Résumé sur les Nombres Complexes

Sommaire

1- Forme algébrique (ou forme cartésienne)
2- Partie réelle et partie imaginaire
3- Addition ou soustraction des nombres complexes
4- Multiplication d'un nombre réel et d'un nombre complexe
5- Multiplication de deux nombres complexes
6- Forme trigonométrique (ou forme polaire) d'un nombre complexe
7- Module et argument
8- Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique
9- Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique
- **9-1- Plan complexe**
- **9-2- Module**
- **9-3- Argument**

10- Multiplication de deux nombres complexes avec la forme trigonométrique
11- Division de deux nombres complexes
12- Nombre complexe conjugué
13- Exemples d'application en électricité : les impédances complexes
- **13-1- Exemple n°1 : Circuit RLC série**
- **13-2- Exemple n°2 : Circuit RL parallèle**

14- Exemple d'application en électronique : fonction de transfert d'un filtre
15- Réponse aux questions

1- Forme algébrique (ou forme cartésienne)

Voici un nombre complexe que nous appellerons $\underline{Z}$ (avec une barre en dessous pour bien montrer qu'il s'agit d'un nombre complexe).
La forme algébrique est une façon de représenter un nombre complexe :

$$\underline{Z} = 2 + 3j$$
$$(\text{ou } 2 + 3 \times j)$$

$\underline{Z}$ se lit « Z complexe » ou « nombre complexe Z »
2 + 3j se lit « deux plus trois j »

Remarque :
En mathématiques, on utilise i à la place de j :

$\underline{Z} = 2 + 3i$ « deux plus trois i »

2- Partie réelle et partie imaginaire

Un nombre complexe possède une partie réelle et une partie imaginaire :

$$\underline{Z} = \underbrace{2}_{\text{partie réelle}} + \underbrace{3}_{\text{partie imaginaire}} \times j$$

j est le nombre imaginaire unité.

Remarques :

- Un nombre réel est un nombre complexe qui n'a pas de partie imaginaire :

  $-12{,}5 + 0j$
  ou plus simplement :
  $-12{,}5$

- Un nombre imaginaire est un nombre complexe qui n'a pas de partie réelle :

  $0 + 3j$
  ou plus simplement :
  $3j$

Question n°1 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe :
$5{,}2\,j - 2{,}5$?
Question n°2 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre réel π ?
Question n°3 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre imaginaire j ?

(Solution à la fin)

3- Addition ou soustraction des nombres complexes

Les parties réelles s'additionnent (ou se soustraient).
Les parties imaginaires s'additionnent (ou se soustraient).

Soit : $\underline{Z}_1 = 5 + 7j$
et : $\underline{Z}_2 = -2 + j$
Addition :
$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 5 + 7j - 2 + j = (5-2) + (7+1)j = 3 + 8j$
Soustraction :
$\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = 5 + 7j - (-2 + j) = 5 + 7j + 2 - j = (5+2) + (7-1)j = 7 + 6j$

Question n°4 : Additionner les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.
Question n°5 : Soustraire les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.

4- Multiplication d'un nombre réel et d'un nombre complexe

Soit : $\underline{Z} = 3 + 5j$
Multiplions le nombre complexe $\underline{Z}$ par le nombre réel 8 :

$8 \times \underline{Z} = 8 \times (3 + 5j)$

On développe :

$8 \times (3 + 5j) = 8 \times 3 + 8 \times 5j$

$= 24 + 40j$

5- Multiplication de deux nombres complexes

Les choses se compliquent !

j, le nombre imaginaire unité, a la propriété étonnante suivante :

$$\boxed{\begin{array}{l} j \times j = -1 \\ \text{ou} \\ j^2 = -1 \\ \text{ou} \\ \frac{1}{j} = -j \end{array}}$$

« j fois j est égal à -1 »
« j au carré est égal à -1 »

Soit : $\underline{Z}_1 = 6 + 3j$

et : $\underline{Z}_2 = 5 + 2j$

Multiplication :

$\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 = (6 + 3j) \times (5 + 2j)$

On développe :

$(6 + 3j) \times (5 + 2j) = 6 \times 5 + 6 \times 2j + 3j \times 5 + 3j \times 2j$

$= 30 + 12j + 15j + 6j^2$ avec : $j^2 = -1$

$= 30 + 12j + 15j - 6$

$= (30 - 6) + (12 + 15)j$

$= 24 + 27j$

Question n°6 : Multiplier les nombres complexes 1 – j et 4 + 2j.
Question n°7 : Multiplier les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.
Question n°8 : Multiplier les nombres complexes j et 3 + 4j.

6- Forme trigonométrique (ou forme polaire) d'un nombre complexe

La forme trigonométrique est une autre façon de représenter un nombre complexe :

Exemple :

$$\underline{Z} = \left(2\,;+\frac{\pi}{3}\text{rad}\right)$$

$$\text{ou} : \underline{Z} = (2\,;+60°)$$

7– Module et argument

Un nombre complexe possède un module et un argument :

$$\underline{Z} = \left(\underbrace{2}_{\text{module}}\;;\underbrace{+\frac{\pi}{3}\text{rad}}_{\text{argument}}\right)$$

Le module du nombre complexe $\underline{Z}$ se note : $|\underline{Z}|$ ou Z

Ici : $|\underline{Z}| = 2$

Le module est un nombre réel positif ou nul.

L'argument d'un nombre complexe est un angle que l'on peut exprimer en degrés (°) ou en radians (180° = π radians).

L'argument du nombre complexe $\underline{Z}$ se note : $\arg(\underline{Z})$

Ici : $\arg(\underline{Z}) = +\frac{\pi}{3}\text{rad}$

8- Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique

C'est très simple :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{partie réelle} = \text{module} \times \text{cosinus de l'argument} \\ \text{partie imaginaire} = \text{module} \times \text{sinus de l'argument}\end{array}}$$

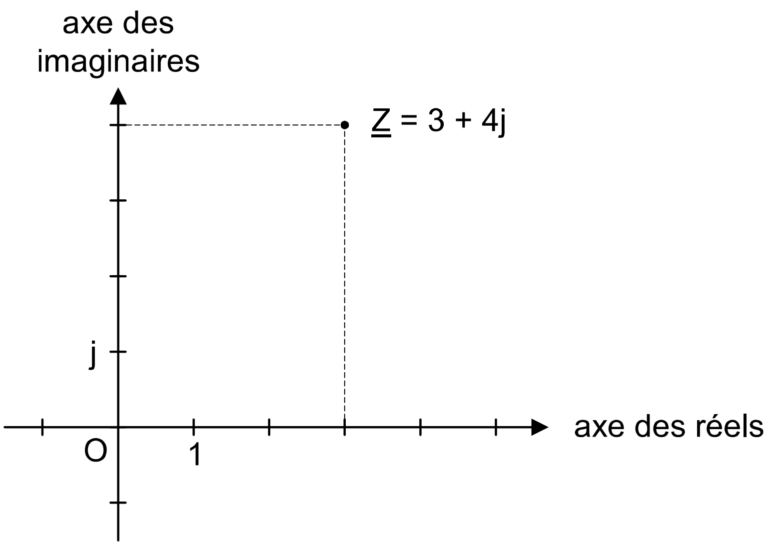
$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \left(2\,;+\frac{\pi}{3}\text{rad}\right)\\ &= 2\times\cos\left(+\frac{\pi}{3}\text{rad}\right) + 2\times\sin\left(+\frac{\pi}{3}\text{rad}\right)\text{j}\\ &= 2\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{j}\\ &= 1+\sqrt{3}\text{j}\end{aligned}$$

9- Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

9-1- Plan complexe

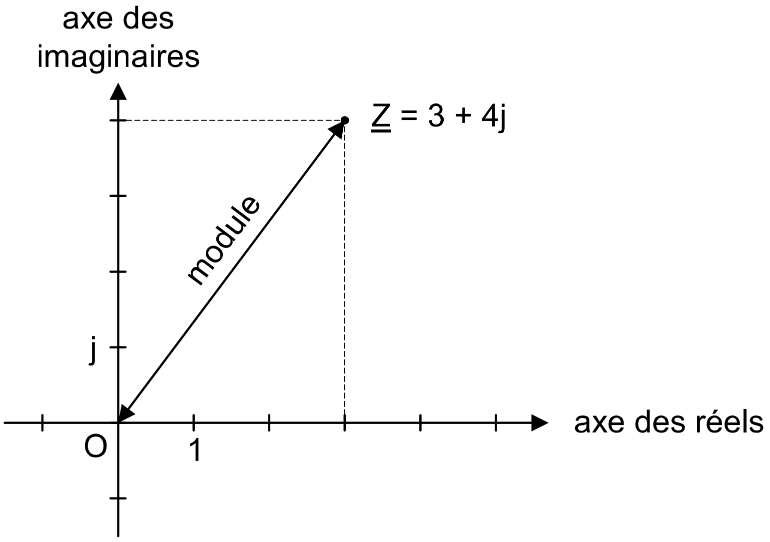
Le plan complexe désigne un plan dont chaque point est la représentation graphique d'un nombre complexe.

Exemple : $\underline{Z} = 3 + 4j$



En abscisse, nous avons la partie réelle.
En ordonnée, nous avons la partie imaginaire.

9-2- Module



$$\boxed{\text{module d'un nombre complexe} = \sqrt{(\text{partie réelle})^2 + (\text{partie imaginaire})^2}}$$

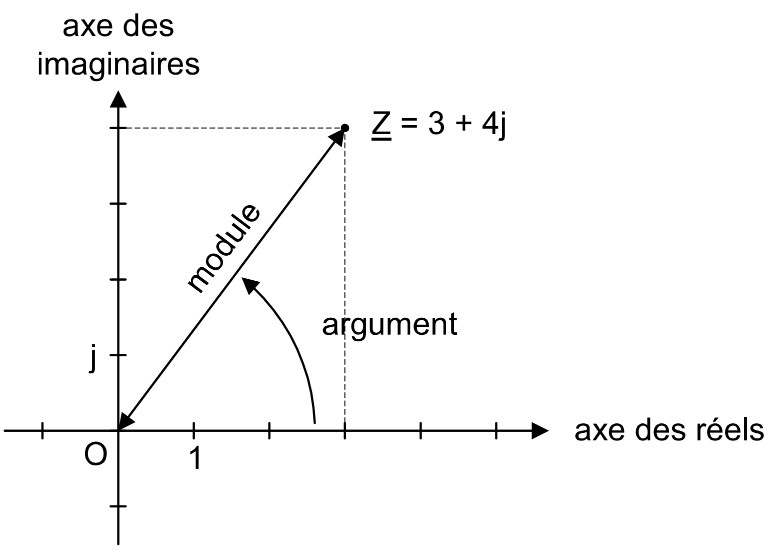
Le module est une grandeur réelle positive (comme la longueur).

Calculons le module du nombre : $\underline{Z} = 3 + 4j$

$$|\underline{Z}| = |3 + 4j| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Question n°9 : Calculer le module du nombre complexe –1 – 2j.
Question n°10 : Calculer le module du nombre imaginaire 5j.
Question n°11 : Calculer le module du nombre imaginaire –7j.
Question n°12 : Calculer le module du nombre réel – 3,93.

9-3- Argument



L'argument d'un nombre complexe est un angle.

Reprenons le nombre complexe : $\underline{Z} = 3 + 4j$

L'argument du nombre complexe $\underline{Z}$ se note : $\arg(\underline{Z}) = \arg(3 + 4j)$

Dans le cas particulier où la partie réelle est strictement positive :

$$\boxed{\arg(\underline{Z}) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}}\right)}$$

Application numérique (avec une calculatrice) :

$$\arg(3 + 4j) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx +53{,}13°$$

$$\arg(3 - 4j) = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) \approx -53{,}13°$$

N.B. Suivant la marque de la calculatrice, la fonction réciproque de la tangente se note :
arctan ou **Shift + tan** ou **tan^{-1}** ou **Atn**

Dans le cas particulier où la partie réelle est positive et la partie imaginaire nulle (nombre réel positif), l'argument est nul.

arg(8) = 0°

Dans le cas particulier où la partie réelle est négative et la partie imaginaire nulle (nombre réel négatif), l'argument est 180° (ou π radians)

arg(- 8) = 180°

Dans le cas particulier où la partie réelle est nulle et la partie imaginaire positive, l'argument est + 90° (ou $\frac{\pi}{2}$ radian)

arg(+2j) = +90°

Dans le cas particulier où la partie réelle est nulle et la partie imaginaire négative, l'argument est – 90° (ou $-\frac{\pi}{2}$ radians)

arg(-3j) = - 90°

Dans le cas particulier où la partie réelle est strictement négative :

En degrés :

$$\arg(\underline{Z}) = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}}\right)$$

En radians :

$$\arg(\underline{Z}) = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}}\right)$$

$$\arg(-3+4j) = 180° + \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) \approx 180° - 53{,}13° \approx +126{,}87°$$

$$\arg(-3-4j) = 180° + \arctan\left(\frac{-4}{-3}\right) \approx 180° + 53{,}13° \approx +233{,}13° \approx -126{,}87°$$

Question n°13 : Calculer l'argument du nombre complexe 2 + 2j.
Question n°14 : Calculer l'argument du nombre imaginaire 5j.
Question n°15 : Calculer l'argument du nombre imaginaire –7j.
Question n°16 : Calculer l'argument du nombre réel – 3,93.

10- Multiplication de deux nombres complexes avec la forme trigonométrique

Module d'un produit = produit des modules
Argument d'un produit = somme des arguments

$$\text{Soit} : \underline{Z}_1 = \left(3\,;+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{et} : \underline{Z}_2 = \left(2\,;-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 = \left(3\,;+\frac{\pi}{4}\right) \times \left(2\,;-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(3\times 2\,;+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(6\,;+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(6\,;+\frac{\pi}{12}\,\text{rad}\right)$$

$$= (6\,;+15°)$$

$$\text{Soit} : \underline{Z} = \left(1\,;+\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right)$$

$$\text{Calculons} : \underline{Z}^2$$

$$\underline{Z}^2 = \left(1\,;+\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right) \times \left(1\,;+\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right)$$

$$= \left(1\times 1\,;+\frac{\pi}{2}\,\text{rad}+\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right)$$

$$= (1\,;+\pi\,\text{rad})$$

Remarque :

$$\underline{Z} = \left(1\,;+\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right)$$

$$= 1\times\cos\left(+\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right) + 1\times\sin\left(+\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right)\text{j}$$

$$= 0 + \text{j}$$

$$= \text{j}$$

$$\underline{Z}^2 = (1\,;+\pi\,\text{rad})$$

$$= 1\times\cos(+\pi\,\text{rad}) + 1\times\sin(+\pi\,\text{rad})\text{j}$$

$$= -1 + 0\text{j}$$

$$= -1$$

On retrouve : $\text{j}^2 = -1$

11- Division de deux nombres complexes

Module d'un quotient = quotient des modules du numérateur et du dénominateur
Argument d'un quotient = argument du numérateur – argument du dénominateur

Exemple :

$$\text{Soit}: \underline{Z}_1 = \left(3\,;+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{et}: \underline{Z}_2 = \left(2\,;-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\left(3\,;+\frac{\pi}{4}\right)}{\left(2\,;-\frac{\pi}{6}\right)} = \left(\frac{3}{2};+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{3}{2};+\frac{5\pi}{12}\text{rad}\right) = (1{,}5\ ;+75°)$$

Exemple :

$$\left|\frac{5+12j}{3-4j}\right| = \frac{|5+12j|}{|3-4j|} = \frac{\sqrt{(5)^2+(12)^2}}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

$$\arg\left(\frac{5+12j}{3-4j}\right) = \arg(5+12j) - \arg(3-4j) = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$$

$$\approx 67{,}38° + 53{,}13° \approx +120{,}51°$$

Cas particulier : $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$

alors : $|\underline{Y}| = \left|\dfrac{1}{\underline{Z}}\right| = \dfrac{1}{|\underline{Z}|}$

$\arg(\underline{Y}) = -\arg(\underline{Z})$

$$\text{Soit}: \underline{Z} = \left(1\,;+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\left(1\,;+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)} = \left(1\,;-\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$

Remarque :

$$\underline{Z} = \left(1\,;+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$
$$= 1\times\cos\left(+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right) + 1\times\sin\left(+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)j$$
$$= 0 + j$$
$$= j$$

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \left(1\,;-\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$
$$= 1\times\cos\left(-\frac{\pi}{2}\text{rad}\right) + 1\times\sin\left(-\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)j$$
$$= -1 + 0j$$
$$= -1$$

On retrouve : $\frac{1}{j} = -j$

12- Nombre complexe conjugué

$\underline{Z}^*$ désigne le conjugué du nombre complexe $\underline{Z}$.

Par définition :

$$\underline{Z} = x + yj$$
$$\underline{Z}^* = x - yj$$

x désigne la partie réelle du nombre complexe $\underline{Z}$.
y désigne la partie imaginaire du nombre complexe $\underline{Z}$.

2 – 3j est le conjugué de 2 + 3j.
j est le conjugué de –j.
5 est le conjugué de 5.

Propriétés :

$$\underline{Z} + \underline{Z}^* = 2x$$
$$\underline{Z} - \underline{Z}^* = 2yj$$
$$|\underline{Z}| = |\underline{Z}^*| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\underline{Z}\times\underline{Z}^* = |\underline{Z}|^2 = x^2 + y^2$$
$$\arg(\underline{Z}^*) = -\arg(\underline{Z})$$