الجمهوريـــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العـــــــالي والبحـــث العلـــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

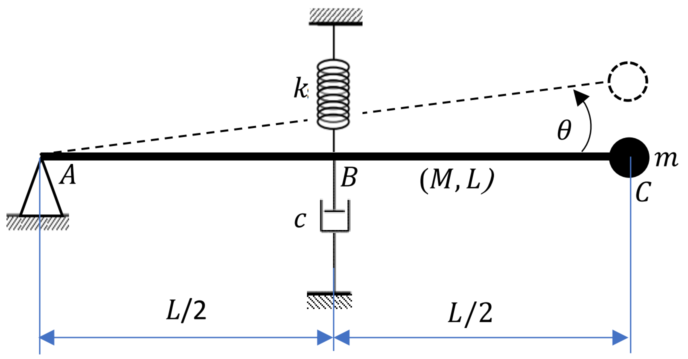
Ex2 (16 pts)

Soit le système mécanique vibratoire représenté sur la figure ci-dessous.

- Déterminer l'énergie cinétique du système $(\boldsymbol{T})$. (2 pts)
- Déterminer l'énergie potentielle du système $(\boldsymbol{V})$ en négligeant la pesanteur **;** (1 pts)
- *(en équilibre statique la tige est horizontale et son poids est compensé).*
- Déterminer la fonction de dissipation $(\boldsymbol{D})$. (1 pts)
- Trouver l'équation différentielle de mouvement. (3 pts)
- Calculer la pulsation propre ω_n et le coefficient d'amortissement critique $\boldsymbol{c_c}$. (1 pts)
- Ecrire la réponse libre si $\theta(0) = \theta_0$ et sans vitesse initiale. (4 pts)
- La barre est maintenant soumise à un moment harmonique $M(t) = 100 \sin 10t$, déterminer la réponse forcée $\theta_p(t)$. (4 pts)

- $L = 1\, m$
- $AB = BC = L/2$
- $c = 4\, N.s/m$
- $k = 100\, N/m$
- $m = 1\, kg$
- $M = m$ (masses).

Le moment d'inertie massique d'une barre de longueur l et de masse m par rapport à son centre de gravité est :
$I_G = \frac{1}{12} ml^2$



Solution :

Le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe de rotation passant par A.

$$I_A = I_G + M\overline{AG}^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Comme $M = m$

$$I_A = \frac{1}{3}mL^2$$

L'énergie cinétique de la barre M (T_M)

$$T_M = \frac{1}{2}I_A\dot{\theta}^2$$

$$T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie cinétique de la masse m (T_m)

$$T_m = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie cinétique du système (T)

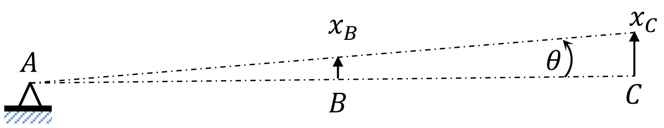
$$T = T_M + T_m$$

$$T = \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{2}{3}mL^2\dot{\theta}^2$$

Les déplacements x_B et x_C en fonction de l'angle de rotation θ.

$$\theta\ est\ faible \Longrightarrow \sin\theta \cong \theta\ \ et\ \ \cos\theta \cong 1$$



$$x_B = \overline{AB}\ \sin\theta \cong \frac{1}{2}L\theta$$

$$\dot{x}_B = \frac{1}{2}L\dot{\theta}$$

$$x_C = \overline{AC}\ \sin\theta \cong L\theta$$

L'énergie potentielle du système (V).

$$V = \frac{1}{2}kx_B^2$$

$$V = \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}L\theta\right)^2$$

$$V = \frac{1}{8}kL^2\theta^2$$

La fonction de dissipation (D).

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}_B^2$$

$$D = \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{2}L\dot{\theta}\right)^2$$

$$D = \frac{1}{8}cL^2\dot{\theta}^2$$

1ère Méthode

Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}=F_i \quad ; \quad i=1,2,\ldots$$

Pour notre cas $i=1$, $q_1=\theta$ et $F_1=0$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}+\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=0.$$

$$T=\frac{2}{3}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=\frac{4}{3}mL^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)=\frac{4}{3}mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=0$$

$$V=\frac{1}{8}kL^2\theta^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}=\frac{1}{4}kL^2\theta$$

$$D=\frac{1}{8}cL^2\dot{\theta}^2$$

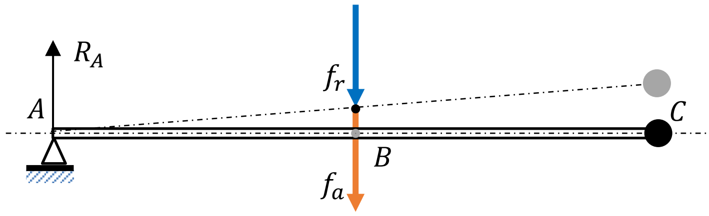
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=\frac{1}{4}cL^2\dot{\theta}$$

L'équation de mouvement

$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\theta}+\frac{1}{4}cL^2\dot{\theta}+\frac{1}{4}kL^2\theta=0$$

2ème Méthode

Détermination de l'équation de mouvement par l'application de la seconde loi de Newton.



Représentation des forces appliquées sur la barre (force d'amortissement, force de rappels,).

	Les forces appliquées	**Les moments par rapport au centre de rotation A**
La force de rappel	$f_r = kx_B = k\frac{L}{2}\theta$	$\mathcal{M}_{f_r/A} = -k\frac{L}{2}\theta \times \frac{L}{2} = -\frac{1}{4}kL^2\theta$
La force d'amortissement	$f_a = c\dot{x}_B = c\frac{L}{2}\dot{\theta}$	$\mathcal{M}_{f_a/A} = -c\frac{L}{2}\dot{\theta} \times \frac{L}{2} = -\frac{1}{4}cl^2\dot{\theta}$
La réaction du support	R_A (Inconnue)	$\mathcal{M}_{R/A} = 0$

Isoler la barre et appliquer la loi de la dynamique.

Somme des moments par rapport au point de rotation A est égale au moment d'inertie massique par rapport à A multiplier par l'accélération angulaire

L'équation de mouvement libre

$+\circlearrowleft \mathcal{M}_{f_i/A} = I_A\ddot{\theta}$

$I_A = I_A(M) + I_A(m)$

$I_A = \frac{1}{3}mL^2 + mL^2$

$I_A = \frac{4}{3}mL^2$

$-\frac{1}{4}kL^2\theta - \frac{1}{4}cL^2\dot{\theta} = \frac{4}{3}mL^2\ddot{\theta}.$

$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\theta} + \frac{1}{4}cL^2\dot{\theta} + \frac{1}{4}kL^2\theta = 0$

L'équation de mouvement libre

$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\theta}+\frac{1}{4}cL^2\dot{\theta}+\frac{1}{4}kL^2\theta=0$$

Récrire sous forme :

$$\ddot{\theta}+2\xi\omega_n\dot{\theta}+\omega_n^2\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{cL^2}{mL^2}\dot{\theta}+\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{kL^2}{mL^2}\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{3}{16}\frac{c}{m}\dot{\theta}+\frac{3}{16}\frac{k}{m}\theta=0$$

La pulsation propre ω_n

$$\omega_n^2=\frac{3}{16}\frac{k}{m} \quad \Longrightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{3}{16}\frac{k}{m}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2}{9}\frac{100}{1}}=\frac{10\sqrt{3}}{4}=4{,}33\ rad/s$$

Le coefficient d'amortissement critique c_c

$$2\xi\omega_n=\frac{3}{16}\frac{c}{m}$$

$$\xi=\frac{3}{32}\frac{c}{m}\frac{1}{\omega_n}=\frac{1}{2}\frac{3}{16}\frac{c}{m}\sqrt{\frac{16}{3}\frac{m}{k}}=\frac{\sqrt{3}c}{8\sqrt{km}}=\frac{c}{8/\sqrt{3}\sqrt{km}}$$

$c=c_c$ pour $\xi=1$

$$\boldsymbol{c_c}=8\sqrt{\frac{km}{3}}$$

$$\boldsymbol{c_c}=8\sqrt{\frac{100\times 1}{3}}=\frac{80}{\sqrt{3}}=46{,}19\ N.s/m$$

$$\xi==\frac{c}{8/\sqrt{3}\sqrt{km}}=\frac{4}{8/\sqrt{3}\sqrt{100\times 1}}=\frac{4}{80/\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{20}=0{,}0866$$

Réponse libre

Ecrire la réponse libre si $\theta(0) = \theta_0$ et sans vitesse initiale.
D'après les données $c = 4\, N.s/m$ qui est inférieur à $\boldsymbol{c_c}$, le système est sous amorti.

Les conditions initiales sont : $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$

L'expression de la réponse est donnée par :

$$\theta(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\}$$

L'expression de la vitesse est donnée par :

$$\dot{\theta}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\} + e^{-\xi\omega_n t}\{-A_{1\omega_d} \sin\omega_d t + A_2\, \omega_d \cos\omega_d t\}$$

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \Longrightarrow \quad e^0\{A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0\} = \theta_0 \quad \Longrightarrow \quad A_1 = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\xi\omega_n e^0\{A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0\} + e^0\{-A_1\, \omega_d \sin 0 + A_2\, \omega_d \cos 0\} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad -\xi\omega_n A_1 + A_2\omega_d = 0 \Longrightarrow \quad A_2 = \frac{\xi\omega_n\theta_0}{\omega_d}$$

$$\theta(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left\{\theta_0 \cos\omega_d t + \frac{\xi\omega_n\theta_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right\}$$

Réponse forcée

La barre est maintenant soumise à un moment harmonique $M(t) = 100 \sin 10t$, la réponse forcée $\theta_p(t)$.

$M_0 = 100\ \ N \cdot m$, et $\Omega = 10\, rad/s$

$$\frac{4}{3} mL^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{4} cL^2 \dot{\theta} + \frac{1}{4} kL^2 \theta = M_0 \sin \Omega t$$

$$I_e \ddot{\theta} + c_e \dot{\theta} + k_e \theta = M_0 \sin \Omega t$$

La réponse forcée $\theta_p(t)$ est donnée par :

$$\theta_p(t) = \Theta\, sin(\Omega t - \alpha)$$

$$\theta_p(t) = \frac{\Theta_0}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} sin(\Omega t - \alpha)$$

avec $\Theta_0 = \frac{\mathrm{M}_0}{k_e} = \frac{\mathrm{M}_0}{\frac{1}{4} kL^2} = \frac{4\mathrm{M}_0}{kL^2}$

$$\Theta_0 = \frac{4 \times 100}{100 \times 1^2} = 4\, rad$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} kL^2}{\frac{4}{3} mL^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 100}{16 \times 1}} = 4{,}33\, rad/s$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{10}{4{,}33} = 2{,}31$$

$$\Theta = \frac{\Theta_0}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{4}{\sqrt{(1 - 2{,}31^2)^2 + (2 \times 0{,}0866 \times 2{,}31)^2}} = 0{,}92\, rad$$

L'angle de phase

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{(1 - 2{,}31^2)}{2 \cdot 0{,}0866 \cdot 2{,}31}\right) = -1{,}4788$$

Le retard de phase doit être en 0 et π

$$\alpha = -1{,}479 + \pi = 1{,}663\, rad$$

La réponse forcée est donc :

$$\theta_p(t) = 0{,}92\, sin(10t - 1{,}663\,)$$