Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants, la relation $\mathfrak{R}$ définie sur E est-elle réflexive, symétrique, anti-symétrique ou transitive?

1. $E = \mathbb{N}$ et $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow \frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N}$
2. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$
3. $E = \mathbb{Z}^2$ et $(x, y)\mathfrak{R}(x', y') \Leftrightarrow x + y' \leq y + x'$

Exercice 2 :

Soit $E = \{1, 2, 3, 5, 8, 14, 17\}$.

1. Montrer que l'on peut définir une relation d'équivalence sur E en posant $x\mathfrak{R}y$ si et seulement si $\frac{x+y}{2} \in \mathbb{N}$
2. Trouver les classes d'équivalence.

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{Z}$ on considère la relation $\mathfrak{R}$ définie par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x - y$ est un multiple de 6

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer l'ensemble quotient.
3. Montrer que : $\dot{\overline{30}} = \dot{\overline{0}}$ et $\dot{\overline{12}} \cap \dot{\overline{57}} = \emptyset$.

Exercice 4 :

1. Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathfrak{R}$ par : $(a, b)\mathfrak{R}(c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
   $\mathfrak{R}$ est elle une relation d'équivalence? Si oui quelles sont les classes d'équivalence?
2. Dans $\mathbb{Z}$ on définit la relation $\mathfrak{R}$ par : $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$
   $\mathfrak{R}$ est elle une relation d'équivalence? Si oui quelles sont les classes d'équivalence?

Exercice 5 :

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation T par : $xTy \Leftrightarrow x \leq y$

Montrer que T est une relation d'ordre. L'ordre est-il total?

Exercice 6 :

Dans $\mathbb{N}^*$ on définit une relation binaire notée $|$ par :

$x|y$ si et seulement si x divise y.

1. Montrer que $|$ est une relation d'ordre.
2. Trouver un élément x_0 tel que pour tout x dans $\mathbb{N}^*$, x_0 divise x.
3. L'ordre est-il total?

Exercice 7 :

Soit $\preccurlyeq$ la relation sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \exists p, q \geq 1, y = px^q \text{ avec } p, q \text{ entiers}$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
2. L'ordre est-il total?