الجمهوريـــــــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العــــــالي والبحــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

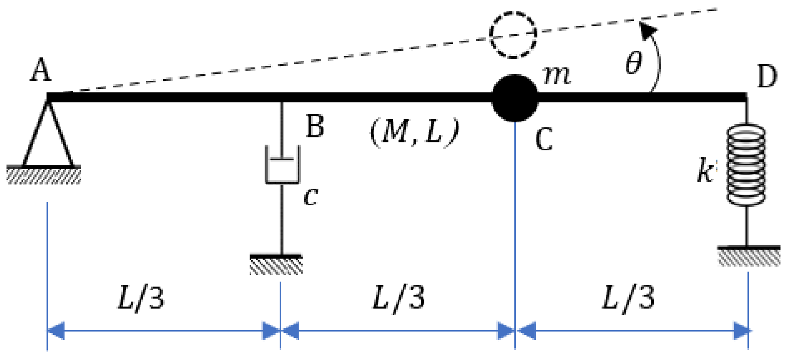
Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

Solution

Test A

Ex1 : Soit le système mécanique vibratoire représenté sur la figure ci-contre.

- Trouver l'énergie cinétique de la barre M et la masse m ($\boldsymbol{T_M}$, $\boldsymbol{T}_m$) et en suite du système ($\boldsymbol{T}$).
- Trouver l'énergie potentielle du système ($\boldsymbol{V}$) en négligeant la pesanteur **;** *(en équilibre statique la tige est horizontale et son poids est compensé).*
- Trouver la fonction de dissipation ($\boldsymbol{D}$).
- Trouver l'équation différentielle de mouvement.
- Calculer la pulsation propre ω_n et le coefficient d'amortissement critique $\boldsymbol{c_c}$.



$L = 1\ m$

$AB = BC = CD = L/3$

$c = 4\ N.s/m$

$k = 100\ N/m$

$m = 1\ kg$

$M = 3m$ (masses)

Le moment d'inertie massique d'une tige par rapport à son centre de gravité est : $I_G = \frac{1}{12}\ mL^2$

Solution Exercice 1

Le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe de rotation passant par A.

$$I_A = I_G + M\overline{AG}^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$I_A = \frac{1}{3}ML^2$.

L'énergie cinétique de la barre $\boldsymbol{M}$ $(\boldsymbol{T_M})$

$$T_M = \frac{1}{2} I_A\dot{\theta}^2$$

$$T_M = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2$$

$$T_M = \frac{1}{2}\frac{1}{3}(3m)L^2\dot{\theta}^2$$

$$T_M = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie cinétique de la masse $\boldsymbol{m}$ $(\boldsymbol{T_m})$

$$T_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{2L}{3}\right)^2 \dot{\theta}^2$$

$$T_m = \frac{2}{9}mL^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie cinétique du système $(\boldsymbol{T})$

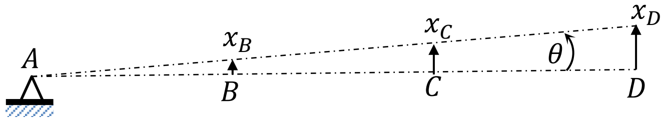
$$T = T_M + T_m$$

$$T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{2}{9}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{13}{18}mL^2\dot{\theta}^2$$

Les déplacements $\boldsymbol{x_B}$, $\boldsymbol{x_C}$ et $\boldsymbol{x_D}$ en fonction de l'angle de rotation θ.

$\theta \; est \; faible \implies \sin\theta \cong \theta \;\; et \;\; \cos\theta \cong 1$



$$x_B = \overline{AB}\,\sin\theta \cong \frac{1}{3}L\theta$$

$$x_C = \overline{AC}\,\sin\theta \cong \frac{2}{3}L\theta$$

$$x_D = \overline{AD}\,\sin\theta \cong L\theta$$

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

L'énergie potentielle du système (V).

$$V = \frac{1}{2}kx_D^2$$

$$V = \frac{1}{2}kL^2\theta^2$$

La fonction de dissipation (D).

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}_B^2$$

$$D = \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{3}L\dot{\theta}\right)^2$$

$$D = \frac{1}{18}cL^2\dot{\theta}^2$$

Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_i \quad ; \quad i = 1,2, \ldots$$

Pour notre cas $i = 1$, $q_1 = \theta$ et $F_1 = 0$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0.$$

$$T = \frac{13}{18}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{13}{9}mL^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{13}{9}mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$V = \frac{1}{2}kL^2\theta^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = kL^2\theta$$

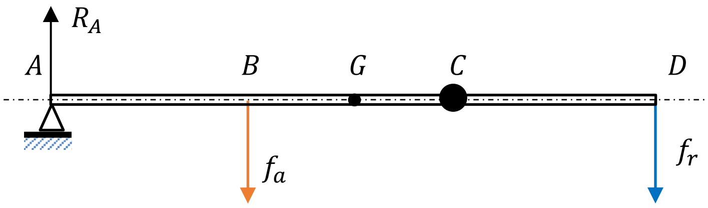
$$D = \frac{1}{18}cL^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{9}cL^2\dot{\theta}$$

L'équation de mouvement

$$\frac{13}{9}mL^2\ddot{\theta} + \frac{1}{9}cL^2\dot{\theta} + kL^2\theta = 0$$

Détermination de l'équation de mouvement par l'application de la seconde loi de Newton.



Représentation des forces appliquées sur la barre (force d'amortissement, force de rappels,).

	Les forces appliquées	**Les moments par rapport au centre de rotation A**
La force de rappel	$f_r = kx_D = kL\theta$	$\mathcal{M}_{f_r/A} = kL\theta \times L = kL^2\theta$
La force d'amortissement	$f_a = c\dot{x}_B = c\frac{L}{3}\dot{\theta}$	$\mathcal{M}_{f_a/A} = c\frac{L}{3}\dot{\theta} \times \frac{L}{3} = \frac{1}{9}cl^2\dot{\theta}$
La réaction du support	R_A (Inconnue)	$\mathcal{M}_{R/A} = 0$

Isoler la barre et appliquer la loi de la dynamique.
Somme des moments par rapport au point de rotation A est égale au moment d'inertie massique par rapport à A multiplier par l'accélération angulaire

L'équation de mouvement libre

$$+\circlearrowleft \mathcal{M}_{f_i/A} = I_A\ddot{\theta}$$

$$I_A = I_{M/A} + I_{m/A}$$

$$I_A = \frac{1}{3}ML^2 + m\left(\frac{2}{3}L\right)^2$$

$$I_A = \frac{1}{3}(3m)L^2 + \frac{4}{9}mL^2$$

$$I_A = \frac{13}{9}mL^2$$

$$-kL^2\theta - \frac{1}{9}cL^2\dot{\theta} = \frac{13}{9}mL^2\ddot{\theta}.$$

$$\frac{13}{9}mL^2\ddot{\theta} + \frac{1}{9}cL^2\dot{\theta} + kL^2\theta = 0$$

Récrire sous forme :

$$\frac{13}{9}mL^2\ddot{\theta}+\frac{1}{9}cL^2\dot{\theta}+kL^2\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+2\xi\omega_n\dot{\theta}+\omega_n^2\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{1}{13}\frac{c}{m}\dot{\theta}+\frac{9}{13}\frac{k}{m}\theta=0$$

La pulsation propre $\boldsymbol{\omega_n}$

$$\omega_n^2=\frac{9}{13}\frac{k}{m}\quad\Longrightarrow\;\omega_n=\sqrt{\frac{9}{13}\frac{k}{m}}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{9}{13}\frac{100}{1}}=8{,}32\;rad/s$$

Le coefficient d'amortissement critique $\boldsymbol{c_c}$

$$2\xi\omega_n=\frac{1}{13}\frac{c}{m}$$

$$\xi=\frac{1}{26}\frac{c}{m}\frac{1}{\omega_n}=\frac{1}{26}\frac{c}{m}\sqrt{\frac{9}{13}\frac{m}{k}}=\frac{3c}{26\sqrt{13km}}$$

$c=c_c$ pour $\xi=1$

$$\boldsymbol{c_c}=\frac{26\sqrt{13km}}{3}$$

$$\boldsymbol{c_c}=\frac{26\sqrt{13\times100\times1}}{3}=312{,}48\;N.s/m$$

Ex2 :

Exprimer la réponse totale d'un système 1DDL dont l'équation de mouvement est donnée par :

$2\ddot{x} + 20\dot{x} + 50x = 150 \sin 10t$ avec des conditions initiales nulles.

Solution :

$m = 2\,kg\,;\, c = 20\,N \cdot s/m\,;\, k = 50\,N/m\,;\, F_0 = 150\,N\,;\, \Omega = 10\,rad/s$.

La pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = 5\,rad/s$$

L'amortissement critique

$$c_c = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{50 \times 2} = 20\,N \cdot s/m$$

Facteur d'amortissement

$$\xi = \frac{c}{c_c} = 1;\ \text{donc le régime d'amortissent est critique}$$

La solution complète est donnée par $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$$x_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$$

$$x_p(t) = X\,cos(\Omega t - \alpha)$$

L'expression du déplacement

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} + X\,cos(\Omega t - \alpha)$$

L'expression de la vitesse

$$\dot{x}(t) = C_2 e^{-\omega_n t} - \omega_n (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} - X\Omega\,sin(\Omega t - \alpha)$$

$$\dot{x}(t) = (C_2 - \omega_n C_1 - \omega_n C_2 t)e^{-\omega_n t} - X\Omega\,sin(\Omega t - \alpha)$$

Application des conditions initiales

$$x(0) = 0 \ \Longrightarrow (C_1 + 0)e^0 + X\,cos(0 - \alpha) = 0$$

$$C_1 = -X\,cos\,\alpha$$

$$\dot{x}(0) = 0 \ \Longrightarrow (C_2 - \omega_n C_1 - 0)e^0 - X\Omega\,sin(0 - \alpha) = 0$$

$$C_2 = \omega_n C_1 - X\Omega\,sin\,\alpha$$

$$C_2 = -\omega_n X\,cos\,\alpha - X\Omega\,sin\,\alpha$$

$$C_2 = -X(\omega_n\,cos\,\alpha + \Omega\,sin\,\alpha)$$

Allongement statique

$$X_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{150}{50} = 3\,m$$

Rapport de fréquences

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{10}{5} = 2$$

Amplitude forcée

$$X = \frac{X_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$X = \frac{3}{\sqrt{(1-2^2)^2 + (2\times 1\times 2)^2}} = 0{,}6\,m$$

Angle de phase

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\times 1\times 2}{1-2^2}\right) = -0{,}927 + \pi = 2{,}214\,rad$$

(α doit être entre 0 et π)

Les constantes :

$$C_1 = -X\,cos\,\alpha = -0{,}6\cos 2{,}214 = 0{,}36$$

$$C_2 = -X(\omega_n\,cos\,\alpha + \Omega\,sin\,\alpha)$$

$$C_2 = -0{,}6(5\cos 2{,}214 + 10\sin 2{,}214) = -3$$

La solution complète devient

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} + X\cos(\Omega t - \alpha)$$

$$x(t) = (0{,}36 - 3t)e^{-5t} + 0{,}6\cos(10t - 2{,}214)$$