الجمهوريـــــــــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــــم العـــــــالي والبحـــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

Solution

TD6-Vibration forcée d'un système à un degré de liberté

Exercice 1

Pour le système illustré ci-dessous, x et y désignent respectivement les déplacements absolus de la masse m et de l'extrémité Q du k. $m = 2\ kg$; $c = 4$ Ns/m ; $k = 100\ N/m$; $Y = 1\ cm$ et $\Omega = 20\ rad/s$.

Déterminer l'équation de mouvement du système.

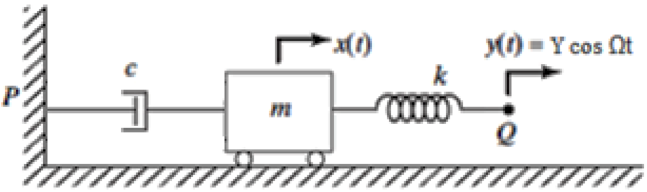
Calculer la pulsation propre, l'amortissement critique et le facteur d'amortissement.

Donner l'expression de la réponse $x_h(t)$ dans le cas où $y(t) = 0$.

Calculer le déplacement statique X_0 de m si $y(t) = Y$.

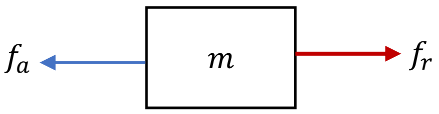
Calculer l'amplitude et la phase de la réponse forcée $x_p(t)$

Donner la réponse totale dans le cas où les conditions initiales sont nulles.



Solution

L'équation de mouvement de la masse
On isole la masse m



- On applique la loi de la dynamique

$$ma_x = \sum F_x$$

$$ma_x = -f_a + f_r$$

- On relie les forces aux variables

$$f_a = c\dot{x}$$

$$f_r = k(y - x)$$

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} + k(y - x)$$

- On réarrange

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky$$

L'équation de mouvement

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY\cos\Omega t}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{kY}{m}\cos\Omega t$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{kY}{m}\cos\Omega t$$

- **La pulsation propre**

Avec $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{2}} = 7.071 \text{ rad/s}$

- **L'amortissement critique**

$$c_c = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{100 \times 2} = 28.284\ Ns/m$$

- **Facteur d'amortissement**

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{4}{28.284} = 0.14142$$

$y(t) = 0$ L'équation de mouvement devient $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

Comme $\xi < 1$ le mouvement est sous amorti est la solution est de la forme

- **L'expression de la réponse $x_h(t)$**

$$\boxed{x_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t\}}$$

Avec $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 7.071\sqrt{1-0.141^2} = 7.0\ rad/s$

- $y(t) = Y$ L'équation de mouvement devient $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY$
  Le second membre est une force constante implique la solution particulière est constante
  $x(t) = X_0$
  $\dot{x}(t) = 0$
  $\ddot{x}(t) = 0$
  $kX_0 = kY$

- **Le déplacement statique**

$$X_0 = \frac{kY}{k} = \frac{100 \times 1}{100} = 1.0\ \ cm$$

La solution particulière de $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY\cos\Omega t$

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

$$x_p(t) = \frac{(kY/k)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cos(\Omega t - \alpha) \quad \text{avec } X_0 = (kY/k) = 1.0\ cm$$

Le rapport des fréquences

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{20}{7.071} = 2.8285$$

- **L'amplitude forcée**

$$X = \frac{X_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{1.0}{\sqrt{(1-2.83^2)^2 + (2*0.141*2.83)^2}} = 0.142\ cm$$

et la phase de la réponse forcée $x_p(t)$

$$\alpha = \arctan \frac{2\xi r}{1-r^2}$$
$$\alpha = \arctan \frac{2*0.141*2.83}{1-2.83^2} \ :\ -0.11379$$
$$\alpha = -0.11379 + \pi = 3.0278$$

- **La phase**

$$\alpha = 3.028\ rad$$
$$\alpha = 3.028 * \frac{180}{\pi} = 173,5°$$
$$x_p(t) = 0.142\ \cos(20t - 3.03)\ cm$$

- La solution complète

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$
$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\} + X\cos(\Omega t - \alpha)$$
$$\dot{x}(t) = -e^{-\xi\omega_n t}\{\xi\omega_n A_1 \cos\omega_d t + \xi\omega_n A_2 \sin\omega_d t - \omega_d A_2 \cos\omega_d t + \omega_d A_1 \sin\omega_d t\} - \Omega X \sin(\Omega t - \alpha)$$

- **Conditions initiales**

$$x(0) = 0$$
$$e^0\{A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0\} + X\ \cos(0 - \alpha) = 0$$
$$A_1 = -X\ \cos(\alpha)$$
$$A_1 = -0.142\ \cos(3.03) = 0.141\ cm$$
$$\dot{x}(0) = 0$$
$$-e^0(\xi\omega_n A_1\ cos0 + \xi\omega_n A_2 \sin 0 - \omega_d A_2 \cos 0 + \omega_d A_1 \sin 0) - \Omega X\sin(-\alpha) = 0$$

$$A_2 = \frac{\xi\omega_n A_1 - \Omega X\sin(\alpha)}{\omega_d}$$
$$A_2 = \frac{0.1414*7.071*0.141 - 20*0.142*\sin(3.03)}{7} = -2.5 \times 10^{-2}\ cm$$

La solution complète est :

$$\boxed{x(t) = e^{-t}(0.142 \cos 7t - 0.025 \sin 7t) + 0.142 \cos(20t - 3.03)}$$

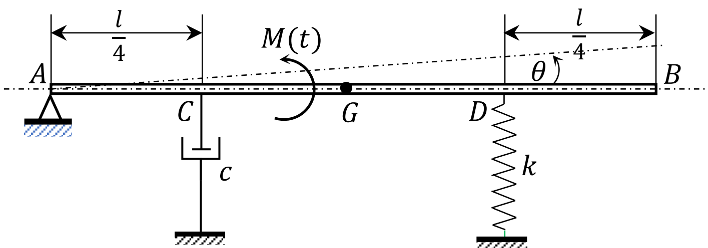
Une tige AB de masse m, de longueur l et de moment d'inertie $I_G = \frac{1}{12}ml^2$, est articulée au point A . Au point C est fixé un amortisseur de coefficient d'amortissement c, et au point D est fixé un ressort de constante de raideur k.

(En équilibre statique la tige est horizontale, c-à-d son poids est compensé.)

a) Déterminer l'équation de mouvement du système $(\theta\ est\ faible)$. En déduire la pulsation propre ω_n.

b) Quelle est la valeur de c qui correspond à l'amortissement critique ?

c) La tige est soumise à une moment harmonique $M(t) = M_0 \sin \Omega t$. Quelle la réponse totale du système dans le cas d'un amortissement sous critique et de contions initiales nulles $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$.



Solution Exercice 2

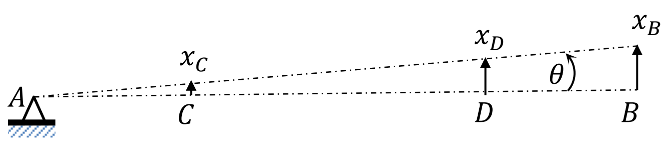
Le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation passant par A.

$$I_A = I_G + m\overline{AG}^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$I_A = \frac{1}{3}ml^2.$$

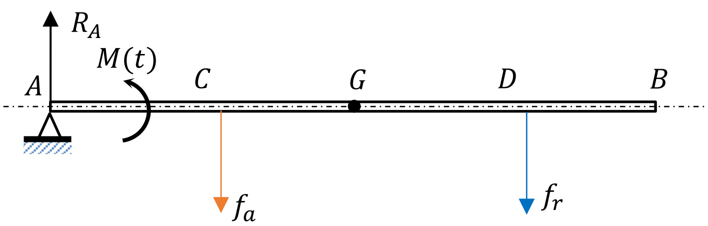
Les déplacements x_C et x_D en fonction de l'angle de rotation θ.

$\theta\ est\ faible\ \Rightarrow \sin\theta \cong \theta\ \ et\ \ \cos\theta \cong 1$



$$x_C = \overline{AC}\ \sin\theta \cong \frac{1}{4}l\theta$$
$$x_D = \overline{AD}\ \sin\theta \cong \frac{3}{4}l\theta$$
$$x_B = \overline{AB}\ \sin\theta \cong l\theta$$

Représentation des forces appliquées sur la tige (force d'amortissement, force de rappels,).



	Les forces appliquées	**Les moments par rapport au centre de rotation A**
La force de rappel	$f_r = kx_D = k\frac{3l}{4}\theta$	$\mathcal{M}_{f_r/A} = k\frac{3l}{4}\theta \times \frac{3l}{4} = \frac{9}{16}kl^2\theta$
La force d'amortissement	$f_a = c\dot{x}_A = c\frac{l}{4}\dot{\theta}$	$\mathcal{M}_{f_a/A} = c\frac{l}{4}\dot{\theta} \times \frac{l}{4} = \frac{1}{16}cl^2\dot{\theta}$
La réaction du support	R_A (Inconnue)	$\mathcal{M}_{R/A} = 0$
Le Moment extérieur	$M(t) = M_0 \sin \Omega t$	$\mathcal{M}(t)_{/A} = M_0 \sin \Omega t$

Isoler la tige et appliquer la loi de la dynamique.
Somme des moments par rapport au point de rotation A est égale au moment d'inertie massique par rapport à A multiplier par l'accélération angulaire

L'équation de mouvement libre

$$+\circlearrowleft \mathcal{M}_{f_i/A} = I_A\ddot{\theta}$$

$$-\frac{9}{16}kl^2\theta - \frac{1}{16}cl^2\dot{\theta} = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}.$$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{16}cl^2\dot{\theta} + \frac{9}{16}kl^2\theta = 0$$

Sous la forme $\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{16}\frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{27}{16}\frac{k}{m}\theta = 0$$

La pulsation propre ω_n.

$$\omega_n = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Le facteur d'amortissement Valeur de l'amortissement critique

$$\xi\omega_n = \frac{3}{32}\frac{c}{m} \Longrightarrow \xi\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{3}{32}\frac{c}{m} \quad \Longrightarrow \xi = \frac{3 \times 4}{32 \times 3\sqrt{3}}\frac{c}{m}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\xi = \frac{c}{8\sqrt{3km}}$$

Valeur de l'amortissement critique

$$\xi = \frac{c}{c_c} \text{ pour } \xi = 1 \Longrightarrow c = c_c$$

$$c_c = 8\sqrt{3km}$$

L'équation de mouvement forcé

$$+\circlearrowleft \mathcal{M}_{f_i/O} = I_A\ddot{\theta}$$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}+\frac{1}{16}cl^2\dot{\theta}+\frac{9}{16}kl^2\theta=M_0\sin\Omega t \implies \ddot{\theta}+\frac{3}{16}\frac{c}{m}\dot{\theta}+\frac{27}{16}\frac{k}{m}\theta=\frac{3M_0}{ml^2}\sin\Omega t$$

$$\ddot{\theta}+2\xi\omega_n\dot{\theta}+\omega_n^2\theta=\frac{3M_0}{ml^2}\sin\Omega t$$

Pour un amortissement sous critique

La solution homogène est donnée par $\theta_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1\cos\omega_d t+A_2\sin\omega_d t\}$

La solution permanente est donnée par $\theta_p(t) = A_p\sin(\Omega t-\alpha)$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}+\frac{1}{16}cl^2\dot{\theta}+\frac{9}{16}kl^2\theta=M_0\sin\Omega t$$

On pose $\Theta_0=\frac{M_0}{\frac{9}{16}\frac{k}{m}}=\frac{16}{9}\frac{m}{k}M_0$

Avec $A_p=\frac{\Theta_0}{\sqrt{(1-r)^2+(2\xi r)^2}}$ et $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{(1-r)}\right)$

L'expression du déplacement angulaire

$$\theta(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1\cos\omega_d t+A_2\sin\omega_d t\}+A_p\sin(\Omega t-\alpha)$$

L'expression de la vitesse angulaire

$$\dot{\theta}(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{(A_2\omega_d-A_1\xi\omega_n)\cos\omega_d t+(-A_1\omega_d-A_2\xi\omega_n)\sin\omega_d t\}+\Omega A_p\cos(\Omega t-\alpha)$$

Conditions initiales

$\theta(0)=0 \implies e^{-\xi\omega_n 0}\{A_1\cos 0+A_2\sin 0\}+A_p\sin(-\alpha)=0$

$A_1+A_p\sin(-\alpha)=0 \implies$

$$A_1=-A_p\sin\alpha$$

$\dot{\theta}(0)=0 \implies e^0\{(A_2\omega_d-A_1\xi\omega_n)\cos 0+(-A_1\omega_d-A_2\xi\omega_n)\sin 0\}+\Omega A_p\cos(-\alpha)=0$

$$A_2=\frac{A_1\xi\omega_n+\Omega A_p\cos\alpha}{\omega_d}$$

$$A_2=\frac{\Omega\cos\alpha-\xi\omega_n\sin\alpha}{\omega_d}A_p$$