الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

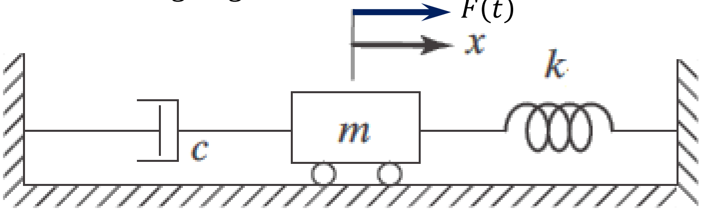
Enseignant
BOUTCHICHA
Djilali

TD4 – OV – Application de la 2ème loi de Newton et du Formalisme de Lagrange

Exercice 1

Déterminer l'équation de mouvement du système masse ressort amortisseur suivant :

a) en appliquant la 2ème loi Newton ;
b) en utilisant le Formalisme de Lagrange.



Solution :

Isoler la masse et remplacer les liaisons par leurs effets.

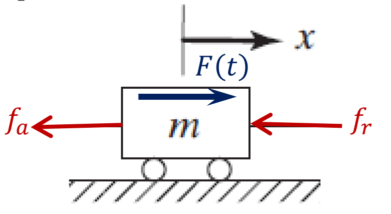


Diagramme du corps isolé

Appliquer la seconde loi de Newton

$$ma_x = \sum_x f_x$$

$$ma_x = -f_a - f_r + F(t)$$

La force d'amortissement

$$f_a = c\dot{x}$$

La force de rappel

$$f_r = kx$$

La force extérieure

$$F(t)$$

Remplacer

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + F(t)$$

Réarranger

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

On obtient *l'équation de mouvement* qui est une équation différentielle de deuxième ordre à coefficients constants

Appliquer le formalisme de Lagrange

L'Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial V}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial W}{\partial q}=F_q$$

Dans ce système la coordonnée généralisée $q = x$ et la vitesse généralisée $\dot{q} = \dot{x}$.

L'Energie cinétique T

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

L'Energie potentielle V

$$V=\frac{1}{2}kx^2$$

La Fonction de dissipation D

$$D=\frac{1}{2}c\dot{x}^2$$

Le travail des forces extérieure

$$W=F(t).x$$

La force généralisée

$$F_q=\frac{\partial W}{\partial x}=F(t)$$

L'Equation de Lagrange devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}=F_q$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x} \text{ et } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}=c\dot{x}$$

$$F_q=\frac{\partial W}{\partial x}=F(t)$$

On obtient l'équation de mouvement

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)$$

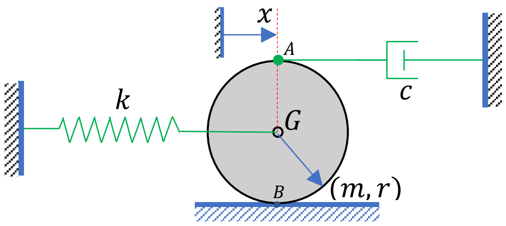
الجمهوريـــــــــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــــم العـــــــــالي والبحـــــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant
BOUTCHICHA
Djilali

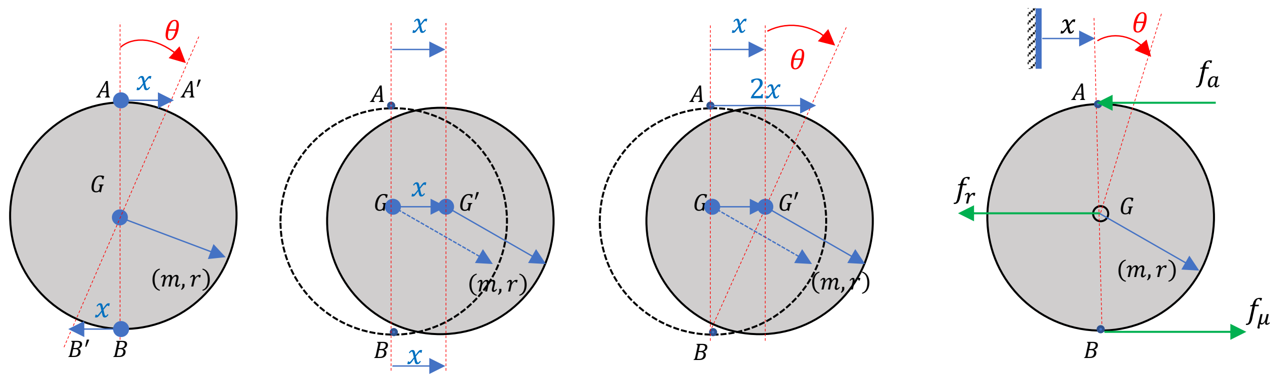
Exercice 2

Un disque de masse m, de rayon r et de moment d'inertie $I_G = \frac{1}{2}mr^2$.

a) Trouver l'équation de mouvement du système en supposant que le disque roule sans glissement ($x = r\theta$ est le déplacement du centre de gravité G).



<u>Solution :</u>



Rotation   Translation   Rotation + Translation   Diagramme du corps isolé

Déplacement d'un disque avec roulement sans glissement

On définit θ comme le déplacement angulaire du disque autour de son centre de gravité mesuré à partir de la position d'équilibre. Supposant que le disque roule sans glissement, le mouvement de translation et de rotation du disque sont reliés par l'équation

$$x = r\theta$$

a) La force de frottement, qui est inconnue, est définie comme f_μ , tandis que les forces de rappel et d'amortissement visqueux sont :

$$f_r = kx = kr\theta,$$

$$f_a = c\dot{x}_A = 2c\dot{x} \ = 2cr\dot{\theta}.$$

En utilisant les équilibre x s dynamiques linéaire et angulaire du disque

$$\overset{+}{\underset{\rightarrow}{\sum}} F = m\ddot{x}$$

$$f_\mu - kx - 2c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\sum \mathcal{M}_G = -f_\mu r - f_a r = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

En éliminant la force de frottement inconnue, et en utilisant les relations cinématiques, on trouve

$$-f_\mu r = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} + f_a r \quad \Longrightarrow \quad f_\mu = -\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} - f_a = -\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} - 2c\dot{x}$$

Remplaçons l'équation des forces

$$\left(-\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} - 2c\dot{x}\right) - kx - 2c\dot{x} = m\ddot{x}$$

On a $x = r\theta \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = r\dot{\theta}$ et $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$

$$\left(-\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} - 2cr\dot{\theta}\right) - kr\theta - 2cr\dot{\theta} = mr\ddot{\theta}$$

$$mr\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mr\ddot{\theta} + 4cr\dot{\theta} + kr\theta = 0$$

On obtient l'équation de mouvement

$$\frac{3}{2}mr\ddot{\theta} + 4cr\dot{\theta} + kr\theta = 0 \quad \text{avec } \theta \text{ comme grandeur physique}$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + 4c\dot{x} + kx = 0 \qquad \text{avec } x \text{ comme grandeur physique}$$

Appliquer le formalisme de Lagrange

a) Energie cinétique

Le cylindre possède une translation x du centre de gravité et une rotation θ $(x = r\theta)$ autour de lui.
Le moment d'inertie massique d'un cylindre autour d'un axe passant par son centre gravité $I_G = \frac{1}{2}mr^2$.

Energie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques de translation et de rotation.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}I_G\left(\dot{\theta}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\left(\dot{\theta}\right)^2$$

Comme $(\dot{x} = r\dot{\theta})$

$$T = \frac{1}{2}m\left(r\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{4}mr^2\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$T = \frac{3}{4}m\left(r\dot{\theta}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad T = \frac{3}{4}m(\dot{x})^2$$

Enseignant
BOUTCHICHA
Djilali

b) Energie potentielle

A l'instant t le centre de gravité du cylindre se déplace de x en roulant.
Le ressort à gauche s'allonge de (x).

$$V = \frac{1}{2}k(x)^2 \quad \text{ou} \qquad V = \frac{1}{2}kr^2(\theta)^2$$

c) Fonction de dissipation

L'amortisseur s'allonge de $(2x = 2r\theta)$.

$$D = \frac{1}{2}c(2\dot{x})^2 = 2c(\dot{x})^2 \quad \text{ou} \qquad D = 2cr^2(\dot{\theta})^2$$

d) Equation de Mouvement

Le système n'est pas amorti ni forcé les équations de Lagrange deviennent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots$$

Comme il s'agit d'un système à 1DDL nous choisissons entre x et θ, sachant que $(x = r\theta)$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = kr^2\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 4cr^2\dot{\theta}$$

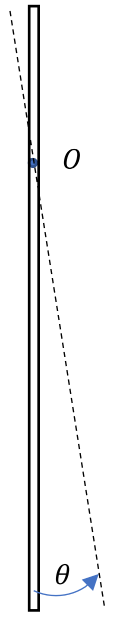
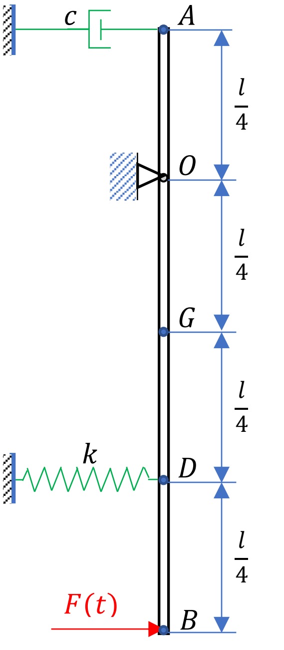
L'équation de mouvement

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} + 4cr^2\dot{\theta} + kr^2\theta = 0$$

ou $$\frac{3}{2}m\ddot{x} + 4c\dot{x} + kx = 0$$

Exercice 3

Une tige AB de masse m, de longueur l oscille autour d'un pivot O se trouvant à $l/4$ de son extrémité supérieure A qui est retenue par un amortisseur de coefficient d'amortissement c. Un ressort de constante de raideur k est fixé au point D se trouvant à $l/4$ de son extrémité inférieure B. L'extrémité B est soumise à une force harmonique $F(t) = F_0 \cos \Omega t$.
Trouver l'équation de mouvement du système en fonction de l'angle θ $(\theta\ est\ faible)$.

Marche à suivre • *Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation passant par O.* • *Déterminer les déplacements x_A et x_D en fonction de l'angle de rotation θ.* • *Représenter et évaluer les forces appliquées sur la tige (poids, force d'amortissement, force de rappels…).* • *Evaluer les moments de ces forces par rapport au centre de rotation O.* • *Isoler la tige et appliquer la loi de la dynamique.* • *Ecrire l'équation de mouvement en fonction de θ et de ses dérivés.*		

- *Le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation passant par O.*

$$I_O = I_G + m\overline{OG}^2$$

$$I_O = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2$$

$$I_O = \frac{7}{48}ml^2.$$

- *Les déplacements x_A et x_D en fonction de l'angle de rotation θ.*

$$x_A = \overline{OA}\ \sin\theta \cong \frac{l}{4}\theta$$

$$x_D = \overline{OD}\ \sin\theta \cong \frac{1}{2}l\theta$$

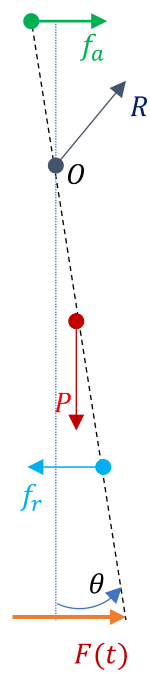
$(\theta\ est\ faible \implies \sin\theta \cong \theta\ \ et\ \ \cos\theta \cong 1)$

- *Représentation des forces appliquées sur la tige (poids, force d'amortissement, force de rappels, …).*

Enseignant
BOUTCHICHA
Djilali

Application de la méthode de Newton

Les forces appliquées	
– Le poids	$P = mg$
– La force de rappel du ressort	$f_r = kx_D = k\frac{l}{2}\theta$
– La force d'amortissement	$f_a = c\dot{x}_A = c\frac{l}{4}\dot{\theta}$
– La réaction inconnue du support	R (inconnue)
Les moments par rapport au centre de rotation *O***.**	
– Le moment du poids	$\mathcal{M}_{P/O} = mg\frac{l}{4}\theta = \frac{1}{4}mgl\theta$
– Le moment de la force de rappel	$\mathcal{M}_{f_r/O} = k\frac{l}{2}\theta\frac{l}{2} = \frac{1}{4}kl^2\theta$
– Le moment de la force d'amortissement	$\mathcal{M}_{f_a/O} = c\frac{l}{4}\dot{\theta}\frac{l}{4} = \frac{1}{16}cl^2\dot{\theta}$
– Le moment de la réaction du support	$\mathcal{M}_{R/O} = 0$
– Le moment de la force d'excitation	$\vec{\mathcal{M}}_{F(t)/O} = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F(t)}$ $\mathcal{M}_{F(t)/O} = \frac{3l}{4} \cdot F(t)$



- *Isoler la tige et appliquer la loi de la dynamique.*

Somme des moments par rapport au point de rotation O est égale au moment d'inertie massique par rapport à O multiplier par l'accélération angulaire

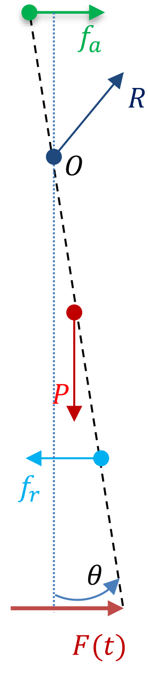
$$+\circlearrowleft \mathcal{M}_{f_i/O} = I_0\ddot{\theta}$$

$$-\frac{1}{4}mgl\theta - \frac{1}{4}kl^2\theta - \frac{1}{16}cl^2\dot{\theta} + F(t)\frac{3l}{4}\theta = \frac{7}{48}ml^2\ddot{\theta}$$

- *L'équation de mouvement en fonction de θ et de ses dérivés.*

$$\frac{7}{48}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{16}cl^2\dot{\theta} + \frac{1}{4}(mgl + kl^2)\theta = F(t)\frac{3l}{4}\theta$$

$$\frac{7}{48}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{16}cl^2\dot{\theta} + \frac{1}{4}(mgl + kl^2)\theta = \frac{3l}{4} \cdot F_0 \cos\Omega t$$



Application de la Méthode de Lagrange

a) Energie cinétique

La tige possède un mouvement de rotation θ autour de l'axe passant par le point O.

Le moment d'inertie massique de la tige autour d'un axe passant par le point O est :

$I_O = \frac{7}{48}ml^2$.

$$T = \frac{1}{2}I_O(\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\frac{7}{48}ml^2(\dot{\theta})^2$$

b) Energie potentielle

Energie potentielle du système est la somme des énergies potentielles de déformation élastique et de gravitation.

$$V = \frac{1}{2}k(x_D)^2 + mgh$$

Avec l'allongement du ressort $x_D = \overline{OD}\ \sin\theta \cong \frac{1}{2}l\theta$

Et l'élévation du centre de gravité $h = \frac{l}{4}(1-\cos\theta)$ avec $(1-\cos\theta) \approx \frac{1}{2}\theta^2$

$$V = \frac{1}{2}k(\frac{1}{2}l\theta)^2 + mg\frac{l}{4}\frac{1}{2}\theta^2 = \frac{1}{8}(kl^2 + mgl)\theta^2$$

c) Fonction de dissipation

L'amortisseur s'allonge de $x_A = \overline{OA}\ \sin\theta \cong \frac{l}{4}\theta$ avec une vitesse $\dot{x}_A = \frac{l}{4}\dot{\theta}$

$$D = \frac{1}{2}c(\dot{x}_A)^2 = \frac{1}{2}c(\frac{l}{4}\dot{\theta})^2 \quad \text{ou} \qquad D = \frac{1}{32}c(\dot{\theta})^2$$

d) Le travail des forces extérieure

$$W = F(t).x_B \quad \text{avec } x_B = \overline{OB}\ \sin\theta \cong \frac{3}{4}l\theta$$

La force généralisée

$$F_\theta = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{3}{4}lF(t)$$

L'Equation de Lagrange devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}+\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=F_\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)=\frac{7}{24}ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}=\frac{1}{4}(kl^2+mgl)\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=\frac{1}{16}c\dot{\theta}$$

$$F_\theta=\frac{3l}{4}\cdot F_0\cos\Omega t$$

L'équation de mouvement

$$\frac{7}{48}ml^2\ddot{\theta}+\frac{1}{16}cl^2\dot{\theta}+\frac{1}{4}(mgl+kl^2)\theta=\frac{3l}{4}\cdot F_0\cos\Omega t$$