

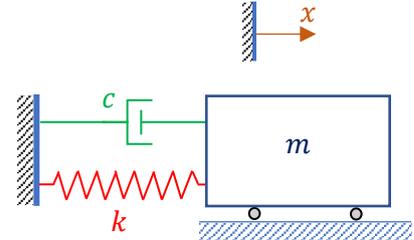


TD5- Vibration libre d'un système à un degré de liberté

Exercice 1

On considère le système représenté sur la figure ci-contre

- Ecrire l'équation du mouvement.
- Si on donne : $m = 1 \text{ kg}$, $k = 100 \text{ N/m}$ et $c = 5 \text{ N.s/m}$
 - Calculer la pulsation propre du système.
 - Calculer le coefficient d'amortissement critique.
 - Calculer le facteur d'amortissement.
 - Calculer la pseudo-pulsation.
 - Ecrire la réponse du système pour les conditions initiales suivantes :
à $t = 0$, $x(0) = 0.1 \text{ m}$ et $v(0) = 10 \text{ m/s}$.

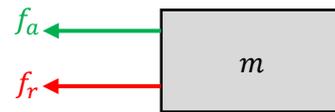


Equation de mouvement

Isoler la masse et tracer le diagramme du corps libre

Application de la 2^{ème} loi de Newton

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum f_x &= ma_x \\ ma_x &= -f_a - f_r \end{aligned}$$



Relier les forces aux paramètres du problème

$$\begin{aligned} f_r &= kx \\ f_a &= c\dot{x} \end{aligned}$$

Remplacer dans l'équation d'équilibre dynamique

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \text{Application numérique } \omega_n = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10 \text{ rad/s}$$

Coefficient d'amortissement critique

$$c_c = 2\sqrt{km}; \quad \text{Application numérique } c_c = 2\sqrt{100 \times 1} = 20 \text{ N.s/m}$$

Facteur d'amortissement

$$\xi = \frac{c}{c_c}; \quad \text{Application numérique } \xi = \frac{5}{20} = 0.25$$

Pseudo-pulsation

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{Application numérique } \omega_d = 10\sqrt{1 - 0.25^2} = 9.68 \text{ rad/s}$$

La réponse pour un système sous amorti ($\xi < 1$) est :

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) = e^{-\xi\omega_n t} \left(x_0 \cos \omega_d t + \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right)$$

$$x(t) = e^{-0.25 \times 10 t} \left(0.1 \cos 9.68 t + \frac{10 + 0.25 \times 10 \times 0.1}{9.68} \sin 9.68 t \right) = e^{-2.5 t} (0.1 \cos 9.68 t + 1.06 \sin 9.68 t)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{(0.1)^2 + (1.06)^2} = 1.065 \text{ m}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{-A_2}{A_1} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-1.06}{0.1} \right) = -2.395 \text{ rad} = -84.6^\circ$$

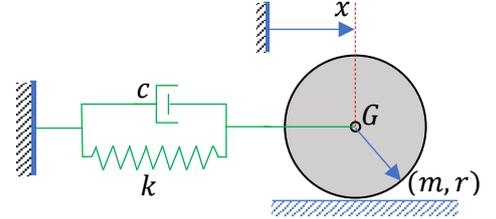
$$x(t) = 1.065 e^{-2.5 t} \cos(9.68 t - 2.395) \text{ [m]}$$



Exercice 2

Un disque de masse m , de rayon r et de moment d'inertie $I_G = \frac{1}{2}mr^2$.

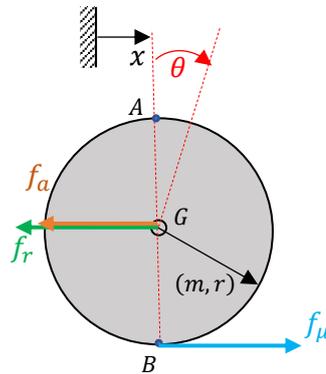
- Trouver l'équation de mouvement du système en supposant que le disque roule sans glissement.
- Quelle est la valeur de c qui correspond à l'amortissement critique ?
- L'amortissement est critique, le disque est relâché à partir de $x(0) = x_0$ sans vitesse initiale, trouver le déplacement du centre du disque.



Solution

On définit θ comme le déplacement angulaire du disque autour de son centre de gravité mesuré à partir de la position d'équilibre. Supposant que le disque roule sans glissement, le mouvement de translation et de rotation du disque sont liés par l'équation

$$x = r\theta$$



- La force de frottement, qui est inconnue, est définie comme f_μ , tandis que les forces de rappel et d'amortissement visqueux sont :

$$f_r = kx,$$

$$f_a = c\dot{x}.$$

En utilisant les équilibres dynamiques linéaire et angulaire du disque

$$\sum F = (f_\mu - kx - c\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\sum \mathcal{M}_G = (-f_\mu r) = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

En éliminant la force de frottement inconnue, et en utilisant les relations cinématiques, on trouve

$$(f_\mu r) = -\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} \Rightarrow f_\mu = -\frac{1}{2}mr\ddot{\theta}$$



Remplaçons l'équation des forces

$$-\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

On a $x = r\theta \Rightarrow \dot{x} = r\dot{\theta}$ et $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$

$$\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} + cr\dot{\theta} + kr\theta + mr\ddot{\theta} = 0$$

$$\frac{3}{2}mr\ddot{\theta} + cr\dot{\theta} + kr\theta = 0$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

b) On peut écrire l'équation différentielle sous la forme standard

$$\ddot{x} + \frac{2c}{3m}\dot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

avec $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$ et $\xi = \frac{c}{\sqrt{6km}}$

L'amortissement est critique pour $\xi = \frac{c}{\sqrt{6km}} = 1 \Rightarrow c = c_c = \sqrt{6km}$

c) Pour un amortissement critique la réponse du système est :

$$x(t) = (C_1 + C_2t)e^{-\omega_n t}$$

L'expression de la vitesse est :

$$\dot{x}(t) = ((C_2 - \omega_n C_1) - (\omega_n C_2)t)e^{-\omega_n t}$$

Si le système est relâché à partir du repos avec un déplacement initial x_0 .

En remplaçant dans la réponse

$$x_0 = x(0) \Rightarrow C_1 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_2 - \omega_n C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = \omega_n C_1 = \omega_n x_0$$

La solution avec des conditions initiales

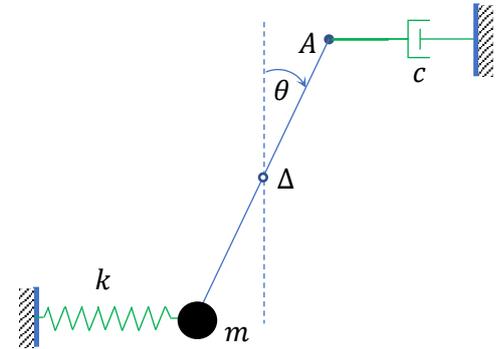
$$x(t) = x_0(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}$$



Exercice 3

On considère le système mécanique ci-contre constitué d'une tige de longueur L et de masse négligeable pouvant tourner dans un plan vertical autour de son axe fixe Δ .

Le point A est relié à un bâti fixe par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux c . A l'autre extrémité de la tige est fixée une masse ponctuelle m qui est reliée à un second bâti fixe par un ressort de raideur k . On se place dans le cas des oscillations libres de faible amplitude.



- 1) Etablir l'équation différentielle du mouvement satisfaite par θ .
- 2) Lorsque le système est abandonné sans vitesse initiale, il effectue des oscillations amorties de période $T_d = 0.1 s$, dont l'amplitude diminue de moitié au bout de 5 périodes. Calculer le coefficient d'amortissement c sachant que $m = 0.5 kg$.

Solution :

Diagramme du corps libre

Application du théorème cinétique

$$\sum \mathcal{M}_{/\Delta} = I_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$-f_r \times \frac{l}{2} - f_a \times \frac{l}{2} - mg \frac{l}{2} \sin \theta = I_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$f_r = k \frac{l}{2} \sin \theta = k \frac{l}{2} \theta$$

$$f_a = c \frac{d}{dt} \left(\frac{l}{2} \sin \theta \right) = c \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta = c \frac{l}{2} \dot{\theta}$$

$$I_{\Delta} = m \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

$$m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \ddot{\theta} + c \frac{l}{2} \dot{\theta} \times \frac{l}{2} + k \frac{l}{2} \frac{l}{2} \theta + mg \frac{l}{2} \theta = 0$$

Equation de mouvement

$$ml\ddot{\theta} + cl\dot{\theta} + (kl + 2mg)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m} \dot{\theta} + \left(\frac{k}{m} + \frac{2g}{l} \right) \theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2g}{l}} \text{ et } 2\xi\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$$

Décroissement logarithmique

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n} = \frac{1}{5} \ln 2$$

$$\delta = \xi \omega_n T_d = \frac{2\xi\omega_n T_d}{2} = \frac{1}{2} \frac{c}{m} T_d$$

Coefficient d'amortissement

$$c = \frac{2m\delta}{T_d} = \frac{2m \ln 2}{T_d \cdot 5} = \frac{2 \times 0.5}{5 \times 0.1} \ln 2 = 1.386 \text{ kgs}^{-1} \equiv (\text{Nsm}^{-1})$$

