u'(x)\sin(x) - u(x)\cos(x) - v'(x)\cos(x) + v(x)\sin(x) \\ &= \frac{1}{x} + v(x)\sin(x) - u(x)\cos(x). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in]0,+\infty[$

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{x},$$

autrement dit que f est solution de l'équation différentielle (E).

On a

$$u(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Il est donc clair que

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} v(x) = 0.$$

Puisque les fonctions sinus et cosinus sont bornées, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

3 - a) L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (E) est $x^2+1=0$. Elle admet deux racines complexes conjuguées i et $-$i. On en déduit que la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E) est

$$\phi_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto A\cos(t) + B\sin(t), \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Les fonctions sinus et cosinus n'ayant pas de limite en $+\infty$, la fonction ϕ_0 ne peut avoir de limite en $+\infty$ que si $A = B = 0$. On peut établir plus rigoureusement cette affirmation en utilisant le fait que la fonction ϕ_0 admet une limite ℓ en $+\infty$ si et seulement si[58] pour toute suite $(t_n)_n$ tendant vers $+\infty$, la suite de terme général $\phi_0(t_n)$ tend vers ℓ.

[58] Voir la proposition 13.11 page 604.

- La suite $(\alpha_n)_n$ de terme général $\alpha_n = 2\pi n$ tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\phi_0(\alpha_n) = A$.
- La suite $(\beta_n)_n$ de terme général $\beta_n = \pi/2 + 2\pi n$ tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\phi_0(\beta_n) = B$.

On en déduit que si $A \neq B$, la fonction ϕ_0 ne peut avoir de limite en 0. Supposons donc que $A = B$.

- La suite $(\gamma_n)_n$ de terme général $\gamma_n = \pi/4 + 2\pi n$ tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\phi_0(\gamma_n) = 2A/\sqrt{2}$.
- La suite $(\delta_n)_n$ de terme général $\delta 5\pi/4 + 2\pi n$ tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\phi_0(\delta_n) = -2A/\sqrt{2}$.

On en déduit que si $A \neq 0$, la fonction ϕ_0 ne peut avoir de limite en 0. Si $A = B = 0$, cette limite vaut 0 car on a alors la fonction nulle.

c) D'après ce qui précède, f est une solution de (E) ayant une limite 0 en $+\infty$. Supposons qu'il existe une seconde fonction g solution de (E) ayant une limite finie en $+\infty$. La fonction $f - g$ serait alors solution de l'équation différentielle (E_0) et aurait une limite finie en $+\infty$. D'après ce que l'on vient d'établir, la seule solution de l'équation différentielle (E) ayant une limite finie en $+\infty$ est la fonction nulle. On a donc $f = g$. On en conclut qu'il existe une unique solution de (E) ayant une limite finie en $+\infty$. Puisque f vérifie cette propriété, l'unique solution est f.

4 - Pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) = u(x)\cos(x) - v(x)\sin(x).$$

On a $v(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$ et $\sin(x) \underset{0^+}{\sim} x$. On en déduit que

$$\lim_{x \to 0^+} v(x)\sin(x) = -\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0.$$

Par ailleurs, lorsque x tend vers 0, $\cos(x)$ tend vers 1 et $u(x)$ admet une limite finie $u(0)$. On en déduit que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = u(0).$$

Bibliographie

[1] S. Balac et L. Chupin, *Analyse et algèbre, cours de mathématiques de deuxième année avec exercices corrigés et illustrations avec Maple*, Collection Sciences appliquées de l'INSA de Lyon, PPUR, 2008.

[2] R. Brouzet et H. Boualem, *La planète $\mathbb{R}$, voyage au pays des nombres réels*, Collection UniverSciences, Dunod, 2002.

[3] B. Calvo et A. Calvo, *Fonctions d'une variable, cours avec exemples et exercices corrigés*, Collection *DEUG*, Masson, 1997.

[4] A. Denmat et F. Héaulme, *Algèbre linéaire, travaux dirigés*, Dunod, 1999.

[5] J.P. Escofier, *Toute l'algèbre du premier cycle, cours et exercices corrigés*, Collection *Sciences Sup*, Dunod, 2002.

[6] D. Guinin et Joppin B., *Mathématiques (en 4 tomes)*, Collection *Les nouveaux Précis Bréal*, Bréal, 1999.

[7] B. Hauchecorne et D. Suratteau, *Des mathématiciens de A à Z*, Ellipses, 1996.

[8] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques (en 4 tomes)*, Dunod, 1977.

[9] J.M. Monier, *Cours de mathématiques (en 7 tomes)*, Collection *J'intègre*, Dunod, 2003.

[10] H. Muller, *Mathématiques - méthodes, savoir-faire et astuces*, Collection *DEUG Sciences*, Bréal, 2003.

Index

Algèbre et analyse

Stéphane BALAC

Frédéric STURM

Cet ouvrage, réunissant en un tout cohérent algèbre et analyse, s'adresse de manière plus spécifique aux élèves de première année des cycles préparatoires intégrés des écoles d'ingénieurs mais peut être utilisé avec profit par tout étudiant se destinant à des études supérieures d'ingénieur. Il est issu de l'enseignement dispensé par les auteurs dans la filière ASINSA qui est l'une des trois filières de premier cycle international de l'INSA de Lyon. A ce titre, il ne constitue pas seulement une somme de connaissances mathématiques de 1re année de l'enseignement supérieur mais vise à présenter de manière précise les résultats essentiels à une formation d'ingénieur généraliste.

Cette nouvelle édition revue et augmentée est divisée en 20 chapitres regroupés en 5 grandes parties : ensembles numériques fondamentaux, polynômes et fractions rationnelles, algèbre linéaire, calcul différentiel et calcul intégral. Chaque chapitre contient de courts exercices visant à tester la bonne compréhension des notions introduites et se termine par quelques exercices de synthèse. Une correction détaillée et commentée de tous les exercices est fournie en fin de chapitre. Le logiciel de calcul MAPLE est utilisé dans l'ouvrage pour illustrer certaines notions introduites.

Le lecteur trouvera une suite naturelle à ce cours de mathématiques de première année dans l'ouvrage « Analyse et algèbre, Cours de mathématiques de deuxième année » publié dans la même collection et chez le même éditeur par Stéphane Balac et Laurent Chupin.

Stéphane BALAC est Maître de Conférences en mathématiques à l'Ecole Nationale Supérieure des Sciences Appliquées et de Technologie (ENSSAT) de Lannion. Agrégé de Mathématiques, il a enseigné pendant plusieurs années les mathématiques en premier cycle à l'INSA de Lyon dans la filière classique et dans la filière internationale ASINSA. Docteur de l'Université de Rennes 1, ses recherches portent sur la modélisation mathématique et l'étude de méthodes numériques en électromagnétisme dans le cadre d'applications en imagerie médicale et plus récemment en optronique et télécommunications optiques.

Frédéric STURM est Maître de Conférences à l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon. Il enseigne les mathématiques et l'analyse numérique en premier cycle dans la filière classique et dans la filière internationale ASINSA. Il est Docteur de l'Université de Toulon et du Var et chercheur au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA). Ses recherches portent sur la résolution mathématique et numérique de problèmes de propagation d'ondes acoustiques et problèmes inverses dans des milieux multicouches, et plus particulièrement sur la caractérisation et la quantification d'effets tridimensionnels en acoustique sous-marine.

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES