Corrigé de fiche TD 1 (ALGI)

2023-2024

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, dire si la proposition est vraie ou fausse tout en justifiant votre réponse:

1. $\exists! x \in \mathbb{R}, e^x = 1.$
est une proposition vraie, car il existe un seul réel $x = 0$ qui vérifie l'équation $e^x = 1$.

2. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \leq y)$ est une proposition fausse, car si $x = y + 1$, on trouve $(y + 1 \leq y)$ qui est impossible.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x \leq y)$ est une proposition vraie, car pour tout réel x on peut prendre $y = x + 1$ qui vérifie $(x \leq y)$.

4. $\exists x \in \mathbb{R}, (x + 3 = 0 \text{ et } 2x - 5 = 0)$ est une proposition fausse, car on ne peut pas trouver un réel x qui vérifie les deux équations.

5. $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 3 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ 2x - 5 = 0)$ est une proposition vraie, car il existe un réel $x = -3$ qui vérifie la première équation et il existe un autre réel $y = \frac{5}{2}$ qui vérifie la deuxième équation. Finalement on trouve conjonction de deux propositions vraies.

6. $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1 \neq 0 \text{ ou } x + 2 \neq 0)$ est une proposition vraie, car c'est la négation de la proposition suivante:

$$\exists x \in \mathbb{R}, (x + 1 = 0 \text{ et } x + 2 = 0),$$

qui est une proposition fausse (d'après 4).

7. $(\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \neq 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 \neq 0)$ est une proposition fausse, car c'est la négation de la proposition suivante:

$$(\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R},\ x + 2 = 0),$$

qui est une proposition vraie.

Exercice 2

1. Donner la négation des propositions suivantes:

a- La négation de: $\forall x \in \mathbb{R}, 6x > x$ est

$$\exists x \in \mathbb{R}, 6x \leq x$$

b- La négation de: $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}$ existe est

$$\exists x \in \mathbb{R}, (x \geq 0) \text{ et } (\sqrt{x} \text{ n'existe pas})$$

c- La négation de: $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$ est

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$$

2. Ecrire la contraposée des implications suivantes:
a- La contraposée de ($\forall n \in \mathbb{N}, n$ premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair) est

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 2 \text{ et } n \text{ est pair } \Rightarrow n \text{ n'est pas un premier}$$

b- La contraposée de ($xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$) est

$$(x = 0 \text{ ou } y = 0) \Rightarrow xy = 0$$

Exercice 3
Soient E et F deux ensembles. Soit f une application qui à tout élément de E fait correspondre un élément, noté $f(x)$ de F.
Soit la proposition $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
1. Ecrire la négation la négation ainsi que la contraposée de cette proposition:
La négation

$$\exists x \in E, \exists y \in E, (f(x) = f(y)) \ \ et \ \ (x \neq y).$$

La contraposée

$$\forall x \in E, \forall y \in E, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

2. Ecrire la négation de la contraposée ainsi obtenue

$$\exists x \in E, \exists y \in E, (x \neq y) \ \ et \ \ (f(x) = f(y)).$$

3. Comparer les deux négations obtenues en (1) et (2).
On obtient la même proposition (les deux propositions sont équivalentes).

Exercice 4
1. Montrer par récurrence que:
a- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, 1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$
Soit $P(n)$ la proposition: $1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$.
Etape 1: (Initialisation) On prouve que $P(n_0)$ est vraie avec $n_0 = 1$.
Pour $n = 1$, on a:

$$1.1! = 1 \ \text{ et } \ (n+1)! - 1 = 2! - 1 = 1,$$

donc, la proposition est vraie pour le rang n_0.
Etape 2: (Héridété) On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Supposons que la proposition $P(n)$ est vraie c'est à dire

$$1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1,$$

et montrons que la proposition $P(n+1)$ est vraie c'est à dire

$$1.1! + 2.2! + ... + n.n! + (n+1).(n+1)! = (n+2)! - 1.$$

On a:

$$\begin{aligned} 1.1! + 2.2! + ... + n.n! + (n+1).(n+1)! &= (n+1)! - 1 + (n+1).(n+1)! \\ &= (n+1)!\,(1 + (n+1)) - 1 \\ &= (n+1)!\,(n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la proposition $P(n+1)$ est vraie.
Etape 3: (Conclusion) D'aprés le principe de raisonnement par récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \neq 0$.

b- $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $P(n)$ la proposition: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Dans ce cas, on a: $n_0 = 1$.
Etape 1: On prouve que $P(n_0)$ est vraie
Pour $n = 1$, on a:
$\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1\times 2\times 3}{6} = 1$.
Donc, la proposition est vraie pour le rang n_0.
Etape 2: On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Supposons que la proposition $P(n)$ est vraie c'est à dire $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons que la proposition $P(n+1)$ est vraie c'est à dire $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
On a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)}{6}\left(n\,(2n+1) + 6\,(n+1)\right) \\ &= \frac{(n+1)}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la proposition $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion: D'aprés le principe de raisonnement par récurrence la proposition

$P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.
c- $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \geq n$.
Soit $P\left(n\right)$ la proposition: $2^n \geq n$.
Etape 1: On prouve que $P\left(n_0\right)$ est vraie avec $n_0 = 1$.
Pour $n = 1$, on a:

$$2^{n_0} = 2 \geq n_0.$$

Donc, la proposition est vraie pour le rang n_0.
Etape 2: On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Supposons que la proposition $P(n)$ est vraie c'est à dire $2^n \geq n$ et montrons que la proposition $P(n+1)$ est vraie c'est à dire $2^{n+1} \geq n+1$.
On a:

$$2^n \geq n \Rightarrow 2 \times 2^n \geq 2n \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2n$$

et comme

$$2n \geq n+1, \text{ car } n \geq 1 \Rightarrow n+n \geq 1+n$$

alors,

$$2^{n+1} \geq n+1$$

Ce qui montre que la proposition $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion: D'aprés le principe de raisonnement par récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.
2. Montrer que la proposition:

$$\forall \left(a, b\right) \in \mathbb{R}^2, |a+b| = a+b,$$

est fausse.
Pour $\left(a, b\right) = \left(1, -2\right)$, on a:

$$|a+b| = 1 \neq a+b,$$

donc d'apres le raisonnement par un cotre exemple, on déduit que la proposition est fausse.
3. Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq x^2 - x + 1$.
On sait que:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Pour $x \in [1, +\infty[$:

$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - (x-1)$$

$$= x^2 - 2x + 2$$

$$= (x-1)^2 + 1 \geq 0.$$

Pour $x \in]-\infty, 1]$:

$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - (-x+1)$$

$$= x^2 \geq 0.$$

Dans tous les cas, on déduire que $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.
Alors, d'aprés le principe de raisonnement par cas par cas, on déduit que «$\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq x^2 - x + 1.$».

Exercice 5
Soit n un entier relatif et $P(n)$ la proposition: (n^2 est pair)$\Rightarrow$ (n est pair).
1. Ecrire la contraposée de *P(n)*:
(n est impair$\Rightarrow$ n^2 est impair).
Montrer que *P(n)* est vraie.:
On démontre que: (n est impair$\Rightarrow$ n^2 est impair).
Supposons que n est impair, alors $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$,
on a

$$n^2 = (2k+1)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$$

Donc, (n^2) est impair.
Alors d'aprés le principe de raisonnement par contraposée, on déduit que la proposition *P(n)* est vraie.
2. Montrer en utilisant le raisonnement par contraposée que:
Si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $\frac{a}{2}$ n'est pas entier pair.
On sait que:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \left(\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\right),$$

alors,
« a^2 n'est pas un multiple entier de 16 $\Rightarrow$ $\frac{a}{2}$ n'est pas entier pair» équivalente à «$\frac{a}{2}$ est entier pair $\Rightarrow$ a^2 est un multiple entier de 16».
On a:
$\frac{a}{2}$ est entier pair $\Rightarrow$ $\frac{a}{2} = 2k \Rightarrow a = 4k \Rightarrow a^2 = 16k^2 \Rightarrow a^2$ est un multiple entier de 16.
Alors, d'aprés le principe de raisonnement par contraposée, on déduit que:
Si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $\frac{a}{2}$ n'est pas entier pair.

Exercice 6
1. Démontrer par l'absurde que:
$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Alors

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ et p et q sont premiers entre eux ($p\,\mathrm{gcd}(p,q) = 1$).
On a:

$$\sqrt{2} = \tfrac{p}{q} \Rightarrow 2 = \tfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Commme $p^2 = 2q^2$ alors p^2 est pair, alors p est pair.
Comme p est pair, alors $\exists p_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2p_0$.
Donc

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow (2p_0)^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2p_0^2.$$

Commme $q^2 = 2p_0^2$ alors q^2 est pair, alors q est pair.
Comme q est pair, alors $\exists q_0 \in \mathbb{Z}^*$ tel que $q = 2q_0$.
Ce qui donne une contradiction, car $p\,\mathrm{gcd}(p,q) = 1$.
Alors, d'aprés le principe de raisonnement par absurde, on déduit que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2. Démontrer par l'absurde la proposition suivante:
Si n est le carré d'un nombre entier non nul, alors $2n$ n'est pas le caré d'un nombre entier.
Supposons que:
(n est le carré d'un nombre entier non nul) et ($2n$ est le caré d'un nombre entier).
On a:

$$\left(n = k^2\right) \text{ et } \left(2n = p^2\right),$$

donc

$$2n = 2k^2 = \left(k\sqrt{2}\right)^2.$$

Ce qui donne une contradiction, car $2n$ est le caré d'un nombre entier.
Alors, d'aprés le principe de raisonnement par absurde, on déduit que:
Si n est le carré d'un nombre entier non nul, alors $2n$ n'est pas le caré d'un nombre entier.